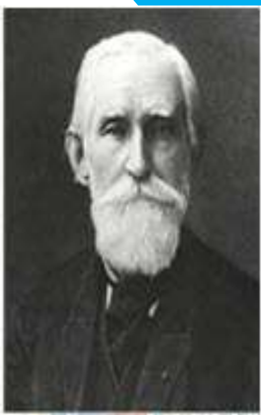
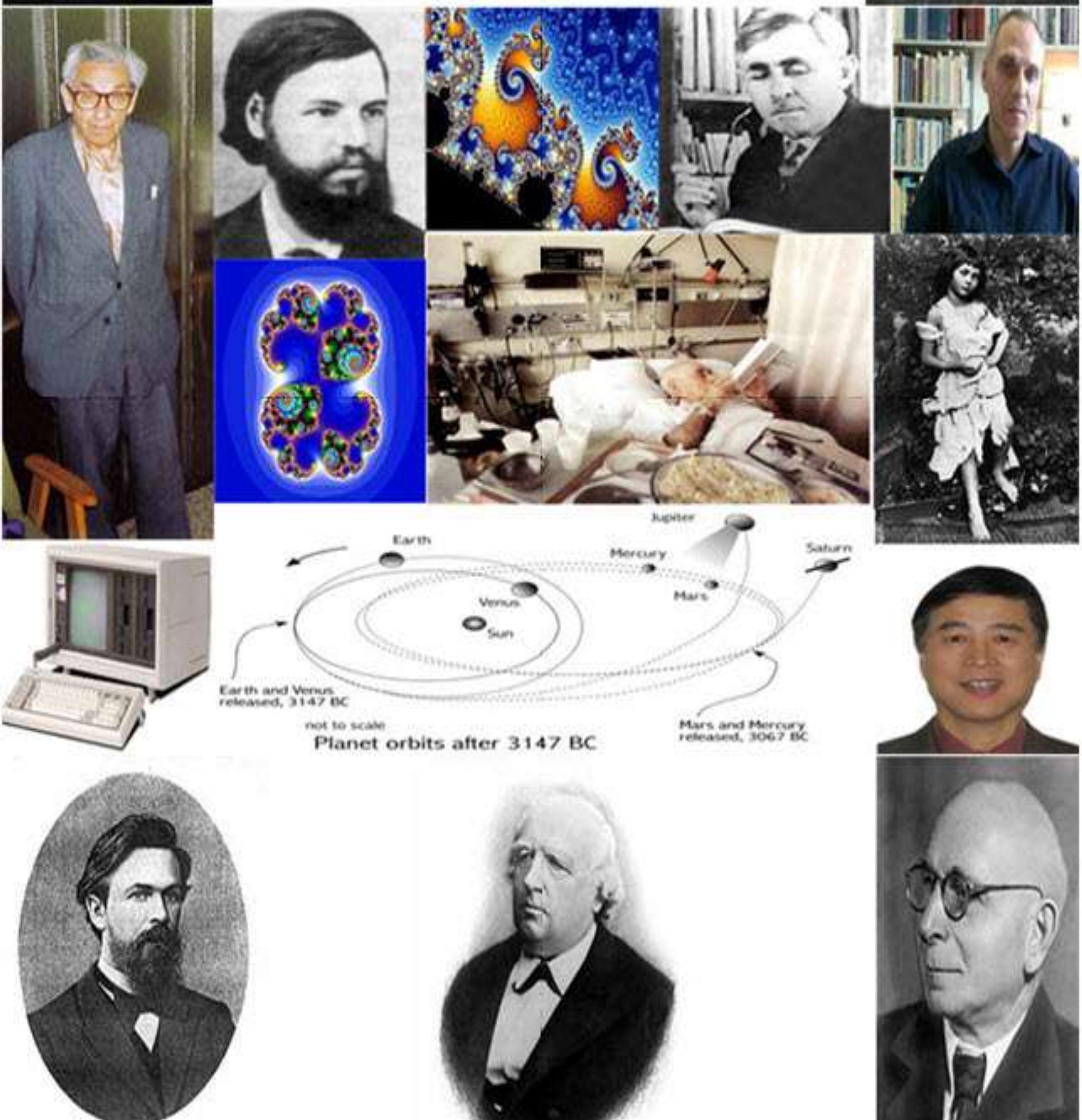
دانشگاه تربیت مدرس

زمستان ۱۳۹۴ خورشیدی



حل تشریحی مسایل

نظریه تقریب



قرآن حکیم، سوره نور آیه ۳۵

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

زمستان ۱۳۹۴ خورشیدی

دیباچه

تقدیم به... وینان ستارگان راه اند و مقتدا

گرچه در آخرین روزهای زمستان

به پایان حیات رسید ولی دری به خانه خورشید گشود

این نسک نیز در آخرین روزهای زمستان به پایان نگارش رسیده است

، امید که این نیز ،

رهنمای راهیان طریق واقع گردد و جویای علم را به بوستان دانش رهگشاید

متن حاضر بخشی از طرحی مرتبط با نظریه تقریب و مسایل پیچیده محاسباتی است که طیف وسیعی ازمسایل ریاضی، زیست، شیمی، فیزیک، مکانیک، برق، کامپیوتر، عمران، اقتصاد و... در بر می گیرد.
پس برای دستیابی به چنین اهدافی ،بایستی با تفکری پیگیر و تلاشی مستمر، گام به گام پیش برویم.
زین روی در اینجا با مباحث مقدماتی آغاز کرده ایم (حتی چنین مبحث مقدماتی نیز چندان راحت نیست.)
برای (مقدمات) درس نظریه تقریب چند کتاب بسیار حائزاهمیت اند که کتاب زیر از این جمله است؛

Rivlin,T.J., "An Introduction to the Approximation of Function" (Blaisdell 1969) (vii + 150 pp. $7.50)

و در متون آینده سعی بر ارتقای مباحث خواهیم کرد.

اول ز تحت و فوق وجودم خبر نبود
در مکتب غم تو چنین نکته دان شدم
حافظ

فصل یکم.

Ch1...Rivlin...E1...p43.

If $f(x)$ is an even (odd) function on $[-a,a]$ that has a best approximation, show that it has a best approximation that is also even (odd).

پاسخ.

فرض که $p_n^*(x)$ بهترین تقریب (یکنواخت) برای تابع زوج f بر $[-a,a]$ باشد. لذا،

$$\max_{x\in[-a,a]}|f(x)-p_n^*(x)|=\max_{-x\in[-a,a]}|f(-x)-p_n^*(-x)|\overset{(f\ is\ even)}{=}\max_{x\in[-a,a]}|f(x)-p_n^*(-x)|$$

پس $p_n^*(-x)$ نیز بهترین تقریب یکنواخت برای f است. از سویی بهترین تقریب یکتاست، لذا داریم:

$\forall x\in[-a,a]: p_n^*(-x)=p_n^*(x)$ و این یعنی $p_n^*(x)$ تابع زوجی می باشد.

حال فرض که $p^*(x)$ بهترین تقریب (یکنواخت) برای تابع فرد f بر $[-a,a]$باشد. لذا،

$$\max_{x\in[-a,a]}|f(x)-p_n^*(x)|=\max_{-x\in[-a,a]}|f(-x)-p_n^*(-x)|\overset{(f\ is\ odd)}{=}\max_{x\in[-a,a]}|-f(x)-p_n^*(-x)|=\max_{x\in[-a,a]}|f(x)-(-p_n^*(-x))|$$

پس $-p_n^*(-x)$ نیز بهترین تقریب برای f است، لذا حکم ثابت می شود.

Ch1...Rivlin...E2...p43.

If $[c,d]\subseteq[a,b]$, show that $\omega(f;[c,d];\delta)\le\omega(f;[a,b];\delta)$.

پاسخ.

$$\omega(f;[c,d];\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in[c,d]\\|x_1-x_2|\le\delta}}|f(x_1)-f(x_2)|\underset{\substack{\uparrow\\ [c,d]\subseteq[a,b]}}{\le}\sup_{\substack{x_1,x_2\in[c,d]\\|x_1-x_2|\le\delta}}|f(x_1)-f(x_2)|=\omega(f;[a,b];\delta)$$

Ch1...Rivlin...E3...p43.

If f is an even function on [-a,a], show that $\omega(f;[-a,a];\delta)=\omega(f;[0,a];\delta)$.

[Hint: Suppose that $x_1,x_2\in[-a,a], x_1\ge 0, x_2<0, \left|x_1-x_2\right|\le\delta,$ *then*

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f(x_1)-f(-x_2)\right|$ *and* $\left|x_1+x_2\right|\le\delta$.*]*

پاسخ.

بنا بر تمرین ۲-۱، همواره داریم: $\omega(f;[0,a];\delta)\le\omega(f;[-a,a];\delta)$

پس کافی است ثابت کنیم که $\omega(f;[0,a];\delta)\ge\omega(f;[-a,a];\delta)$. لذا سه حالت زیر امکان دارد:

الف) $0\le x_1,x_2\le a$ و $\left|x_1-x_2\right|\le\delta$ درنظر می گیریم:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\sup_{\substack{\alpha,\beta\in[0,a]\\ \left|\alpha-\beta\right|\le\delta}}\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|=\omega(f;[0,a];\delta)$$

ب) $-a\le x_1,x_2\le 0$ و $\left|x_1-x_2\right|\le\delta$ درنظر می گیریم:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\overset{f\text{ is even}}{=}\left|f(-x_1)-f(-x_2)\right|\overset{\substack{\left|-x_1-(-x_2)\right|\le\delta\\ -x_1,-x_2\in[0,a]}}{\le}\sup_{\substack{\left|\alpha-\beta\le\delta\right|\\ \alpha,\beta\in[0,a]}}\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|=\omega(f;[0,a];\delta)$$

پ) $0\le x_1\le a$ و $-a\le x_2<0$ (به عبارتی $0<-x_2\le a$) و $\left|x_1-x_2\right|\le\delta$ درنظر می گیریم:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\overset{f\text{ is even}}{=}\left|f(-x_1)-f(-x_2)\right|\underset{\uparrow}{\le}\sup_{\substack{\left|\alpha-\beta\le\delta\right|\\ \alpha,\beta\in[0,a]}}\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|=\omega(f;[0,a];\delta)$$

$$\boxed{\left|x_1-x_2\right|\le\delta\xrightarrow{(x_2<0\le x_1)}0\le x_1-x_2\le\delta\Rightarrow 0\le x_1\le x_2+\delta\underset{(x_2<0)}{<}\delta\Rightarrow-\delta\underset{\substack{\uparrow\\ 0\le x_2+\delta}}{\le}x_2\le x_1+x_2<x_2+\delta\underset{(x_2<0)}{<}\delta\Rightarrow\left|x_1+x_2\right|\le\delta\Rightarrow\underset{\substack{0\le x_1\le a\\ 0\le -x_2\le a}}{\left|x_1-(-x_2)\right|\le\delta}}$$

پس برای هر $x_1,x_2\in[-a,0]$ و $x_2<x_1$ که $\left|x_1-x_2\right|\le\delta$، داریم: $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\omega(f;[0,a];\delta)$.

حال با sup گیری، داریم: $\omega(f;[-a,a];\delta)\le\omega(f;[0,a];\delta)$.

Ch1...Rivlin...E4...p43.

If $x=\cos(\theta)$, $-1\le x\le 1$, and $g(\theta)=f(\cos\theta)$, show that

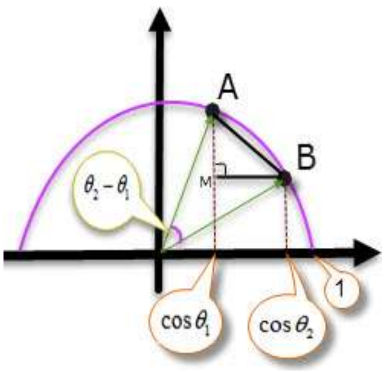
$$\omega(g;[-\pi,\pi];\delta)=\omega(g;[0,\pi];\delta)\le\omega(f;[-1,1];\delta)$$

پاسخ.

چون g تابع زوجی است، تساوی، بنابر تمرین ۳-۱، برقرار است. حال برای نامساوی فوق داریم:

$$\omega(g;[0,\pi];\delta)=\sup_{\substack{\theta_1,\theta_2\in[0,\pi]\\|\theta_1-\theta_2|\le\delta}}\left|g(\theta_1)-g(\theta_2)\right| \quad \text{و}$$

$$\omega(f;[-1,1];\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in[-1,1]\\|x_1-x_2|\le\delta}}\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\sup_{\substack{\theta_1,\theta_2\in[0,\pi]\\|\cos\theta_1-\cos\theta_2|\le\delta}}\left|f(\cos\theta_1)-f(\cos\theta_2)\right|=\sup_{\substack{\theta_1,\theta_2\in[0,\pi]\\|\cos\theta_1-\cos\theta_2|\le\delta}}\left|g(\theta_1)-g(\theta_2)\right|$$



برای کامل شدن اثبات، کافی است نشان دهیم:

$$\forall\ \theta_1,\theta_2\in[0,\pi]:\ |\theta_1-\theta_2|\le\delta\Rightarrow|\cos\theta_1-\cos\theta_2|\le\delta$$

بدون خلل به کلیت، فرض که $0\le\theta_2\le\theta_1\le\pi$. پس داریم:

$$\theta_1-\theta_2\le\delta\Rightarrow \overset{\frown}{AB}\le\delta\ \xrightarrow{\overline{AB}<\overset{\frown}{AB}}\ \overline{AB}\le\delta\ \xrightarrow{\overline{MB}<\overline{AB}}\ \overline{MB}<\delta\Rightarrow 0\le\cos\theta_2-\cos\theta_1<\delta\Rightarrow|\cos\theta_1-\cos\theta_2|<\delta$$

Ch1...Rivlin...E5...p43.

If $f(x)$ has period T, show that $\omega(f;[a,a+T];\delta)$ is independent of a.

پاسخ.

چون f متناوب با دوره تناوب T می‌باشد پس $\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=f(x\pm k)=f(x\pm 2k)=\dots\quad(*)$

عدد a هرچه باشد می‌توان $k\in\mathbb{Z}$ را پیدا کرد به طوری که $kT\le a<(k+1)T$. پس a را می‌توان به صورت زیر بنویسیم:

$$a=kT+\alpha,\quad k\in\mathbb{Z},\alpha\in[0,T)\qquad(**)$$

از طرفی، $\omega(f;[a,a+T];\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in[a,a+T]\\|x_1-x_2|\le\delta}}\left|f(x_1)-f(x_2)\right|$. پس هر $x_i\in[a,a+T]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_i=a+\alpha_i,\quad \alpha_i\in[0,T],\qquad(***)$$

لذا از $(**)$ و $(***)$ داریم:

$$\omega(f;[a,a+T];\delta)=\sup_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in[0,T]\\|\alpha_1-\alpha_2|\le\delta\\\alpha\in[0,T]}}\left|f(kT+\alpha+\alpha_1)-f(kT+\alpha+\alpha_2)\right|\overset{(*)}{=}\sup_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in[0,T]\\|\alpha_1-\alpha_2|\le\delta\\\alpha\in[0,T]}}\left|f(\alpha+\alpha_1)-f(\alpha+\alpha_2)\right|$$

که رابطه فوق مستقل از a می‌باشد.

Ch1...Rivlin...E7...p43.

Suppose that $g(x)=f(Ax+B)$ for $c\le x\le d$; Show that $\omega(g;[c,d];\delta)=\omega(f;[Ac+B,Ad+B];A\delta)$

پاسخ.

Ch1...Rivlin...E8...p44.

If $|f'(x)|\le M$ on $c\le x\le d$, show that $\omega(f;[a,b];\delta)\le M\delta$.

پاسخ.

چون $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(x)(x_2-x_1)| \quad \rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\ \ x\in[c,d]$.

لذا

$$\omega(f;[c,d];\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in[c,d]\\ |x_1-x_2|\le\delta}}|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_2-x_1|\le M\delta .$$

Ch1...Rivlin...E6...p43.

Show that $\cos k\theta$ is a polynomial of degree k in $\cos\theta$.
What is the coefficient of $(\cos\theta)^k$?

[*Hint*: $\cos k\theta = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^k$.]

پاسخ.

دوجمله‌ای $(\cos\theta + i\sin\theta)^k$ را بسط می دهیم و قسمت حقیقی آن را بررسی می کنیم؛

$$\cos k\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^k\right) = \mathrm{Re}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\cos\theta)^{k-j}\left(i\sin\theta\right)^j$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{i^j = \overbrace{\begin{cases} i^{2t} = \pm 1 \\ i^{2t+1} = \pm i \end{cases}, t = 0,1,2,\ldots}}$$

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ \&\ even}}^{2[\frac{k}{2}]}\binom{k}{j}(\cos\theta)^{k-j}(\mp\sin\theta)^j \underset{\begin{pmatrix} even \to + \\ odd \to - \end{pmatrix}}{\overset{(s := \frac{j}{2})}{=}} \sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2s}(\cos\theta)^{k-2s}(\mp\sin\theta)^{2s} = \sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^s\binom{k}{2s}(\cos\theta)^{k-2s}(1-\cos^2\theta)^s$$

$$= \sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2s}(\cos\theta)^{k-2s}(\cos^2\theta - 1)^s, \quad \leftrightarrow \quad \cos^k\theta \text{ ضریبِ} = \sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2s}$$

Ch1...Rivlin...E9...p44.

Show that $E_n(f;[a,b]) = E_n(f-p;[a,b])$ for all $p \in P_n$.
If p_n^* is a best approximation to f out of P_n, then $p_n^* - p$ is a best approximation to $f-p$ out of P_n, for $p \in P_n$.

پاسخ.

بر بازه $[a,b]$ فرض که $p_n^*(x)$ بهترین تقریب یکنواخت تابع f برفضای P_n باشد وهمچنین $p_{n_p} \in P_n$ بهترین تقریب یکنواخت تابع $(f-p)$ ، برای هر $p \in P_n$ ، باشد. لذا

$$E_n(f;[a,b]) = \max_{a \le x \le b}\left|f(x) - p_n^*(x)\right| < \max_{a \le x \le b}\left|f(x) - q(x)\right|, \ \forall q \in P_n \setminus \{p_n^*\}$$

$$\forall p \in P_n\ ,\ E_n(f-p;[a,b]) = \max_{a \le x \le b}\left|f(x) - p(x) - p_{n_p}^*(x)\right| < \max_{a \le x \le b}\left|f(x) - p(x) - q(x)\right|, \ \forall q \in P_n \setminus \{p_{n_p}^*\}$$

حال نشان می دهیم که $E_n(f) = E_n(f-p)$, $\forall p \in P_n$.

حالت $\le$: (علامت $\le$ اتخاذ شده است نه $<$ زیرا ممکن است $p_n^* = p + p_{n_p}^*$ باشد.)

در اولین رابطه فوق قرار دهیم $q(x) = p(x) + p_{n_p}^*(x)$ پس $E_n(f) \le E_n(f-p)$.

حالت $\ge$: (علامت $\ge$ اتخاذ شده است نه $>$ زیرا ممکن است $p_{n_p}^* = p_n^* - p$ باشد.)

در دومین رابطه بالا قرار دهیم $q(x) = p_n^*(x) - p(x)$ پس $E_n(f-p) \le E_n(f)$.

چون تساوی برقرار شده پس رابطه $p_{n_p}^* = p_n^* - p$ نیز برقرار است. لذا به ازای هر $p \in P_n$ ، $p_n^* - p$ بهترین تقریب تابع $f-p$ است.

Ch1...Rivlin...E10...p44.

If $f''(x)>0$ for all $x\in[a,b]$ (so that f is convex), show that a best approximation of degree at most *one* to $f(x)$ is

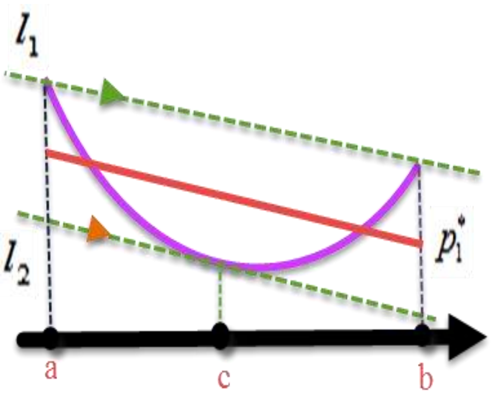
$$p_1^*(x)=\frac{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(b-a)}{2(b-a)}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-c)$$

and $$E_n(f;[a,b])=\frac{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)-f(c)(b-a)}{2(b-a)}$$

where c is the unique solution (in $[a,b]$) of $f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)$.

پاسخ.

طبق CAT (Chebyshev Alternative Theorem) برای اینکه خط $p_1^*(x)$ بهترین تقریب f باشد، کافی است مجموعه‌ای تناوبی شامل ۳ نقطه برای $f-p_1^*$ تعیین کنیم.



روش یکم.

فرض کنه l_1 خط گذرنده از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ باشد.

تابع محدب f در $[a,b]$ ، کاملاً زیر خط l_1 قرار می‌گیرد.

($\forall\lambda\in[0,1]: f(\lambda a+(1-\lambda)b)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$)

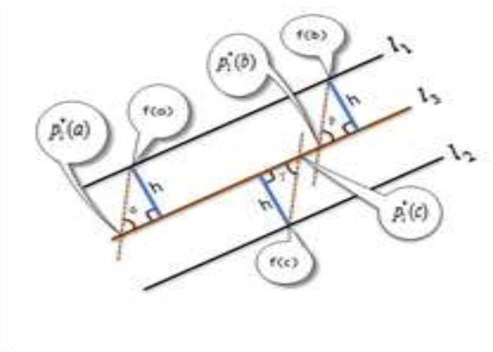
بنابر قضیه مقدار میانگین، $\exists c\in(a,b): f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

اگر خط l_2 گذرنده از نقطه $(c,f(c))$ و شیب $f'(c)$ تعریف کنیم، در این صورت l_2 موازی l_1 می‌باشد.

حال خط میانگین (وسط) بین l_1 و l_2 درنظر می‌گیریم.

ادعا: خط فوق قطعاً $p_1^*(x)$ می‌باشد:

صحت ادعا: می‌خواهیم ثابت کنیم که $\{a,c,b\}$ مجموعه تناوبی برای $f-p_1^*$ می‌باشد.



زیرا با توجه به شکل مقابل، طبق قضیه خطوط موازی و مورب، زاویه‌های α و β و γ به‌وجود آمده در مثلث‌ها با هم برابرند (هر سه مثلث باهم همنهشت‌اند [زض زا]) و در نتیجه داریم:

طول وترمثلث‌ها $=|f(a)-p_1^*(a)|=|f(c)-p_1^*(c)|=|f(b)-p_1^*(b)|$

و در واقع داریم:

$$f(a)-p_1^*(a)=-\left(f(c)-p_1^*(c)\right)=f(b)-p_1^*(b)=E_1(f,[a,b])$$

حال معادله خط $p_1^*(x)$ ، که وسط l_1 و l_2 است، راتعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} l_1: y-f(b)=f'(c)(x-b)\ \Rightarrow\ y=f'(c)x+\left(f(b)-b\,f'(c)\right)\\ l_2: y-f(c)=f'(c)(x-c)\ \Rightarrow\ y=f'(c)x+\left(f(c)-c\,f'(c)\right)\end{array}\right|\rightarrow p_1^*(x)=f'(c)x+\left(\frac{f(b)+f(c)}{2}-\frac{b+c}{2}f'(c)\right)$$

$$\Rightarrow p_1^*(x)=f'(c)(x-c)+\left(\frac{f(b)+f(c)}{2}+\frac{c-b}{2}f'(c)\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-c)+\left(\frac{f(b)+f(c)}{2}\frac{(c-b)\left(f(b)-f(a)\right)}{2(b-a)}\right)$$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-c)+\left(\frac{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(b-a)}{2(b-a)}\right),$$

$$E_1(f;[a,b])=p_1^*(c)-f(c)=\frac{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(b-a)}{2(b-a)}-\frac{f(c)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{f(a)(b-c)+f(b)(c-a)-f(c)(b-a)}{2(b-a)}$$

Ch1...Rivlin...E12...p44.

If $f^{(n+1)}(x)$ exists and is never zero in $[a,b]$ and p_n^* is a best approximation to f, show that $f(x)-p_n^*(x)$ has a unique alternating set $x_0,...,x_{n+1}$ and $x_0=-1$, $x_{n+1}=1$.

پاسخ. (با فرض $[a,b]:=[-1,1]$)

بنابر بهترین تقریب یکنواخت بودن، تابع $e(x)\equiv f(x)-p_n^*(x)$ حداقل در نقاط متمایز $x_1,...x_n$ فرینه نسبی (موضعی) دارد که این نقاط در بازه $(-1,1)$ قرار دارند.

حال فرض خلف که $-1 \underset{\neq}{<} x_0$ و $x_{n+1} \underset{\neq}{<} 1$ باشد؛

پس $e(x)$ حداقل در $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه، فرینه نسبی دارد یعنی $e'(x)$ حداقل در $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه، ریشه دارد. بنابر قضیه رل، $e''(x)$ حداقل در $\underline{\underline{n}}$ نقطه، ریشه دارد و با ادامه همین روند و باتوجه به فرض مساله (که $f^{(n+1)}(x)$ موجود و p_n^* چندجمله ای است) پس $e^{(n+1)}(x)$ موجود و بر بازه $[-1,1]$ همگی $e^{(i)}(x)$, $i=0,...,n,$ پیوسته اند و با استفاده از قضیه رل در هر مرحله، داریم: $e^{(n+1)}(x)$ بر $[-1,1]$ حداقل $\underline{۱}$ ریشه دارد (مانند α). پس $e^{(n+1)}(\alpha)=0$.

از طرفی p_n^* چندجمله ای (حداکثر) از درجه n است که نتیجه می شود که $\underset{(\alpha\in(a,b))}{f^{(n+1)}(\alpha)=0}$. (تناقض)

حال در صورتی که این جموعه تناوبی، یکتا نباشد؛

پس حداقل $t\in(-1,1)$ ای وجود دارد که $t \neq \underset{i=0,...,n+1}{x_i}$ و تابع $e(x)$ در t دارای فرینه نسبی می باشد.

لذا ،باز هم مشابه قسمت قبل، حداقل $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه ی t و x_1 و ...و x_n وجودند که ریشه $e'(x)$ می باشند و...

و به همان صورت به تناقض می رسیم.

Ch1...Rivlin...E13...p44.

Suppose that $q\in P_n$, $f\in C[a,b]$, and $f(x_j)-q(x_j)=(-1)^j A_j$ with $A_j>0$, $j=0,...,n+1$.

Prove that $E_n(f)\geq\min\{A_0,...,A_{n+1}\}$.

پاسخ.

اگر q بهترین تقریب یکنواخت برای f بر $[a,b]$ باشد، بنابر **CAT** ، حکم ثابت می شود.

پس q را بهترین تقریب فرض نمی کنیم:

روش یکم. (Dzyadik,V.K.,Shevchuk,I.A. pp.)

فرض خلف که $E_n(f;[a,b])<\min\{A_0,...,A_{n+1}\}$ باشد لذا $\left|f(x_j)-p_n^*(x_j)\right| \underset{\neq}{<} \left|f(x_j)-q(x_j)\right|, \forall j=0,...,n+1$

که $p_n^*\in P_n$ بهترین تقریب یکنواخت f بر $[a,b]$ می باشد.

از طرفی هم ، $p_n^*(x_j)-q(x_j)=[f(x_j)-q(x_j)]-[f(x_j)-p_n^*(x_j)]$ را داریم.

پس نتیجه می شود که $p_n^*(x_j)-q(x_j)$ و $f(x_j)-q(x_j)$ هم‌علامت هستند $\forall j=0,...,n+1$. این یعنی $p_n^*(x)-q(x)$ لااقل در $n+1$ نقطه تغییرعلامت می دهد (یعنی $n+1$ صفر گره‌ای دارد.) و چون این چندجمله‌ای حداکثر از درجه n می باشد لذا باید، $p_n^*(x)\equiv q(x)$ بر $[a,b]$ شود. (که این تناقض است.)

روش دوم.

Ch1...Rivlin...E14...p44.

Show that $T_k(x)$ is even for even k and odd for odd k.

پاسخ.

$$T_k(-x) = T_k(-\cos\theta) = T_k(\cos(\theta+\pi)) = \cos k(\theta+\pi) = \begin{Bmatrix} \cos k\theta, & k \ is\, even \\ -\cos k\theta, & k \ is\, odd \end{Bmatrix} = \begin{cases} T_k(x) \\ -T_k(x) \end{cases}$$

Ch1…Rivlin…E15…p44.

Find the best approximation to x^{n+2} out of P_n.

پرسش.ن. اشتباه روش زیر چیست؟

" بنا به قضیه ۹ـ۱،هرگاه $p_n^*(x)$ بهترین تقریب برای f بر $[-1,1]$ باشد آنگاه $x^{n+1}-p_n^*(x)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$.
لذا به کمک این قضیه، ثابت می کنیم:

$$x^{n+2}-p_n^*(x)=\tfrac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x) \quad \text{و} \quad E_n(x^{n+1};[-1,1])=\frac{1}{2^{n+1}}$$

ابتدا تابع $e(x)=\frac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x)$ $\left(x^{n+2}-p_n^*(x)=\right)$ درنظر می گیریم.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in[-1,1]:\left|T_{n+2}(x)\right|\le 1 \;\Rightarrow\; \forall x\in[-1,1]:\left|e(x)\right|\le \frac{1}{2^{n+1}}\\ T_{n+2}(1)=1 \;\Rightarrow\; e(1)=\frac{1}{2^{n+1}}\end{array}\right|\Rightarrow \|e\|_\infty=\frac{1}{2^{n+1}}$$

حال نقاط $\eta_j=\cos(\frac{j\pi}{n+2})\ ,\ j=0,1,\dots,n+2.$ در نظر می گیریم.

$$e(\eta_j)=\frac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}\cos(\tfrac{j\pi}{n+2})=\frac{1}{2^{n+1}}\cos j\pi=(-1)\frac{1}{2^{n+1}}\ \ ,\ j=0,1,\dots,n+2.$$

پس داریم: $\forall j=0,1,\dots,n:\quad e(\eta_j)=-e(\eta_{j+1})$ و $\left|e(\eta_j)\right|=\frac{1}{2^{n+1}}=\|e\|$

لذا $\{\eta_0,\eta_1,\dots,\eta_{n+1}\}$ مجموعه‌ای تناوبی برای $e(x)\left(=x^{n+2}-p_n^*(x)=\frac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x)\right)$ است.

و این یعنی $p_n^*(x)=x^{n+2}-\frac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x)$ بهترین تقریب یکنواخت برای $f(x)=x^{n+2}$ بر $[-1,1]$ است."

پاسخ.

بنا به قضیه ۹ـ۱،هرگاه $p_n^*(x)$ بهترین تقریب برای f بر $[-1,1]$ باشد آنگاه $x^{n+1}-p_n^*(x)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$.
لذا به کمک این قضیه، می توان نوشت؛

$$x^{n+1}-p_n^*(x)=\tfrac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$$
$$x^{n+2}-p_{n+1}^*(x)=\tfrac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x)$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}\ x^{n+2}-p_n^*(x)+\underbrace{x^{n+1}-p_{n+1}^*(x)}_{\in P_{n+1}}=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)+\frac{1}{2^{n+1}}T_{n+2}(x)$$

$$\Rightarrow\ x^{n+2}-p_n^*(x)+0=\frac{1}{2^n}\left(T_{n+1}(x)+\tfrac{1}{2}T_{n+2}(x)\right)$$

$$\Rightarrow\ x^{n+2}-p_n^*(x)=\frac{1}{2^n}\left(T_{n+1}(x)+\frac{1}{2}\{2xT_{n+1}(x)-T_n(x)\}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(T_{n+1}(x)+xT_{n+1}(x)-\frac{1}{2}T_n(x)\right)$$

$$=\frac{(x+1)}{2^n}T_{n+1}(x)-\frac{1}{2^{n+1}}T_n(x)$$

(Economization Problems)

پرسش.ن. بهترین تقریب یکنواخت برای تابع x^{n+3} برفضای P_n روی بازه $[-1,1]$ را بیابید.

پرسش.ن. بهترین تقریب یکنواخت توابع زیر را مورد بحث قرار دهید:

الف) تابع $\Gamma(\alpha)$ بر فضای P_n روی $(0,\infty)$ ، که n عددی طبیعی مفروضی است.

ب) تابع $x^{\alpha+1}$ بر فضای P_α روی $[-1,1]$ ،که α عددی گویای مفروضی باشد.

ج) تابع $\Gamma(\alpha)$ بر فضای $P_{\alpha-1}$ روی $(0,\infty)$ ، که α عددی طبیعی مفروضی است.

Ch1...Rivlin...E16...p44.

Verify that the Chebyshev polynomials have the following properties:

(a) $(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$.

[Use this result to verify the expression for $T_n^{(k)}(1)$ given in (1.1.22).]

(b) Three-term recurrence $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\ n=2,3,...$.

(c) Orthogonality

$$\int_{-1}^{1}T_k(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ m\neq k$$

$$\int_{-1}^{1}T_k^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & k>0\\ \pi, & k=0\end{cases}$$

(d)
$$\tfrac{1}{2}T_k(1)T_m(1)+\sum_{j=1}^{n-1}T_j(\eta_j)T_m(\eta_j)+\tfrac{1}{2}T_k(-1)T_m(-1)=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ \frac{n}{2}, & k=m\neq 0,n,\\ n, & k=m=0,n,\end{cases}$$

when $m,k\le n$, and the η_j are the extrema of T_n as defined on p.32.

(e) Semi-group property $T_m(T_n(x))=T_{mn}(x);\ m,n>0$.

(f) $T_n(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$

(g) If we write $T_n(x)=\sum_{j=0}^{n}t_j^{(n)}x^j$, then $t_{n-2m}^{(n)}=(-1)^m\dfrac{n}{n-m}\dbinom{n-m}{m}2^{n-2m-1}$, $m=0,1,2,...,\left[\frac{n}{2}\right]$,

and all other coefficients are zero.

پاسخ.

(a)

(b)

$$\left.\begin{cases}\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\\ \cos(n-1)\theta=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta\end{cases}\right|^{+}\Rightarrow\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$$

$$\Rightarrow\ T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2x\,T_n(x)$$

(c)

$$\int_{-1}^{1}T_k^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\overset{(x=\cos\theta)}{=}\int_{\pi}^{0}\cos^2 k\theta\frac{-\sin\theta\,d\theta}{\underbrace{|\sin\theta|}_{+}}=\int_0^{\pi}\cos^2 k\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+\cos k\theta\right)d\theta=\begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ \pi\\ \underset{k\neq 0}{\rightarrow}\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{k}\sin k\theta\right]_{\theta=0}^{\pi}=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}T_k(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{مشابه فوق}=\int_{\pi}^{0}\cos k\theta\cos m\theta\frac{-\sin\theta\,d\theta}{\underbrace{|\sin\theta|}_{+}}$$

$$=\int_0^{\pi}\cos k\theta\,\cos m\theta\,d\theta\underset{(k\neq m)}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(k+m)\theta+\cos(k-m)\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+m}\sin(k+m)\theta+\frac{1}{k-m}\sin(k-m)\theta\right]_{\theta=0}^{\pi}=0$$

(d)

$$\left.\begin{array}{l} T_k(1)=1,\ T_k(-1)=(-1)^k \\ T_m(1)=1,\ T_m(-1)=(-1)^m \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}\cos(\frac{k\,j\pi}{n})\cos(\frac{m\,j\pi}{n})+\frac{(-1)^{k+m}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\cos\left((k+m)\frac{j\pi}{n}\right)\cos\left((k+m)\frac{j\pi}{n}\right)\right\}+\frac{(-1)^{k+m}}{2} \qquad (*)$$

$$k=m=0\rightarrow\begin{cases}k+m=0\\ k-m=0\end{cases}\Rightarrow(*)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\{1+1\}+\frac{1}{2}=n$$

$$k=m=n\rightarrow\begin{cases}k+m=2n\\ k-m=0\end{cases}\Rightarrow(*)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\{1+1\}+\frac{1}{2}=n$$

$$k=m\neq 0,n\rightarrow\ (*)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\cos(\frac{2k\,j\pi}{n})+1\right\}+\frac{1}{2}\ =\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\big(-1+(n+1)\big)=\frac{n}{2}$$

$\uparrow$

(تذکر: با استقراء می‌توان نشان داد که: $(\oplus)$ $\quad \frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ و

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos\frac{2k\,j\pi}{n}\underset{(\alpha=\frac{2k\pi}{n})}{\Rightarrow}\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha j)\overset{(\oplus)}{=}\frac{-1}{2}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{-1}{2}+\frac{\overset{0}{\cancel{\sin n\alpha}}\cos\frac{\alpha}{2}-\overset{1}{\cancel{\cos n\alpha}}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=-1$$

$$k\neq m\rightarrow\ (*)=\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{k+m}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{k-m}}{2}\right)+\frac{(-1)^{k+m}}{2}=0$$

$\uparrow$

با قرار دادن $\alpha=(k+m)\frac{\pi}{n}$ داریم:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha j)\overset{(\oplus)}{=}\frac{-1}{2}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{-1}{2}+\frac{\overset{0}{\cancel{\sin n\alpha}}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\cos n\alpha=\frac{-1}{2}-\frac{(-1)^{k-m}}{2}$$

به طور مشابه با قرار دادن $\alpha=(k-m)\frac{\pi}{n}$ داریم: $\quad\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha j)=\frac{-1}{2}-\frac{(-1)^{k-m}}{2}$

$$T_m(T_n(x))=T_m(\cos n\theta)=\cos mn\theta=T_{mn}(x) \qquad \text{(e)}$$

(f)

$$T_n(x)=\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n}{2}=\frac{(\cos\theta+i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n+(\cos\theta-i\sqrt{\cos^2\theta})^n}{2}$$

$$=\frac{(x+i\sqrt{1-x^2})^2+(x-i\sqrt{1-x^2})^2}{2}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$$

(g)

Ch1...Rivlin...E17...p45.

Show that on $[a,b]$ the polynomial of degree k with leading coefficient 1 that has the least absolute deviation from 0 is $\tilde{T}_n(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a})$.

پاسخ.

برای $x\in[-1,1]$، با توجه به تذکر ۹-۱ در Rivlin, p 31.، این چندجمله‌ای برابر است با $\tilde{T}_n(x)$.

حال برای بازه $[a,b]$ با تغییرمتغیر $x=\frac{2}{b-a}t-\frac{b+a}{b-a}$ داریم: $a\le t\le b \leftrightarrow -1\le x\le 1$.

لذا حکم به دست می آید.

Ch1...Rivlin...E18...p45.

Prove that:

(i) If $p\in P_n$, $\max\limits_{x\in I}|p(x)|=1$, and there exist $(n+1)$ distinct points $x_i\in I$ such that $|p(x_i)|=1, i=0,...,n$, then $p(x)=\pm T_n(x)$.

(ii) If $t\in\Im_n$, $\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|t(\theta)|=1$, and there exist $2n$ distinct points θ_i satisfying $0\le\theta_i\le 2\pi$ and $|t(\theta_i)|=1, i=1,...,2n$, then $t(\theta)=\cos(n\theta+\theta_0)$.

پاسخ.

(i) گام یک. (فرض که $p(x)\neq\pm1$.)

ادعا: $\forall i=0,...,n-1:\ p(x_i)=-p(x_{i+1})$

صحت ادعا: فرض خلف که $\exists k\in\{0,...,n-1\}: p(x_k)=p(x_{k+1})$.

حال بنابر قضیه مقدارمیانگین (لاگرانژ) بر بازه $[x_k,x_{k+1}]$، نتیجه می شود که $\exists c\in(x_k,x_{k+1}):\ p'(c)=0$

از طرفی، نقاط $\underset{i=1,...,n-1}{x_i}$ فرینه نسبی (موضعی) تابع $p(x)$ هستند لذا به‌ازای آنها نیز $p'(x_i)=0$ می باشد.

و این یعنی $p'(x)$ دارای n ریشه‌ی $x_1,...,x_{n-1},c$ است. (تناقض با $p'\in P_{n-1}$ است.)

گام دو.

ادعا: $q(x)=x^n-\frac{1}{\alpha}p(x)$ بهترین تقریب یکنواخت برای x^n بر $[-1,1]$ است.

صحت ادعا: فرض که $e(x):=x^n-q(x)$. بنابر CAT کافی است $n+1$ نقطه تناوبی برای $e(x)$ تعیین کنیم.

$$e(x)=\frac{1}{\alpha}p(x)\overset{(\|p\|_\infty=1)}{\Rightarrow}\|e\|=\left|\frac{1}{\alpha}\right|\Rightarrow\begin{cases}\forall i=0,...,n-1: & |e(x_i)|=\left|\frac{1}{\alpha}p(x_i)\right|=\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\|e\|\\ & e(x_i)=-e(x_{i+1})\end{cases}$$

لذا $\{x_0,...,x_n\}$ مجموعه تناوبی برای $e(x)$ است. پس $q(x)\in P_{n-1}$ بهترین تقریب یکنواخت برای x^n است.

گام سوم. ولی می دانیم که $x^n-p^*_{n-1}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ و $E_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

حال به دلیل یکتایی بهترین تقریب یکنواخت داریم: $|p(x)|=T_n(x)$ و $|\alpha|=\frac{1}{2^{n-1}}$. به عبارت دقیق‌تر،

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2^{n-1}} & \Rightarrow\ p(x)=T_n(x)\\ \alpha=\frac{-1}{2^{n-1}} & \Rightarrow\ p(x)=-T_n(x)\end{cases}$$

(ii)

Ch1...Rivlin...E20...p45.

Show that the best approximation out of P_n to $1/(x-a), a>1$, on $-1\le x\le 1$ is

$$p_n^*(x)=\frac{-2t}{t^2-1}+\frac{4t}{t^2-1}\sum_{j=0}^{n-1}t^jT_j(x)-\frac{4t^{n+1}}{(1-t^2)^2}T_n(x)$$, where $t=a-(a^2-1)^{1/2}$.

Use this result together with Exercise 1.9 to find the best approximation out of P_n on $[-1,1]$ to $q(x)/(x-a)$ for any $q\in P_{n+1}$.

[Hint: (Rivlin [1]) With $x=\cos\theta$,it is possible to sum the series $\sum_j^\infty t^jT_j(x)=\sum_j^\infty t^j\cos j\theta=\Re e\sum_j^\infty (te^{i\theta})^j$.

For the second part, find $p\in P_n$ such that $\frac{q(x)}{x-a}=\frac{c}{x-a}-p$.]

پاسخ.

برای $x=\cos\theta$ و $|t|<1$ داریم: (تابع مولد) $\sum_{j=0}^{\infty}t^jT_j(x)=\Re e\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(te^{i\theta})^j\right\}=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$

از سویی نتیجه می شود که $t=a-(a^2-1)^{\frac12}\Rightarrow a-t=(a^2-1)^{\frac12}\Rightarrow 1+t^2=2at$ و $\sqrt{a^2-1}=$

$$\frac{1}{x-a}=$$

حال می توان نوشت:

$$\frac{1}{x-a}=\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}}\sum_{i=0}^{\infty}(a-(a^2-1)^{\frac12})^i\,T_i(x)=\frac{-1}{a-t}+\frac{-2}{a-t}\sum_{i=1}^{\infty}t^i\,T_i(x)$$

$$\underset{\uparrow\,?}{=}\frac{-2t}{t^2-1}+\frac{4t}{t^2-1}+\frac{4t}{t^2-1}\sum_{j=1}^{\infty}t^j\,T_j(x)=\frac{-2t}{t^2-1}+\frac{4t}{t^2-1}\sum_{j=0}^{\infty}t^j\,T_j(x)$$

برای اثبات ادعا، باید ثابت کنیم که تابع $e(x)=\frac{1}{x-a}-p_n^*(x)$ دارای $\underline{\underline{n+2}}$ نقطه تناوبی بر $[-1,1]$ است؛

$$\Rightarrow e(x)=\frac{4t}{t^2-1}\sum_{j=n}^{\infty}t^j\,T_j(x)\;+\;\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}T_n(x)$$

$$=\frac{4t}{t^2-1}\left\{\frac{t^n\left(\cos n\theta-t\left(\cos n\theta.\cos\theta+\sin n\theta.\sin\theta\right)\right)}{1-2t\cos\theta+t^2}\right\}+\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}\cos n\theta$$

$$=\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}\left\{\frac{\left(t\,x\cos n\theta\;+\;t\sqrt{1-x^2}\,\sin n\theta\;-\;\cos n\theta\right)(t^2-1)\;+\;2t(x-a)\cos n\theta}{2t\,(x-a)}\right\}$$

$$=\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}\left\{\frac{\left((t\,x-1)\cos\theta\;+\;t\sqrt{1-x^2}\,\sin n\theta\right)(t^2-1)\;+\;2t(x-a)\cos n\theta}{2t\,(x-a)}\right\}$$

تابع $g:\begin{cases}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\;\mapsto\frac{ax-1}{x-a}\end{cases}$ بر $[-1,1]$ مشتق پذیر است و برای $a>1$، داریم: $g'(x)=\frac{1-a^2}{(x-a)^2}<0$.

پس g اکیدا نزولی است لذا $\forall x\in(-1,1):g(1)<g(x)<g(-1)$.پس

$\forall x\in(-1,1)\;\exists(\eta_x)\;\eta\in(0,\pi)\;:g(x)=\cos\eta$ یا $\cos\eta=\frac{ax-1}{x-a}$ $\left(\Rightarrow\sin\eta=\frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a}\right)$

$$e(x)=\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}\left\{\frac{ax-1}{x-a}\cos n\theta+\frac{(t^2-1)\sqrt{1-x^2}}{2t(x-a)}\sin n\theta\right\}$$

$$=\frac{4t^{n+2}}{(t^2-1)^2}\cos(n\theta+\eta) \qquad \text{(از آنجایی که } t^2+1=2at \text{ و } \frac{t^2-1}{2t}=-\sqrt{a^2-1}\text{)}$$

حال هرگاه x از -1 تا 1 برود، یعنی θ از 0 تا π، آنگاه $\cos(n\theta+\eta)$ از $\cos(n+1)\pi$ تا $\cos 0$ می‌رود و به تعداد $\underline{\underline{n+2}}$ نقطه قرینه با مقادیر ±1 به دست می‌آید.

لذا $p_n^*(x)$ بهترین تقریب برای $\frac{1}{x-a}$ بر P_n روی $[-1,1]$ است و $E_n(f)=\|e_n\|=\frac{4t^{n+1}}{(t^2-1)^2}$.

برای ادامه‌ی بحث به مقاله‌ی زیر رجوع شود:

Jokar,S., Mehri,B., " The Best Approximation of some Rational Function in Uniform Norm " **Appl. Num. Math. 55 (2005) 204**-214

و همچنین آثارِ Akhiezer, **Naum Il'ich** [۱۹۰۱ - ۱۹۸۰]

منابع مرتبط با Ch1...Rivlin...E20...p45؛

Landau,H.J., "On Uniform Approximation to Continuous Functions by Rational Functions with Preassigned Poles" AMS, Vol. 5, No. 5 (Oct., 1954), pp. 671-676

Rivlin,T.J., "Polynomials of Best Uniform Approximation to Certain Rational Functions" Numerische Mathematik 4, 345-349 (1962)

Poreda,S.J., "Estimates Best Approximation to Rational Functions" AMS, 159 (Sep., 1971), pp. 129-135

Lam,B., Elliott,D., "Explicit Results for the Best Uniform Rational Approximation to Certain Continuous Functions" J. Approximation Theory, 11, 126-133 (1974)

Ollin,H.Z., "Best uniform polynomial Approximation to Certain Rational Functions" J.Approximation Theory, Vol. 26, 382-392 (1979)

Zheng,Z., Yo,J-H., "Best Uniform Aproximation to a class of Rational Functions" J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 909-921

Eslahchi,M.R., Amani,S., "The Best Uniform Polynomial Approximation to two classes of Rational Fuctions" I. J. Math. Sci. Info. Vol. 7, No. 2 (2012), pp 93-102

Ch1...Rivlin...E21...p46.

Show that $T_n^{(k)}(x)>0$ for $x\ge 1,\ k=0,...,n$ and $\operatorname{sgn}T_n^{(k)}(x)=(-1)^n$ for $x\le -1,\ k=0,...,n$

[Hint: Use Rolle's Theorem.]

پاسخ.

قرار می دهیم: $\eta_j=\cos\frac{j\pi}{n},\ j=0,...,n$.

در این صورت $-1=\eta_n<\eta_{n-1}<...<\eta_1<\eta_0=1$ و $T_n(\eta_j)=T_n(\cos\frac{j\pi}{n})=\cos(j\pi)=(-1)^j,\ j=0,...,n$ است.

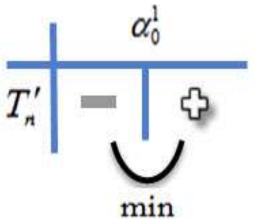
از آنجایی که $\underset{j=0,1,...,n-1}{T_n(\eta_{j+1})=-T_n(\eta_j)\neq 0}$ و T_n پیوسته است لذا می توان از قضیه مقدار میانی نتیجه گرفت که

$$\forall j=0,1,...,n-1\ \exists\alpha_j:\ \eta_{j+1}<\alpha_j<\eta_j \ \text{ و }\ T_n(\alpha_j)=0$$

پس $-1=\eta_n<\alpha_{n-1}<\eta_{n-1}<...<\alpha_1<\eta_1<\alpha_0<\eta_0=1$ و درنتیجه T_n همه ریشه های خود را داخل بازه $(-1,1)$ می گیرد و در ضمن واضح است که همگی این ریشه ها ساده اند. پس تابع T_n برای x هایی که $x>\alpha_0$ تغییرعلامت نمی دهد (زیرا α_0 بزرگترین ریشه است) اما ازآنجایی که $\alpha_0<\eta_0$ و $T_n(\eta_0)=1>0$، نتیجه می شود که برای هر $x>\alpha_0$ (ودرنتیجه برای هر $x\ge1$) داریم $T_n(x)>0$.

T_n' دارای $\underline{\underline{n-1}}$ ریشه است که طبق قضیه رل، نشان می دهیم همگی آنها داخل بازه (α_{n-1},α_0) اند؛

$$\forall j=0,1,...,n-2,\ T_n(\alpha_j)=T_n(\alpha_{j+1})=0 \Rightarrow \exists\alpha_j^1:\ \alpha_{j+1}<\alpha_j^1<\alpha_j \ \text{ و }\ T_n'(\alpha_j^1)=0$$



یعنی داریم: $\alpha_{n-1}<\alpha_{n-2}^1<\alpha_{n-2}<...<\alpha_1^1<\alpha_1<\alpha_0^1<\alpha_0$. پس هر $\underline{\underline{n-1}}$ ریشه T_n' ساده اند که همگی داخل بازه $(\alpha_{n-1},\alpha_0)\subseteq(-1,1)$ قراردارند و α_0^1 بزرگترین ریشه T_n' است ($T_n'(\alpha_0^1)=0$) وچون T_n' یک چندجمله ای است پس α_0^1 یک فرینه نسبی (موضعی) برای T_n' است و $\alpha_0^1\in(\alpha_1,\alpha_0)$. اما از آنجایی که برای هر $x>\alpha_0$ داریم $T_n(x)>0$، و α_0 یک ریشه ساده بود، پس برای هر $x\in(\alpha_1,\alpha_0)$ داریم $T_n(x)<0$. ازجمله داریم $T_n(\alpha_0^1)=0$. پس α_0^1 یک کمینه نسبی برای T_n است. پس در همسایگی راستِ α_0^1، علامتِ T_n' مثبت است (وچون α_0^1 بزرگترین ریشه T_n' است لذا T_n' بعد از آن تغییرعلامتی ندارد) پس برای هر $x>\alpha_0^1$ (ودرنتیجه برای هر $x\ge1$) داریم $T_n'(x)>0$.

تا اینجا مساله برای حالت های $k=0,1$ حل شده است. حال با استقراء روی k ادامه می دهیم؛

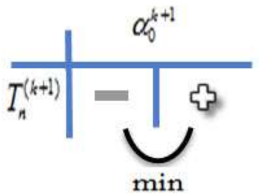
فرض استقراء. $-1<\alpha_{n-(k+1)}^k<...<\alpha_0^k<1$، $n-k$ ریشه ساده $T_n^{(k)}$ هستند و برای هر $x>\alpha_0^k$ داریم $T_n^{(k)}(x)>0$.

حکم. $\forall x\ge1:\ T_n^{(k)}(x)>0$.

بنابر قضیه رل، $\underline{n-k-1}$ ریشه $T_n^{(k+1)}$ داخل بازه $(\alpha_{n-(k+1)}^k,\alpha_0^k)$ قرار دارند.زیرا

$$\forall j=0,1,...,n-(k+1),\ T_n^{(k)}(\alpha_j^k)=T_n^{(k)}(\alpha_{j+1}^k)=0 \Rightarrow \exists\alpha_j^{k+2}:\ \alpha_{j+1}^k<\alpha_j^{k+1}<\alpha_j^k \ \text{ و }\ T_n^{(k+1)}(\alpha_j^{k+1})=0$$

پس $\alpha_{n-(k+1)}^k<\alpha_{n-(k+2)}^{k+1}<\alpha_{n-(k+2)}^k<...<\alpha_0^{k+1}<\alpha_0^k$.



اما $T_n^{(k)}$، برای هر $x>\alpha_0^k$، مثبت است که α_0^k ریشه ساده آن است.

لذا بر بازه (α_1^k,α_0^k)، $T_n^{(k)}$ منفی است و چون α_0^{k+1} داخل بازه است،

پس $T_n^{(k)}(\alpha_0^{k+1})<0$. اما α_0^k فرینه نسبی $T_n^{(k)}$ است پس باید کمینه نسبی باشد.

به طور مشابه، در همسایگی راستِ α_0^{k+1}، علامتِ $T_n^{(k+1)}$ مثبت است (و چون α_0^{k+1} بزرگترین ریشه $T_n^{(k+1)}$ است لذا $T_n^{(k+1)}$ بعد از آن تغییرعلامتی ندارد) پس برای هر $x > \alpha_n^{k+1}$ (ودرنتیجه برای هر $x \geq 1$) داریم $T_n^{(k+1)} > 0$.

منابع مرتبط با Ch1...Rivlin...E21...p46؛

Ch1...Rivlin...E23...p46.

Verify that (1.3.10) is equivalent to $\lambda=\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^i\lambda_i f(x_i)$ where $\lambda_i=\dfrac{\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}, i=1,\dots,n+2$,

and hence $\lambda_i>0$ and $\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i=1$

Ch1...Rivlin...E24...p46.

Show that, in the notation of Exercise 1.23, $\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^i\lambda_i q(x_i)=0$ for any $q\in P$.

پاسخ‌ها.

(۲۳)

$$\omega(x)=\prod_{i=1}^{n+2}(x-x_i)\Rightarrow\omega'(x_i)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i-x_j)=\underbrace{\left(\prod_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j)\right)}_{+}\underbrace{\left(\prod_{j=i+1}^{n+2}(x_j-x_i)\right)}_{+}(-1)^{n+2-i}$$

بنابراین $\operatorname{sgn}\left(\omega'(x_i)\right)=(-1)^{n+2-i}=(-1)^{n-i}$. پس رابطه ۱۰-۳-۱ را به صورت زیر داریم:

$$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{f(x_i)}{(-1)^{n-i}|\omega'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{(-1)^i}{(-1)^{n-i}|\omega'(x_i)|}}=\frac{(-1)^n\sum_{i=1}^{n+2}\frac{(-1)^i f(x_i)}{|\omega'(x_i)|}}{(-1)^n\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}=\frac{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{(-1)^i}{|\omega'(x_i)|}f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}=\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^i\underbrace{\frac{\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1)}{\omega'(x_i)}}}_{\lambda_i}f(x_i)$$

همچنین، از مثبت بودن جملات، واضح است که $\lambda_i>0$ و سرانجام داریم:

$$\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}=\frac{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|\omega'(x_i)|}}=1$$

(۲۴)

مثال. تابع $f(x)=x^3+x$ را روی $[-1,1]$ و مجموعه $X_3=\{-1,0,1\}$ درنظر بگیرید:

الف) بررسی کنید که آیا $p_1^*(X_3)=x$ میباشد؟

ب) $E_1(f;X_3)$ را به دست آورید.

ج) بررسی کنید که آیا $E_1(f;[-1,1])=E_1(f;X_3)$ برقرار است؟

پاسخ.

(الف) خیر؛ زیرا با قراردادن $e(x):=f-p_1^*=x^3$ داریم: $e(-1)=-1$ و $e(0)=0$ و $e(1)=1$.

لذا $\{-1,0,1\}$ نمی‌توانند تشکیل مجموعه‌ای تناوبی بدهند پس $p_1^*(X_3)\neq x$.

(ب) ابتدا باید $p_1^*(X_3)$ را به دست آوریم؛

بنابر توضیحات Rivlin, p. 33، دراین حالت $p_1^*(X_3)$ همان چندجمله‌ای درونیاب برای تابع f بر X_3 است که به صورت زیر (روش لاگرانژ) می‌توان به دست آورد:

x	x^3
-1	-2
0	0
1	2

$$p_1^*(X_3)=\frac{x(x-1)}{(-1)(-2)}(-2)+0+\frac{x(x+1)}{1\times 2}(2)=2x$$

روش دوم. $p_1^*(X_3)$ را به صورت $p_1^*(x)=a_0+a_1x$ درنظر می‌گیریم و با توجه به این که $e(-1)=-e(0)=e(1)$ لذا می‌توان با تشکیل دو معادله خطی، مقادیر a_0 و a_1 را به دست آورد:

$$\begin{cases} e(-1)=-e(0) \\ -e(0)=e(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2-a_0+a_1=a_0 \\ 2-a_0-a_1=a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=2 \end{cases} \Rightarrow p_1^*(x)=2x$$

توجه داریم که $p_1^*(X_3)\in P_1$. حال کافی است که مجموعه تناوبی آن را تعیین کنیم،

$$e(x)=f-p_1^*=x^3+x-2x=x^3-x \to \begin{cases} e(-1)=0=\|e\| \\ e(0)=0=\|e\| \\ e(1)=0=\|e\| \end{cases} \to$$ پس $\{-1,0,1\}$ تشکیل مجموعه تناوبی می‌دهد

لذا $E_1(f;X_3)=\|e\|=0$.

(ج) خیر؛ زیرا بنابر قضیه ۱۳-۱، تساوی زمانی برقرار است که

$p_1^*(X_3)=p_1^*(x)$ ("بهترین تقریب یکنواخت روی $[-1,1]$ می‌باشد")

اما $p_1^*(x)\neq 2x$ است (زیرا $0\underset{\neq}{<}\|e\|=\max\limits_{-1\le x\le}|x^3-x|$)

Ch1...Rivlin...E25...p46.

(L.Smith) Given $f\in C[-1,1]$, consider the problem of finding $\bar{p}\in P_n$ with the property that $f(x)\geq \bar{p}(x), -1\leq x\leq 1$, and $\max_{-1\leq x\leq 1}[f(x)-\bar{p}(x)]\leq \max_{-1\leq x\leq 1}[f(x)-p(x)]$ for all $p\in P_n$ satisfying $f(x)\geq p(x), -1\leq x\leq 1$. (Problem of one-sided approximation from below.)

Show that, if p^* is the best uniform approximation to f on $[-1,1]$ out of P_n, then $\bar{p}=p^*-E_n(f;[-1,1])$.

Consider, similarly, the problem of one-sided approximation from above.
Study the uniqueness and characterization problems for one-sided approximation.

پاسخ.

ابتدا وجود چنین $\bar{p}$ را نشان می دهیم؛ فرض که p^* بهترین تقریب f بر $[-1,1]$ باشد.

ادعا: $\bar{p}=p^*-E_n$ بهترین تقریب f با توجه به شرایط بالا ست.

صحت ادعا: فرض خلف که چنین نباشد. یعنی

$$\exists\, \overset{\bar{p}}{\underset{}{\overset{\neq}{p_1}}}\in P_n\ ,\ f(x)\underset{x\in[-1,1]}{\geq} p_1(x);\qquad \max\left[f(x)-\bar{p}(x)\right]>\max\left[f(x)-p_1(x)\right]$$

$$\overset{(\bar{p}=p^*-f)}{\Rightarrow}\max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p^*+E_n\right] > \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p_1(x)\right]$$

اما E_n عددی ثابت است، پس داریم:

$$\Rightarrow \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p^*\right]+E_n > \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p_1(x)\right]$$

$$\Rightarrow \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p^*\right] > \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p_1(x)\right]-E_n$$

$$\Rightarrow (E_n=)\max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p^*\right] > \max_{-1\leq x\leq 1}\left[f(x)-p_1(x)-E_n\right]\qquad (*)$$

از طرفی، $x\in[-1,1]$، داریم:

$$f(x)\geq p_1(x)\ \Rightarrow\ f(x)-p_1(x)-E_n\geq -E_n \Rightarrow -\left[f(x)-p_1(x)-E_n\right]\leq E_n$$

$$\Rightarrow \max_{-1\leq x\leq 1}\left(-\left[f(x)-p_1(x)-E_n\right]\right)\leq E_n\qquad (**)$$

که از $(*)$ و $(**)$ تناقض به‌وجود می آید. (زیرا p^* بهترین تقریب است.)

توجه داریم که

$$\forall x\in[-1,1],\ \begin{matrix} e(x)=f(x)+p^*(x) \\ \max_{-1\leq x\leq 1}|e(x)|=E_n \end{matrix} \Rightarrow e(x)+E_n\geq 0 \Rightarrow f(x)-p^*+E_n\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq \bar{p}(x)$$

پس در شرایط اولیه مساله نیز صدق می کند.

در ضمن، با توجه به روند حل مساله، یکتا بودن نیز واضح است.

فصل دوم

Ch2...Rivlin...E1...p61.

Prove that if $\{p_0,\dots,p_n\}$ is a set of orthogonal polynomials with respect to some weight function $\omega(x)$, then $p_0, p_1,\dots, p_n$ are linearly independent if no $p_i=0$.

[Hint: If $\alpha_0 p_0+\alpha_1 p_1+\dots+\alpha_n p_n=0$, multiply both sides by $p_i\omega$ and integrate over $[-1,1]$ for each i.]

پاسخ.

باید نشان دهیم که $c_0 p_0(x)+c_1 p_1(x)+\dots+c_n p_n(x)=0$ باشد (به ازای هر $-1\le x\le 1$ و اسکالرهای c_i) در این صورت حتما داریم: $c_0=c_1=\dots=c_n=0$.

لذا $j\in\{0,1,\dots,n\}$ مفروض گرفته و طرفین ترکیب خطی فوق را در $p_j(x)\,\omega(x)$ ضرب کرده و بر $[-1,1]$ انتگرال می گیریم؛

$$c_0\int_{-1}^{1} p_0(x)p_j(x)\,\omega(x)dx + c_1\int_{-1}^{1} p_1(x)p_j(x)\,\omega(x)dx +\dots+ c_n\int_{-1}^{1} p_n(x)p_j(x)\,\omega(x)dx=0$$

اما از آنجایی که $\{p_0, p_1,\dots, p_n\}$ مجموعه‌ای متعامد است (نسبت به تابع وزن $\omega(x)$) ، پس تمامی انتگرال های فوق برابر صفرند جزء یکی از آنها؛

$$c_0\overbrace{\int_{-1}^{1} p_0(x)p_j(x)\,\omega(x)dx}^{=0}+\dots+c_j\int_{-1}^{1} p_j(x)p_j(x)\,\omega(x)dx+\dots+c_n\overbrace{\int_{-1}^{1} p_n(x)p_j(x)\,\omega(x)dx}^{=0}=0$$

$$\Rightarrow\ 0+\dots+c_1\int_{-1}^{1} p_j^2(x)\,\omega(x)dx\ +\dots+0=0$$

اما بنا بر فرض $p_j\neq 0$ وجود دارد پس $p_j^2\neq 0$ لااقل در یک زیربازه از $[-1,1]$ ، مثبت است و در بقیه بازه نیز نامنفی است. همچنین $\omega(x)$ همواره مثبت است (مگر در تعدادی متناهی نقطه) . لذا مقدار انتگرال به دست آمده، مقداری مثبت است و درنتیجه $c_j=0$ می باشد و چون $j=0,1,\dots,n$ دلخواه بود، پس اثبات کامل می شود.

Ch2...Rivlin...E2...p61.

Suppose that $S_n(f;\omega)=\int_{-1}^{1}[f(x)-q_n^*]^2\omega(x)\,dx$. Show that

$S_n(f;\omega)=\int_{-1}^{1}f^2(x)\omega(x)\,dx-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2$ where the λ_j are as defined in (2.1.13).

Ch2...Rivlin...E7...p62.

With the notation of Exercise 2.2, show that $\lim_{n\to\infty}S_n(f;\omega)=0$.

[Hint: $S_n(f;\omega)\le\|f-p_n^*\|_2^2$, where p_n^* is the best uniform approximation to f on I.]

پاسخ‌ها.

(۲).

با فرض $\{p_0(x),\dots,p_n(x)\}$ مجموعه چندجمله‌ای متعامد یکه است که $q_n^*(x)=\lambda_0p_0(x)+\dots+\lambda_np_n(x)$.

حال $S_n(f,\omega)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$S_n(f,\omega)=\int_{-1}^{1}[f(x)-q_n^*(x)]^2\omega(x)dx=\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-2\int_{-1}^{1}f(x)q_n^*(x)\,\omega(x)dx+\int_{-1}^{1}q_n^*(x)\,\omega(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-\int_{-1}^{1}q_n^*(x)\{f(x)+[f(x)-q_n^*(x)]\}\,\omega(x)dx\overset{\text{ق}2.1}{=}\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)q_n^*(x)\,\omega(x)dx+0$$

$$\overset{(q_n^*)}{=}\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)\{\lambda_0p_0(x)+\lambda_1p_1(x)+\dots+\lambda_np_n(x)\}\,\omega(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-\lambda_0\int_{-1}^{1}f(x)p_0(x)\,\omega(x)dx-\lambda_1\int_{-1}^{1}f(x)p_1(x)\,\omega(x)dx-\dots-\lambda_n\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\,\omega(x)dx$$

$$\overset{2.1.13}{=}\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\omega(x)dx-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2$$

(۷).

$$S_n(f;\omega)=\int_{-1}^{1}[f(x)-q_n^*]^2\omega(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}[f(x)-p_n^*(x)]^2\omega(x)dx$$

که در آن $p_n^*(x)$ بهترین تقریب یکنواخت f بر $[-1,1]$ است.

چون تابع f پیوسته و بازه $[-1,1]$ فشرده است، از قضیه تقریب وایرشتراس داریم:

به ازای هر ε ای، وجود دارد n_0 ی که برای چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه n_0 ای برقرار می‌شود $\|f-p\|_\infty<\varepsilon$

حال اگر $p_{n_0}^*(x)$ بهترین تقریب یکنواخت f بر $[-1,1]$ باشد، برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n_0، داریم:

$$E_{n_0}(f)=\|f-p_{n_0}^*\|_\infty\le\|f-p\|_\infty<\varepsilon$$

از طرفی می‌دانیم که $E_{n_1}(f)\overset{(n_1>n_2)}{\le}E_{n_2}(f)$. لذا می‌توان نوشت:

$$\forall n>n_0:\ {}_{0\le}S(f;\omega)\le\int_{-1}^{1}\left(f(x)-p(x)\right)^2\omega(x)dx=\int_{-1}^{1}E_n^2(f)\,\omega(x)dx<\int_{-1}^{1}\varepsilon^2\omega(x)dx=\varepsilon^2\int_{-1}^{1}\omega(x)dx$$

و چون $0<a=\int_{-1}^{1}\omega(x)dx$ است، با $\varepsilon\to0$ (چون $\varepsilon>0$ دلخواه است) حکم به دست می‌آید.

Ch2...Rivlin...E3...p61.

Show (a) the set $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ of orthonormal polynomials (with respect to a given weight function) with $p_i \in P_i$ and leading coefficient of p_i positive for $i = 0, ..., n$ is unique. (b) the set $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ of orthogonal polynomials, with $p_i \in P_i$ having nonzero leading coefficient and $p_i(1)$ prescribed (but $\neq 0$) for $i = 0, ..., n$, is unique.

پاسخ.

(a) فرض که $\{q_0, q_1, ..., q_n\}$ مجموعه چندجمله‌ای های متعامدی دیگری باشد که $q_i \in P_i$ و ضریب پیشروی آن مثبت است. لذا

$$\overset{(p_i \in P_i)}{\underset{(q_i \in P_i)}{\Longrightarrow}} \exists \varepsilon > 0 : p_i - \varepsilon q_i \in P_{i-1} \Rightarrow ...$$

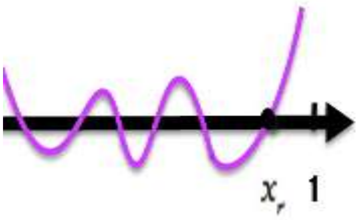
Ch2...Rivlin...E4...p62.

Prove that $f - q_n^*$ changes sign at $n+1$ points of $(-1,1)$ if $f \notin P_n$.

(See p.42 for an application of this fact.)

[Hint: If $f - q_n^*$ changes sign at at most $r \leq n$ points of $(-1,1)$, there exists $p \in P_n$ such that $(f - q_n^*)p \geq 0$ throughout I. Show that this contradicts (2.1.2) since and $\omega(x) > 0$ except for a finite number of poits.]

پاسخ.



فرض خلف که $f - q_n^*$ حداکثر در $r\,(\leq n)$ نقطه از $(-1,1)$ تغییرعلامت دهد.

که به صورت $-1 < x_1 < x_2 < ... < x_r < 1$ درنظر می گیریم.

بدون خلل به کلیت، فرض که بر بازه $(x_r, 1)$ علامت $f - q_n^*$ مثبت باشد.

پس با قرار دادن $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_r)$ داریم: $p \in P_n$ و $(f - q_n^*)p > 0$ مگر در تعداد متناهی نقطه که برابر صفر است.

اما از آنجایی که $\omega(x) > 0$ (مگر در تعداد متناهی نقطه) داریم: $\int_{-1}^{1} (f(x) - q_n^*(x)) p(x) \omega(x) dx > 0$

و این تناقض با قضیه ۱-۲ و رابطه ۲-۱-۲ است.

Ch2...Rivlin...E5...p62.

Show that the least-squares approximation of degree $n-1$ to $f(x)=x^n$ is $q_{n-1}^*=x^n-\tilde{p}_n$, where $\tilde{p}_n$ is the orthogonal polynomial of degree n determined by $\omega(x)$ and (2.1.16).

پاسخ.

با توجه به رابطه بازگشتی $\tilde{p}_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)\tilde{p}_k(x)-\beta_k\tilde{p}_{k-1}(x)$ نتیجه می شود ضریب پیشرو $\tilde{p}_n(x)$ برابر ۱ است. حال $f(x)=x^n\in P_n$ را به صورت $f(x)=x^n=t_np_n(x)+t_{n-1}p_{n-1}(x)+\ldots+t_0p_0(x)$ درنظر می گیریم.

ضریب پیشروی $p_n(x)$، بنابر رابطه ۱۹-۱-۲، برابر با $\dfrac{1}{\|\tilde{p}_n(x)\|_2}$ است و x^n برابر با ۱ است. لذا نتیجه می شود که $t_n=\|\tilde{p}_n(x)\|_2$ می باشد. به عبارتی، $f(x)=x^n=\|\tilde{p}_n\|_2\,p_n(x)+t_{n-1}p_{n-1}(x)+\ldots+t_0p_0(x)$.

ازطرفی، $q_{n-1}^*(x)=\lambda_0p_0(x)+\lambda_1p_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}p_{n-1}(x)$ است که $\lambda_i=(f,p_i)$ است. (رابطه ۱۳-۱-۲)

(یعنی $q_{n-1}^*(x)=(f,p_0)p_0(x)+(f,p_1)p_1(x)+\ldots+(f,p_{n-1})p_{n-1}(x)$) که با محاسبه $\forall j=0,..,n-1$ داریم:

$$(f,p_j)=\int_{-1}^{1}f(x)p_j(x)\omega(x)dx\overset{(f(x):=x^n)}{=}t_j\int_{-1}^{1}p_j^2(x)\omega(x)dx\overset{(ortho)}{=}t_j\quad,j=0,\ldots,n-1.$$

پس نتیجه می شود $q_{n-1}^*(x)=t_0p_0(x)+t_1p_1(x)+\ldots+t_{n-1}p_{n-1}(x)$.

سرانجام حکم نتیجه می شود:

$$q_{n-1}^*(x)=x^n-\|\tilde{p}_n\|\,p_n(x)\underset{\left(p_n(x)=\frac{\tilde{p}_n(x)}{\|\tilde{p}_n(x)\|_n}\right)}{\overset{\uparrow}{=}}x^n-\tilde{p}_n(x)$$

Ch2...Rivlin...E6...p62.

Show that the orthogonal polynomial $\tilde{p}_n$ (and hence p_n) has n distinct simple zeros in $(-1,1)$.

[Hint: Use Exercises 2.4 and 2.5.]

پاسخ.

بنا به تمرین ۵-۲، تقریب کمترین مربعات از درجه $n-1$ برای $f(x)=x^n\in P_n$ به صورت $q_{n-1}^*=x^n-\tilde{p}_n$.

اما چون $f(x)=x^n\notin P_{n-1}$، بنا بر تمرین ۴-۲، تابع $x^n-\tilde{p}_n$ $(=q_{n-1}^*)$ در n از $(-1,1)$ تغییرعلامت می دهد.

پس (توجه داریم که $\tilde{p}_n$ چندجمله‌ای از درجه n است.) همگی این ریشه‌ها ساده اند.

Ch2...Rivlin...E8...p62.

Show that another form of (2.1.18) is $\beta_k = \dfrac{(\tilde{p}_k, \tilde{p}_k)}{(\tilde{p}_{k-1}, \tilde{p}_{k-1})}$.

[Hint: Replace k by $k-1$ in (2.1.16), then multiply both sides by $\tilde{p}_k\omega$ and integrate.]

پاسخ.

در رابطه $(2.1.\underline{16})$ $\quad \tilde{p}_{k+1}(x) = (x-\alpha_k)\tilde{p}_k(x) - \beta_k \tilde{p}_{k-1}(x),$ با جایگذاری $k-1$ به جای k داریم:

$\tilde{p}_k(x) = (x-\alpha_{k-1})\tilde{p}_{k-1}(x) - \beta_{k-1}\tilde{p}_{k-2}(x)$ که با ضرب $\tilde{p}_k(x)\omega(x)$ در طرفین و انتگرالگیری، داریم:

$$\int_{-1}^{1} \tilde{p}_k(x)\tilde{p}_k(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} x\,\tilde{p}_k(x)\tilde{p}_{k-1}(x)\omega(x)dx - \int_{-1}^{1} \alpha_{k-1}\tilde{p}_k(x)\tilde{p}_{k-1}(x)\omega(x)dx - \int_{-1}^{1} \beta_{k-1}\tilde{p}_k(x)\tilde{p}_{k-2}(x)\omega(x)dx$$

$$\Rightarrow (\tilde{p}_k, \tilde{p}_k) = (x\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k-1}) - \alpha_{k-1}\underbrace{(\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k-1})}_{=0} - \beta_{k-1}\underbrace{(\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k-2})}_{=0}$$

$$\Rightarrow (\tilde{p}_k, \tilde{p}_k) = (x\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k-1})$$

که با جایگذاری در رابطه $(2.1.\underline{18})$ ، حکم به دست می آید.

Ch2...Rivlin...E9...p62.

Prove that the Jacobi polynomial $P_j^{(\alpha,\alpha)}$ is an odd function for odd j and an even function for even j.

[Hint: Use mathematical induction, (2.1.16) and the fact that $\omega(x)$ ia an even function in this case.]

پاسخ.

Ch2...Rivlin...E14...p63.

Prove that $P_n'(x) = xP_{n-1}'(x) + nP_{n-1}(x)$. (2.4.15)

$$\left\lceil Hint: D^{n+1}[(x^2-1)^n] = D^n\{D[(x^2-1)^{n-1}(x^2-1)]\} = 2nD^n[x(x^2-1)^{n-1}]\right.$$
$$\left. = 2n\{xD^n[(x^2-1)^{n-1}] + nD^{n-1}[(x^2-1)^{n-1}]\} \quad and\ use\ Rodrigues'\ formula. \right\rfloor$$

پاسخ.

روش یکم.

روش دوم.

با استفاده از تابع مولد چندجمله‌ای لژاندر، نتیجه می‌شود که

$$t(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)t^n \quad و \quad (x-t)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1}$$

پس داریم:

$$(x-t)\sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n$$

یا معادل آن؛

$$\sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n$$

که می‌توان نتیجه گرفت که

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x)$$

سرانجام با جایگذاری $n-1$ به جای n و حذف $P_{n-1}'(x)$ از معادله، حکم به دست می‌آید.

Ch2...Rivlin...E19...p64.

Show that $\frac{1-x^2}{n^2}[P_n'(x)]^2+P_n^2(x)\le 1\,,\quad (n\ge 1\,,\ |x|\le 1)$.

[Hint: Replacing n^2 *by* $(n-1)^2$ *on the right-hand side of (2.4.18) makes it larger.]*

Ch2...Rivlin...E20...p64.

Prove that $|P_n(x)|\le 1\,,\ |x|\le 1$.

پاسخ‌ها.

۱۹.

۲۰.

روش یکم. با توجه به

روش دوم.

(در صورت لزوم از تغییرمتغیر $x=\cos\theta$ برای $x\in[-1,1]$ استفاده خواهد شد.)

بنابر تابع مولد چندجمله‌ای لژاندر داریم: $(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\ t^n$.

حال با توجه به $1-2t\cos\theta+t^2=(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})$، می‌توان نوشت:

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{ik\theta}\right]\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{-ik\theta}\right]$$

ضرب این سری‌ها و تعیین ضریب $P_n(\cos\theta)$ در t^n، نتیجه می‌دهد که

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}e^{in\theta}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{[2(n-k)-1]!!}{[2(n-k)]!!}e^{i(2k-n)\theta}+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}e^{-in\theta}$$

توجه داری که همه‌ی ضرایب سمت راست، مثبت‌اند؛ لذا

$$|P_n(\cos\theta)|\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{[2(n-k)-1]!!}{[2(n-k)]!!}+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

از طرفی، سمت راست این نامعادله عبارت است از $P_n(\cos 0)=P_n(1)=1$. که این حکم را ثابت می‌شود.

Ch2...Rivlin...E24...p64.

Suppose that $f \in C[-\pi,\pi]$ and has period 2π; show that, if $\omega(f;[-\pi,\pi];\frac{1}{n})\log n \to 0$, as $n\to\infty$, then the Fourier series of f converges uniformly to f on $[-\pi,\pi]$.

(توضیح.ن؛(قضیه دینی_لیپشیتز) هرگاه $\omega(f;[-\pi,\pi];\frac{1}{n})\log n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ آنگاه $F.s(f) \overset{ي}{\to} f\,,\ [-\pi,\pi]$

طرح برهان. $\|f - F.s(f)\| \underset{Lebesque}{\leq} (4+\log n)E_n(f) \underset{Jackson}{\leq} 6(4+\log n)\,\omega_f(\frac{1}{n}) \underset{فرض}{\overset{n\to\infty}{\to}} 0$ **)**

پاسخ.

بنا به قضیه ۲-۲ داریم: $\|f - s_n(f)\| = S_n(f) < (4 + \frac{4}{\pi^2}\log n)\,E_n(f)$

بنا به قضیه جکسن (ق ۴-۱) داریم: $E_n(f) \leq 6\,\omega(\frac{1}{n})$

یعنی می توان نوشت: $\|f - s_n(f)\| = S_n(f) < 24\,\omega(\frac{1}{n}) + \frac{24}{\pi^2}\,\omega(\frac{1}{n})\log n$

وقتی $n\to\infty$ ، طبق فرض $\omega(\frac{1}{n})\log n \to 0$ و می دانیم که $\omega(\frac{1}{n}) \to 0$. پس در رابطه اخیر داریم:

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f - s_n(f)\| = 0$

و این یعنی سری فوریه f ،تحت شرط فوق، به تابع f بر $[-\pi,\pi]$ همگرای یکنواخت است.

Ch2...Rivlin...E25...p64.

Verify that, on $-1\le x\le 1,\ |x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}T_{2k}(x)$ the convergence being uniform.

پاسخ.

برای $f(x)=|x|$ داریم: $A_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}|x|T_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ و $A_0=\frac{4}{\pi}$.

همچنین $\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ زوج است و $T_k(x)$ زوج (فرد) است درصورتی که k عددی زوج (فرد) باشد، لذا

فرد k: $A_k=0$

زوج k: $A_k=\frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}xT_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\theta\cos(2j\theta)\frac{-\sin\theta\, d\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos(2j\theta)\,d\theta \overset{(\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)])}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2j+1)\theta}{2j+1}+\frac{\sin(2j-1)\theta}{2j-1}\right]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^j}{2j+1}+\frac{(-1)^{j+1}}{2j-1}\right]=\frac{2}{\pi}(-1)^j\left[\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j-1}\right]=\frac{2}{\pi}(-1)^j\frac{-2}{4j^2-1}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{j-1}}{4j^2-1}$$

فصل سوم

Ch3...Rivlin...E1...p83.

If r_n^* is a least-first-power approximation to f, $f-r_n^*$ has a finite number of essential zeros in I, and $Z_I(f-r_n^*)$ is empty, show that $f-r_n^*$ change sign at least $n+1$ times in $(-1,1)$.

[Hint: Examine the argument at the end of the proof of Theorem 3.2.]

پاسخ.

فرض خلف که $f-r_n^*$ حداکثر در s $(n\geq)$ نقطه از $(-1,1)$ تغییرعلامت دهد. این نقاط را به صورت $t_1<t_2<\ldots<t_s$ در نظر می گیریم.

بنابر مفروضات مساله و نتیجه ۳-۳-۱ داریم: $\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(f-r_n^*)\,p(x)\,dx=0,\ \forall p\in P_n$ که با قرار دادن $t_0=-1$ و $t_{s+1}=1$ رابطه $\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\int_{t_j}^{t_{j+1}}p(x)\,dx=0$, $\forall p\in P_n$ نتیجه می شود.

حال اگر قرار دهیم $p(x)=(x-t_1)(x-t_2)\ldots(x-t_s)$، آنگاه $p\in P_n$ و $\operatorname{sgn}\int_{t_j}^{t_{j+1}}p(x)\,dx=(-1)^{s-j},\ j=0,1,\ldots,s$ که تناقض ایجاد می شود.

Ch3...Rivlin...E2...p83.

Show that, if f has a continuous nonvanishing $(n+1)st$ derivative on I, it is adjoined to P_n.

[Hint: Apply Rolle's Theorem $n+1$ times.]

پاسخ.

فرض خلف که f الحاق شده به P_n نباشد. ($\exists p\in P_n$ که $f-p$ لااقل $n+2$ ریشه متمایز در I دارد.)

بنابر قضیه رل، $f'-p'$ لااقل $n+1$ ریشه در I دارد. با ادامه همین روند، $f^{(n+1)}-p^{(n+1)}$ لااقل ۱ ریشه در بازه I دارد (ازطرفی، $p\in P_n$ لذا $p^{(n+1)}(x)\equiv 0$) . که تناقض با $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ بر I است.

Ch3...Rivlin...E3...p83.

Show that $\int_{-1}^{1}|p(x)|\,dx>\int_{-1}^{1}|\tilde{U}_n(x)|\,dx=\frac{1}{2^{n-1}}$ for all $p\in P_n$ with leading coefficient 1, $p\neq\tilde{U}_n$

پاسخ.

اگر p_1 بهترین تقریب L_1 برای تابع x^{n+1} در P_{n-1} بر بازه I باشد، بنابر قضیه ۴-۳ داریم: $x^n-p_1=\tilde{U}_n$ و

این یعنی، $\int_{-1}^{1}|\tilde{U}_{n-1}|\,dx=\int_{-1}^{1}|x^n-p_1(x)|\,dx<\int_{-1}^{1}|x^n-q(x)|\,dx,\ \forall q\in P_{n-1}\setminus\{p_1\}$

همچنین برای هر $p\in P_n$ ی که ضریب پیشروی آن برابر ۱ است می توان p را $p(x)=x^n-q(x)$ نوشت که در $q\in P_{n-1}$. حال با جایگذاری در رابطه فوق، حکم به دست می آید.

Ch3...Rivlin...E4...p83.

Suppose that $0<m<f^{(n+1)}(x)<M,\quad x\in I:[-1,1]$. Let $\hat{U}_k=\dfrac{\tilde{U}_k}{k!}$. Show that

(i) $\phi(x)=f(x)-r_n^*(x)$ has precisely the same zeros as $\hat{U}_{n+1}$ in I, namely, $\eta_j=\cos\frac{j\pi}{n+2},\ j=1,\dots,n+1$. and changes sign at each of its zeros, just as $\hat{U}_{n+1}$ does.

(ii) $m\hat{U}_{n+1}^{(n+1)}(x)<\phi^{(n+1)}(x)<M\hat{U}_{n+1}^{(n+1)}(x),\quad x\in I$.

Ch3...Rivlin...E5...p83.

With the conditions of Exercises 3.4 holding, show that the zeros of $\phi-m\hat{U}_{n+1}$ and $M\hat{U}_{n+1}-\phi$ in I are exactly as in (3.3.8), and that each function changes sign at each of these zeros.

Ch3...Rivlin...E6...p84.

Show that, in the interval $[\cos\frac{\pi}{n+2},1]$,

$$0<\phi-m\hat{U}_{n+1},$$
$$0<M\hat{U}_{n+1}-\phi,$$
$$0<\hat{U}_{n+1},$$
$$0<\phi,$$

and, hence, that $m\left|\hat{U}_{n+1}\right|<\left|\phi\right|<M\left|\hat{U}_{n+1}\right|$ throughout I .

پاسخ‌ها.

.۴

(i) چون $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ برای $x\in[-1,1]$ ، بنابر تمرین ۲-۳، تابع f الحاق شده به P_n است. بنابر نتیجه ۱-۴-۳، تابع $f(x)-r_n^*(x)$ (یعنی ϕ) در نقاط $\eta_j=\cos\frac{j\pi}{n+2},\ j=1,\dots,n+1$ صفر می‌شوند و از آنجایی که f الحاق شده به P_n است پس حداکثر $n+1$ ریشه متمایز در $[-1,1]$ دارد که نتیجه می‌شود این ریشه‌ها همان η_j ها می‌باشد و چون تعدادشان $n+1$ است لذا همگی ساده اند و ϕ در آنها تغییر علامت می‌دهد.

همچنین η_j ها همان ریشه‌های $\tilde{U}_{n+1}$ و در نتیجه $\hat{U}_{n+1}$ هستند.

(ii) از $\phi(x)=f(x)-r_n^*(x)$ نتیجه می‌شود که $\phi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$.

از $\hat{U}_k=\dfrac{\tilde{U}_k}{k!}$ و $\tilde{U}_{n+1}$ (چندجمله‌ای درجه $n+1$ با ضریب پیشرو ۱ است.) داریم: $\hat{U}_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x^{n+1}+\dots)$

$$\Rightarrow\ \hat{U}'_{n+1}(x)=\tfrac{n+1}{(n+1)!}(x^n+\dots)\ \Rightarrow \dots\Rightarrow \hat{U}_{n+1}^{(n+1)}(x)=\tfrac{(n+1)!}{(n+1)!}=1 \qquad \Rightarrow\begin{cases} m\hat{U}_{n+1}(x)=m\\ M\hat{U}_{n+1}(x)=M\end{cases}$$

حال با جایگذاری در $0<m<f^{(n+1)}(x)<M,\quad x\in I:[-1,1]$ ، حکم به دست می‌آید.

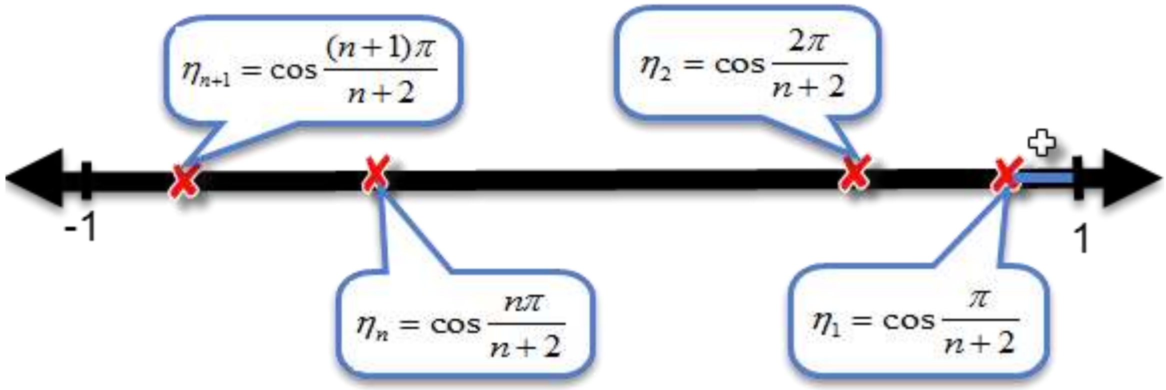
.۵

قرار می‌دهیم: $\begin{cases}\phi=\phi-m\hat{U}_{n+1}=f-r_n^*-m\hat{U}_{n+1}\\ \phi=M\hat{U}_{n+1}-\phi=M\hat{U}_{n+1}-f+r_n^*\end{cases}$ لذا بنابر قسمت (ii) تمرین ۴-۳، داریم: $\begin{cases}\phi_1^{(n+1)}>0\\ \phi_2^{(n+1)}>0\end{cases}$

و در نتیجه ϕ_1 و ϕ_2 ، هردو، الحاق شده به P_n می‌باشند و دقیقا مشابه قسمت (i) تمرین ۴-۳، نتیجه می‌گیریم در η_j ها تغییر علامت می‌دهند.

۶.

با توجه به تمرین های ۳-۴ و ۳-۵ در مورد توابع فوق نتیجه می گیریم همگی هم ریشه با $\widehat{U}_{n+1}$ هستند و چون $\widehat{U}_{n+1}$ چندجمله‌ای درجه $n+1$ است پس ریشه‌های ساده آن دقیقا به صورت $\eta_j=\cos\frac{j\pi}{n+2},\ j=1,\dots,n+1$.



لذا $\forall x>\eta$ تغییرعلامتی برای هیچ کدام از این توابع نداریم. حال به تشخیص علامت آنها می پردازیم:

الف) $\widehat{U}_{n+1}$:

برای تشخیص علامت آن بر بازه $[\eta_1,1]$ کافیست $\widehat{U}_{n+1}(1)$ را به دست آوریم و علامت آن را تشخیص دهیم:

$$x=1\overset{(x=\cos\theta)}{\to}\theta=0\to U_{n+1}(\theta)=\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}=\frac{0}{0}\overset{l'Hop}{\Rightarrow}\lim_{\theta\to0}\frac{(n+2)\cos(n+2)\theta}{\cos\theta}=n+2$$

پس $U_{n+1}(\theta=0)=U_{n+1}(x=1)=n+2>0$ که نتیجه می شود $0<\widehat{U}_{n+1}$ بر بازه $[\eta_1,1]$.

ب) ϕ:

فرض خلف بر $[\eta_1,1]$ داشته باشیم $\phi<0$.

هرگاه η_1 بزرگترین ریشه ϕ باشد و $\eta_1^{(1)}$ بزرگترین ریشه ϕ' باشد واضح است که $\eta_1^{(1)}<\eta_1$. به طور مشابه هرگاه $\eta_1^{(k)}$ بزرگترین ریشه $\phi^{(k)}$ باشد، که $k=1,\dots,n$، پس داریم: $\eta_1^{(n)}<\eta_1^{(n-1)}<\dots<\eta_1^{(2)}<\eta_1^{(1)}<\eta_1$.

بنابرفرض خلف داریم $\phi'(\eta_1)<0$ و با توجه به این که $\eta_1^{(1)}$ بزرگترین ریشه ϕ' می باشد ($\phi'(\eta_1^{(1)})=0$) و $\eta_1^{(1)}<\eta_1$ نتیجه می شود که $\phi''(\eta_1^{(1)})<0$ و با توجه به این که $\eta_1^{(2)}$ بزرگترین ریشه ϕ'' می باشد ($\phi''(\eta_1^{(2)})=0$) و $\eta_1^{(2)}<\eta_1^{(1)}$ نتیجه می شود که $\phi'''(\eta_1^{(2)})<0$ و با ادامه همین روند داریم $\phi^{(n)}(\eta_1^{(n-1)})<0$. که با توجه به این که $\eta_1^{(n)}$ ریشه $\phi^{(n)}$ است و $\eta_1^{(n)}<\eta_1^{(n-1)}$ سرانجام به تناقض $\phi^{(n+1)}(\eta_1^{(n)})<0$ می رسیم.

پ) $\phi-m\widehat{U}_{n+1}$ و $M\widehat{U}_{n+1}-\phi$:

بنابه تمرین ۳-۴ قسمت (ب) در مورد مشتق $n+1$ ام این توابع، که بزرگتر از صفر اند، حکم به دست می آید؛

بر بازه $[\eta_1,1]$ داریم:

چون $0<\phi$ ، $0<m\widehat{U}_{n+1}$ و $m\widehat{U}_{n+1}<\phi$ پس نتیجه می شود که $m|\widehat{U}_{n+1}|<|\phi|$.

به طور مشابه نتیجه می شود $|\phi|<M|\widehat{U}_{n+1}|$.

بر بازه $[\eta_2,\eta_1]$ داریم:

از آنجایی که همگی ریشه ها ساده اند پس روی $[\eta_2,\eta_1]$ هر چهار تابع منفی اند پس

چون $0<\phi$ ، $0<m\widehat{U}_{n+1}$ و $m\widehat{U}_{n+1}<\phi$ پس نتیجه می شود که $|\phi|<m\left|\widehat{U}_{n+1}\right|$.

به طور مشابه نتیجه می شود $|\phi|<M\left|\widehat{U}_{n+1}\right|$.

سرانجام روی تمامی بازه های دیگر نیز چون همگی این توابع یا مثبت اند (همزمان) یا منفی اند پس یکی از دو حالت بالا پیش می آید که در هر صورت احکام فوق برقرار اند و این یعنی در سراسر بازه نیز احکام فوق اتفاق می افتد.

Ch3...Rivlin...E7...p84.

Show that, if $0 < A \le \left| f^{(n+1)}(x) \right| \le B,\ \ x \in I$,

then $\int_{-1}^{1} \left| f(x) - p(x) \right| dx \ge \frac{A}{(n+1)!} 2^{-n}$ for all $p \in P_n$ and $\int_{-1}^{1} \left| f(x) - r_n^*(x) \right| dx \le \frac{B}{(n+1)!} 2^{-n}$

In particular, for example, if $p_0 \in P_n$ is the least-first-power approximation to e^x on $[-1,1]$, then $\frac{e^{-1}}{2^n (n+1)!} \le \int_{-1}^{1} \left| e^x - p_0 \right| dx \le \frac{e}{2^n (n+1)!}$.

پاسخ.

به ازای هر $p \in P_n$ دلخواهی داریم:

$$\int_{-1}^{1} \left| f(x) - p(x) \right| dx \ge \int_{-1}^{1} \left| f(x) - r_n^*(x) \right| dx = \int_{-1}^{1} \left| \phi(x) \right| dx \overset{E3.6}{\ge} A \int_{-1}^{1} \left| \widehat{U}_{n+1}(x) \right| dx = \tfrac{A}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} \left| \tilde{U}(x) \right| dx \overset{E3.3}{=} \tfrac{A}{(n+1)!} \tfrac{1}{2^n}$$

نامساوی سمت راست هم به طور مشابه ثابت می شود.

همچنین برای تابع $f(x) = e^x$ ، چون $\left| f^{(n+1)}(x) \right| = e^x$ بر $I = [-1,1]$ است لذا داریم: $e^{-1} \le e^x \le e$

پس کافی است که $A = e^{-1}$, $B = e$ را در رابطه فوق جایگذاری کنیم.

Ch3...Rivlin...E8...p84.

Show that, if $f^{(n)}(x)$ is continuous and does not vanish on I , then

$$\frac{2^{-n}}{(n+1)!} \min_{x \in I} \left| f^{(n)}(x) \right| \le \int_{-1}^{1} \left| f(x) \right| dx$$

With equality if, and only if, $f = cU_n$, c being any nonzero constant.

پاسخ.

طبق فرض مساله داریم: $\forall x \in I:\ f^{(n)}(x) > 0$ یا $f^{(n)}(x) < 0$. پس می توان نوشت،

$$0 < \underbrace{\min_{x \in I} \left| f^{(n)}(x) \right|}_{A} \le \left| f^{(n)}(x) \right| \le \underbrace{\max_{x \in I} \left| f^{(n)}(x) \right|}_{B}$$

حال بنابر تمرین ۷-۳، برای هر $p \in P_{n-1}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{A}{(n+1)!} 2^{-n} \le \frac{A}{n!} 2^{-n+1} \le \int_{-1}^{1} \left| f(x) - p(x) \right| dx$$

سرانجام با قراردادن $p(x) := 0$ ، حکم نتیجه می شود.

برای حالت مساوی؛

$$f(x) = cU_n = 2^n c \tilde{U}_n \overset{(\tilde{U}_n = x^n + \ldots)}{\Rightarrow} f^{(n)}(x) = 2^n c\, n!$$

حال با محاسبه طرفین، برای این مقدار، داریم:

سمت چپ نامساوی = $\frac{2^{-n}}{(n+1)!} 2^n |c|\, n! = \frac{|c|}{(n+1)}$

سمت راست نامساوی = $\int_{-1}^{1} \left| 2^n c \tilde{U}_n \right| dx = |c|\, 2^n \int_{-1}^{1} \left| \tilde{U}_n(x) \right| dx = |c|\, 2^n \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2|c|$

که برابر نشدند!!! (یا روش ارایه شده ایراد دارد یا صورت تابع داده شده.)

Ch3…Rivlin…E10…pp84,85.

Show that the least-first-power approximation of the form ax (that it, by means of lines passing through the origin) to $f(x)$ on X_m with $\omega_i = 1, i = 1, \ldots, m$,is obtained as follows: Renumber the points $(x_i, f(x_i))$ for which $x_i \neq 0$ so that

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \geq \frac{f(x_2)}{x_2} \geq \ldots \geq \frac{f(x_l)}{x_l} \quad [l = m \quad or \quad m-1].$$

Now let r be the smallest integer such that $2\sum_{i=1}^{r}|x_i| \geq \sum_{i=1}^{l}|x_i|$; then $\frac{f(x_r)}{x_r}x$ is a least-first-power approximation of the required form. Discuss uniqueness.

[Hint: While Theorem 3.5 cannot be applied, since we are not admitting all polynomials of degree 1 as approximators, show that an exact analogue of Theorem 3.5 holds when the family of approximators consists of $\{ax\}$. Then apply this result. What is the result when the ω_i are arbitrary positive numbers?]

This problem has an interesting history. The result is the algebraic formulation by Laplace of a geometric method due to Boscovich. A fascinationg account of Boscovich's approach and its subsequent ramifications as well as the history of the relative merits of least-first-power and least-squares fitting of data can be found in Eisenhart [1].

Ch3...Rivlin...E11...pp85.

Given X_3, show that the least-first-power approximation by polynomials of degree at most 1, with $\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$, to f on X_3 is provided by the line passing through $(x_1, f(x_1))$ and $(x_3, f(x_3))$.

پاسخ.

مجموعه X_3 را ، با فرض $x_1 \le x_2 \le x_3$ ، درنظر می گیریم.

فرض که $r_1^*(x)$ خط گذرنده از $(x_1, f(x_1))$ و $(x_3, f(x_3))$ باشد. یعنی:

$$r_1^*(x) = f_1 + \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) \quad \to \quad r_1^*(x_1) = f_1 \, , \, r_1^*(x_3) = f_3 \quad (*)$$

در این صورت $\forall\, p(x) = ax + b \in P_1$ ، با استفاده از قضیه ۳-5.. **Rivlin, p 74.** ، داریم:

$$\left|\sum_{i=1}^{3} \operatorname{sgn}\left[f(x_i) - r_1^*(x_i)\right] p(x_i)\right| = \left| \operatorname{sgn}\underbrace{\left[f(x_1) - r_1^*(x_1)\right]}_{\underset{(*)}{=}0} p(x_1) + \operatorname{sgn}\left[f(x_2) - r_1^*(x_2)\right] p(x_2) + \operatorname{sgn}\underbrace{\left[f(x_3) - r_1^*(x_3)\right]}_{\underset{(*)}{=}0} p(x_3) \right|$$

$$= \left| \operatorname{sgn}\left[f(x_2) - r_1^*(x_2)\right] p(x_2) \right| = |p(x_2)| = |ax_2 + b| \quad , \ (I)$$

همچنین $Z(f - r_1^*) = \{x_1, x_3\}$ می باشد و در نتیجه:

$$\sum_{i \in Z(f - r_n^*)} |p(x_i)| = |p(x_1)| + |p(x_3)| = |ax_1 + b| + |ax_3 + b| \quad , \ (II)$$

حال از عبارت زیر

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \begin{cases} \xrightarrow{(a>0)} & ax_1 \le ax_2 \le ax_3 \Rightarrow ax_1 + b \le ax_2 + b \le ax_3 + b \to \begin{cases} |ax_2 + b| \le |ax_1 + b| \\ |ax_2 + b| \le |ax_3 + b| \end{cases} \Rightarrow |ax_2 + b| \le |ax_1 + b| \\ \xrightarrow{(a<0)} & ax_1 \ge ax_2 \ge ax_3 \Rightarrow ax_1 + b \ge ax_2 + b \ge ax_3 + b \to \begin{cases} |ax_2 + b| \le |ax_1 + b| \\ |ax_2 + b| \le |ax_3 + b| \end{cases} \Rightarrow |ax_2 + b| \le |ax_3 + b| \end{cases}$$

نتیجه می شود که $|ax_2 + b| \le |ax_1 + b| + |ax_3 + b|$.

لذا درهرصورت $(I) \le (II)$ و قضیه ۳-5 ، به ازای $r_1^*(x)$ داده شده، برقرار است.

Suppose $m = n+2$, $q_1, \ldots, q_s$ to be the extreme points of B and $f \notin P_n$ in Exercise 3.12 through 3.15.

Ch3...Rivlin...E12...p85.

Show that there is exactly one point, call it $x_i \in X_m$, at which $q_i(x_i) \ne f(x_i)$, the points $x_1, \ldots, x_s$ are distict, and each of $q_1, \ldots, q_s$ agrees with f on $x_{s+1}, \ldots, x_{n+2}$.

Ch3...Rivlin...E13...pp85.

If $p_0 = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_s q_s$, where $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, s$, and $\lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$, show that p_0 agrees with f precisely on $x_{s+1}, \ldots, x_{n+2}$.

Ch3...Rivlin...E14...p85.

If $p_0 \in B$ agrees with f on $n+1$ points, show that p_0 is an extreme point of B.

REMARK. *The extreme points of B are now seen to be found among the (at most) $n+2$ polynomials that agree with f on some $n+1$ points of X_m, and hence all of B can be determined by direct examination of (at most) $n+2$ polynomials.*

Ch3...Rivlin...E15...pp85,86.

Suppose that $q \in B$ is an extreme point of B agreeing with f on $x_1,\dots,x_{n+1}$. Show that, for any $g \in P_n$, the unique $p_0 \in P_n$ that agrees with g on $x_1,\dots,x_{n+1}$ is a least-first-power approximation to g. (Compare with Theorem 3.3)

[Hint: g can be represented uniquely as $g = p + a f$ for some $p_0 \in P_n$ and some constant a.]

پاسخ‌ها.

(۱۲). با توجه به قضیه ۸-۳، مقادیر q_i ها حداقل در $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه با f برابرند و با توجه به این که $m=n+2$ است بنابراین حداکثر ۱ نقطه از X_m ($\in x_i$ مانند) باقی می‌ماند که می‌خواهیم نشان دهیم در این یک نقطه، مقدار q_i و f برابر نمی‌باشد. همچنین ها متمایزند.

فرض خلف که $\exists\ j \in \{1,\dots,s\}$ به طوری که q_j در تمامی $\underline{\underline{n+2}}$ نقطه، برابر f شود؛

از طرفی برای $i \neq j$ ، $1 \le i \le s$ ، می‌دانیم که q_i و f حداقل در $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه با هم برابرند. فرض که $X_{m\,(=n+2)} = \{x_1,\dots,x_{n+2}\}$ و $x_1,\dots,x_{n+1}$ این نقاط باشند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_i) = q_i(x_i) & ,i=1,\dots,n+1 \\ f(x_i) = q_j(x_i) & ,i=1,\dots,n+2 \end{array}\right| \Rightarrow q_i(x_i) = q_j(x_i)\ ,i=1,\dots,n+1 \Rightarrow \left(q_i - q_j\right)(x_i) = 0\ \ ,i=1,\dots,n+1$$

و این تناقض ایجاد می‌کند. (چون $q_i, q_j \in P_n$ هستند پس نتیجه می‌شود $q_i = q_j$.)

اثبات متمایز بودن x_i ها هم مشابه روند بالاست، یعنی در صورتی که

$$\exists\ x_k \text{ و } \begin{cases} q_i(x_k) \neq f(x_i) \\ q_j(x_k) \neq f(x_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_i(x_t) = f(x_t) \\ q_j(x_t) = f(x_t) \end{cases} \ t = \underset{t \neq k}{1,\dots,n+2}$$

و در نتیجه $\left(q_i - q_j\right)(x)$ دارای $\underline{\underline{n+1}}$ ریشه است. (که تناقض با چندجمله‌ای درجه n بودن.)

(۱۳)

با توجه به تمرین ۱۲-۱ ، داریم: $q_i(x_k) = f(x_k)$ برای $\begin{array}{l} k = s+1,\dots,n+2 \\ i = 1,\dots,s \end{array}$.

پس برای $k = s+1,\dots,n+2$ داریم:

$$p_0(x_k) = \lambda_1 q_1(x_k) + \dots + \lambda_s q_s(x_k) = \lambda_1 f(x_k) + \dots + \lambda_s f(x_k) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_s) f(x_k) = f(x_k)$$

همچنین برای $t = 1,\dots,s$ داریم:

$$\begin{aligned} p_0(x_t) &= \lambda_1 \underset{= f(x_t)}{q_1(x_t)} + \dots + \lambda_{t-1} \underbrace{q_{t-1}(x_t)}_{= f(x_t)} + \lambda_t \underset{\neq f(x_t)}{q_t(x_t)} + \lambda_{t+1} \underbrace{q_{t+1}(x_t)}_{= f(x_t)} + \dots + \lambda_s \underset{= f(x_t)}{q_s(x_t)} \\ &= \left(\lambda_1 + \dots + \lambda_{t-1} + \lambda_{t+1} + \dots + \lambda_s\right) f(x_t) + \lambda_t q_t(x_t) \\ &= \left(1 - \lambda_t\right) f(x_t) + \lambda_t q_t(x_t) \\ &\underset{(\lambda_t \neq 0)}{\neq} f(x_t) \end{aligned}$$

(۱۴)

(با توجه به تمرین ۱۲-۳، B حداکثر $\underline{\underline{n+2}}$ عضوی است. درواقع برای X_m ، $m\ge n+2$ ، $\binom{m}{n+2}$ عضوی است.)

با توجه به قضیه ۷-۳، مجموعه نقاط راسی B ناتهی است ،اگر $q_1,...,q_s$ نقاط موردنظر باشند، در این صورت B پوسته محدب مجموعه $\{q_1,...,q_s\}$ است. یعنی هر q (عضوی از B) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(*) \quad q=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i q_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$$

همچنین از تمرین ۱۲-۳ داریم:

برای هر q_i ، وجود دارد x_i (که عضوی از X_m است.) که $q_i(x_i)\neq f(x_i)$ و دربقیه نقاط X_m ، q_i و f با هم برابرند. و در این صورت $s<n+2$ و تساوی نیز برقرار است؛ زیرا فرض که $s<n+2$.

درواقع برای x_{n+2} ای، q_{n+2} ای نباشد که در خاصیت بالا صدق کند. پس برای هر q_i ، $i=1,...,s$ ، $q_i(x_{n+2})=f(x_{n+2})$ و با توجه به $(*)$ برای هر $q\in B$ خواهیم داشت: $q(x_{n+2})=f(x_{n+2})$.

حال برای حل مساله، چون که $p_0\in B$ روی $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه از X_m برابر f است و با توجه به توضیحات بالا، می دانیم که $t\in\{1,...,n+2\}$ وجود دارد به طوری که q_t هم در این $\underline{\underline{n+1}}$ نقطه برابر f می باشد لذا تابع p_0-q_t دارای $\underline{\underline{n+1}}$ ریشه است (ولی $p_0-q_t\in P_n$) پس $p_0=q_t$ و در نتیجه p_0 یکی از نقاط راسی B است.

(۱۵)

با توجه به قضیه ۵-۳ و این که q یک نقطه راسی B است (یعنی بهترین تقریب L_1 برای f است) داریم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+2}\operatorname{sgn}\left[f(x_i)-q(x_i)\right]p(x_i)\omega_i\right|\le\sum_{i\in \mathcal{Z}(f-q)}\left|p(x_i)\right|\omega_i \qquad ,\forall p\in P_n$$

اما $i\in \mathcal{Z}(f-q)$, $\operatorname{sgn}\left[f(x_i)=q(x_i)\right]=0 \Rightarrow f(x_i)=q(x_i)$,$\forall i\in\{1,...,n+1\}$.

بنابراین،

$$\left|\operatorname{sgn}\left[f(x_{n+2})-q(x_{n+2})\right]\ p(x_{n+2})\,\omega_{n+2}\right|\le\left|p(x)\right|\omega+...+\left|p(x_{n+1})\right|\omega_{n+1}$$

$$\Rightarrow\left|p(x_{n+2})\right|\omega_{n+2}\le\left|p(x_1)\right|\omega_1+...+\left|p(x_{n+1})\right|\omega_{n+1} \qquad (*)$$

حال فرض که $p_0\in P_n$ چندجمله‌ای درونیاب (یکتایی) باشد که g را در نقاط $x_1,...,x_{n+1}$ درونیابی می کند. لذا برای هر p (عضوی از P_n) داریم:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n+2}\operatorname{sgn}\left[g(x_i)-p_0(x_i)\right]p(x_i)\omega_i\right|&=\left|p(x_{n+2})\right|\omega_{n+2}\\&\overset{(*)}{\le}\left|p(x_1)\right|\omega_1+...+\left|p(x_{n+1})\right|\omega_{n+1}\\&\le\sum_{i\in \mathcal{Z}(f-q)}\left|p(x_i)\right|\omega_i\end{aligned}$$