فصل دوم
آنالیز ترکیبی و احتمال

در این فصل ابتدا با روشها و قواعد شمارش آشنا می‌شوید. این قوانین به شما کمک می‌کنند که تعداد دفعات قوع یک حالت خاص از بین تمتمی حالات را به دست بیاورید. در ادامه با استفاده از نتایج بدت آمده و بکارگیری قوانین احتمالات، می‌توانید احتمال وقع یک حالت خاص را بدست آورید.

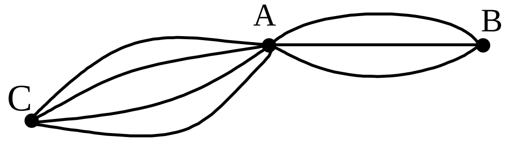
۲-۱ آنایز ترکیبی

یک سکه را در نظر بگیرید با پرتاب این سکه دو حالت ممکن است رخ بدهد. شیر یا خط حال اگر بخواهیم بدانیم با پرتاب ۳ عدد سکه چند حالت رخ می‌دهد می‌بایستی از قوانین شمارش استفاده کنیم.

به طور کلی تمامی قوانین شمارش مبتنی بر دو اصل ضرب و جمع می‌باشند. که با استفاده از این دو اصل می‌توان تمامی مسایل شمارش را به سادگی حل نمود.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به $n_۱$ طریق و کار دیگری را به $n_۲$ طریق انجام داد و این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه کار اول یا کار دوم را می‌توان به $n_۱+n_۲$ طریق انجام داد.

مثال ۱: فرض کنیم از شهر A بتوان به سه طریق به شهر B و به چهار طریق به شهر C سفر نمود. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B یا شهر C سفر نمود؟

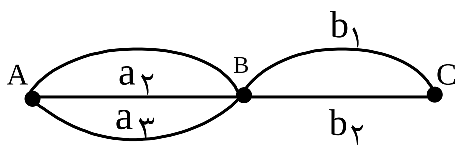


حل: کار اول را سفر از شهر A به B در نظر بگیرید که به $n_۱=۳$ طریق قابل انجام است همینطور کار دوم را سفر از شهر A به C در نظر بگیرید که به $n_۲=۴$ طریق قابل انجام است به وضوح هر دو کار نیز همزمان قابل انجام نیستند پس به $n=n_۱+n_۲=۷$ طریق می‌توان از شهر A به B یا C سفر نمود.

توجه: اصل جمع را می‌توان به n کار نیز تعمیم داد. به شرطی که هیچ دو جفت کاری را نتوان همزمان انجام داد.

اصل ضرب: اگر کاری را بتوان به $n_۱$ طریق و کار دیگری را به $n_۲$ طریق انجام داد واین دو کار را بتوان بصورت همزمان و یکی پس از دیگری انجام داد، آنگاه هر دو کار را می‌توان به $n_۱\times n_۲$ طریق انجام داد.

مثال ۱: فرض کنید از شهر A به سه طریق بتوان به شهر B سفر نمود. و از شهر B نیز به دو طریق به شهر C سفر نمود. به چند طریق می‌توان از شهر C سفر نمود؟



با توجه به شکل می‌بایستی ابتدا از شهر A به B و سپس به C سفر نمود که این دو عمل می‌بایستی ابتدا از شهر A به B و سپس به c سفر نمود مه این دو عمل می‌بایسی یکی پس از دیگری انجام شوند تا کل کار (سفر از شهر A بع C) انجام پذیرد. بنابر این کار اول سفر از شهر A به B که به $n_۱=۳$ طریق قابل انجام است و کار دوم سفر از شهر B به C $n_۲=۲$ طریث قابل انجام است را خواهیم داشت که کل کار را می‌توان به $n=n_۱\times n_۲=۳\times۲=۶$ طریق می‌وان انجام داد.

اگر راهها از شهر A به B را با a_i و از شهر B به C را با b_i نامگذاری کنیم این ۶ طریق را می‌توان به صورت زیر لیست نمود:

۱) $a_۱ b_۱$ ۳) $a_۲ b_۱$ ۵) $a_۳ b_۱$

۲) $a_۱ b_۲$ ۴) $a_۲ b_۲$ ۶) $a_۳ b_۲$

توجه: اصل ضرب را می‌وان به n کار نیز تعمیم داد به شرطی که تمتم کارها را یکی پس از دیگری و همزمان بتوان انجام داد.

مثال ۳: پرتاب ۳ سکه بصورت همزمان چند حالت ممکن را در پی دارد؟

پرتاب یک سکه به دو حالت ممکن شیر و خط امکان‌پذیر است حال سه کار را در نظر بگیرید که عبارتند از پرتاب سکه که هر کدام به دو طریق قابل انجام هستند و بناست این سه کار همزمان انجام شوند بنابراین کل حالات ممکن عبارتست از:

$n=n_۱\times n_۲\times n_۳=۲\times۲\times۲=۸$

این حالات را می‌توان در یک جامعه لیست نمود که به آن فضای نمونه گویند.

شیر: ش　　　خط: خ

S={(ش وخ و ش) و (خ و ش وخ) و (ش وخ وخ) و (ش و ش وخ) و(خ و ش و ش) و (خ وخ وخ) و (خ وخ و ش) و (ش و ش و ش)}

با توجه به مثال فوق به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: مجموعه تمام حالات ممکن از انجام یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه نامند و با S نمایش می‌دهند.

اغلب در مسایل به تعداد اعضای مجموعه فضای نمونه یعنی $|S|$ نیازمندیم زیرا در بسیاری از حالات تعداد اعضا بسیار زیاد یا حتی نامتناهی هستند در نتیجه نمی‌توان اعضای مجموعه را لیست نمود.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه منید:

مثال ۴: اگر یک سکه را آنقدر پرتاب کنیم تا برای اولین بار خط بیاید، فضای نمونه مربوط به آزمایش را نمایش دهید:

بوضوح ممکن است یک سکه در اولین پرتاب خط بیاید و یا ممکن است پس از چندین بار شیر، خط بیاید که با در نظر گرفتن این حالات با یک فضای نمونه نامتناهی روبرو هستیم زیرا ممکن است حتی پس از هزار بار پرتاب باز هم شیر بیاید و خط را مشاهده نکنیم !

که البته احتمال وقع چنین حالتی را در ادامه این فصل محاسبه می‌کنیم.

S={(خ) و(خ و ش) و (خ و ش و ش) و (خ و ش و ش و ش) و ...}

در ادامه برای روشهای شمارش فنونی را با استفاده از اصل ضرب می‌آوریم.

۲-۱-۱ جایگشت

در بسیاری از مسایل قصد داریم چندین شیء را به ترتیب در یک ردیف قرار دهیم. برای حل این گونه مسایل ابتدا مفهوم جایگشت را معرفی می‌کنیم.

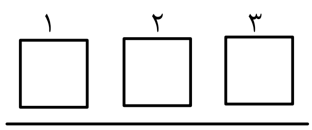
تعریف: یک جایگشت از n شئی عبارتست از قرار دادن آنها در یک صف یا ردیف با رعایت یک نظم و ترتیب مشخص.

مثال ۵: حروف A و l و i را به عنوان سه شئی در نظر بگیرید در این صورت کلمه Ali یک جایگشت از این سه حرف می‌باشد. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم است مثلاً ilA یک جایگشت دیگر از این حروف می‌باشد و با جایگشت قبلی متمایز است.

مثال ۶: به چند طریق می‌توان سه عدد کتاب متمایز را در یک قفسه قرار داد؟

ابتدا توجه کنید که کتابها متمایزند پس آنها را $A_۱, A_۲, A_۳$ نامگذاری می‌کنیم از طرفی قرار گرفتن کتابها در قفسه به این معنی است که ترتیب قرار گیری برای ما مهم است. بنابراین می‌بایستی تمام جایگشتهای سه شئی (کتاب) را بدست بیاوریم.

برای هر کتاب در قفسه یک مکان در نظر بگیرید مطابق شکل زیر:



در هر یک از مکانها می‌توانیم هر یک از سه کتاب را قرار دهیم. در مکان اول یکی از سه کتاب را قرار دهیم از آنجا که در هر صورت یک کتاب در مکان اول قرار می‌گیرد در مکان دوم می‌توان یکی از دو کتاب باقیمانده را قرار داد و به همین ترتیب در مکان آخر تنها کتاب باقیمانده قرار می‌گیرد.

از آنجا که این کار را می‌توان در سه مرحله و به صورت پیاپی انجام داد بطوریکه مرحله اول ۳ حالت مرحله دوم ۲ حالت و مرحله سوم ۱ حالت دارد. بنابراین با توجه به اصل ضرب داریم:

تعداد کل جایگشتها $= ۳\times۲\times۱=۶$

که فضای نمونه نیز عبارتست از:

$$S=\{(A_۱,A_۲,A_۳),(A_۱,A_۳,A_۲),(A_۲,A_۱,A_۳),(A_۲,A_۳,A_۱),(A_۳,A_۱,A_۲),(A_۳,A_۲,A_۱)\}$$

در حالت کلی تعداد جایگشتهای n شئی متمایز در یک ردیف (رعایت ترتیب) عبارتست از:

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\cdots(۲)(۱)=n!$$

در نتیجه مثال قبل را می‌توان به صورت خلاصه جایگشت سه شئی در یک ردیف در نظر گرفت که می‌شود:

$$۳!=۶$$

توجه: اگر در محاسبه جایگشت‌ها تکرار اشیاء مجاز باشد، می‌توانیم در تمام مکان‌ها از تمام n شئی استفاده کنیم و در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها عبارتست از: $n\times n\times n\cdots n=n^n$.

مثال ۷: اگر در مثال ۶ از هر سه کتاب به تعداد دلخواه داشته باشیم تعداد کل جایگشت‌ها عبارتست از: $۳\times۳\times۳=۳^۳=۲۷$

۲-۱-۲ ترتیب‌های n شئی به گروههای rتایی (P_r^n)

یک حالت کلی‌تر از جایگشت‌ها قرار دادن n شی متمایز در r $(r\le n)$ مکان، به ترتیب می‌باشد که با توجه به روش بدست آوردن تعداد کل جایگشت‌ها که گفته شد در این حالت نیز تعداد کل جایگشتهای n شی متمایز در r مکان عبارتست از:

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

که آنرا با (P_r^n) می‌دهیم. توجه کنید که $P_n^n=n!$ که همان تعداد کل جایگشت‌هاست. و اگر تکرار اشیاء مجاز باشد در این صورت تعداد حالات ممکن عبارتست از:

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\ \text{بار}}=n^r$$

مثال ۸: به چند طریق می‌توان با حروف A , B , C , D , E یک کلمه سه حرفی ساخت؟

$$P_۳^۵=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=۵\times۴\times۳=۶۰$$

توجه کنید که حروف متمایز می‌باشند.

مثال ۹: از بین ۱۵ تیم شرکت کننده در مسابقه فوتبال به چند طریق سه تیم رتبه‌های اول و دوم و سوم را بدست می‌آورند؟

$$P_۳^{۱۵}=\frac{۱۵!}{(۱۵-۳)!}=\frac{۱۵!}{۱۲!}=۱۵\times۱۴\times۱۳=۲۷۳۰$$

مثال ۱۰: اگر در مثال ۸ تکرار حروف مجاز باشند تعداد حالات ممکن چند تاست؟

$$n^r:۵\times۵\times۵=۵^۳=۱۲۵$$

حال حالت خاصی از جایگشت را در نظر می‌گیریم که در آن تمامی اشیاء متمایز نیستند.

مثال ۱۱: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه book را بدست آورید.

در این حالت حرف o دوبار تکرار شده است بنابراین تمامی اشیاء متمایز نیستند اما مجدداً با استفاده از اصل ضرب می‌توانیم تعداد حالات را محاسبه کنیم.

ابتدا تعداد کل حالات را بدون در نظر گرفتن عدم تمایز اشیاء بدست می‌آوریم که برابر است با:

$$n!=۴!=۲۴$$

دقت کنید که در فضای نمونه مثلاً دو جایگشت obok و obok دوبار تکرار می‌شوند.

زیرا فرض شده است تمام اشیاء (حروف) متمایز باشند اما چون حرف o دوبار تکرار شده استو مسلماً با جابجایی دو حرف o در تمام حالات تغییری در کلمه بوجود نمی‌آید بنابراین طبق اصل ضرب !۲ اضافه در عدد !۴ ضرب شده است که برای حذف آن می‌بایستی !۴ را بر !۲ تقسیم کنیم بنابراین تعداد کل حالات عبارتست از:

$$\frac{۴!}{۲!}=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$$

حالت کلی این مساله بصورت زیر است:

اگر از n شئی، $n_۱$ تای آنها مشابه یکدیگر و $n_۲$ تای آنها مشابه یکدیگر و ..... و n_k تای آنها مشابه یکدیگر باشند تعداد حالاتی که می‌توان این n شی را در یک ردیف مرتب کرد عبارتست از:

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}\ ,\quad \sum_{i=۱}^{k} n_i=n :$$

که آنرا با $\left(n_۱,n_۲,\cdots,n_k\right)$ یا $c_n^{n_۱,n_۲,\ldots,n_k}$ نمایش دهیم.

مثال ۱۲: به چند طریق می‌توان دانشجویان یک کلاس ۲۰ نفری را به دسته‌های ۳ و ۴ و ۶ و ۷ نفری تقسیم نمود؟

در این مثال با وجود اینکه تمام اشیاء (دانشجویان) متمایز هستند اما چون هدف تقسیم آنها به چهار دسته ۳ و ۴ و ۶ و ۷ نفری است در نتیجه دانشجویان تخصیص داده شده به هر دسته مثل اشیاء مشابه در نظر گرفته می‌شوند به عبارت بهتر بین تخصیص دانشجوی iام به دسته jام تفاوت قایل هستیم (رعایت ترتیب) اما بین دانشجویان تخصیص داده شده به یک دسته مشخص تفاوتی قایل نیستیم (تشابه) بنابراین تعداد حالات ممکن عبارتست از:

$$\frac{۲۰!}{۳!\,۴!\,۶!\,۷!}$$

توجه کنید که می‌بایستی حتماً مجموع تعداد اعضای دسته‌ها برابر تعداد کل دانشجویان باشد»

$$۳+۴+۶+۷=۲۰$$

۲-۱-۳ ترکیب و مسایل انتخاب

تا بحال با اشیاء متمایز و نظو در ترتیب قرارگیری سروکار داشتیم اما اگر بخواهیم از ترتیب قرار گیری صرف نظر کنیم این حالت به مساله انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز تبدیل می‌شود که به آن ترکیب r شئی می‌گوییم.

مثال ۱۳: از بین ۵ مدل اتومبیل سه مدل را انتخاب کنیم به چند طریق این امر امکان‌پذیر است؟

اتومبیل‌ها را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم و سه جایگاه برای سه مدل اتومبیل انتخابی در نظر می‌گیریم بنابراین طبق جایگشت‌های ۳ شئی از ۵ شئی تعداد کل حالات عبارتست از:

$$P_۳^۵=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=۶۰$$

اما چون مساله تنها انتخاب می‌باشد و ترتیب قرار گیری مورد نظر نیست بنابراین به عنوان مثال حالت‌های زیر تکراری محسوب می‌شوند:

$(۱,۲,۳)\quad(۳,۲,۱)\quad(۲,۱,۳)\quad(۲,۳,۱)$

$(۱,۳,۲)\quad(۳,۱,۲)$

به تعداد جایگشت‌های مکان‌های سه اتومبیل، جایگشت تکراری داریم که طبق اصل ضرب یعنی عدد $۳!$ اضافه در عدد $P_{۳}^{۵}$ ضرب شده است و در نتیجه تعداد کل انتخاب‌ها عبارتست از:

$$\frac{P_{۳}^{۵}}{۳!} = \frac{۵!}{۳!\,۲!} = ۱۰$$

در حالت کلی تعداد حالات انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز عبارتست از:

$$c_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (o \le r \le n)$$

که آنرا با $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهند.

در مثال بعد حالتی را بررسی می‌کنیم که بتوان از اشیاء تکراری نیز استفاده نمود:

مثال ۱۴: می‌خواهیم از سه دسته اسکناس ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی ۵ عدد اسکناس انتخاب کنیم، این کار به چند طریق ممکن است؟

همانطور که در این مساله مشاهده می‌کنید اشیاء اسکناس ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی می‌باشند که متمایز می‌باشند. اما می‌توانیم از آنها به تعداد دلخواه انتخاب کنیم. مثلاً حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

AAABB یا ABCBC یا BBBBB

A= تومانی ۱۰۰

B= تومانی ۲۰۰

C= تومانی ۵۰۰

توجه: می‌توانیم از یک اسکناس اصلاً انتخاب نکنیم مثل حالت BBBBB که از اسکناس ۱۰۰ و ۵۰۰ تومانی استفاده نشده است.

برای حل مساله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$ABCBC \rightarrow ABBCC \rightarrow X|XX|XX$$

زیرا ترتیب مهم نیست

با توجه به حالت بالا A را قبل از پرانتز اول و B را بین دو پرانتز و نهایتاً C را بعد از پرانتز آخر می‌آوریم بنابراین تمام حالت‌ها را می‌توان با قرار دادن دو پرانتز نمایش داد.

پس تعداد کل حالات ممکن از قرار دادن ۵ حرف X و دو پرانتز بدست می‌آید که برابر است با:

$$\binom{۳+۵-۱}{۵} = \binom{۷}{۵} = \frac{۷!}{۵!\,۲!}$$

در حالت کلی انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز با تکرار برابر است با:

$$\binom{n+r-۱}{r}$$

۲-۲ فضای نمونه و پیشامد

مجموعه تمام حالت‌های ممکن را از انجام یک آزمایش تصادفی فضای نمونه نامیدیم و آنرا با S نمایش داده‌ایم حال به معرفی پیشامد می‌پردازیم.

تعریف: هر یک از زیر مجموعه‌های فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامیم و در صورتی که نتیجه آزمایش تصادفی عضوی از پیشامد E باشد می‌گوییم پیشامد E به وقوع پیوسته است.

مثال ۱۵: تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد پیشامدهای ممکن به ازای پرتاب یک عدد تاس را بدست آورید:

حل: پرتاب یک عدد تاس منجر به شش حالت ۱ تا ۶ می‌شود که در نتیجه فضای نمونه عبارتست از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که ۶ عضو دارد اما چون هر کدام از زیر مجموعه‌های فضای نمونه می‌تواند به عنوان یک پیشامد در نظر گرفته شوند و تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه ۲^N ($n=$ تعداد اعضای مجموعه) می‌باشد بنابراین تعداد پیشامدهای ممکن $۶۴=۲^۶$ می‌باشد.

به عنوان مثال هر کدام از مجموعه‌های A ، B ، C ، D پیشامدهایی برای فضای نمونه S می‌باشند:

$$A=\{\phi\} \quad D=\{۱,۲,۳\} \quad C=\{۲\} \quad D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

۲-۲-۱ انواع پیشامدها و اعمال روی پیشامدها

با توجه به تعریف پیشامد حالت‌های مختلفی برای پیشامدها خواهیم داشت که عبارتند از:

پیشامد ساده: پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد را پیشامد ساده می‌نامیم مثل

E={(خط و شیر)}

که در نتیجه حاصل از پرتاب دو سکه با هم می‌باشد.

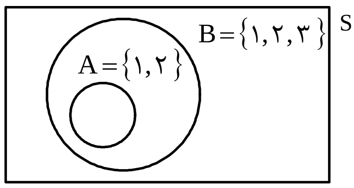
پیشامد مرکب: پیشامدی دارای دو عضو یا بیشتر را مرکب می‌نامیم مثل: $E=\{۱,۲\}$

پیشامد تهی یا محال: اگر پیشامدی دارای هیچ عضوی نباشد به آن پیشامد محال گویند.

پیشامد حتمی: پیشامدی که برابر با فضای نمونه S باشد پیشامد حتمی نامیده می‌شود مثلاً در پرتاب یک عدد تاس $E=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ پیشامد حتمی است.

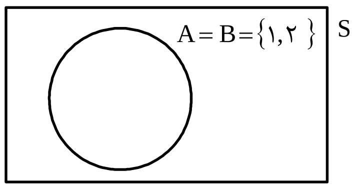
از آنجا که پیشامدها خود یک مجموعه می‌باشند می‌توان اعمالی که روی مجموعه‌ها تعریف می‌شود را روی پیشامدها نیز اعمال نمود. دو پیشامد را A و B و فضای نمونه را S در نظر می‌گیریم.

۱- هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد گوییم پیشامد A زیر پیشامد B می‌باشد و آنرا بصورت $A\subset B$ نمایش می‌دهیم. این مطلب را در شکل نیز مشاهده می‌کنید.



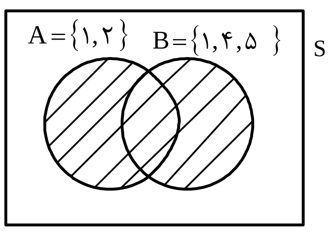
۲- هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد و بالعکس دو پیشامد را مساوی گویند.

$$A=B \Leftrightarrow (A\subset B \ , \ B\subset A)$$



۳- اجتماع دو پیشامد: در صورتی که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند گویند اجتماع دو پیشامد یا $A\cup B$ رخ داده است و آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:

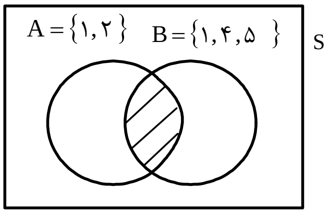
$$A\cup B=\{x \mid x\in A \ \text{یا} \ x\in B\}$$



$A\cup B=\{۱,۲,۴,۵\}$

۴- اشتراک دو پیشامد: در صورتی که هر دو پیشامد A و B بصورت همزمان رخ دهند گویند اشتراک آندو یا $A \cap B$ رخ داده است.

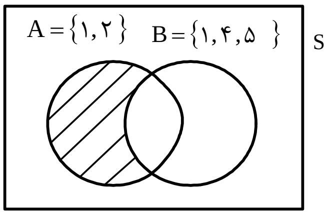
$$A \cap B = \{x |\ x \in A\ ,\ \ x \in B\}$$



$A \cap B = \{۱\}$

۵- تفاضل دو پیشامد: اگر فقط A رخ دهد در حالی که B رخ نداده باشد گویند تفاضل دو پیشامد یا A-B رخ داده است.

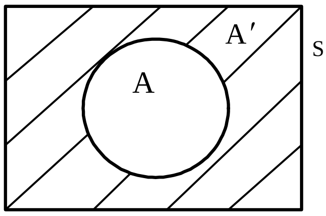
$$A - B = \{x |\ x \in A\ \ ,\ x \in B\}$$



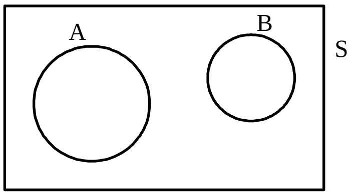
$A - B = \{۲\}$

۶- متمم یک پیشامد: A' را متمم پیشامد A در نظر می‌گیریم وقتیکه رخ دادن A' به معنی عدم وقوع A می‌باشد.

$$A' = \{x |\ x \in S\ \ ,\ x \notin A\}$$



۷- در صورتی که دو پیشامد همزمان نتواند رخ دهند یا به عبارتی اشتراکی نداشته باشند آندو را دو پیشامد ناسازگار گوییم در این حالت $A \cap B = \phi$



۲-۳ احتمال

به هر یک از پیشامدها می‌توان عددی نسبت داد که معرف میزان احتمال وقوع آن پیشامد باشد. برای این منظور می‌بایستی از قواعدی پیروی کنیم که برای تمام پیشامدها یکی باشد با استفاده از تعریف فراوانی نسبی می‌توان به محاسبه احتمال پرداخت به این ترتیب که یک آزمایش را N مرتبه انجام می‌دهیم و تعداد دفعاتی که پیشامد A مشاهده شده را $n(A)$ در نظر می‌گیریم در این صورت فراوانی نسبی وقوع پیشامد A عبارتست از $\frac{n(A)}{N}$ که آنرا احتمال وقوع پیشامد A نامیده و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

فراوانی نسبی همواره عددی بین صفر و یک می‌باشد بنابراین مقدار احتمال نیز در این بازه می‌باشد از طرفی احتمال وقوع تمام اعضای فضای نمونه برابر ۱ می‌باشد یعنی $p(S)=۱$ از طرفی تعداد دفعات مشاهده یکی از دو پیشامد A یا B در صورتی که آندو با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند برابر است با تعداد دفعات مشاهده $A \cap B$ بنابراین $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ به شرطی که $A \cap B = \phi$

سه قلعده بدست آمده در بالا، اصول موضوعه احتمال می‌گوییم و بطور کلی احتمالات باید تابع قوانین زیر باشند:

$۱ - p(S) = ۱$

$۲ - p(A) \geq ۰ \qquad \forall\ A \subset S$

$۳ - p(A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots) = p(A_۱) + p(A_۲) + \cdots$

هر گاه $A_i \cap A_j = \phi$ ، $\forall\ i \neq j$

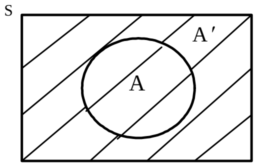
۲ . ۳ . ۱ قوانین احتمال

قبلاً با استفاده از قوانین مجموعه‌ها اعمالی را روی پیشامدها تعریف کردیم حالا با استفاده از آنها و اصول موضوعه احتمال، چندین قانون برای احتمالات بدست می‌آوریم.

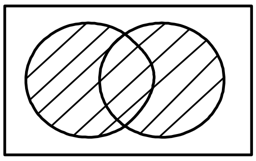
قضیه: $p(\phi) = ۰$

اثبات: $S \cup \phi = \phi$ پس بنابر اصل ۳

$$p(S\cup\phi) = p(s) + p(\phi) = ۱ + p(\phi) \quad \Rightarrow \quad ۱ + p(\phi) = ۱ \Rightarrow p(\phi) = ۰$$



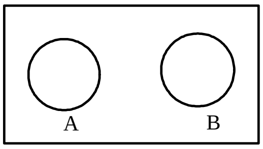
با استدلالی مشابه می‌توان قضایای زیر را اثبات نمود:



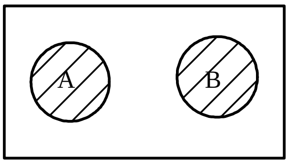
۱- $p(A') = ۱ - p(A)$

۲- $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

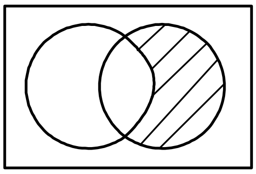
۳- اگر A و B ناسازگار باشند داریم $A\cap B = \phi$ و در نتیجه



$$p(A\cup B) = ۰$$

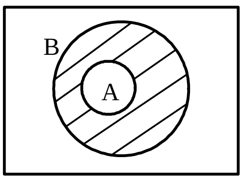


$$p(A\cup B) = p(A) + p(B)$$



۴- $p(A\cup B) = p(B\cap A') = p(B) - p(A\cap B)$

۵- اگر $A \subset B$ انگاه:



$$\begin{cases} p(B-A) = p(B) - p(A) \\ p(A) \le p(B) \end{cases}$$

مثال ۱۶: سه سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم احتمال بدست آوردن سه شیر یا سه خط چقدر است؟

حل: پیشامد A را بدست آوردن سه شیر در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب پیشامد B را بدست آمدن سه خط

$A = \{ش و ش و ش\}$ $B = \{خ و خ و خ\}$

از آنجا که $A\cap B = \phi$ بنابراین A وb ناسازگار هستند و در نتیجه پیشامد بدست آمدن سه شیر یا سه خط برابر است با:

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B)$$

با توجه به قواعد شمارش تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با: $n(A) = ۱ ,\ n(S) = ۲^{۳} = ۸$

بنابراین:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

پس:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}$$

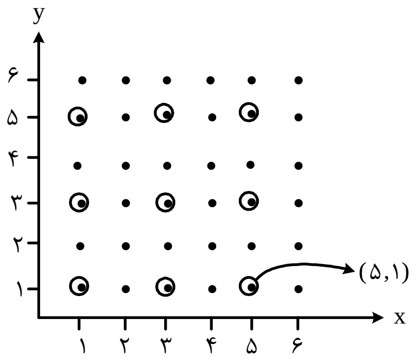
مثال ۱۷: یک جفت تاس را می‌ریزیم احتمال بدست آمدن اعدادی فرد روی هر دو تاس چقدر است؟

$A=$ {آمدن اعداد فرد بر روی دو تاس}

$n(A)=۳\times ۳=۹$

سه عدد فرد بر روی تاس اول $\{۱,۳,۵\}$

در شکل روبرو اعضای مجموعه A در دوایری نشان داده شده‌اند:



تعداد کل حالات از $n(S)=۶\times ۶=۳۶$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۸: یک سکه را ۵ مرتبه پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل دوبار شیر بیاید چقدر است؟

$A=$ پیشامد اینکه حداقل ۲ بار شیر بیاید

$A'=$ پیشامد یا اصلاً شیر نیاید یا دقیقاً یکبار شیر بیاید $=\left\{\begin{array}{l}\text{و (خ‌وخ‌وش‌وخ) و (خ‌وخ‌وخ‌وش) و (خ‌وخ‌وخ‌وخ‌وخ)}\\ \text{(ش‌وخ‌وخ‌وخ‌وخ) و (خ‌وش‌وخ‌وخ‌وخ) و (خ‌وخ‌وش‌وخ‌وخ)}\end{array}\right\}$

$$n(S)=۲^{۵}=۳۲$$

$$p(A')=\frac{۶}{۳۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

$$p(A)=۱-p(A')=۱-\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

مثال ۱۹: الف) تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_n=r$ را در صورتیکه $x_i\geq ۰\ ,\ i=۱,۲,\ldots,n$ باشد را بدست آورید؟

ب) می‌خواهیم ۷ عدد بلیط را بین سه نفر تقسیم کنیم بطوریکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد مطلوبست احتمال اینکه به نفر دوم حداقل ۲ بلیط برسد؟

حل: الف) این مساله مشابه حالتیست که بخواهیم r شئی را بین n نفر تقسیم کنیم بطوریکه در این حالت به هر شخص می‌توان بیشتر از یک شئی داد و ترتیب اهمیتی ندارد در قسمت قوانین شمارش نشان دادیم که جواب چنین مساله‌ای با استفاده از رابطه $\binom{n+r-۱}{r}$ بدست می‌آید.

ب) تعداد کل حالات فضای نمونه در این حالت از حل معادله $x_i\geq ۱$ $\quad x_۱+x_۲+x_۳=۷$ در نظر گرفته شود اما برای استفاده از رابطه $\binom{n+r-۱}{r}$ باید $x_i\geq ۰$ باشد بنابراین از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_i \geq 1 \rightarrow x_i - 1 \geq 0 \quad y_i = x_i - 1 \Rightarrow y_i \geq 0$$
$$\Rightarrow x_i = y_i + 1 \qquad y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 7$$
$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 7 - 3 = 4$$

بنابراین مساله به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

که جواب آن عبارتست از $n(s) = \binom{3+4-1}{4} = 15$

برای بدست آوردن تعداد حالات مطلوب باید مساله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \,,\, x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

دوباره با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$y_1 = x_1 - 1 \quad , \quad y_3 = x_3 - 1 \quad , \quad y_2 = x_2 - 2$$
$$\Rightarrow y_i \geq 0$$

که در نتیجه مساله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$A: \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

که جواب آن عبارتست از:

$$n(A) = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

بنابراین احتمال فوق عبارتست از:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

۲ . ۴ احتمال روی فضای نمونه نامتناهی

با توجه به نوع مسایل فضای نمونه می‌تواند نامتناهی باشد در این حالت مجموعه پیشامدها نیز نامتناهی خواهند بود البته احتمال پیشامدها می‌بایستی در اصول موضوعه صدق کند بطوریکه $0 \leq p(A_i) \leq 1 \;,\; \sum_{i=1}^{+\infty} p(A_i) = 1$.

مثال ۲۰: A و B به ترتیب به سوی هدفی شلیک می‌کنند A با احتمال $\frac{1}{2}$ و B با احتمال $\frac{3}{4}$ هدف را مورد اصابت قرار می‌دهند مطلوبست احتمال اینکه B زودتر از A هدف را بزند؟ (در صورتی که A اول شروع کند).

پیشامد اینکه A هدف را بزند : A'

$$p(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

احتمال اینکه B به هدف نزند : B'

برای اینکه B زودتر هدف را مورد اصابت قرار دهد حالات زیر را خواهیم داشت:

پیشامد	$A'B$	$A'B'A'B$	$A'B'A'B'A'B'$	$\cdots$
احتمال	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$	$(\frac{1}{2})^2 \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{4})^2 \frac{3}{4}$	$\cdots$

$$p(B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

از آنجا که پیشامدها ناسازگار هستند باید احتمال اجتماع تمام پیشامدها محاسبه شود که برابرست با مجموع احتمالات هر یک از پیشامدها یعنی:

$$p(A'B\cup A'B'A'B\cup\cdots)=p(A'B)+p(A'B'A'B)+\cdots=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8}+(\frac{1}{8})^2+\cdots)=\frac{3}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{7}$$

مثال ۲۱: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر مشاهده شود مطلوبست:

الف) احتمال آنکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد.

ب) احتمال آنکه حداکثر ۱۰ پرتاب لازم باشد.

حل: برای اینکه برای بار اول شیر مشاهده کنیم می‌بایستی در تمام پرتاب‌های قبلی خط مشاهده شده باشد در این صورت احتمال‌ها را می‌توان در جدول زیر خلاصه کنیم:

S	e_1 ش	e_2 خ ش	e_3 خ خ ش	e_4 خ خ خ ش	$\cdots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$

پیشامد اینکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد: A

الف) برای اینکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد باید پیشامدهای $e_2, e_4, e_6, \ldots$ رخ دهند بنابراین:

$$p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

همچنین می‌توان احتمال اینکه تعداد فدی پرتاب لازم باشد را از روی $p(A)$ محاسبه نمود. چون پیشامد تعداد فردی پرتاب متمم پیشامد A می‌باشد بنابراین:

$$p(A')=1-p(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

ب) پیشامد انکه حداکثر ۱۰ پرتاب لازم باشد $=B$

برای محاسبه احتمال پیشامد B می‌بایستی مجموع ۱۰ جمله اول از جدول را بدست بیاوریم اما با استفاده از متمم این پیشامد می‌توان تعداد آنرا به راحتی محاسبه نمود:

پیشامد اینکه حداقل ۱۱ پرتاب لازم باشد $=B'$

$$p(B')=(\frac{1}{2})^{11}+(\frac{1}{2})^{12}+\cdots=\frac{(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{10}$$

$$p(B)=1-p(B')=1-(\frac{1}{2})^{10}=\frac{1023}{1024}\approx 0/999$$

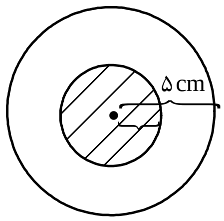
۲ . ۵ فضای نمونه پیوسته

در شرایطی می‌توان فضای نمونه را طوری تعریف نمود که بصورت یک بازه یا یک سطح در نظر گرفته شود. مثلاً $S=[1,2]$ در این حالت هر زیر بازه مثل $E=[1/5,1/75]$ می‌تواند به عنوان یک پیشامد در نظر گرفته شود. برای محاسبه احتمال پیشامد باز هم حالت مطلوب را به کل فضای نمونه در نظر می‌گیریم یعنی:

$$p(A)=\frac{A\ \text{طول بازه}}{S\ \text{طول فاصله}}\quad \text{یا}\quad \frac{A\ \text{مساحت ناحیه}}{S\ \text{مساحت فضای نمونه}}$$

مثال ۲۲: تیراندازی به هدفی شلیک می‌کند که قطر آن ۱۰ سانتیمتر و قطر دایره مرکزی هدف ۲ سانتیمتر است احتمال اینکه تیر به مرکز هدف اصابت کند چقدر است؟

حل:



با توجه به شکل مساحت فضای نمونه عبارتست از: ۲۵π

و مساحت ناحیه مطلوب عبارتست از: π

بنابراین احتمال مورد نظر عبارتست از:

$$p(A)=\frac{\pi}{۲۵\pi}=\frac{۱}{۲۵}$$

مثال ۲۳: در مثال قبل احتمال اینکه تیرانداز دقیقاً مرکز هدف را بزند چقدر است؟

از آنجا که مرکز هدف یک نقطه محسوب می‌شود بنابراین مساحت آن صفر واحد می‌باشد و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر صفر خواهد بود.

۲ . ۶ احتمال شرطی

در بسیاری از مواقع می‌دانیم که پیشامد A رخ داده و می‌خواهیم احتمال رخ دادن پیشامد B را مشروط بر اینکه A رخ داده است بدست بیاوریم در این حالت می‌بایستی از تعاریف احتمال شرطی استفاده کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲۴: یک تاس طوری طراحی ششده است که احتمال آمدن هر عدد متناسب با آن عدد می‌باشد در این صورت:

الف) احتمال رخ دادن یک عدد زوج را بیابید.

ب) اگر بدانیم عدد حاصل از پرتاب کوچکتر یا مساوی با عدد ۴ می‌باشد احتمال آمدن یک عدد فرد را بیابید.

ابتدا احتمال هر عدد را محاسبه می‌کنیم با توجه به اینکه احتمال آمدن هر عدد باید متناسب با آن عدد باشد معادله زیر را داریم:

$$x+۲x+۳x+۴x+۵x+۶x=۱$$

که در آن x احتمال آمدن عدد ۱ می‌باشد.

$$۲۱x=۱ \quad\rightarrow\quad x=\frac{۱}{۲۱}$$

بنابراین:

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

توجه کنید که مجموع احتمالات برابر ۱ می‌باشد.

الف) پیشامد رخ دادن عدد زوج = A

$$A=\{۲,۴,۶\}$$

$$p(A)=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۴}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱۲}{۲۱}$$

ب) در این حالت مجموعه فضای نمونه محدود می‌باشد به $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ زیرا می‌دانیم عدد بدست آمده کوچکتر یا مساوی با ۴ می‌باشد. از طرفی چون احتمال آمدن هر عدد متناسب با همان عدد است پس مدل احتمال روی این فضای نمونه جدید عبارتست از:

$$x+۲x+۳x+۴x=۱ \quad\rightarrow\quad ۱۰x=۱ \quad\rightarrow\quad x=\frac{۱}{۱۰}$$

S	۱	۲	۳	۴
احتمال	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۴}{۱۰}$

(پیشامد رخ دادن عدد فرد به شرط وقوع B) =C

بنابراین احتمال وقوع یک عدد فرد به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد عبارتست از:

$$p(C)=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

در حالت کلی تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف: احتمال وقوع پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A که آنرا با نماد $P(B|A)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{p(A)} \quad , \quad P(A)\neq ۰$$

مثال ۲۵: با استفاده از تعریف احتمال مثال ۲۴ (ب) را محاسبه می‌کنیم.

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ پیشامد وقوع عددی کوچکتر از ۴

$B=$ پیشامد رخ دادن عددی فرد $=\{۱,۳,۵\}$

$$P(A)=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}+\frac{۴}{۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

$$A\cap B=\{۱,۳\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}=\frac{۴}{۲۱}$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۱۰}{۲۱}}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

ملاحظه می‌کنید که در این حالت دیگر نیازی به محاسبه جدول احتمالات میانی نمی‌باشد.

مثال ۲۶: در جعبه‌ای ۵ مهره به رنگ آبی و ۴ مهره به رنگ قرمز موجود می‌باشند از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم اگر بدانیم دو مهره از سه مهره به رنگ آبی می‌باشند احتمال اینکه مهره سوم به رنگ قرمز باشد چقدر است؟

$A=$ پیشامد اینکه دو مهره از سه مهره آبی باشند

$B=$ پیشامد اینکه یک مهره از سه مهره قرمز باشد

$A\cap B=$ پیشامد اینکه دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} \qquad P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}}}{\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}}$$

۲ . ۷ قانون ضرب احتمال

در صورتی که فرمول $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\,P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A)$$

در نتیجه فرمول کلی زیر را بدست می‌آوریم:

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

این رابطه در حالتی که دو پیشامد A وb بتوانند بصورت همزمان رخ دهند به کار می‌رود و به آن قانون ضرب احتمال می‌گوییم.

مثال ۲۸: جدول زیر احتمال شاغل بودن مردان و زنان را در یک جامعه آماری نشان می‌دهد:

مثلاً در جدول احتمال اینکه شخص مرد باشد ۰/۵۷ و احتمال اینکه مرد باشد و شاغل هم باشد ۰/۵۲ می‌باشد.

		M مرد	F زن	جمع
E	شاغل	۰/۵۲	۰/۴۱	۰/۹۳
U	بیکار	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۷
	جمع	۰/۵۷	۰/۴۳	۱/۰۰

با توجه به جدول به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر از جامعه فوق یک نفر انتخاب کنیم و بدانیم شاغل است احتمال اینکه مرد باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نفر انتخابی از جامعه فوق شاغل باشد؟

ج) اگر نفر انتخابی مرد باشد احتمال اینکه شاغل باشد چقدر است؟

حل:

الف) تعریف می‌کنیم:

U= پیشامد اینکه نفر انتخابی بیکار باشد

E= پیشامد اینکه نفر انتخابی شاغل باشد

M= پیشامد اینکه نفر انتخابی مرد باشد

F= پیشامد اینکه نفر انتخابی زن باشد

بنابراین مقدار $P(E|M)$ را می‌خواهیم:

با توجه به جدول داریم: $P(E\cap M)=۰/۵۲$

$$P(M) = P(M\cap E)+P(M\cap U)=۰/۵۲+۰/۰۵=۰/۵۷$$

$$P(E|M)=\frac{P(E\cap M)}{P(M)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۵۷}=۰/۹۱$$

ب) پس:

$$P(E)=P(E\cap M)+P(E\cap F) = ۰/۵۲+۰/۴۱ = ۰/۹۳$$

ج)
$$P(M|E)=\frac{P(M\cap E)}{P(E)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۹۳}=۰/۵۶$$

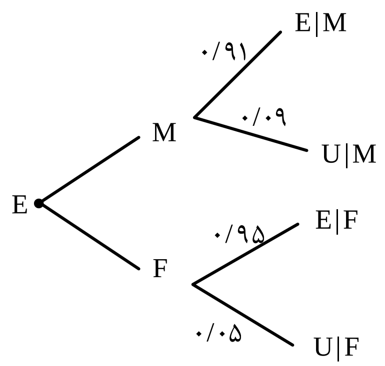
مثال ۲۹: فرض کنید در مثال قبل تنها اطلاعات زیر را در اختیار داشته باشیم:

$P(M)=۰/۵۷$ $\quad$ $P(E|M)=۰/۹۱$ $\quad$ $P(U|M)=۰/۰۹$

$P(F)=۰/۴۳$ $\quad$ $P(E|F)=۰/۹۵$ $\quad$ $P(U|F)=۰/۰۵$

در اینصورت مقادیر $P(E)$ و $P(M|E)$ را محاسبه کنید.

حل: احتمالات داده شده را می‌توان به صورت درختی در نظر گرفت در این صورت داریم:



که طبق قانون ضرب احتمال:

$$P(E)=P(E\cap M)+P(E\cap F)=P(E|M)\,P(M)+P(E|F)\,P(F)$$
$$=۰/۹۱\times۰/۵۷+۰/۹۵\times۰/۴۲=۰/۹۳$$
$$P(M|E)=\frac{P(M\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E|M)\times P(M)}{P(E\cap M)+P(E\cap F)}$$
$$=\frac{P(E|M)\,P(M)}{P(E|M)\,P(M)+P(E|F)\,P(F)}=\frac{۰/۹۱\times۰/۵۷}{۰/۹۱\times۰/۵۷+۰/۹۵\times۰/۴۳}=\frac{۰/۵۲}{۰/۹۳}=۰/۵۶$$

۲ . ۸ پیشامدهای مستقل

رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ را در نظر بگیرید، اگر تحت شرایطی مقدار $P(A\cap B)$ برابر $P(A)\times P(B)$ شود خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

به عبارتی احتمال وقوع A به شرط B برابر با احتمال وقوع A می‌باشد و این یعنی دانستن اینکه پیشامد B رخ داده است هیچ اطلاعاتی در مورد رخ دادن پیشامد A بدست نمی‌دهد بنابراین می‌توان گفت دو پیشامد از یکدیگر مستقل هستند و تعریف زیر را خواهیم داشت»

تعریف: دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مثال ۳۰: در یک ایستگاه مترو احتمال اینکه قطار به موقع در ایستگاه قرار داشته باشد ۰/۹ می‌باشد مطلوبست:

الف) احتمال اینکه قطار سه روز متوالی به موقع در ایستگاه باشد.

ب) احتمال اینکه قطار در روز سوم برای بار دوم دیر کند.

حل:

الف) ابتدا پیشامد زیر را تعریف می‌کنیم:

$A =$ احتمال اینکه قطار در روز iام به موقع در ایستگاه قرار داشته باشد

در این صورت می‌توان پیشامدهای $A_۱ , A_۲ , A_۳$ را زا یکدیگر مستقل در نظر گرفت زیرا پیشامد اینکه قطار امروز دیر کند به پیشامد اینکه قطار فردا هم دیر کند ارتباطی ندارد بنابراین با توجه به فرمول استقلال داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱) \times P(A_۲) \times P(A_۳) = ۰/۹ \times ۰/۹ \times ۰/۹ = ۰/۷۲۹$$

ب) پیشامد زیر را تعریف می‌کنیم:

$A'_i =$ پیشامد اینکه قطار در روز iام دیر کند

$$P(A'_i) = ۱ - P(A_i) = ۱ - ۰/۹ = ۰/۱$$

برای اینکه قطار در روز سوم برای بار دوم دیر کند می‌بایستی در دو روز قبل حداقل یکبار دیر کرده باشد. احتمال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$P\left[(A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳) \cup (A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)\right] =$$

$$= P(A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳) + P(A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)$$

$$= P(A'_۱)\ P(A_۲)\ P(A'_۳) + P(A_۱)\ P(A'_۲)\ P(A'_۳)$$

$$= ۰/۱ \times ۰/۹ \times ۰/۱ + ۰/۹ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = ۰/۰۱۸$$

استقلال سه پیشامد: سه پیشامد A ، B و C را مستقل از یکدیگر می‌نامیم اگر داشته باشیم:

۱- $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

۲- $P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$

۳- $P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$

۴- $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

پیشامدهای ناسازگار و مستقل: به تفاوت‌های پیشامدهای ناسازگار و مستقل توجه کنید:

- اگر دو پیشامد ناسازگار باشند: نمی‌توانند همزمان رخ دهند، احتمال اشتراک آنها صفر می‌باشد، احتمال اجتماع آنها برابر مجموع احتمالات هر یک می‌باشد.

- اگر دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند: هر دو می‌توانند همزمان رخ دهند، احتمال اشتراک آنها برابر با حاصل ضرب احتمالات آنهاست، احتمال اجتماع آنها کوچکتر یا مساوی با مجموع احتمالات هر یک می‌باشد.

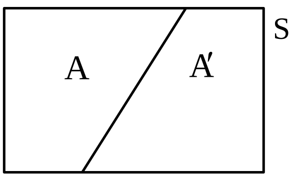
* توجه کنید که اگر دو پیشامد بخواهند بصورت همزمان هم ناسازگار باشند و هم مستقل در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = ۰ \\ P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A(\ P(B) = ۰ \Rightarrow P(A) = ۰ \quad \text{یا} \quad P(B) = ۰$$

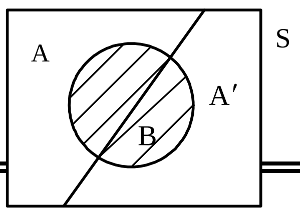
۲ . ۹ فرمول احتمال بینر و فرمول تفکیک احتمال

فرمول احتمال بینر روش ساده‌تری برای محاسبه احتمالات شرطی در حالتی که اطلاعات کمی در مورد مساله داریم ارایه می‌کند که در ذیل نحوه بدست آوردن آنرا شرح می‌دهیم:

فرض کنید فضای نمونه S را به دو پیشامد A و A' که متمم آن می‌باشد تقسیم کنیم به صورت شکل زیر:



حال برای حل مسئله در حالت کلی پیشامد B را در این فضا طوری در نظر می‌گیریم که با A و A' اشتراک داشته باشد:



می‌خواهیم احتمال A به شرط وقوع B را محاسبه کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad ۱-۱$$

از روی شکل می‌توان به راحتی احتمال وقوع B را محاسبه نمود.

$$B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)\,P(B|A)+P(A')\,P(B\,|\,A') \qquad ۱-۲$$

به فرمول فوق فرمول تفکیک احتمال گویند که حالت کلی‌تر آنرا در ادامه بدست می‌آوریم.

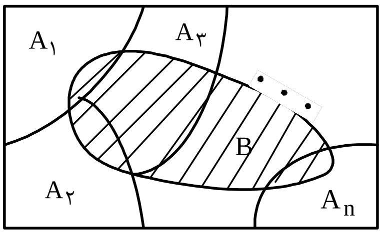
$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B\,|\,A) \qquad ۱-۳$$

$$۱-۱,۱-۲,۱-۳ \qquad \Rightarrow \qquad P(A|B)=\frac{P(A)\,P(B|A)}{P(A)\,P(B\,|A)+P(A)\,P(B|A')} \qquad ۱-۴$$

رابطه ۴-۱ به فرمول بنیر معروف است.

برای بدست آوردن حالت کلی‌تر روابط ۲-۱ و ۴-۱ فرض کنید فضای نمونه به پیشامدهای $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ طوری تقسیم شده باشد که به ازای هر $i\neq j$ داشته باشیم $A_i\cap A_j=\phi$ و $S=\bigcup_{i=۱}^{n}A_i$.

مطابق شکل زیر:



در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم فضای نمونه S به n پیشامد $A_۱$ تا A_n افراز شده است. و پیشامد B نیز پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشد در این صورت داریم:

$$B=B(B\cap S)=B\cap(\bigcup_{۱}^{n}A_i)=(B\cap A_۱)\cup(B\cap A_۲)\cup\cdots\cup(B\cap A_n)$$

که در این رابطه پیشامدهای $(B\cap A_۱)\,,\,(B\cap A_۲)\,,\cdots(B\cap A_n)$ دو به دو ناسازگارند.

بنابراین داریم:

$$P(B)=P(B\cap A_۱)+P(B\cap A_۲)+\cdots+P(B\cap A_n)=P(A_۱)\,P(B|A_۱)+P(A_۲)\,P(B|A_۲)$$

$$+\cdots+P(A_n)\,P(B|\,A_n)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)\,P(B|A_i)$$

این رابطه فرمول تفکیک احتمال یا فرمول احتمال کل نامیده می‌شود. به همین ترتیب برای $P(A_i\,|\,B)$ داریم:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\,P(B\cap A_i)}{\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)\,P(B\cap A_i)}$$

به این رابطه فرمول احتمال بینر می‌گوییم.

مثال ۳۱: احتمال افزایش قیمت سهام یک شرکت خصوصی در بورس در طول ۲ ماه مهر و آبان برابر ۰/۶ و احتمال سقوط قیمت سهام آن در طول این ۲ ماه برابر ۰/۳ است. همچنین اگر قیمت سهام شرکت در طول یکی از این دو ماه افزایش و در ماه دیگر کاهش پیدا کند در این صورت احتمال

اینکه در ماه اول قیمت سهام افزایش پیدا کند برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. مطلوبست احتمال اینکه قیمت سهام شرکت در ماه دوم هم افزایش پیدا کند به شرطی که در ماه اول افزایش پیدا کرده باشد.

حل: برای فضای نمونه ۴ حالت زیر را داریم:

$$S\{(I\ ,\ I)\ ,\ (D\ ,\ D)\ ,\ (I\ ,\ D)\ ,\ (I\ ,\ D)\}$$

افزایش قیمت سهام: I

کاهش قیمت سهام: D

توجه: برای سادگی حالت ثابت ماندن قیمت سهام در نظر نمی‌گیریم.

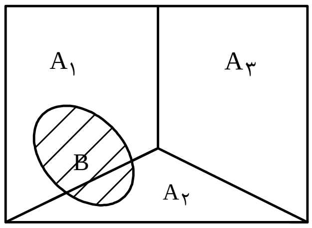
مثلاً $(I-D)$ یعنی قیمت سهام در ماه اول افزایش و در ماه دوم کاهش یافته است. حال پیشامدهای زیر را تعریف می‌نیم:

$A_۱ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر ماه افزایش پیدا می‌کند $=\{(I\ ,\ I)\}$

$A_۲ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در یک ماه افزایش و در یک ماه کاهش داشته باشد $=\{(I\ ,\ D)\ ,\ (D\ ,\ I)\}$

$A_۳ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر دو ماه کاهش داشته باشد $=\{(D\ ,\ D)\}$

$B=$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر ماه اول افزایش داشته باشد



$P(A_۱|B)=$ (افزایش در ماه اول | افزایش در ماه دوم) $P=$ (افزایش در ماه اول | افزایش در ماه دوم) P. بنابراین می‌بایستی مقدار احتمال $P(A_۱|B)$ را محاسبه کنیم با توجه به فرمول بینر داریم:

$$P(A_۱|B) = \frac{P(A_۱)\ P(B|A_۱)}{P(A_۱)\ P(B|A_۱)+ P(A_۲)\ P(B|A_۲) + P(A_۳)\ P(B|A_۳)}$$

$$P(A_۱) = ۰/۶ \quad , \quad P(B|A_۱)=۱ \quad , \quad P(B|A_۲) = \frac{۱}{۲}, \quad P(B|A_۳)= \frac{P(B\cap A_۳)}{P(A_۳)} P(A_۳) = \frac{\circ}{P(A_۳)} = \circ$$

بنابراین داریم:

$$P(A_۱|B) = \frac{۰/۶ \times ۱}{۰/۶ \times ۱ + ۰/۱ \times \frac{۱}{۲} + \circ} = ۰/۹۲۳$$