پیش حساب°

در این فصل به چند مبحث از جبر و هندسه می‌پردازیم که پیشنیاز حساب دیفرانسیل و انتگرال‌اند؛ و لذا، تحت نام " پیش حساب " گرد آمده‌اند. این امر که با بعضی از این مباحث قبلاً" در درسهای گذشته، به‌شکلی، آشنا شده‌اید نباید به‌شما امنیت کاذب بدهد. در عوض، از آشنایی به مهارت در آنها بروید، هرکجا لازم بود به معلوماتتان بیفزایید، آنقدر که درمطالعهٔ خود حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌خاطر عدم آمادگی سرگردان نشوید.

۱۰۰ مجموعه‌ها و اعداد

زبان مجموعه‌ها اغلب در ساده‌کردن بحثهای ریاضی مفید است. لیکن، مواظب افراط در استعمالش باشید؛ آن را ممسکانه و فقط وقتی به کار برید که واقعاً" مورد نیاز است.

هر گردایه از اشیاء از هر نوع یک**مجموعه** نام دارد، و خود اشیاء***عنصرها*** یا ***عضوهای*** مجموعه نامیده می‌شوند. مجموعه‌ها اغلب با حروف بزرگ و عنصرهایشان با حروف کوچک نموده می‌شوند. اگر x عنصری از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $x \in A$ ، که درآن‌علامت $\in$ خوانده می‌شود: " یک عنصر ... است ". طرق دیگر خواندن $x \in A$ عبارتنداز " x یک عضو A است "، " x متعلق به A است "، و " A شامل x است ".

مثال ۱. الفبای انگلیسی مجموعه‌ای‌شامل 26 عنصر است؛ یعنی، کلیهٔ حروف از a تا z .

اگر هر عنصر مجموعهٔ A یک عنصر مجموعهٔ B نیز باشد، می‌نویسیم $A \subset B$ ، که خوانده می‌شود: " A یک زیرمجموعهٔ B است ". اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، ولی B زیرمجموعهٔ A نباشد، گوییم A یک **زیرمجموعهٔ حقیقی** B است. این یعنی B نه تنها شامل همهٔ عناصر A است، بلکه یک یا چند عنصر دیگر را نیز شامل است.

مثال ۲ . دو زیرمجموعهٔ حقیقی الفبای‌انگلیسی مجموعهٔ حروف صدادار و مجموعهٔ حروف بی‌صدا می‌باشند .

یک راه توصیف‌مجموعه نوشتن عناصر آن بین دو ابروست . مثلا" ، مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ از عنصرهای a ، b ، و c ساخته‌شده‌است . مجموعه با تغییر ترتیب‌عناصر تغییر نمی‌کند. مثلا" ، مجموعهٔ $\{b, c, a\}$ همان مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ است . تکرار یک عنصر نیز مجموعه را تغییر نمی‌دهد . مثلا" ، مجموعهٔ $\{a, a, b, c, c\}$ همان مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ می‌باشد .

مثال ۳ . مجموعهٔ تمام روزهای ماه که بر 7 بخشپذیرند عبارت است از $\{7, 14, 21, 28\}$.

یک مجموعه را می‌توان با خواصی‌که عناصرش را به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند نیز توصیف کرد . مثلا" ،

$$\{1, -1\} = \{\text{تمام } x \text{ ها به‌طوری که } x^2 = 1\} = \{x: x^2 = 1\}$$

که در عبارت‌آخر ، دونقطه یعنی " به‌طوری‌که " و ما کلمهٔ زاید " تمام " را حذف می‌کنیم .

مثال ۴ . مجموعهٔ $\{x: x = x^2\}$ مجموعهٔ تمام اعدادی‌است‌که مساوی مجذور خود می‌باشند . به‌آسانی تحقیق می‌شود که این مجموعه فقط شامل دو عنصر 0 و 1 است .

اگر مجموعه هیچ عنصری نداشته‌باشد ، گویند تهی است و با علامت $\varnothing$ نموده می‌شود . مثلا" ، مجموعهٔ فیلهای صورتی در باغ وحش تهران تهی است ؛ و همچنین است مجموعهٔ ماههایی که بیش از پنج جمعه دارند . طبق قرارداد ، یک مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه گرفته می‌شود .

می‌گوییم دو مجموعهٔ A و B **مساوی‌اند** ، و می‌نویسیم $A = B$ ، اگر A و B عناصر یکسان داشته باشند . مثلا" ، همانطور که در مثال ۴ دیدیم ، $\{x: x = x^2\} = \{0, 1\}$. اگر A تهی باشد ، می‌نویسیم $A = \varnothing$.

مثال ۵ . هر عدد x مساوی خودش است ؛ و درنتیجه ، $\{x: x \neq x\} = \varnothing$.

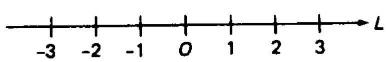
توجه کنید که هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$ باهم برقرار باشند ، آنگاه هر عنصر A عنصر B و هر عنصر B عنصر A است ؛ درنتیجه ، $A = B$. در حالت خاص ، همهٔ مجموعه‌های

تهی مساوی‌اند ، زیرا هرگاه $\varnothing$ و $\varnothing'$ هر دو تهی باشند ، آنگاه $\varnothing \subset \varnothing'$ و $\varnothing' \subset \varnothing$ (چرا؟) ؛ درنتیجه ، $\varnothing = \varnothing'$. لذا ، ما از " مجموعهٔ تهی " سخن خواهیم گفت .

دو مجموعهٔ A و B بدون عنصر مشترک را *از هم جدا* می‌نامند . این را نباید با مفهوم مجموعه‌های **متمایز**، که در آن " متمایز " واژهٔ دیگری برای " نامساوی " است ، خلط کرد . مثلاً " ، مجموعه‌های $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ متمایزند ، اما چون در عنصر 2 سهیم‌اند ، از هم جدا نیستند .

اعداد و نمایشهای آنها . حال به بحث انواع متعدد اعداد می‌پردازیم ؛ با اعداد صحیح و اعداد گویا شروع کرده ، سپس به اعداد گنگ و اعداد حقیقی می‌رویم . مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی دستگاه اعدادی است که در بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم است .

فرض کنید خط مستقیم و افقی L مار بر نقطهٔ O راساخته‌باشیم ، و تصور کنید که L در طرفین تا بی‌نهایت رفته باشد . با انتخاب واحد سنجش، روی L در سمت راست و چپ O و در فواصل 1 واحد ، 2 واحد ، 3 واحد ، و غیره علامت می‌گذاریم . همانند شکل ۱ ، علامت سمت راست O نمایش *اعداد* **صحیح مثبت** $1, 2, 3, \ldots$ و علایم سمت



شکل ۱

چپ O نمایش *اعداد* **صحیح منفی** $-1, -2, -3, \ldots$ می‌باشند . (در اینجا نقاط . . . یعنی " و غیره " .) خط L یک *خط اعداد* نام دارد ؛ نقطهٔ O *مبدأ* (L) نامیده شده ، و نظیر 0 (عدد صفر) است ، که عددی است صحیح نه مثبت و نه منفی . جهت از اعداد منفی به مثبت در امتداد L **جهت مثبت** نام دارد و ، همانند شکل فوق ، با سر سهم نموده می‌شود .

هرگاه دو عدد صحیح مثبت جمع یا ضرب شوند ، عدد صحیح مثبت دیگری به دست می‌آید . این امر با ذکر اینکه مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تحت اعمال جمع و ضرب **بسته** است خلاصه می‌شود . مثلاً " ، $2 + 3 = 5$ و $2 \cdot 3 = 6$ ، که در آنها 5 و 6 اعداد صحیح مثبتی هستند . اما ، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تحت تفریق **بسته نیست** . مثلاً " ، $2 - 3 = -1$ ، که در آن -1 عدد صحیح مثبتی نیست ، بلکه عدد صحیح منفبی است .

ما به پیروی از قراردادهای ریاضی ، حرف Z را برای نمایش مجموعهٔ تمام اعداد صحیح ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، به کار می‌بریم . مجموعهٔ Z ، به خلاف مجموعهٔ اعداد

صحیح مثبت (که با Z^+ نموده می‌شود) ، علاوه بر بسته بودن تحت جمع و ضرب ، تحت تفریق نیز بسته است . مثلا" ، $4-2=2$ ، $3-3=0$ ، و $6-11=-5$ ، که درآنها اعداد 2 ، 0 ، و -5 همه اعدادی صحیح‌اند .

عدد صحیح n را یک‌**عدد زوج** گویند اگر $n=2k$ ، که در آن k خود عددی صحیح است ؛ یعنی ، اگر n بر 2 بخشپذیر باشد . از آن سو ، عدد صحیح n را یک **عدد فرد** نامند اگر $n=2k+1$ ، که در آن k عددی صحیح است . واضح است که هر عدد صحیح زوج یا فرد است . مثلا" ، $-22=2(-11)$ زوج است ، حال آنکه $7=3(2)+1$ فرد می‌باشد . همچنین ، $0=2(0)$ زوج است ، درحالی که $-1=2(-1)+1$ فرد می‌باشد (در این دو حالت ، اعداد صحیح n و k تصادفا" یکی هستند) .

مثال ۶ . نشان دهید که مربع هر عدد زوج زوج است ، حال آنکه مربع هر عدد فرد فرد می‌باشد .

حل . هرگاه n زوج باشد ، آنگاه $n=2k$ ، که در آن k عددی صحیح است ؛ و درنتیجه ،

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2),$$

که عددی زوج است ، زیرا به شکل $2m$ است ، که در آن $m=2k^2$ عددی صحیح می‌باشد . از آن‌سو ، هرگاه n فرد باشد ، آنگاه $n=2k+1$ (k عددی صحیح است) ؛ ودرنتیجه ،

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1,$$

که عددی‌است فرد ،زیرا به‌شکل $2m+1$ است ،که این بار عددصحیح m مساوی $2k^2+2k$ می‌باشد .

اعداد گویا . مجموعهٔ Z مرکب از تمام اعداد صحیح تحت تقسیم بسته نیست . این یعنی خارج‌قسمت‌دوعددصحیح‌همیشه‌عددی‌صحیح‌نیست . مثلا" ، $2\div 3=\frac{2}{3}$ و $-5\div 4=-\frac{5}{4}$ ، که در آنها $\frac{2}{3}$ و $-\frac{5}{4}$ کسر هستند نه اعدادی صحیح . البته ، خارج‌قسمت دو عدد صحیح **گاهی** عددی صحیح است ؛ مثلا" ، $12\div 3=4$ و $10\div(-5)=-2$. اما ، برای آنکه تقسیم کلا" ممکن باشد ، به مجموعه‌ای از اعداد بزرگتر از Z نیاز داریم . لذا ، ***اعداد گویا*** را معرفی می‌کنیم ؛ یعنی ، کسرهایی به شکل m/n ، که در آن m و n اعدادی صحیح بوده و مخرج n **صفر نیست** . توجه کنید که هر عدد صحیح m ، به انضمام 0 ، عددی گویاست، زیرا $m/1=m$. یک عدد گویا را **تحویل‌ناپذیر** گویند اگر صورت و مخرجش عامل مشترک

صحیح نداشته باشند. (اعداد 1 و 1− در اینجا عامل مشترک به حساب نمی‌آیند.) مثلاً"، $\frac{8}{12}$ تحویل‌ناپذیر نیست، اما، با تقسیم صورت و مخرج آن بر 4، عدد گویای $\frac{2}{3}$ به دست می‌آید، که تحویل‌ناپذیر است.

فرض کنیم Q مجموعهٔ تمام اعداد گویا باشد. مجموعهٔ Q تحت چهار عمل اصلی حساب، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم مشروط براینکه بر صفر تقسیم نکنیم، بسته است. برای آنکه ببینیم چرا **تقسیم بر صفر مستثنی شده است**، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $a/b = c$، آنگاه حتماً" $a = bc$. فرض کنیم $b = 0$، که نظیر تقسیم a بر صفر است. در این صورت،

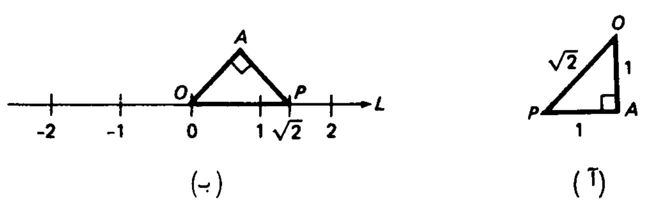
$$a = 0 \cdot c, \tag{۱}$$

که غیر ممکن است مگر $a = 0$، زیرا عبارت سمت‌راست مساوی‌صفر است. اما اگر $a = 0$، فرمول (۱) خواهد شد

$$0 = 0 \cdot c, \tag{۱'}$$

که به ازای هر عدد c درست است. از اینرو، یا عددی مانند c نیست که در $a/0 = c$ به‌ازای $a \neq 0$ صدق کند، یا هر عدد c این خاصیت را به ازای $a = 0$ دارد. (به این دلیل، عبارت $0/0$ را اغلب یک**صورت مبهم** می‌نامند.) بنابراین، تقسیم بر صفر یا غیر ممکن است یا مبهم؛ ولذا، در هر حال بی‌معنی است.

اعداد گنگ. اعداد گویا در رسم روی خط اعداد، نقاط نظیر به اعداد صحیح و بسیاری دیگر را می‌گیرند اما نه همهٔ نقاط بین را. به عبارت دیگر، نقاطی از خط اعداد وجود دارند که نظیر هیچ عـــدد گویـــایـــی **نیستند**. برای مشاهدهٔ این امر، مثلث‌قائم‌الزاویهٔ PAO را مطابق شکل ۲ (آ) به اضلاع PA و AO به طول 1 می‌سازیم. بنابرقضیهٔ آشنای فیثاغورس، ضلع OP به طول $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ است. حال ضلع OP را مثل شکل۲ (ب) بر خط اعداد قرار می‌دهیم، به‌طوری که نقطهٔ O برمبداء خط منطبق شود. دراین‌صورت،



شکل ۲

نقطهٔ P نظیر به عدد $\sqrt{2}$ می‌باشد. اما، همانطور که مدتها پیش کشف شده است، عدد

$\sqrt{2}$ نمی‌تواند گویا باشد؛ و لذا، P نقطه‌ای از خط اعداد است که نظیر یک عدد گویا نیست.

منظور از یک **عدد گنگ** یعنی عددی، مانند $\sqrt{2}$، که گویا نباشد. گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ به‌طور غیرمستقیم ثابت شده است؛ با نشان دادن اینکه فرض گویابودن $\sqrt{2}$ به تناقض می‌انجامد.

اختیاری. فرض کنیم $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد. پس

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی‌هستند، و می‌توان فرض کرد کسر m/n *قبلاً* به‌صورت تحویل‌ناپذیر درآمده‌باشد. با مربع‌کردن طرفین این‌معادله، به دست می‌آوریم $2 = m^2/n^2$ یا، معادلاً،

$$m^2 = 2n^2.$$

لذا، m^2 بر 2 بخشپذیر است؛ و درنتیجه، عددی‌زوج می‌باشد. اما، در این صورت، خود m باید زوج باشد، چرا که اگر m فرد می‌بود، همانطور که در مثال ۶ نشان داد‌ه‌شد، m^2 نیز فرد می‌شد. چون m زوج است، می‌توان m را به شکل $m = 2k$ نوشت، که‌در آن k عدد صحیح مثبتی است. بنابراین، $m^2 = 4k^2$، و وقتی این فرمول را با $m^2 = 2n^2$ مقایسه می‌کنیم، درمی‌یابیم که $4k^2 = 2n^2$ یا، معادلاً،

$$n^2 = 2k^2.$$

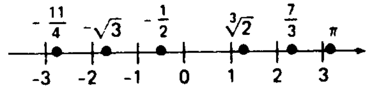
بنابراین، n^2 عددی زوج است؛ و درنتیجه، به دلیلی که هم اکنون در رابطه با m^2 و m شرح داده شد، n زوج می‌باشد.

لذا، نشان داده‌ایم که m و n هر دو زوجند؛ یعنی، هر دوی m و n بر 2 بخش پذیرند. اما این با فرض اصلی که کسر m/n تحویل‌ناپذیر است تعارض دارد. چون بافرض گویا بودن $\sqrt{2}$ به تناقض رسیدیم، باید نتیجه بگیریم که $\sqrt{2}$ عددی‌گنگ است. این مطلب بر یونانیان باستان، که آن را به همین ترتیب ثابت کردند، معلوم بوده است.

اعداد گنگ بسیار دیگری وجود دارند. مثلاً، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، و $\sqrt{7}$ همه گنگ‌اند؛ و همچنین است π (حرف‌کوچک یونانی‌پی)، که نسبت محیط هردایره به قطرش می‌باشد.

اعداد حقیقی. حال یک عدد حقیقی را عددی، گویا یا گنگ، تعریف می‌کنیم که نظیر به نقطه‌ای از یک خط‌اعداد باشد. مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی **دستگاه *اعداد* حقیقی** نام

دارد ، و خط اعداد نیز **خط حقیقی** نامیده می‌شود . از حالا به بعد ، وقتی از کلمهٔ "عدد" بی‌توصیف بیشتر استفاده می‌کنیم ، همیشه مقصودمان عددی حقیقی است . شکل ۳ جای تقریبی چند عدد گویا و گنگ بر خط حقیقی را نشان می‌دهد .



شکل ۳

رابطهٔ اعداد حقیقی با اعشاریها قابل توجه است ، و بینش بیشتری از تمایز بین اعداد گویا و گنگ به شما می‌دهد . هرگاه عددی گویا به شکل اعشاری بیان شود ، آن عدد اعشاری یا مختوم است ، مثل

$$\frac{5}{8} = 0.625, \qquad (۲)$$

یا دسته‌ای از ارقام را داراست که بی‌پایان تکرار می‌شود ، مثل دستهٔ 037 در

$$\frac{28}{27} = 1.037037037\ldots$$

این اعشاری را می‌توان با نوشتن

$$\frac{28}{27} = 1.\overline{037}$$

خلاصه کرد ، که علامت بار دستهٔ مکرر را می‌پوشاند ، که در این حالت 037 است . اما ، هرگاه عددی گنگ به‌شکل اعشاری بیان‌شود ،اعشاری نه مختوم است و نه دسته‌ای بی‌پایان از ارقام مکرر را داراست . مثلاً ،

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots,$$

که رشته ارقام بی‌پایانش از نظمی برخوردار نیست . در واقع ، می‌توان عدد گویای (۲) را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{5}{8} = 0.625000\ldots = 0.625\overline{0}.$$

این نشان می‌دهد که هر اعشاری مختوم را می‌توان یک اعشاری مکرر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ارقامش رشته‌ای از صفر است . درنتیجه ، اگر درست نگاه کنیم ، فقط دو نوع اعشاری می‌بینیم ، اعشاریهای مکرر که نظیر اعداد گویایند ، و اعشاریهای نامکرر که نظیر اعداد گنگ می‌باشند . شهوداً واضح است که نوع دوم به مراتب از اولی بیشترند ؛ درواقع ، این امر به نوعی درست است و می‌توان آن را دقیق ساخت .

مثال۷. نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گویا عبارتنداز:

$$\frac{7}{16} = 0.4375, \qquad -\frac{93}{32} = -2.90625, \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

(دو تای اول اعشاریهایی مختوم هستند)، و نمایشهای اعشاری دیگری از اعداد گنگ عبارتند از:

$$\sqrt{3} = 1.732050807568\ldots. \qquad \sqrt[3]{2} = 1.259921049894\ldots.$$
$$\pi = 3.141592653589\ldots$$

تبصره. می‌توان نشان داد که تناظر بین اعشاریها و اعداد حقیقی یک به یک است، بدین معنی که به ازای هر اعشاری‌عددی منحصر به‌فرد و به ازای هر عدد حقیقی اعشاری‌منحصر به فرد وجود دارد. برای درست بودن این حکم، باید اعشاریهایی که از مرحله‌ای به بعد رشتهٔ بی‌پایانی نه‌دارندرا با اعشاری مختوم "بلافاصله پس از آن" یکی کنیم. مثلا"،

$$0.14999\ldots = 0.14\bar{9} = 0.15.$$

قواعد اساسی اعمال حسابی براعداد (حقیقی) درلیست‌زیرآمده‌اند، که در آنها a، b، و c اعدادی دلخواه می‌باشند.

$a + b = b + a,$	$ab = ba$	(قوانین تعویضپذیری)
$(a + b) + c = a + (b + c),$	$(ab)c = a(bc)$	(قوانین شرکتپذیری)
$(a + b)c = ac + bc,$	$a(b + c) = ab + ac$	(قوانین پخشپذیری)
$a + 0 = a,$	$a + (-a) = 0,$	
$1 \cdot a = a,$	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \quad (a \neq 0)$	
$0 \cdot a = 0,$	$(-1)a = -a,$	
$(-a)b = a(-b) = -ab,$	$(-a)(-b) = ab.$	

بعضی از این قواعد را می‌توان از دیگران نتیجه گرفت، اما این یک موضوع تکنیکی است. **قرینهٔ** a، که با $-a$ نموده می‌شود، عددی است که $a + (-a) = 0$. بخصوص، این ایجاب می‌کند که $-(-a) = a$. توجه کنید که $-0 = 0$، زیرا $0 + 0 = 0$، اما هیچ عددی غیر از 0 قرینهٔ خود نیست. **متقابل** a، که با $1/a$ نموده می‌شود، عددی است که $a(1/a) = 1$؛ در اینجا، برای احتراز از تقسیم بر صفر، باید تأکید کنیم که $a \neq 0$.

تفریق b معادل جمع با قرینهٔ b است:

$$a - b = a + (-b).$$

به همین نحو، تقسیم بر b معادل ضرب در متقابل b می‌باشد:

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) \qquad (b \neq 0).$$

مثال ۸. به کمک قواعد فوق، ثابت کنید هرگاه $ab = 0$، آنگاه دست کم یکی از عوامل a و b صفر است.

حل. هرگاه $a = 0$، برهان تمام است. هرگاه $a \neq 0$، طرفین تساوی $ab = 0$ را در $1/a$ ضرب می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \cdot \frac{1}{a} = 0\cdot$$

اما نیز داریم

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\right) = \left[a\left(\frac{1}{a}\right)\right]b = 1 \cdot b = b,$$

و درنتیجه، $b = 0$.

مسائل

هر یک از مجموعه‌های زیر را با ذکر عناصر به صورتی دیگر بنویسید.

۱. $\{x\colon\ x = -x\}$

۲. $\{x\colon\ x^2 = 9\}$

۳. $\{x\colon\ x + 7 = 13\}$

۴. $\{x\colon\ x^2 - 5x + 6 = 0\}$

۵. $\{x\colon\ x = x^3\}$

۶. $\{x\colon\ x = x^4\}$

فرض کنید A مجموعهٔ $\{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ باشد. (توجه کنید که دو عنصر از A خود مجموعه‌اند!) از روابط زیر کدامها درست‌اند کدامها نادرست، و جواب خود را توضیح دهید.

۷. $1 \in A$

۸. $3 \in A$

۹. $\{2\} \in A$

۱۰. $\{2\} \subset A$

۱۱. $\{1, 2\} \in A$

۱۲. $\{1, \{3\}\} \subset A$

۱۳. $\{4, 5\} \subset A$

۱۴. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

۱۵. $\varnothing \subset \{A\}$

۱۶. مجموعهٔ $A = \{a, b, c\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آنها را ذکر کنید.

عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مختوم بیان کنید.

۱۷. $\frac{1}{4}$ ۱۸. $-\frac{1}{5}$ ۱۹. $\frac{1}{8}$

۲۰. $\frac{1}{25}$ ۲۱. $\frac{1}{125}$ ۲۲. $\frac{1}{64}$

عدد گویای داده شده را به صورت یک اعشاری مکرر بیان کنید.

۲۳. $\frac{1}{3}$ ۲۴. $\frac{1}{6}$ ۲۵. $\frac{1}{9}$

۲۶. $\frac{1}{11}$ ۲۷. $-\frac{1}{22}$ ۲۸. $\frac{1}{33}$

عدد گویای داده شده را به صورت تحویل‌ناپذیر درآورید.

۲۹. $\frac{57}{133}$ ۳۰. $-\frac{161}{99}$

۳۱. $\frac{81}{363}$ ۳۲. $\frac{91}{169}$

۳۳. نشان دهید هرگاه دو عدد گویا باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضربشان نیز چنین‌اند.

۳۴. بدون استفاده از اعشاریها، نشان دهید که عدد $\sqrt{2} - 1$ گنگ است.

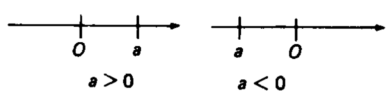
۳۵. دو عدد گنگ مثال بزنید که مجموعشان گویا باشد.

۳۶. دو عدد گنگ (نابرابر) مثال بزنید که حاصل ضربشان گویا باشد.

۳۷. در نمایش اعشاری $\frac{1}{17}$، دستهٔ مکرر چندرقمی است؟

۰.۲ نامساویها و قوانین نماها

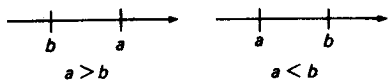
فرض کنیم a یک عدد حقیقی **ناصفر** باشد. پس a یا **مثبت** است، که می‌نویسیم $a > 0$، یا **منفی** است، که می‌نویسیم $a < 0$. هرگاه a را نقطه‌ای از خط حقیقی L با جهت از چپ به راست بگیریم، همانطور که شکل ۴ نشان داده، $a > 0$ یعنی a سمت راست مبداء



شکل ۴

O است، و $a < 0$ یعنی a سمت چپ O قرار دارد.

علایم < و >. حال فرض کنیم a و b یک جفت عدد **نابرابر** باشند. در این صورت، یا $a-b>0$ یا $a-b<0$. در حالت اول گوییم a **از b بزرگتر است**، که می‌نویسیم $a>b$، و در حالت دوم گوییم a **از b کوچکتر است**، که می‌نویسیم $a<b$. به طور هندسی، $a>b$ یعنی a سمت راست b قرار دارد، و $a<b$ یعنی a سمت چپ b واقع است، مثل شکل ۵.



شکل ۵

هر فرمول از نوع $a>b$ یا $a<b$ یک **نامساوی** نامیده می‌شود.

مثال ۱. چند نامساوی نمونه عبارتند از

$$\sqrt{2}>0, \quad -3<0, \quad -2>-3, \quad 3<\pi, \quad 4>\pi,$$

$$-1>-1000, \quad -\frac{1}{7}<-\frac{1}{8}, \quad -1<-0.001, \quad 3.2999>3.2998.$$

مطالب زیر در باب اعداد مثبت و منفی را دانسته گرفته و آزادانه به کار خواهیم برد.

(یک) a مثبت است اگر و فقط اگر $-a$ منفی باشد؛ یعنی، a و $-a$ مختلف‌العلامه‌اند.

(دو) اگر a مثبت باشد، متقابل آن $1/a$ نیز چنین است.

(سه) اگر a و b مثبت باشند، مجموع $a+b$ و حاصل‌ضرب ab نیز چنین است.

(چهار) حاصل‌ضرب ab مثبت است اگر و فقط اگر a و b متحدالعلامه باشند، و منفی است اگر و فقط اگر a و b مختلف‌العلامه باشند.

در حالت خاص، با انتخاب $b=a$ در قاعدهٔ (چهار)، معلوم می‌شود که به ازای هر a ناصفر، $a^2>0$. این، همراه با فرمول $0^2=0$، نشان می‌دهد که **مربع هرعددحقیقی همیشه نامنفی است**. (یک عدد نامنفی عددی است که مثبت یا صفر است.)

نامساویها اغلب تلفیق شده‌اند. مثلاً، $a<b<c$ به معنی دو نامساوی $a<b$ و $b<c$ است. به همین نحو، $a>b>c$ به معنی $a>b$ و $b>c$ می‌باشد. مثلاً، $3<\pi<4$ و $2>\sqrt{2}>1$.

حال چند قضیهٔ آسان ثابت می‌کنیم که ابزار کار با نامساویها به‌طور جبری را به

ما می‌دهند .

قضیهٔ ۱ (قاعدهٔ جمع برای نامساویها) . هرگاه $a < b$ ، آنگاه به *ازای* هر عدد c ،

$$a + c < b + c \tag{۱}$$

برهان . هرگاه $a < b$ ، یا معادلاً $b - a > 0$ ، آنگاه

$$(b + c) - (a + c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0$$

که با (۱) معادل است .

قضیهٔ ۲ (قاعدهٔ ضرب برای نامساویها) . هرگاه $a < b$ ، آنگاه به *ازای* هر عدد مثبت c ،

$$ac < bc \tag{۲}$$

ولی به *ازای* هر عدد منفی c ،

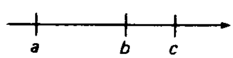
$$ac > bc \tag{۲'}$$

برهان . فرض کنیم $a < b$ ، پس $b - a$ مثبت است . در این صورت ، $(b - a)c$ همان علامت c را دارد . لذا ، به ازای c ای مثبت ، $bc - ac > 0$ ، که با (۲) معادل است ، حال آنکه به ازای c ای منفی ، $bc - ac < 0$ ، که با ('۲) معادل می‌باشد .

مهم است توجه شود که قضیهٔ ۱ با قضیهٔ ۲ فرق دارد . اولی می‌گوید هرگاه عددی ، مثبت یا منفی،رابه طرفین یک نامساوی بیفزاییم ، نتیجه نامساوی درست دیگری است . از آن سو ، طبق قضیهٔ ۲ ، نامساوی حاصل از ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد ناصفر درست است فقط اگر عدد مثبت باشد ، و در واقع جهت نامساوی در صورت منفی بودن عدد عکس می‌شود .

قضیهٔ ۳ (تعدی نامساویها) . هرگاه $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.

برهان . a ، b ، و c را نقاط خط حقیقی می‌گیریم . در این صورت ، a سمت چپ b ، و b سمت چپ c قرار دارد (ر.ک. شکل ۶) . پس a سمت چپ c قرار خواهد داشت.



شکل ۶

به‌آسانی می‌بینیم که اگر جهت تمام نامساویها را عوض کنیم ، یعنی هر علامت $>$ را با علامت مخالف آن $<$ تعویض کنیم ، قضایای ۱ تا ۳ درست خواهند ماند .

قضیهٔ ۴ (قاعدهٔ تقابلها برای نامساویها) .هرگاه $0 < a < b$ یا $a < b < 0$ ، آنگاه

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \qquad (۳)$$

برهان . هرگاه $0 < a < b$ یا $a < b < 0$ ، آنگاه a و b متحدالعلامه‌اند و $a < b$ ؛ درنتیجه ، $ab > 0$ و $b - a > 0$. چون خارج‌قسمت دو عدد مثبت مثبت است ، نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0,$$

که با (۳) معادل است .

مثالهای زیر موارد استعمال این قضایا را نشان می‌دهند . توجه کنید که یک نامساوی درصورت تقسیم طرفین آن بر عددی مثبت حفظ می‌شود ، زیرا تقسیم بر عدد مثبت c معادل ضرب در متقابل آن $1/c$ است ، که این عدد نیز مثبت است .

مثال ۲ . نامساوی

$$3x - 5 < \pi \qquad (۴)$$

را حل کنید ؛ یعنی ، جمیع x هایی را بیابید که به ازای آنها (۴) برقرار باشد .

حل . بنابر قضیهٔ ۱ ، $(3x-5) + 5 < \pi + 5$ ؛ و درنتیجه ،

$$3x < \pi + 5.$$

با تقسیم طرفین این نامساوی بر 3 ، به دست می‌آوریم

$$x < \frac{\pi + 5}{3}. \qquad (۵)$$

مثال ۳ . نامساوی

$$x^2 - x - 6 > 0$$

را حل کنید .

حل . عبارت سمت چپ را تجزیه کرده ، و (۵) را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$(x+2)(x-3) > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت x به عاملهای $x + 2$ و $x - 3$ و حاصل‌ضربشان $(x + 2)(x - 3)$ را نشان می‌دهد:

علامت $(x + 2)(x - 3)$	علامت $x - 3$	علامت $x + 2$	شرط بر x
+	−	−	$x < -2$
−	−	+	$-2 < x < 3$
+	+	+	$x > 3$

در اینجا راهنمای ما این امر بود که عبارت $x - a$ به ازای $x < a$ منفی و به ازای $x > a$ مثبت است. از جدول فوراً می‌بینیم که نامساوی $(x + 2)(x - 3) > 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $x < -2$ یا $x > 3$؛ و درنتیجه، همین برای نامساوی‌اصلی (۵) درست است. تلفیق دو نامساوی اخیر به صورت تنها فرمول $-2 > x > 3$ صحیح نیست، زیرا عددی مانند x صادق در هر دو نامساوی $x < -2$ و $x > 3$ **به‌طور همزمان** وجود ندارد.

مثال ۴. نامساوی

$$\frac{x + 1}{2 - x} > 1 \qquad (۶)$$

را حل کنید.

حل. با تفریق ۱ از طرفین (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x + 1}{2 - x} - 1 > 0$$

یا معادلاً

$$\frac{(x + 1) - (2 - x)}{2 - x} = \frac{2x - 1}{2 - x} > 0.$$

سپس جدولی می‌سازیم که بستگی علامت صورت $2x - 1$ و مخرج $2 - x$ و خارج‌قسمت آنها $(2x - 1)/(2 - x)$ به x را نشان دهد:

علامت $\frac{2x-1}{2-x}$	علامت $2-x$	علامت $2x-1$	شرط بر x
$-$	$+$	$-$	$x<\frac{1}{2}$
$+$	$+$	$+$	$\frac{1}{2}<x<2$
$-$	$-$	$+$	$x>2$

ازجدول‌واضح‌است‌که‌نامساوی $(2x-1)/(2-x)>0$ برقراراست‌اگر وفقط‌اگر $\frac{1}{2}<x<2$. از اینرو، همین امر برای نامساوی اصلی (۶) درست است.

علایم $\geq$ و $\leq$. دو عدد a و b (نه لزوماً " متمایز) داده شده‌اند. منظور از $a \geq b$ یعنی a *بزرگتر یا مساوی b است*. به‌عبارت‌دیگر، هرگاه $a \geq b$ ، آنگاه $a>b$ یا $a=b$. به همین‌نحو، $a \leq b$ یعنی a *کوچکتر یامساوی b است*؛ یعنی، $a<b$ یا $a=b$. مثلاً "،

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{2} \geq 1^3 \geq 1, \qquad -3 \leq 0 \leq \frac{1-1}{2} \leq 1. \tag{۷}$$

علایم $\geq$ و $\leq$ تخمینهای " ضعیفتری " از علایم $<$ ، $>$ ، و $=$ به دست می‌دهند؛ و در واقع، صورتهای " دقیقتری " از (۷) عبارتنداز

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} > 1^3 = 1, \qquad -3 < 0 = \frac{1-1}{2} < 1.$$

نامساویهای شامل علایم $<$ و $>$ را گاهی نامساویهای *اکید* گویند تا با نامساویهای شامل علایم $\geq$ و $\leq$ فرق داشته باشند. هرگاه دو نامساوی $a \leq b$ و $a \geq b$ باهم برقرار باشند، آنگاه $a=b$. در واقع، $a \leq b$ ایجاب می‌کند که $a<b$ یا $a=b$ ، اما $a<b$ با $a \geq b$ ناسازگار است.

علایم max و min . n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داده شده‌اند. دست کم یکی از آنها، که آن را M می‌نامیم، بزرگتر یا مساوی بقیه است. به همین نحو، دست کم یکی، به نام m ، از دیگران‌کوچکتر یا مساوی‌است. اعداد M و m به‌*ماکزیمم* و *مینیمم* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ معروفند، که به‌ترتیب با $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ نموده‌می‌شوند. مثلاً "،

$$\max\{-1, 2, 2\} = 2, \qquad \min\{-1, 1, -3\} = -3.$$

واضح است که $M \geq m$ ، و $M = m$ اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

توانها و ریشه‌ها . اگر a عددی دلخواه و n عدد صحیح مثبتی باشد ، حاصلضرب

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ عامل}}$$

توان n م a نامیده و به صورت a^n نوشته می‌شود . حال تعریف می‌کنیم

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^0 = 1,$$

که دراین‌فرمولها $a \neq 0$ فرض شده است . مثلاً ،

$$4^2 = 16, \quad (-2)^2 = 4, \quad (-1)^3 = -1, \quad 3^3 = 27, \quad 10^4 = 10000,$$

$$2^6 = 64, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = -8, \quad \pi^0 = 1.$$

توانهای صحیح اعداد حقیقی از *قوانین نماها* که کاملاً شناخته شده‌اند تبعیت می‌کنند :

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n. \tag{۸}$$

در اینجا m و n اعداد صحیح دلخواهی ، مثبت ، منفی ، یا صفرند ، درحالی که a و b اعدادی دلخواهند مگر در فرمول دوم که $a \neq 0$. همچنین ، تأکید می‌کنیم که عدد 0 نباید به توانی نامثبت برسد .

اگر $a \geq 0$ ، درست یک عدد *نامنفی* هست که مربعش مساوی a است . این عدد،که با $\sqrt{a}$ نموده می‌شود ، *ریشهٔ دوم* a نام دارد . مثلاً ، $\sqrt{0} = 0$ و $\sqrt{4} = 2$ ، ولی $\sqrt{4} = -2$ نادرست است هرچند که $(-2)^2 = 4$ ،زیرا $\sqrt{4}$ طبق تعریف نامنفی است . ریشهٔ دوم یک عدد منفی نمی‌تواند عددی حقیقی باشد ، زیرا مجذور هر عدد حقیقی همواره نامنفی است . مثلاً ، $\sqrt{-4}$ عددی حقیقی نیست . با معرفی اعدادی کلیتر ، بــه نام *اعداد مختلط* ، امکان جذرگرفتن از اعداد منفی را خواهیم داشت . اما اعداد مختلط هیچگاه در این کتاب به کار نمی‌روند ؛ و درنتیجه ، ریشهٔ یک عدد منفی را تعریف نشده می‌گیریم .

به‌طورکلی ، اگر $a \geq 0$ و n عدد صحیح مثبتی باشد ، درست یک عدد *نامنفی*‌هست که توان n مش مساوی a است ، که *ریشهٔ n م* a نامیده و به صورت $\sqrt[n]{a}$ نوشته می‌شود . مثلاً ،

$$\sqrt[3]{27} = 3, \qquad \sqrt[4]{0} = 0, \qquad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt[6]{64} = 2.$$

بخصوص، $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ، ولی همیشه می‌نویسند $\sqrt{a}$. با این تعریف ریشهٔ n م ، قواعد آشنای زیر را خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

دراینجا m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی هستند، درحالی که a و b اعداد نامنفی دلخواهی هستند مگر در فرمول سوم که $b \neq 0$.

اگر n فرد باشد، می‌توان $\sqrt[n]{a}$ را به ازای مقادیر منفی a نیز تعریف کرد، و آن عدد (منفی) منحصر به‌فردی است که توان n مش مساوی a است. مثلاً $\sqrt[3]{-1} = -1$ ، و $\sqrt[5]{-32} = -2$. اما، اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a}$ به ازای a ی منفی، مثل حالت جذر، تعریف نشده است. این بدان خاطر است که اگر n زوج باشد، $n = 2k$ که در آن k عددی صحیح است؛ درنتیجه، $a^n = (a^k)^2 \geq 0$.

مثال ۵. نشان دهید هرگاه $0 < a < b$ ، آنگاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

حل. داریم $b - a > 0$ ، یا معادلاً، برحسب ریشه‌های دوم $A = \sqrt{a}, B = \sqrt{b}$ ، $B^2 - A^2 > 0$. با تجزیهٔ $B^2 - A^2$ ، خواهیم داشت

$$B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0. \qquad (۹)$$

عامل $B + A$ مثبت است، زیرا مجموع دو عدد مثبت است. لذا، (۹) ایجاب می‌کند که $B - A > 0$ ؛ یعنی، $A < B$ که با $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ معادل می‌باشد.

مثال ۶. به‌طورکلی، نشان دهید هرگاه $0 < a < b$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

حل. مجدداً $b - a > 0$ ، یا معادلاً، برحسب ریشه‌های n م $A = \sqrt[n]{a},\ B = \sqrt[n]{b}$ ، $B^n - A^n > 0$. با استفاده از فرمولی در جبر برای تجزیهٔ $B^n - A^n$ ، معلوم می‌شود که

$$B^n - A^n = (B - A)(B^{n-1} + B^{n-2}A + \cdots + BA^{n-2} + A^{n-1}) > 0. \qquad (۹')$$

عامل $B^{n-1} + B^{n-2}A + \cdots + BA^{n-2} + A^{n-1}$ مثبت است، زیرا مجموع n عددمثبت می‌باشد. لذا، (۹') ایجاب می‌کندکه $B - A > 0$ ؛ یعنی، $A < B$ یامعادلاً $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

بالاخره، معنی عبارت a^r را مورد بحث قرار می‌دهیم، که در آن r عددی است گویا؛ یعنی، عددی به‌شکل m/n که درآن m و n صحیح‌اند (و $n \neq 0$). فرض‌مثبت‌بودن n خللی به‌کلیت وارد نمی‌کند،زیرا اگر r منفی باشد،همواره می‌توان m را منفی‌گرفت. برای سادگی، نیز فرض می‌کنیم a مثبت باشد؛ درنتیجه، ریشهٔ n ام a همیشه‌تعریف شده است، و نیز فرض می‌کنیم m/n تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت، تعریف $a^{m/n}$ خواهد شد

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

یا معادلا"

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(توجه کنید که $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$). مثلا"،

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \qquad 32^{-3/5} = (\sqrt[5]{32})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

و اگر r مثبت باشد، $0^r = 0$. چون

$$a^{-m/n} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{m/n}},$$

داریم $a^{-r} = 1/a^r$، و نشان دادن اینکه

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad (a^r)^s = a^{rs}, \qquad (ab)^r = a^r b^r \tag{۱۰}$$

چندان مشکلتر نیست (جزئیات آن در هر کتاب جبر دبیرستانی بیان شده‌است). در اینجا r و s اعداد گویای دلخواهی‌هستند، درحالی‌که a و b اعداد حقیقی مثبت دلخواهی می‌باشند. اگر r و s اعدادی صحیح بوده، و شرط مثبت بودن a و b را حذف کنیم، ***قوانین نماهای*** (۱۰) به قوانین نظیر برای توانهای صحیح تحویل می‌شوند.

مثال ۷. $2^{1/6} \cdot 8^{1/9}$ را ساده کنید.

حل. با استفاده از دو فرمول (۱۰)، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} 2^{1/6} \cdot 8^{1/9} &= 2^{1/6} \cdot (2^3)^{1/9} = 2^{1/6} \cdot 2^{3/9} \\ &= 2^{1/6} \cdot 2^{1/3} = 2^{(1/6)+(1/3)} = 2^{1/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

مسائل

نشان دهید

۱. هرگاه $a<b$ ، آنگاه $-a>-b$

۲. هرگاه $a<b$ ، آنگاه $c-b<c-a$

۳. هرگاه $a<b$ و $c<d$ ، آنگاه $a+c<b+d$

۴. هرگاه $0<a<b$ و $0<c<d$ ، آنگاه $0<ac<bd$

۵. هرگاه $0<a<1$ ، آنگاه به ازای هر عدد صحیح $n\geq 2$ ، $\sqrt[n]{a}>a$

بدون محاسبات عددی ، معین کنید کدام عدد بزرگتر است .

۶. $\frac{1}{\pi}$ یا $\frac{1}{3}$

۷. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $\frac{1}{2}$

۸. $94\cdot 98$ یا 96^2

۹. $23\cdot 24\cdot 26\cdot 27$ یا 25^4

۱۰. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ یا $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

۱۱. $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ یا $\sqrt{6}-2$

۱۲. فرض کنید $p=m/n$ و $p'=m'/n'$ دو عدد گویای مختلف باشند ، که با مخرجهای مثبت نوشته‌شده‌اند (این همیشه ممکن‌است) . نشان دهید که $p<p'$ معادل $mn'>m'n$ است ، حال آنکه $p>p'$ معادل $mn'<m'n$ می‌باشد .

بدون تقسیم، با استفاده از مسئلهٔ قبل ، بگویید کدام عدد بزرگتر است .

۱۳. $\frac{33}{10}$ یا $\frac{10}{3}$

۱۴. $\frac{46}{25}$ یا $\frac{11}{6}$

۱۵. $\frac{7}{19}$ یا $\frac{18}{49}$

۱۶. $-\frac{10}{3}$ یا $-\frac{167}{50}$

۱۷. از $a^2+b^2=0$ چه چیز در باب a و b نتیجه می‌شود ؟

۱۸. تحقیق کنید که

$$\frac{4}{7}<\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<1.$$

۱۹. **میانگین هندسی** دو عدد مثبت x و y با $g=\sqrt{xy}$ و **میانگین حسابی** (یا **متوسط**) آنها با $a=\frac{1}{2}(x+y)$ تعریف می‌شود . نشان دهید که $g<a$ مگر آنکه $x=y$ ، که در این حالت $g=a$.

۲۰. با استفاده از مسئلهٔ قبل ، نشان دهید که از تمام مستطیلهای با محیط معلوم p ، مربع بیشترین مساحت را دارد . این مساحت چقدر است ؟

۲۱. هرگاه $2 \le a \le 4$ و $4 \le b \le 6$ ، در باب اندازهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ چه می‌توان گفت؟

جمیع x هایی را بیابید که به ازای آنها:

۲۲. $2 < 4x - 5 < 7$

۲۳. $(x-1)(x+1) \le (x+1)(x+2)$

۲۴. $x^2 < 5x - 6$

۲۵. $\dfrac{x}{x+2} > 0$

۲۶. $\dfrac{x+1}{x+2} < 1$

۲۷. $(x+1)(x+2)(x+3) > 0$

۲۸. $(x-1)^2x(x+1) > 0$

۲۹. $(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$

مقادیر زیر را بیابید:

۳۰. $\max\{-2, (-2)^2, (-2)^3\}$

۳۱. $\min\{-1, (-1)^2, (-1)^3\}$

۳۲. $\min\{-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2\}$

۳۳. $\max\{1, 2, \frac{4}{2}, (\sqrt{2})^2\}$

عبارات زیر را بدون نماهای منفی بنویسید:

۳۴. $\left(\dfrac{x^2}{yz}\right)^{-3}$ ۳۵. $\dfrac{a^3b^2c}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$ ۳۶. $\dfrac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{a^3b^2c}$

عبارات زیر را به صورت توانی از 2 بنویسید:

۳۷. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$ ۳۸. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-5}$ ۳۹. $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$

عبارات زیر را ساده کنید:

۴۰. $\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 36}$ ۴۱. $\sqrt[3]{64a^9}$

۴۲. $\sqrt[3]{1.728 \times 10^6}$ ۴۳. $\sqrt[4]{81a^4}$

۴۴. $\sqrt[5]{-0.00001}$ ۴۵. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

۴۶. $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$ ۴۷. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

۴۸. $(8a^6)^{4/3}$ ۴۹. $(125a^3)^{-2/3}$

۵۰. $(32)^{-4/5}(16)^{5/4}$ ۵۱. $2^{1/6} \cdot 2^{1/3} \cdot 2^{1/2}$

۵۲. $(0.0001)^{3/2}$ ۵۳. $\left(\frac{81}{625}\right)^{-3/4}$

۵۴. دانشجویان موسیقی رشتهٔ C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, C را به عنوان یک گام کروماتیک C ، مرکب از 12 نیمصدای متوالی ، می‌شناسند. C ی دوم یک اکتاو بالاتر از C ی اول است و دارای فرکانس (پای) دوبرابر می‌باشد. فرض کنید فرکانس هر نت گام r (ثابت) برابر فرکانس نت قبلی باشد ، که در دستگاه با **فواصل مساوی** برای کوک‌کردن وسایل به کار می‌رود. r را بیابید. نسبت فرکانس دو صدای کامل متوالی (مانند C و D) چیست؟

۵۵. نشان دهید که هرگاه $p < q$ و $r = \frac{1}{2}(p+q)$ ، آنگاه $p < r < q$ ، که در آن r در صورت گویا بودن p و q گویاست.

۵۶. با استفاده از مسئلهٔ قبل ، نشان دهید که بزرگترین عدد گویا (یا حقیقی) کوچکتر از 1 وجود ندارد ، و کوچکترین عدد گویا (یا حقیقی) بزرگتر از 0 موجودنیست.

۳.۰ قدر مطلق و بازه‌ها

علامت | | . منظور از **قدرمطلق** عدد a ، که به صورت $|a|$ با دو خط قائم نوشته می‌شود ، یعنی عددی مساوی خود a اگر a نامنفی باشد و مساوی $-a$ اگر a منفی باشد. به عبارت دیگر ،

$$|a| = \begin{cases} a \text{ ، } & a \geq 0 \text{ اگر} \\ -a \text{ ، } & a < 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن دو ابرو برای تلفیق دو فرمول در یک فرمول به کار می‌رود. به عنوان مثال ،

$$|0| = 0, \qquad |-1.45| = -(-1.45) = 1.45,$$
$$|(-3)^2| = |9| = 9, \quad |(-3)^3| = |-27| = -(-27) = 27,$$
$$|x-2| = -(x-2) = 2-x \text{ ، } x < 2 \text{ اگر}$$

به آسانی معلوم می‌شود که

$$|a| = \sqrt{a^2}. \qquad (2)$$

در واقع ، هرگاه $a \geq 0$ ، $|a| = a$ و $\sqrt{a^2} = a$ ، اما هرگاه $a < 0$ ، آنگاه $|a| = -a$ و $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)(-a)} = -a$. (چرا $\sqrt{a^2} = a$ به ازای a ی منفی نادرست است؟) با

مربع کردن طرفین (۲)، به دست می‌آوریم

$$|a|^2 = a^2 \qquad (۲')$$

لذا، مربع قدر مطلق یک عدد مساوی مربع خود عدد است. از (۲) معلوم می‌شود که

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2},$$

یا، معادلاً،

$$|ab| = |a|\,|b|. \qquad (۳)$$

این فرمول مهم به ازای هر دو عدد a و b معتبر است. استدلالی مشابه نشان می‌دهدکه

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0),$$

و به عنوان تمرین گذارده می‌شود. با اختیار $b = -1$ در (۳)، درمی‌یابیم که

$$|-a| = |a|.$$

بی‌درنگ از (۱) نتیجه می‌شود که

$$a = \begin{cases} |a| & ، \quad a \geq 0 \text{ اگر} \\ -|a| & ، \quad a < 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱')$$

بنابراین، به ازای هر عدد a ،

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

نامساوی مثلثی. قضیهٔ زیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت زیادی دارد.

قضیهٔ ٥ (نامساوی مثلثی). نامساوی

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad (۴)$$

به‌ازای هر دو عدد a و b برقرار است.

برهان. از نامساوی

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|$$

معلوم می‌شود که

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a|\,|b| + b^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2.$$

بنابراین ،

$$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2,$$

و با گرفتن جذر از طرفین آن (به کمک مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۷) ، نامساوی (۴) به‌دست می‌آید .

هرگاه a و b متحدالعلامه باشند ، یا دست کم یکی از a و b صفر باشد ، نامساوی مثلثی (۴) به تساوی $|a+b| = |a| + |b|$ تحویل می‌شود ، زیرا اینها شرایطی هستند که تحت آنها $ab = |ab|$. اما ، اگر a و b مختلف‌العلامه باشند ، نامساوی مثلثی به‌صورت اکید $|a+b| < |a| + |b|$ درمی‌آید ، زیرا در این صورت $ab < |ab|$. به عنوان مثال ،

$$4 = |3-7| < |3| + |-7| = 10.$$

نکتهٔ مهم این است که (۴) همواره ، بی‌توجه به علامات a و b ، برقرار است .

تعویض a با $a-b$ در (۴) نتیجه می‌دهد

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|,$$

که ایجاب می‌کند

$$|a-b| \ge |a| - |b|.$$

به همین نحو ، از تعویض b با $b-a$ در (۴) نتیجه می‌شود

$$|b| = |a+(b-a)| \le |a| + |b-a| = |a| + |a-b|,$$

که ایجاب می‌کند

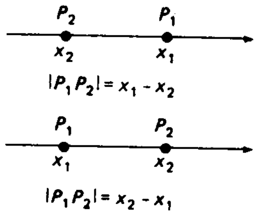
$$|a-b| \ge |b| - |a|.$$

اما یکی از دو عدد $|b|-|a|$ و $|a|-|b|$ قدرمطلق $|a|-|b|$ است ؛ و لذا ،

$$|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|. \qquad (۵)$$

ما گاهی به این نامساوی نیاز خواهیم داشت .

مختصات و فاصلهٔ بین نقاط. منظور از مختص نقطهٔ P بر خط حقیقی یعنی عدد حقیقی نظیر P . فرض‌کنیم P_1 و P_2 دونقطه برخط حقیقی به‌مختصات x_1 و x_2 بوده ،و $|P_1P_2|$ فاصلهٔ بین P_1 و P_2 یا معادلا" طول پاره‌خط P_1P_2 باشد . همانطور که شکل ۷ نشان‌داده، $|P_1P_2|$ چیزی جز تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین دو عدد x_1 و x_2 نیست . (نقاط P_1 و P_2 درصورتی که $x_1 = x_2$ منطبق‌اند .) به طور دقیقتر ،



شکل ۷

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{، اگر } x_1 \geq x_2 \\ x_2 - x_1 & \text{، اگر } x_1 < x_2 \end{cases}$$

که معادل است با

$$|P_1P_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{، اگر } x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 - x_1 & \text{، اگر } x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

این ظاهر پیچیده‌ای دارد ، ولی برحسب قدرمطلق به صورت

$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$$

در می‌آید . پیش‌بینی این نتیجه‌بود که در نمادمان برای فاصلهٔ بین P_1 و P_2 خطوط‌قائم به‌کار بردیم . توجه کنید که ، طبق خاصیتی از قدرمطلق ، $|P_2P_1| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ ؛ و لذا ، همانطور که از ملاحظات هندسی انتظار می‌رفت ، $|P_1P_2| = |P_2P_1|$.

چون $|x| = |x - 0|$ ، قدرمطلق x چیزی جز فاصلهٔ نقطهٔ x تا مبداء خط حقیقی نیست . البته ، منظور از " نقطهٔ x " یعنی نقطه به مختص x . به همین نحو ، $|x - 3|$ فاصلهٔ بین نقطهٔ x و نقطهٔ 3 است ، حال آنکه $|x + 3| = |x - (-3)|$ فاصلهٔ بین x و نقطهٔ -3 می‌باشد . برای تعبیر $|x + 3|$ به عنوان فاصله باید $+3$ را $-(-3)$ تصور کرد .

نامساوی

$$|x| < a \qquad (a > 0)$$

می‌گوید که فاصلهٔ بین نقطهٔ x و مبداء کوچکتر از a است . مجموعهٔ تمام x هایی‌که این نامساوی به ازای آنها درست است همان مجموعهٔ تمام x هایی است که

$$-a < x < a.$$

به همین نحو ، $|x| \leq a$ اگر و فقط اگر $-a \leq x \leq a$. به عنوان‌تمرین ، نشان دهید که $|x| > a$ $(a > 0)$ اگر و فقط اگر $x > a$ یا $x < -a$ ، و $|x| \geq a$ اگر و فقط اگر $x \geq a$ یا

. $x \le -a$

مثال ۱ . کلیهٔ x هایی را بیابید که $|x^2 - 2| \le 7$.

حل . این نامساوی مضاعف معادل است با $-7 \le x^2 - 2 \le 7$ ، که به نوبهٔ خود برقرار است اگر و فقط اگر

$$-5 \le x^2 \le 9. \qquad (۶)$$

نامساوی اول در (۶) خود به‌خود برقرار است ، زیرا x^2 به‌ازای هر x نامنفی است ، حال آنکه نامساوی دوم را می‌توان به صورت $|x|^2 \le 9$ یا معادلاً " $|x| \le 3$ نوشت . بنابراین، x در نامساوی $|x^2 - 2| \le 7$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر

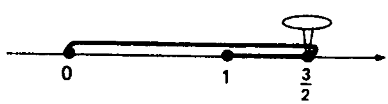
$$-3 \le x \le 3.$$

مثال ۲ . معادلهٔ

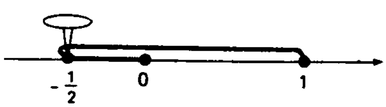
$$|x| + |x - 1| = 2 \qquad (۷)$$

را حل کنید .

حل . در اینجا روش هندسی خوب کار می‌کند . معادلهٔ (۷) می‌گوید که فاصلهٔ بین نقطهٔ x و مبداء به علاوهٔ فاصلهٔ بین نقطهٔ x و نقطهٔ 1 مساوی 2 است . یک نخ به‌طول 2 که دو انتهایش در نقاط 0 و 1 محکم شده‌است را درنظر می‌گیریم . اگر نخ را تا نقطهٔ $\frac{3}{2}$، یعنی نصف واحد به راست 1 [ر.ک. شکل ۸ (آ)] ، یا به نقطهٔ $-\frac{1}{2}$ ، یعنی نصف‌واحد به چپ 0 ، بکشیم ، نخ محکم کشیده می‌شود[ر.ک. شکل ۸ (ب)] . به عبارت دیگر ، معادلهٔ (۷) دارای دو جواب $x = \frac{3}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$ است .



(آ)



(ب)

شکل ۸

مثال ۳. معادلهٔ (۷) را به‌طور جبری حل کنید.

حل. هرگاه

$$x \geq 1,$$

آنگاه x و $x-1$ هر دو نامنفی‌اند؛ درنتیجه، (۷) به معادلهٔ $x+(x-1)=2$ یا $2x=3$، با جواب $x=\frac{3}{2}$، تحویل می‌شود. هرگاه

$$0 \leq x < 1,$$

آنگاه x نامنفی است و $x-1$ منفی. در این حالت، (۷) به صورت $x-(x-1)=2$ یا معادلاً $1=2$ درمی‌آید، که نادرست است؛ لذا، (۷) جوابی به ازای $0 \leq x < 1$ ندارد. بالاخره، هرگاه

$$x < 0,$$

آنگاه x و $x-1$ هر دو منفی‌اند و (۷) به معادلهٔ $-x-(x-1)=2$ یا $-2x=1$، با جواب $x=-\frac{1}{2}$، تحویل می‌شود. باتوجه به جمیع حالات، نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۷) فقط دو جواب $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ را دارد.

انواع بازه‌ها. فرض‌کنیم a و b دو نقطه از خط حقیقی باشند به‌طوری که $a<b$. دراین صورت، مجموعهٔ تمام نقاط بین a و b یک *بازه* نام دارد. در اینجا موقتاً تعلق *نقاط انتهایی* a و b به بازه را مشخص نمی‌کنیم. در واقع، چهار حالت وجود دارد:

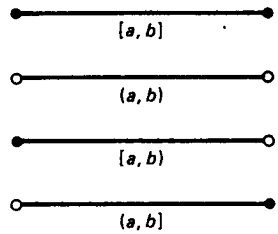
(یک) مجموعهٔ $\{x: a \leq x \leq b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b *به‌انضمام* نقاط انتهایی a و b یک *بازهٔ* بسته نام دارد و با $[a, b]$ نموده می‌شود، که در آن از **دوکروشه** استفاده می‌شود.

(دو) مجموعهٔ $\{x: a < x < b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b جز نقطهٔ انتهایی a و b یک *بازهٔ باز* نام دارد و با (a, b) نموده می‌شود، که در آن از **دو پرانتز** استفاده می‌شود.

(سه) مجموعهٔ $\{x: a \leq x < b\}$ مرکب از تمام نقاط x بین a و b *به‌انضمام* نقطهٔ انتهایی a جز نقطهٔ انتهایی راست b یک *بازهٔ نیمباز* نام دارد و با $[a, b)$ نموده می‌شود، که در آن از کروشه در چپ و پرانتز در راست استفاده می‌شود.

(چهار) مجموعهٔ $\{x: a < x \leq b\}$ مرکب از تمام نقاط بین a و b جز نقطهٔ انتهایی چپ a *به‌انضمام* نقطهٔ انتهایی راست b نیز یک *بازهٔ نیمباز* نام دارد، منتها این بار با $(a, b]$ نموده می‌شود، که در آن از پرانتز در چپ و از کروشه در راست استفاده می‌شود.

هر چهار بازهٔ $[a, b]$ ، (a, b) ، $[a, b)$ ، و $(a, b]$ دارای نقاط انتهایی a و b اند؛ و درنتیجه، به همهٔ آنها طول $b - a$ اطلاق می‌شود (برای‌مشاهدهٔ علت، نقطه را با طول صفر تصور کنید) . معنی هندسی انواع مختلف بازه‌ها در شکل ۹ نموده شده است،



انواع مختلف بازه‌های متناهی

شکل ۹

که در آن نقاط انتهایی داخل بازه‌ها به صورت نقاط توپر و نقاط انتهایی خارج بازه‌ها به شکل نقاط توخالی نموده شده‌اند . منظور از یک **نقطهٔ** درونی یکی از این بازه‌ها یعنی نقطه‌ای غیراز یک نقطهٔ انتهایی؛ یعنی: نقطه‌ای از بازهٔ‌باز (a, b) .

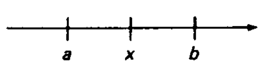
در نوشتجات‌علمی به‌عباراتی‌مانند" بازهٔ $1 \leq x \leq 4$ " یا " بازهٔ $-2 < y < 5$ " برمی‌خورید ، که در واقع به معنی بازهٔ $\{x: 1 \leq x \leq 4\}$ یا بازهٔ $\{y: -2 < y < 5\}$ است. هر بازه یک مجموعه است نه یک نامساوی مضاعف . در هر صورت ، وقتی این تمایز روشن باشد ، استفاده از نماد " نامساوی " برای بازه‌ها اشکالی ندارد ، و هر وقت مناسب بود از آن استفاده خواهیم کرد .

مثال ۴. نشان دهید که هر بازه با نقاط انتهایی a و b دارای نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}(a + b)$ است .

حل . فرض‌کنیم x نقطهٔ میانی بازه ، مثل شکل ۱۰ ، بوده ، و $a < b$. پس $a < x < b$ و

$$x - a = b - x$$

زیرا x از a و b به‌یک فاصله است . با حل این معادله نسبت به x ، درمی‌یابیم که



شکل ۱۰

$x = \frac{1}{2}(a + b)$. همین نتیجه اگر $b < a$ به دست می‌آید (چرا؟) .

مثال ۵ . مجموعهٔ I مرکب از تمام نقاطی که فاصله‌شان تا نقطهٔ 4 کوچکتر از 0.1 است‌را بیابید .

حل . واضح است که

$$I = \{x: |x - 4| < 0.1\} = \{x: -0.1 < x - 4 < 0.1\},$$

درنتیجه ،

$$I = \{x: 4 - 0.1 < x < 4 + 0.1\} = \{x: 3.9 < x < 4.1\}.$$

بنابراین ، I بازهٔ باز $(3.9, 4.1)$ است .

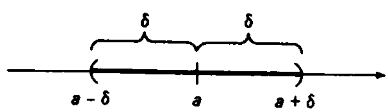
همسایگیها . مثال ۵ را تعمیم داده ، فرض می‌کنیم I مجموعهٔ تمام‌نقاطی باشدکه‌فاصله‌شان تا نقطهٔ ثابت a از عدد مفروض $0 < \delta$ کوچکتر است . (استفاده از δ ، یعنی دلتای کوچک یونانی ، در این محدوده رسم شده است) . در این صورت ،

$$I = \{x: |x - a| < \delta\} = \{x: -\delta < x - a < \delta\},$$

درنتیجه ،

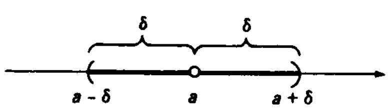
$$I = \{x: a - \delta < x < a + \delta\}.$$

بنابراین ، همانطور که شکل ۱۱ (آ) نشان داده ، I بازهٔ باز $(a - \delta, a + \delta)$ به طول 2δ با نقطهٔ میانی a است . هر بازه ازاین نوع یک **همسایگی** a ، یادقیقتر ، δ-**همسایگی** a ، نام دارد .



یک δـ همسایگی

(آ)



یک δـ همسایگی سفته

(ب)

شکل ۱۱

چون نامساوی $|x-a|<\delta$ معرف δ-همسایگی a است، نامساوی مضاعف

$$0<|x-a|<\delta \qquad (۸)$$

همان همسایگی را که یک نقطه اش، یعنی خود نقطهٔ میانی a، مفقود شده تعریف می‌کند [ر.ک. شکل ۱۱ (ب)]. در واقع، (۸) برقرار است اگر و فقط اگر

$a-\delta<x<a$ یا $a<x<a+\delta$ ؛

یعنی، نقاط x صادق در (۸) یک جفت بازهٔ باز

$(a-\delta, a)$ و $(a, a+\delta)$

را می‌سازند. اسم تکنیکی برای مجموعهٔ نقاط تعریف شده با (۸) همسایگی سفتهٔ a است. مثلا"، 0.01 - همسایگی سفتهٔ نقطهٔ 2 بازهٔ باز (1.99, 2.01) است که خود نقطـهٔ 2 از آن مفقود شده، یا معادلا" جفت‌بازه‌های باز (1.99, 2) و (2, 2.01) می‌باشد. می‌توانستیم (۸) را به شکل

$$0\neq|x-a|<\delta \qquad (۸')$$

بنویسیم، که حذف a را روشنتر نشان می‌دهد، ولی (۸) زیباتر به نظر می‌رسد وبه‌صورت متعارف درآمده است.

بازه‌های نامتناهی. بازه‌هایی که تاکنون درنظر گرفته‌ایم ***متناهی*** یا ***کراندار*** اند، بدین معنی که طول معینی‌دارند. همچنین، می‌توان بازه‌های ***نامتناهی*** یا ***بی‌کران*** درنظرگرفت؛ یعنی، بازه‌هایی که در یک یا هر دو جهت در امتداد خط‌حقیقی " تا ابد می‌روند "؛ و لذا، نمی‌توان به آنها طول نسبت داد. (گرچه می‌توان گفت که این بـازه‌هـا بی‌نهایت طویل‌اند.) برای توصیف بازه‌های نامتناهی، دوعلامت جدید معرفی‌می‌کنیم. این علایم عبارتنداز ∞، به نام(**به علاوهٔ**) بی‌نهایت، و $-\infty$، به نام ***منهای بی‌نهایت***. علایم ∞ و $-\infty$ را **نباید عدد گرفت**، اگر چه می‌توانند در نامساویها ظاهر شوند. حال، با استفاده از ∞ و $-\infty$، بازه‌های نامتناهی زیر را معرفی می‌کنیم، که در آنها c عدد ثابتی است:

(یک) مجموعهٔ $\{x: x\geq c\}$، که با $[c,\infty)$ یا $c\leq x<\infty$ نموده می‌شود؛

(دو) مجموعهٔ $\{x: x\leq c\}$، که با $(-\infty, c]$ یا $-\infty<x\leq c$ نموده می‌شود؛

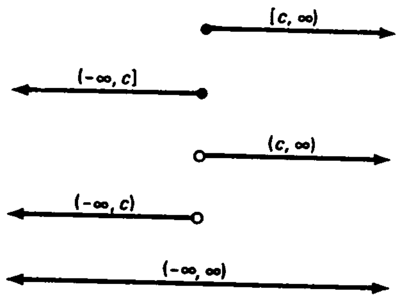
(سه) مجموعهٔ $\{x: x>c\}$، که با (c,∞) یا $c<x<\infty$ نموده می‌شود؛

(چهار) مجموعهٔ $\{x: x<c\}$، که با $(-\infty, c)$ یا $-\infty<x<c$ نموده می‌شود؛

(پنج) تمام خط‌حقیقی، که با $(-\infty,\infty)$ یا $-\infty<x<\infty$ نموده می‌شود.

بازه‌های (یک) و (دو) را بسته، و بازه‌های (سه)، (چهار)، و (پنج) را باز

می‌گیرند . تعبیر هندسی انواع مختلف بازه‌های نامتناهی در شکل ۱۲ نموده شده است،که در آن نقاط انتهایی جزو بازه‌ها با نقاط توپر ، نقاط انتهایی خارج بازه‌ها با نقاط توخالی،



انواع مختلف بازه‌های نامتناهی

شکل ۱۲

و نقاط انتهایی نامتناهی با سر سهم که اشاره به " بی‌نهایت " دارد نشان داده‌شده‌اند. چون ∞ و $-\infty$ عدد نیستند ، مجاز نیستیم بنویسیم $x = \infty$ یا $x = -\infty$. بنابراین، نوشتن $x \leq \infty$ یا $-\infty \leq x$ ، یا گذاردن کروشه کنار علامت ∞ یا $-\infty$ درست نیست .

مثال ۶. بنابر مثال ۳، صفحه‌ٔ۲۳، x در نامساوی درجهٔ دوم $x^2 - x - 6 > 0$ صدق می‌کند اگرو فقط اگر x متعلق به یکی از بازه‌های باز نامتناهی $(3, \infty)$ یا $(-\infty, -2)$ باشد .

تبصره. ما هم‌اکنون انواع مختلف بازه‌ها ، متناهی و نامتناهی ، را معرفی کردیم . هریک‌از از این بازه‌ها " همبند " است به این معنی که هرگاه شامل دو نقطهٔ متمایز x و y باشد، آنگاه شامل هر نقطه بین x و y است . به عکس، هر مجموعهٔ همبند از نقاط برخط‌حقیقی باید یک بازه از انواع فوق باشد . این امر شهودا" واضح است ، اما اثبات دقیق آن‌نیاز به فوت و فنهایی دارد که در اینجا داده نمی‌شود .

مسائل

قدرمطلقهای زیر را حساب کنید .

۱. $|6 - 15|$

۲. $|1 - \sqrt{3}|$

۳. $|\sqrt{2} - 1|$

۴. $|-|-3||$

۵. $||-1|-|-2||$

۶. $|1-(\frac{1}{2})^{-2}|$

۷. $|\pi-\sqrt{11}|$

۸. $|(-1)^n|$ (n عدد صحیح دلخواهی است)

فرض کنید $|a-10|<2$ و $|b-6|<1$. در باب اندازهٔ کمیات زیر چه می‌توان گفت ؟

۹. $a+b$

۱۰. $a-b$

۱۱. a^2-b^2

۱۲. a^2+ab+1

عبارات زیر را برحسب قدرمطلق بیان کنید .

۱۳. x به مبداء تا نقطهٔ -2 نزدیکتر است .

۱۴. فاصلهٔ بین x و نقطهٔ 2 از π متجاوز نیست .

۱۵. فاصلهٔ x تا نقطهٔ 1 دوبرابر فاصله‌اش تا نقطهٔ -1 است .

جمیع x هایی را بیابید که

۱۶. از نقاط -3 و 7 به یک فاصله‌اند .

۱۷. فاصله‌شان تا نقطهٔ -1 یکچهارم فاصله‌شان تا نقطهٔ 4 است .

۱۸. در فاصلهٔ 2 تا نقطهٔ -1 قرار دارند .

۱۹. به نقطهٔ 1 نزدیکترند تا مبداء .

۲۰. از نقطهٔ 2 دورترند تا از نقطهٔ -3 .

۲۱. مجموع فواصلشان تا نقاط 1 و -1 کوچکتر از 4 است .

جمیع x هایی را بیابید که در معادلهٔ داده شده صدق می‌کنند .

۲۲. $|1-x|=2$

۲۳. $|x-1|=|3-x|$

۲۴. $|x+1|=|3+x|$

۲۵. $|2x|=|x-2|$

۲۶. $|x+2|+|x-1|=2$

۲۷. $|x+2|+|x-1|=4$

۲۸. چند عدد صحیح مثبت قدرمطلق کوچکتر از 5 دارند؟ چند عدد صحیح از این خاصیت برخوردارند؟

جمیع x هایی را بیابید که در نامساوی داده شده صدق می‌کنند .

۲۹. $|x+1|\geq 2$

۳۰. $|2x+1|<|3x+4|$

۳۱. $|x^2-1|>3$

۳۲. $|x|-|x-1|\geq 0$

۳۳. $|x|-|x-1|<1$

۳۴. $|x|-|x-1|>1$

۳۵. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>0$

۳۶. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$

۳۷. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\geq 1$

۳۸. برهان دیگری از نامساوی (۵) بیاورید، از این شروع کنید که

$$|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

نقطهٔ میانی هر بازه با نقاط انتهایی داده شده را بیابید.

۳۹. $3, 6$

۴۰. $-1, 8$

۴۱. $-7, -1$

۴۲. $-\sqrt{2}, \sqrt[4]{4}$

بازه‌های زیر را به طریقی دیگر بنویسید.

۴۳. $-2<x\le 3$

۴۴. $(2, \pi)$

۴۵. $[-1, 1)$

۴۶. $-\infty<x<3$

۴۷. $5<x<13$

۴۸. $2\le x<\infty$

۴۹. $(3, \infty)$

۵۰. $(-\infty, -1]$

۵۱. $-4\le x<-2$

۵۲. $(-3, 4]$

۵۳. $[-2, -1]$

۵۴. $3\le x\le 9$

۵۵. $-\infty<x\le -5$

۵۶. $-1<x<\infty$

۵۷. $(-\infty, 5)$

۵۸. $[-\pi, \infty)$

۵۹. $|x-3|\le 2$

۶۰. $|x|<\sqrt{2}$

۶۱. $|x+2|<1$

۶۲. $|x-\frac{1}{2}|\le \frac{3}{2}$

همسایگیهای زیر را به کمک قدرمطلق بنویسید.

۶۳. 2 ـ همسایگی 1 .

۶۴. $\sqrt{3}$ـ همسایگی -2 .

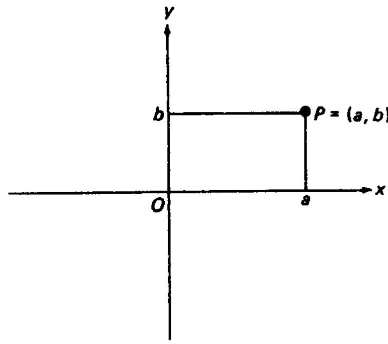
۶۵. 1ـ همسایگی سفتهٔ -1 .

۶۶. $\frac{1}{2}$ـ همسایگی سفتهٔ π .

۴.۰ مختصات در صفحه

تا بحال ما فقط مختصات روی یک خط را داشته‌ایم. برای معرفی مختصات در صفحه (مثلاً، همین صفحهٔ کاغذ)، دو خط جهتدار می‌کشیم که در زاویهٔ قائمه متقاطع باشند، و آنها را خطوط اعداد تصور می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطوط مبدأ مشترک O است که فواصل از آن در امتداد دو خط با یک واحد طول سنجیده می‌شوند. دو خط **محورهای مختصات** نام دارند. یک خط، به نام محور x، معمولاً افقی و به طرف راست، و دیگری، به‌نام محور y، معمولاً قائم و به بالا، مثل شکل ۱۳، رسم می‌گردند. صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ

محورهای x و y صفحهٔ xy نام دارد.



شکل ۱۳

جفتهای مرتب و مختصات قائم. حال فرض‌کنیم (a, b) جفت مرتبی از اعداد حقیقی باشد، که در آن a اول می‌آید و b دوم[1]. عنصر اول a از جفت (a, b) را به عنوان نقطه‌ای از محور x و عنصر دوم b را به عنوان نقطه‌ای از محور y رسم کرده، عمودی در a برمحور x و عمودی در b بر محور y می‌کشیم. همانند شکل ۱۳، این عمودها در نقطهٔ P متقاطعند، که آن را نمایش جفت مرتب (a, b) می‌گیریم. گوییم نقطهٔ P دارای **مختصات (قائم)** a و b است؛ به‌طور مشخص، مختص x آن a ومختص y آن b است. با معکوس کردن این ساختن، یعنی با رسم عمودهایی از P بر محورهای مختصات، می‌توان مختصات و درنتیجه جفت مرتب نظیر به نقطهٔ P، را یافت.

لذا، نظیر هر جفت مرتب نقطهٔ منحصر به فردی در صفحه وجود دارد؛ و به عکس، نظیر هر نقطه در صفحه جفت مرتب منحصر به فردی موجود است. به خاطر این تناظر یک به یک، مابین جفتهای مرتب و نقاط نمایش آنها تمایز کمی می‌گذاریم یا اصلا" تمایزی قایل نمی‌شویم. بخصوص، $P = (a, b)$ یعنی P نقطه‌ای است که مختص x آن a و مختص y آن b است. (بعضی از موءلفان برای این نقطه می‌نویسند $P = (a, b)$.) توجه کنید که مبداء O نقطهٔ $(0, 0)$ است. البته، تساوی دو جفت مرتب (a, b) و (c, d) یعنی این دو جفت دارای یک عنصر اول و یک عنصر دومند؛ یعنی، $a = c$ و $b = d$. مثلا" $(\sqrt{4}, 1) = (2, 1)$، ولی $(2, \sqrt{3}) \neq (2, 1)$.

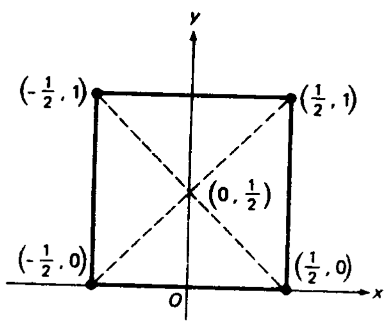
---

۱. نماد دو پرانتزی هم برای جفتهای مرتب به کار می‌رود هم برای بازه‌های باز، لیکن زمینهٔ بحث همواره از خلط این دو مفهوم جلوگیری خواهد کرد.

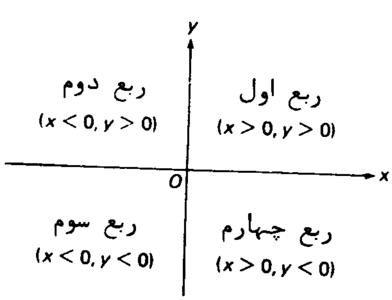
ما هم‌اکنون یک **دستگاه مختصات قائم** در صفحه برپا کردیم . به‌طور کلی ، محورها را می‌توان با حروفی غیراز x و y برچسب زد ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محورممکن است متفاوت باشند . مثلا" ، در هواشناسی می‌توان محور افقی را با t برای زمان ، که با ثانیه سنجیده می‌شود ،و محور قائم را با p برای فشارهوا ،که با میلی بار سنجیده‌می‌شود ، برچسب زد . منظور از *طول* یک نقطه یعنی مختص آن در امتداد محور افقی ، و منظور از عرض یعنی مختص‌آن در امتداد محور قائم . این اصطلاحات مفیدند ، زیرا مشـکل کمبود اسم برای علامات به‌کار رفته برای مختصات را برطرف می‌کنند . حال ، با این ملاحظات ، به صفحهٔ xy باز می‌گردیم ، که در آن طول x و عرض y بوده ، و واحدهای سنجش در امتداد دو محور یکی هستند .

مثال ۱ . یک ضلع مربعی در امتداد محور x بوده و اقطارش در نقطهٔ $(0, \frac{1}{2})$ متقاطعند . رئوس مربع کجا هستند ؟

حل . جواب از شکل ۱۴ واضح است . توجه کنید که طول ضلع مربع ۱ است .



شکل ۱۴



چهار ربع صفحهٔ xy

شکل ۱۵

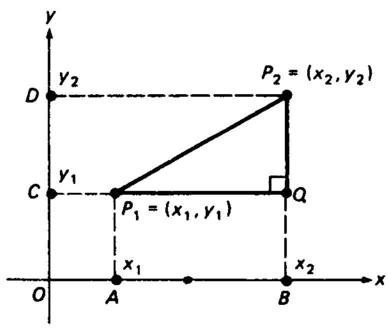
نقطهٔ (x, y) بر محور x واقع است اگر و فقط اگر $y = 0$ ، و بر محور y قرار دارد اگر و فقط اگر $x = 0$. محور مثبت x مشتمل است بر نقاط $(x, 0)$ با $x > 0$ ، و محور منفی x مشتمل است بر نقاط با $x < 0$. به همین نحو، محور مثبت y مرکب است از نقاط $(0, y)$ با $y > 0$ ، و محور منفی y مرکب است از نقاط با $y < 0$. همانطور که در شکل ۱۵ نموده شده، محورهای مختصات صفحهٔ xy را به چهار قسمت، به نام ربع، تقسیم می‌کنند. ربع اول مرکب است از تمام نقاط (x, y) که در آنها $x > 0, y > 0$ ، و سه ربع دیگر با شرایط داده شده در شکل بر x و y تعریف می‌شوند.

فرمول فاصله. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ P_1 و P_2 در صفحه با همان نماد $|P_1P_2|$ برای نقاط بر خط نموده می‌شود. قضیهٔ زیر طرز محاسبهٔ این فاصله را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحه). *فاصلهٔ بین دو نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ *در صفحه با فرمول زیر داده می‌شود:*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (1)$$

برهان. با رسم عمودهایی از P_1 و P_2 بر محورهای x و y ، درمی‌یابیم که P_1P_2 وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 نموده شده در شکل ۱۶ است، که در آن



شکل ۱۶

Q نقطهٔ (x_2, y_1) است، واضح است که $|P_1Q| = |AB|$ و $|QP_2| = |CD|$ ، که در آنها A و B به مختصات x_1 و x_2 به صورت نقاطی از محور x در نظر گرفته شده‌اند، درحالی که C و D به مختصات y_1 و y_2 اند که به صورت نقاطی از محور y در نظر گرفته شده‌اند. لذا، طبق قضیهٔ فیثاغورس و فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه بر خط (ر.ک. صفحهٔ

۲۴) ، داریم

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2.$$

یا ، معادلا" ،

$$|P_1P_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \qquad (۲)$$

با جذر گرفتن از طرفین (۲) ، فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید .

شکل ۱۶ با فرض $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ رسم شده است ، اما به آسانی دیده می‌شود که ، با عکس کردن جهت یکی از این دو نامساوی (یا هر دو) ، همان فرمول فاصلهٔ (۱) به دست می‌آید .

مثال ۲ . فاصلهٔ بین نقاط $P_1 = (1, 7)$ و $P_2 = (13, 2)$ را بیابید .

حل . بنابر (۱) ،

$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \sqrt{(1-13)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2}\\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.\end{aligned}$$

مثال ۳ . آیا مثلث ABC به رأسهای $A = (-1, -4)$ ، $B = (2, -1)$ و $C = (-2, 3)$ قائم الزاویه است ؟

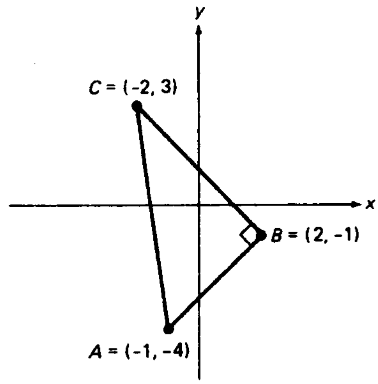
حل . با استفاده از فرمول (۲) ، مجذور طول اضلاع ABC را حساب می‌کنیم ، به دست می‌آوریم

$$|AB|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18, \qquad |BC|^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32,$$
$$|AC|^2 = 1^2 + (-7)^2 = 50.$$

لذا ، طول اضلاع ABC در فرمول فیثاغورس

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

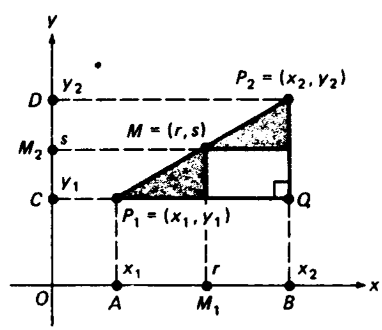
صدق می‌کنند . بنابراین ، ABC یک‌مثلث قائم الزاویه است ، که ضلع AC وتـر آن‌می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۷) . در اینجا عملا" از عکس قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم .



شکل ۱۷

مثال ۴. نقطهٔ میانی M پاره‌خط P_1P_2 و اصل‌بین‌نقاط $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ را بیابید.

حل. با امتحان شکل ۱۸، که تعدیلی از شکل ۱۶ است، می‌بینیم



M نقطهٔ میانی پاره خط P_1P_2 است.

شکل ۱۸

که مثلثهای قائم سایه‌دار همنهشت‌اند (چرا؟). بنابراین، M_1 و M_2، یعنی پای‌عمودهای وارد از M به محورهای x و y، نقاط میانی AB و CD اند. مثلاً، اگر $M = (r, s)$، بنابر مثال ۴، صفحهٔ ۲۷،

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad s = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

و فرمول نقطهٔ *میانی* را خواهیم داشت:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

نمودار معادلات و نامعادلات. منظور از *نمودار* یک معادله یا نامعادله از دو متغیر x و y یعنی مجموعهٔ نقاطی چون (x, y) در صفحهٔ xy که مختصاتش در معادله یا نامعادله‌صدق می‌کنند. مثلاً"، نمودار معادلهٔ

$$xy = 0$$

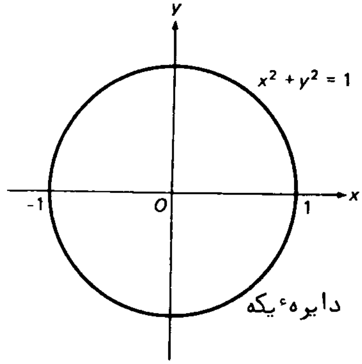
از دو محور مختصات تشکیل شده است، زیرا $xy = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ یا $y = 0$ (یا هر دو). یکی از متغیرهای x و y ممکن است غایب باشد. مثلاً"، نمودار $x = a$ خط قائم ماربر نقطهٔ $(a, 0)$ است، حال آنکه نمودار $y = b$ خط افقی ماربر نقطهٔ $(0, b)$ می‌باشد.

مثال ۵. نمودار معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (۳)$$

را رسم کنید.

حل. چون $x^2 + y^2$ مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y) ومبداء $O = (0, 0)$ است، نقطهٔ (x, y) متعلق به نمودار (۳) است اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y) و O مساوی 1 باشد. لذا، نمودار معادلهٔ (۳) *دایرهٔ یکه* است؛ یعنی، دایره‌ای به شعاع 1 و به مرکز O (ر. ک. شکل ۱۹).



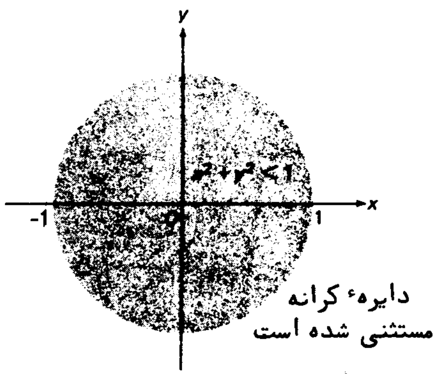
شکل ۱۹

مثال ۶. نمودار نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 < 1 \qquad (۴)$$

را رسم کنید.

حل. بنا بر (۴)، مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y) و مبداء O کوچکتراز 1 است؛ ودرنتیجه، همین امر برای خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۴) ناحیهٔ *داخل* دایرهٔ یکه است (ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۲۰).



شکل ۲۰

به همین نحو، نمودار نامعادلهٔ $x^2 + y^2 > 1$ ناحیهٔ *خارج* دایرهٔ یکه است.

دایره‌ها و کامل کردن مربع. با تعمیم مثال ۵، درمی‌یابیم که مختصات نقطـهٔ (x, y) در معادلهٔ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (r > 0) \qquad (۵)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر مربع فاصلهٔ بین (x, y) و نقطهٔ ثابت (a, b) مساوی r^2 باشد، یا معادلا" اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y) و (a, b) مساوی r باشد. لذا، مختصات (x, y) در (۵) صدق می‌کننداگر و فقط اگر (x, y) بر دایره به شعاع r و مرکز (a, b) واقع باشد. توجه کنید که اگر $a = b = 0$ و $r = 1$ انتخاب شوند رابطهٔ (۵) به معادلهٔ (۳) دایرهٔ یکه تحویل می‌شود.

حال فرض کنیم معادله‌ای به شکل

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (۶)$$

داده شده باشد، که در آن A ، B ، و C ثابت (اعدادی ثابت) می‌باشند. آیا این معادلهٔ یک دایره است؟ برای جواب دادن به این سئوال، سعی می‌کنیم (۶) را به شکلی شبیه (۵) برگردانیم. ابتدا در هر یک از عبارات $x^2 + Ax$ و $y^2 + By$ مربع را کامل می‌کنیم؛ یعنی، می‌نویسیم

$$x^2 + Ax = \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4}, \; y^2 + By = \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4}.$$

سپس، با گذاردن این عبارات در معادلهٔ (۶)، معادلهٔ معادل زیر را به دست‌می‌آوریم

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = D, \tag{۶'}$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C.$$

حال همه چیز به علامت کمیت D وابسته است. اگر $D \geq 0$ ، نمودار ('۶)، و درنتیجه نمودار (۶)، دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{D}$ و مرکز $(-A/2, -B/2)$ ، که اگر $D = 0$ ، دایره به نقطهٔ $(-A/2, -B/2)$ " تباه می‌شود "، زیرا در این صورت شعاع دایره صفر است. از آن سو، اگر $D < 0$ ، نقطه‌ای مانند (x, y) که مختصاتش در معادلهٔ (۶) صدق کنند وجود ندارد، زیرا طرف چپ معادلهٔ معادل ('۶) همواره نامنفی است. دراین حالت گوییم (۶) نمودار ندارد، یا به‌طور صوری‌تر، نمودار (۶) مجموعهٔ تهی است.

مثال ۷. نمودار معادلهٔ

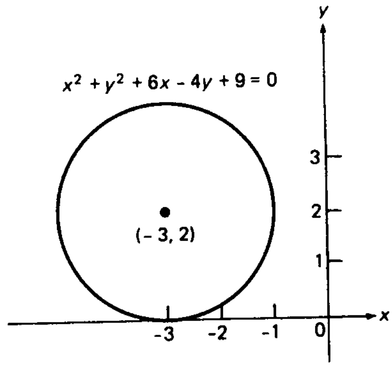
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \tag{۷}$$

را رسم کنید.

حل. این معادله به شکل (۶) یا ('۶) است، که در آن $A = 6$ ، $B = -4$ ، $C = 9$ ، و

$$D = \frac{6^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 9 = 9 + 4 - 9 = 4 > 0.$$

از اینرو، نمودار (۷) دایره‌ای است به‌شعاع $\sqrt{D} = 2$ به مرکز $(-A/2, -B/2) = (-3, 2)$. توجه کنید که، همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، محور x بر دایره در نقطهٔ $(-3, 0)$ مماس است. راه بهتر حل این مسئله آن است که، بدون استفاده از معادلات کلی (۶) و



شکل ۲۱

(۶') ، مستقیما " در (۷) مربعها را کامل کنیم . در واقع ، با گذاردن

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9, \qquad y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$$

در (۷) ، به‌دست می‌آوریم

$$(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0,$$

یا ، معادلا " ،

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4, \qquad (۸)$$

که فورا " به عنوان یک معادلهٔ دایره به شعاع 2 و مرکز $(-3, 2)$ شناخته می‌شود . ازاینرو ، معادلهٔ اصلی (۷) نیز این دایره را به عنوان نمودار دارد .

توجه کنید که در سطر دوم از آخر در مثال ۷ می‌گوییم "یک "معادله تا معادله . علتش آن است که بی‌نهایت معادله با یک نمودار وجود دارند . در واقع ، اگر طرفین یک معادله را در عددی ناصفر ضرب کنیم ، اگر جملات یک معادله را از یک طرف به طرف دیگر ببریم ، یا اگر اعمالی جبری (نظیر محاسبهٔ مربعها) صریحا " انجام شوند ، معادلهٔ جدیدهمان نمودار معادلهٔ قدیم را دارد . مثلا " ، معادلات

$$\frac{1}{4}(x+3)^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 = 1$$

و

$$(x+3)^2 = 4 - (y-2)^2$$

همان نمودار (۸) را دارند ،و همین طور معادلهٔ اصلی (۷) . لذا ، هر یک از این معادلات یک معادلهٔ دایره به شعاع 2 و مرکز $(-3, 2)$ است .

مسائل

۱. نقاط $A = (2, 0)$ ، $B = (0, 3)$ ، $C = (-2, 0)$ ، $D = (-2, 2)$ ، $E = (0, -1)$ ، $F = (2, 2)$ را بر یک کاغذ گراف معمولی بکشید . سپس A را به B به C به A و نیز D را به E به F به D وصل کنید . شکل حاصل چیست ؟

۲. فرض کنید شکل مسئلهٔ قبل به‌قدر یک واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال‌یافته باشد . در این صورت، A, B, C, D, E, F به نقاط جدید A', B', C', D', E', F' می‌روند. این نقاط جدید چه هستند ؟

۳. از نقاط $(2, 0)$, $(0, -2)$ ، $(-2, 1)$ ، $(2, -1)$ ، $(-2, 0)$ ، $(0, 2)$ کدامها درربع چهارم قرار دارند ؟

۴. نشان دهید هرگاه نقاط $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ بر یک خط افقی واقع باشند، آنگاه $|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$ ، اما هرگاه بر یک خط قائم واقع باشند ، آنگاه $|P_1P_2| = |y_1 - y_2|$.

فاصلهٔ بین هر جفت نقاط زیر را بیابید .

۵. $(1, 3), (5, 7)$

۶. $(-2, -3), (1, 1)$

۷. $(1, 3), (1, 4)$

۸. $(6, 2), (4, 2)$

۹. $(1, -1), (-1, 1)$

۱۰. $(0, 1), (1, 0)$

۱۱. $(-1, 1), (3, 3)$

۱۲. $(3, 5), (-2, -4)$

۱۳. $(2, -1), (-1, 3)$

۱۴. $(7, 11), (3, 9)$

۱۵. $(\pi, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\pi)$

۱۶. $(2\sqrt{2}, 4), (2, -\sqrt{2})$

آیا مثلث به رئوس داده شده قائم‌الزاویه است ؟

۱۷. $(2, 3), (-3, 3), (1, 1)$

۱۸. $(7, -4), (5, -3), (7, 1)$

۱۹. $(3, 1), (2, 0), (0, 1)$

۲۰. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (4, 2), (-1, 2)$

نقطهٔ میانی پاره‌خط‌واصل بین هر جفت نقطه را بیابید .

۲۱. $(-1, 3), (11, 5)$

۲۲. $(3, -2), (-4, 3)$

۲۳. $(100, -50), (-100, 50)$

۲۴. $(-2, -5), (18, 3)$

۲۵. نقاط $A = (4, 0), B = (3, 4), C = (-1, 3), D = (0, -1)$ را رسم کنید . نشان‌دهیدکه

شکل $ABCD$ مربع است. طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۶. نقاط میانی اضلاع مربع مسئلهٔ قبل را بیابید. معادلهٔ دایره به شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۷. $1, (-1, 1)$ ۲۸. $\sqrt{2}, (0, 1)$

۲۹. $3, (4, -5)$ ۳۰. $\frac{3}{4}, (-1, 0)$

نمودار معادلهٔ داده شده را توصیف کنید.

۳۱. $(x+2)^2 + y^2 = 64$

۳۲. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$

۳۳. $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0$

۳۴. $x^2 + (y-5)^2 = 5$

۳۵. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

۳۶. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که

۳۷. $(3, 2)$ و $(-1, 6)$ دو انتهای یک قطرش باشند.

۳۸. به‌شعاع 1 بوده و محورهای مختصات مثبت بر آن مماس باشند.

۳۹. از نقاط $(1, 1), (2, 2), (3, 1)$ بگذرد.

معین کنید نقطهٔ $(1, -2)$ داخل، خارج، یا روی نمودار معادلهٔ داده شده است.

۴۰. $x^2 + y^2 = 1$

۴۱. $x^2 + y^2 = 5$

۴۲. $x^2 + y^2 = 9$

۴۳. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

۴۴. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

ناحیه‌ای از صفحهٔ xy را که با جفت نامساویهای زیر معین شده رسم کنید.

۴۵. $x \le 2, y \le -1$ ۴۶. $|x| \ge 1, |y| \ge 2$

۴۷. $xy > 0, |y| < 2$ ۴۸. $xy < 0, x^2 + y^2 < 4$

۴۹. با کامل کردن مربع، نشان دهید معادلهٔ درجهٔ دو $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ به ازای $b^2 > 4ac$ دارای دو ریشهٔ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است، به ازای $b^2 = 4ac$ فقط ریشهٔ $x = -b/2a$ را دارد، و به ازای $b^2 < 4ac$ ریشه (حقیقی) ندارد.

٥.٥ خطوط مستقیم و معادلات آنها

شیب خط. فرض کنیم L یک خط مستقیم *مایل* در صفحهٔ xy بوده، و $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ دو نقطهٔ متمایز از L باشند. منظور از *شیب* L یعنی نسبت

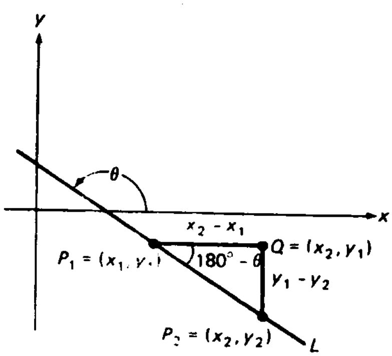
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (۱)$$

فرض مایل بودن L تضمین می‌کند که $x_1 \neq x_2$؛ درنتیجه، مخرج این نسبت ناصفر بوده و شیب m تعریف شده است. شیب یک خط قائم تعریف نشده است، زیرا در چنین خط $x_1 = x_2$.

برای تعبیر هندسی شیب، فرض می‌کنیم نقطهٔ P_1، وقتی از چپ به راست می‌رویم، پیش از نقطهٔ P_2 بر خط L است. در واقع، این فرض خللی به کلیت وارد نمی‌کند، زیرا تعویض برچسبهای 1 و 2 در نقاط P_1 و P_2 و مختصات آنها مقدار m داده شده بافرمول (۱) را تغییر نمی‌دهد. فرض کنیم Q نقطهٔ برخورد خط مار بر P_1 موازی محور x وخط ماربر P_2 موازی محور y باشد؛ درنتیجه، P_1QP_2 مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع P_1Q و P_2Q است. پس شیب مساوی است با

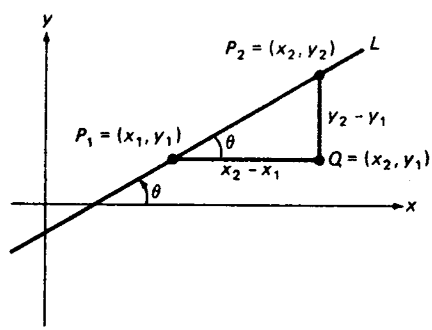
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} > 0 \qquad (۲)$$

اگر، مثل شکل ۲۲ (آ)، خط L از چپ به راست بالا رود. کمیت $|P_2Q|/|P_1Q|$ نسبت طول پاره‌خط قائم P_2Q به طول پاره‌خط افقی P_1Q است. در مهندسی راه و ساختمان، این



خط با شیب منفی

(ب)



خط با شیب مثبت

(آ)

شکل ۲۲

را نسبت پرش به دوش می‌نامند ، و میزان صعود یک‌جادهٔ کوهستانی را می‌سنجند .هرگاه خط L از چپ به راست سقوط‌کند ، آنگاه ، همانند شکل ۲۲ (ب) ، به جای (۲) خواهیم داشت

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} < 0, \qquad (2')$$

از دید مهندسی ، یک جاده با شیب منفی m به پای تپه می‌رود ، و $|m|$ میزان پایین رفتن آن را می‌سنجد .

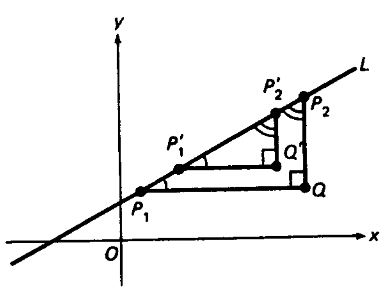
به بیان دیگر ، وقتی یک نقطه در امتداد خط L از P_1 به P_2 می‌رود ، مختص x آن از x_1 به x_2 تغییر می‌کند ، درحالی که مختص y ش از y_1 به y_2 تغییر خواهد کرد . لذا ،

$$\text{شیب} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تغییر در } x}{\text{تغییر در } y} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

که در نوشتن $\Delta y/\Delta x$ نماد نمو که در فصل ۲ معرفی می‌شود پیش‌بینی شده است (Δ دلتای بزرگ یونانی است) .

باید توجه کرد که شیب خط L به نقاط P_1 و P_2 که در محاسبهٔ شیب به کار رفتند بستگی ندارد . این صرفا" بدان خاطر است که هر دو مثلث قائم‌الزاویه که وترهایشان در امتداد خط L بوده و اضلاع دیگرشان موازی محورهای‌مختصات‌باشند متشابهند ؛ درنتیجه، نسبتهای اضلاع نظیرشان مساوی می‌باشند . به عنوان مثال ، در شکل ۲۳ شیب برابراست‌با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}$$



شکل ۲۳

اگر با استفاده از نقاط $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), Q = (x_2, y_1)$ حساب شود،و

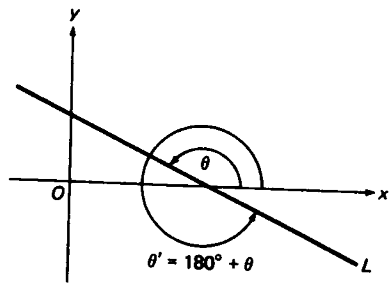
$$m' = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{|P'_2Q'|}{|P'_1Q'|}$$

اگر با استفاده از نقاط $P'_1=(x'_1, y'_1), P'_2=(x'_2, y'_2), Q'=(x'_2, y'_1)$ محاسبه گردد. اما، بنابر تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 و $P'_1Q'P'_2$،

$$\frac{|P_2Q|}{|P_1Q|}=\frac{|P'_2Q'|}{|P'_1Q'|}$$

درنتیجه، $m=m'$.

میل خط. منظور از *زاویهٔ میل*، یا فقط **میل**، خط مستقیم L درصفحهٔ xy یعنی‌کوچکترین زاویهٔ θ بین محور مثبت x و L، که از محور x به L در جهت خلاف عقربه‌های‌ساعت سنجیده می‌شود (θ تتای کوچک یونانی است). هر خط موازی محور x میل صفر دارد. از شکل ۲۴ واضح است که شیب θ ی هر خط مستقیم باید در شرط $0° \leq \theta < 180°$ صدق



میل L مساوی θ است نه θ'

شکل ۲۴

کند. به عنوان مثال، میل خط L در شکل مساوی $150°$ است نه $330°$ یا $-30°$.

به کمک قدری مثلثات[1]، به‌آسانی فرمولی ثابت می‌شود که شیب m خط L را به میلش θ مربوط می‌کند. فرض‌کنیم L با رفتن از چپ به راست بالا می‌رود. دراین‌صورت، مثل شکل ۲۲ (آ)،

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\theta,$$

---

۱. مثلثات در بخش ۳۰۱ مرور خواهد شد. *ما فعلاً* فقط به تعریف تانژانت و فرمولهای $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$ و $\tan(90°+\theta)=-1/\tan\theta$، که در مثال ۳، صفحهٔ ۹۶، ثابت شده‌اند، نیاز داریم.

که در آن $\tan\theta$ **تانژانت** زاویهٔ θ است؛ یعنی، طول ضلع مقابل θ در مثلث قائم P_1QP_2 بخش‌بر طول ضلع مجاور به θ . اگر میل θ بین $90°$ و $180°$ واقع باشد، خط L با رفتن از چپ به راست پایین می‌آید، اما فرمول

$$m = \tan\theta \qquad (۳)$$

هنوز به قوت خود باقی است. در واقع، در این حالت، مثل شکل ۲۲ (ب)،

$$m = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\tan(180° - \theta),$$

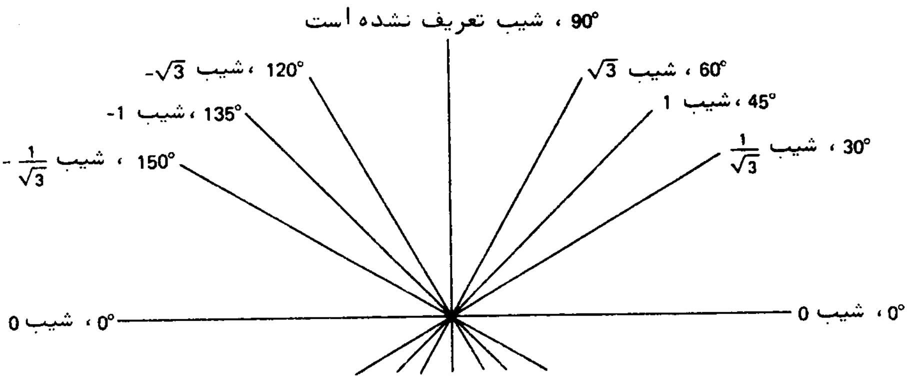
که در آن، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات،

$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

درنتیجه، مثل قبل،

$$m = -\tan(180° - \theta) = \tan\theta,$$

شکل ۲۵ خطوط مختلف، همراه با میلها و شیبهای آنها را که با فرمول (۳) به هم مربوط شده‌اند، را نشان می‌دهد. توجه کنید که یک خط قائم، با وجود آنکه شیبش تعریف نشده است، دارای میل $90°$ است.



مقایسهٔ میلها و شیبها

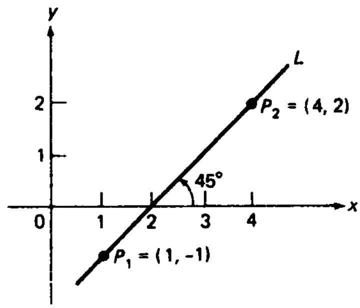
شکل ۲۵

مثال ۱ . شیب و میل خط L ماربر نقاط $P_1 = (1, -1)$ و $P_2 = (4, 2)$ را بیابید.

حل . در اینجا

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

لذا ، طبق (۳) و تعریف میل ، θ کوچکترین زاویهٔ مثبتی است که تانژانت آن مساوی 1 است؛ یعنی ، $45°$ (ر.ک. شکل ۲۶) .



شکل ۲۶

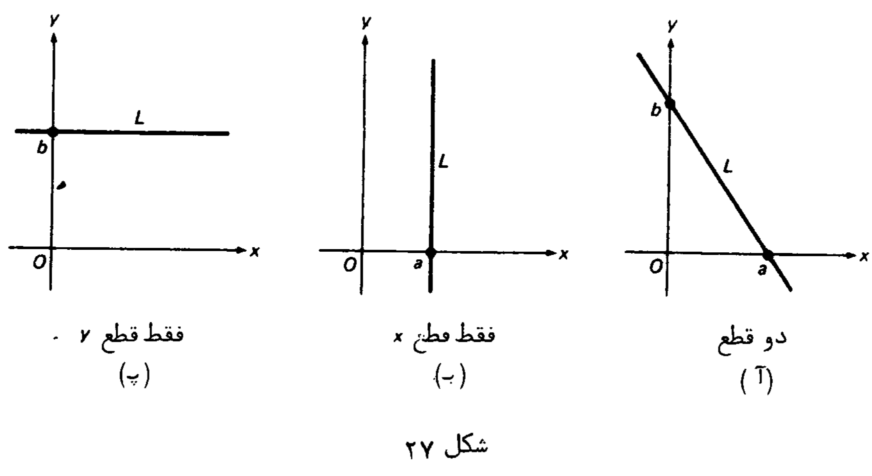
مثال ۲. شیب m خطی را بیابید که میلش $15°$ است .

حل . در اینجا ، تا پنج رقم اعشار ،

$$m = \tan 15° = 0.26795$$

که در آن از جدول تانژانتها کمک گرفته‌ایم یا از یک ماشین حساب استفاده کرده‌ایم .

قطعهای خط . باتوجه به شکل ۲۷ (آ) ، می‌بینیم که اگر خط مستقیم L *مایل* باشد ، یعنی نه افقی باشد نه قائم ، L محور x را در نقطهٔ $(a, 0)$ ومحور y را در نقطهٔ $(0, b)$ قطع می‌کند . ما (عدد) a را قطع x ، L و b را قطع y ، L می‌نامیم ، و وقتی از اصطلاح



فقط قطع y .
(پ)

فقط قطع x
(ب)

دو قطع
(آ)

شکل ۲۷

قطع استفاده می‌کنیم منظور قطع x یا قطع y است . هر خط غیرمایل فقط یک قطع دارد لذا ، اگر L مثل‌شکل ۲۷ (ب) قائم باشد ، L دارای قطع x ، a است ولی قطع y ندارد، درحالی که اگر L مثل شکل ۲۷ (پ) افقی باشد ، L دارای قطع y ، b است ولی‌قطع x ندارد . این در مورد محورهای مختصات نیز صادق است؛ یعنی ، محور y فقط قطع x (مساوی 0) دارد ، و محور x فقط قطع y (نیز مساوی 0) خواهد داشت .

قضیهٔ ۷ (معادلات نقطه ــ شیب و شیب ــ قطع خط) . *معادلهٔ خط به شیب m و ماربر نقطهٔ داده شدهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ عبارت است از*

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{۴}$$

معادلهٔ خط به شیب m و قطع y ، b مساوی است با

$$y = mx + b. \tag{۵}$$

برهان . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطهٔ متغیری از خط باشد . در این صورت ، اگر $x \neq x_1$ ، خط دارای شیب $(y - y_1)/(x - x_1)$ است ، زیرا از P_1 و P می‌گذرد . از مساوی‌قراردادن این عبارت با شیب m ، به دست می‌آوریم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

که با (۴) معادل است . معادلهٔ (۴) برای مقدار مستثنی شدهٔ $x = x_1$ نیز برقرار است (چرا؟) . اگر خط دارای قطع y ، b باشد ، نقطهٔ $(0, b)$ بر خط قرار دارد ، و با فرض $x_1 = 0, y_1 = b$ ، به دست می‌آوریم $y - b = mx$ ، که معادل (۵) است .

مثال ۳ . بنابر (۴) ، معادلهٔ خط به شیب -2 و ماربر نقطهٔ $(-1, 5)$ عبارت است از

$$y = -2(x + 1) + 5 = -2x + 3.$$

بنابر (۵) ، معادلهٔ خط به شیب 9 و قطع y ، -7 مساوی است با

$$y = 9x - 7.$$

مثال ۴ . معادلهٔ

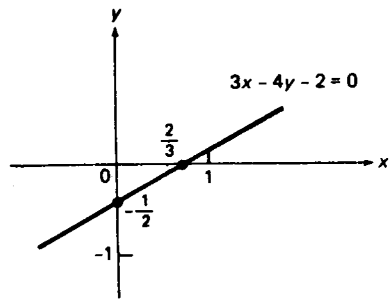
$$3x - 4y - 2 = 0 \tag{۶}$$

را رسم کنید .

حل. معادلهٔ (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}. \quad (۶')$$

اما فوراً معلوم می‌شود که (۶') معادلهٔ خطی است به شیب $\frac{3}{4}$ و قطع y، $-\frac{1}{2}$ (ر. ک. شکل ۲۸). این خط دارای قطع x، $\frac{2}{3}$ است، که با گذاردن $y = 0$ در (۶) و حل آن نسبت به x معلوم می‌شود.



شکل ۲۸

به‌طورکلی، همانطور که به آسانی ثابت می‌شود، نمودار هر معادله به شکل

$$Ax + By + C = 0, \quad (۷)$$

که در آن A، B، و C ثابت‌اند، خطی مستقیم است؛ و به عکس، هر خط مستقیم نمودار معادله‌ای به این شکل می‌باشد؛ در اینجا البته فرض شده که A و B هر دو صفر نباشند. بنابراین، هر معادله به شکل (۷) را خطی می‌گویند.

قضیهٔ ۸ (معادلات دونقطه‌ای و دوقطعی‌خط). *معادلهٔ خط ماربر دو نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ *عبارت است از*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (۸)$$

اگر $x_1 \neq x_2$. *معادلهٔ خط با قطع* x، a *و قطع* y، b *مساوی است با*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (۹)$$

اگر $a \neq 0, b \neq 0$.

برهان. با گذاردن $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ در (۴)، رابطهٔ (۸) به دست می‌آید.

هرگاه خط دارای قطع x ، a و قطع y ، b باشد، آنگاه دو نقطهٔ $(a, 0)$ و $(0, b)$ برخط واقعند. لذا، برای این خط، می‌توان در (۸) اختیار کرد $x_1 = a$ ، $y_1 = 0$ ، و $x_2 = 0$ تا به دست آید

$$y = \frac{b}{-a}(x - a),$$

یا، معادلاً،

$$bx + ay = ab,$$

که، پس از تقسیم بر ab ، به رابطهٔ (۹) تحویل می‌شود.

مثال ۵. بنابر (۸)، معادلهٔ خط مار بر نقاط $(-2, 3)$ و $(4, -1)$ عبارت است از

$$y - 3 = \frac{-1 - 3}{4 - (-2)}(x + 2) = -\frac{2}{3}(x + 2),$$

یا، معادلاً،

$$2x + 3y - 5 = 0$$

که به شکل (۷) است. بنابر (۹)، معادلهٔ خط با قطع x ، -2 و قطع y ، 5 مساوی است با

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$$

یا، معادلاً،

$$5x - 2y + 10 = 0.$$

حال نظرمان را به جفتهایی از خطوط مستقیم معطوف می‌کنیم.

مثال ۶. نقطهٔ برخورد P دو خط به معادلات

$$x + y - 3 = 0, \qquad x - 2y + 2 = 0 \tag{۱۰}$$

را بیابید.

حل. نقطهٔ P بر هر دو خط است؛ درنتیجه، مختصات P باید در هر دو معادلهٔ (۱۰) صدق کنند. لذا، یافتن P به‌طور جبری معادل حل دستگاه (۱۰) مرکب از دو معادلهٔ خطی با دو مجهول x و y است. برای این کار، دو برابر معادلهٔ اول را به دومی

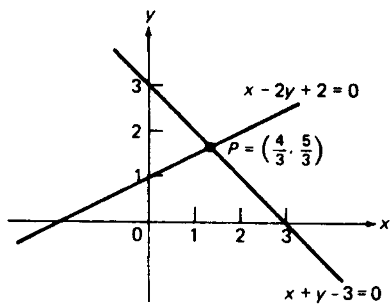
می‌افزاییم :

$$2(x + y - 3) + (x - 2y + 2) = 0.$$

پس جملات شامل y حذف شده ، فقط معادلهٔ

$$3x - 4 = 0$$

با جواب $x = \frac{4}{3}$ باقی می‌ماند . حال $x = \frac{4}{3}$ را در یکی از معادلات اصلی قرار داده ، به دست می‌آوریم $y = \frac{5}{3}$. همانطور که شکل ۲۹ نشان داده ، $P = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ نقطهٔ برخورد دو خط داده شده می‌باشد .



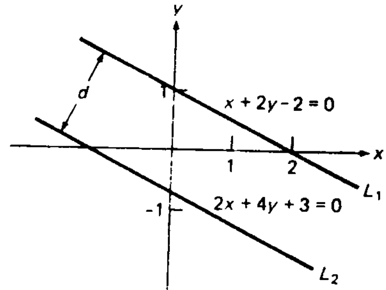
شکل ۲۹

خطوط موازی . واضح است که دو خط در صفحهٔ xy موازیند اگر و فقط اگر دارای یک میل باشند . لذا ، دوخط غیرمایل موازیند اگروفقط اگر یک شیب داشته باشند . البته ، جمیع خطوط قائم موازیند .

مثال ۷ . دو خط L_1 و L_2 به معادلات

$$x + 2y - 2 = 0, \qquad 2x + 4y + 3 = 0 \tag{11}$$

دارای شیب مساوی $-\frac{1}{2}$ اند ؛ و درنتیجه ، موازی می‌باشند (ر.ک. شکل ۳۰).اگر به حل



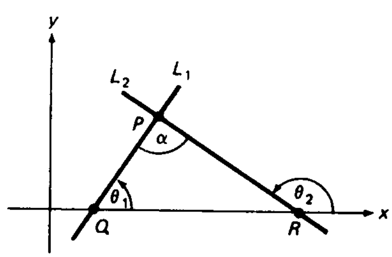
شکل ۳۰

دستگاه معادلات (۱۱) بپردازید ، به سرعت به مشکل برخواهید خورد . در واقع ، تفریق دوبرابر معادلهٔ اول از معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد $0 = 7$ ، که نادرست است . پس نتیجه می‌شود که دستگاه (۱۱) جواب ندارد . به‌طور هندسی ، این امر معادل آن است که خطوط موازی متمایز هم را قطع نمی‌کنند .

خطوط عمود برهم . حال شرطی برای عمود بودن دو خط ، یعنی برای آنکه در زاویهٔ قائمه متقاطع باشند ، بیان می‌داریم .

قضیهٔ ۹ (شرط تعامد) . *دو خط مایل برهم عمودند اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب شیبهایشان -1 باشد .*

برهان . یک خط ، که آن را L_1 می‌نامیم ، دارای شیب مثبت m_1 و زاویهٔ میل θ_1 بین $0°$ و $90°$ است ، و خط دیگر ، که آن را L_2 می‌نامیم ، دارای شیب منفی m_2 و زاویهٔ میل θ_2 بین $90°$ و $180°$ است . می‌توان فرض کرد محور x زیر نقطهٔ برخورد P خطوط L_1 و L_2 قرار دارد (در غیراین صورت ، می‌توان محور x جدید را موازی محور قدیم گرفت با نقطهٔ برخورد بالای آن ، اما این شیب خطوط را تغییر نمی‌دهد) . لذا ، وضعیتی مانند شکل ۳۱ داریم ، که در آن θ_1 و α (آلفای کوچک یونانی) زوایای درونی مثلث PQR و θ_2 یک



شکل ۳۱

زاویهٔ بیرونی PQR است . هر زاویهٔ بیرونی یک مثلث مساوی مجموع زوایای درونی غیر مجاور به آن است . بنابراین ، $\theta_2 = \alpha + \theta_1$ ، یا معادلاً $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. هرگاه L_1 و L_2 برهم عمود باشند ، آنگاه $\alpha = 90°$ و ، بنابر فرمول آشنایی از مثلثات ،

$$m_2 = \tan \theta_2 = \tan (90° + \theta_1) = -\frac{1}{\tan \theta_1},$$

درنتیجه،

$$m_1 m_2 = \tan\theta_1\left(-\frac{1}{\tan\theta_1}\right) = -1.$$

به عکس، هرگاه $m_1 m_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$ ، آنگاه

$$\tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1} = \tan(90° + \theta_1),$$

که ایجاب می‌کند که $\theta_2 = 90° + \theta_1$ یا $\alpha = 90°$؛ درنتیجه، L_1 و L_2 برهم عمودند.

لذا، دو خط مایل به شیبهای m_1 و m_2 برهم عمودند اگر و فقط اگر

$$m_1 m_2 = -1,$$

یعنی، اگروفقط اگر شیب هر خط قرینهٔ متقابل شیب خط دیگر باشد.

تبصره. در اثبات اینکه $\tan\theta_2 = \tan(90° + \theta_1)$ ایجاب می‌کند که $\theta_2 = 90° + \theta_1$ تلویحا" براین امر تکیه داشتیم که θ_2 و $\theta_1 + 90°$ هر دو در بازهٔ $90° < \theta < 180°$ قرار دارند. این تضمین می‌کند که هر دو تانژانت تعریف شده‌اند و تانژانتهای دوزاویهٔ θ_2 و $\theta_1 + 90°$ مساویند فقط اگر خود زوایا مساوی باشند.

مثال ۸. تحقیق کنید که دو خط به معادلات $2x + 5y - 7 = 0$ و $15x - 6y + 4 = 0$ برهم عمودند.

حل. خط اول به شیب $-\frac{2}{5}$ و خط دوم به شیب $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ است. چون $-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = -1$ ، خطوط برهم عمودند.

مثال ۹. عمودمنصف پاره‌خط به نقاط انتهایی $P_1 = (-4, 3)$ و $P_2 = (2, -1)$ رابیابید.

حل. نقطهٔ میانی پاره‌خط P_1P_2 نقطهٔ

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (-1, 1)$$

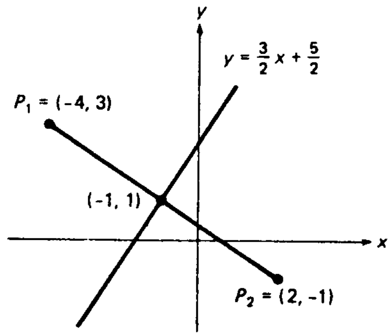
است (ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۲۷)، و P_1P_2 به شیب

$$\frac{-1-3}{2-(-4)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

است . از اینرو ، عمودمنصف P_1P_2 خط ماربر $(-1,1)$ به شیب $\frac{3}{2}$ ، مساوی قرینهٔ متقابل $-\frac{2}{3}$ ، می‌باشد . بنابرقضیهٔ ۷ ، معادلهٔ این خط خواهد بود

$$y=\frac{3}{2}(x+1)+1=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

(ر.ک. شکل ۳۲)



شکل ۳۲

فاصله بین یک نقطه و یک خط .بالاخره ، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که مطالب این بخشرا در خود جمع داشته و به خودی خود اهمیت قابل توجهی دارد .

قضیهٔ ۱۰ (فاصلهٔ بین نقطه و خط) . *فاصلهٔ d بین نقطهٔ $P_1=(x_1,y_1)$ و خط L به معادلهٔ*

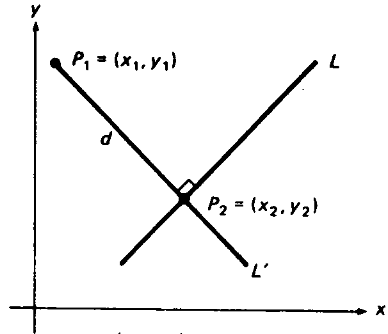
$$Ax+By+C=0 \tag{۱۲}$$

مساوی است با

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{۱۳}$$

برهان . همانند شکل ۳۳ ، فرض‌کنیم $P_2=(x_2,y_2)$ پای عمود مرسوم از P_1 به L باشد. در این صورت ، فاصلهٔ d بین P_1 و L مساوی طول پاره‌خط P_1P_2 تعریف می‌شود .چون شیب L مساوی $-A/B$ است ، با حل (۱۲) نسبت به y می‌توان دید که شیب خط L' ماربر P_1 عمود بر L مساوی B/A ،یعنی قرینهٔ متقابل $-A/B$ ، است . لذا ، معادلهٔ L' خواهد بود

$$y-y_1=\frac{B}{A}(x-x_1).$$



فاصلهٔ P_1 تا L مساوی d است .

شکل ۳۳

اما P_2 بر L' قرار دارد . بنابراین ،

$$y_2 - y_1 = \frac{B}{A}(x_2 - x_1),$$

یا،معادلا" ،

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B}. \qquad (۱۴)$$

اگر نسبت (۱۴) را با q نشان دهیم ، درمی‌یابیم که

$$x_2 - x_1 = Aq, \qquad y_2 - y_1 = Bq;$$

و درنتیجه ،

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{A^2q^2 + B^2q^2} = \sqrt{A^2 + B^2}|q|. \qquad (۱۵)$$

اما P_2 نیز بر L واقع است؛ درنتیجه، x_2 و y_2 درمعادلهٔ (۱۲)صدق می‌کنند . بنابراین ،

$$Ax_2 + By_2 + C = A(Aq + x_1) + B(Bq + y_1) + C = 0.$$

با حل آن نسبت به q ، به دست می‌آوریم

$$q = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}. \qquad (۱۶)$$

بالاخره، با گذاردن (۱۶) در (۱۵) ، رابطهٔ (۱۳) به دست خواهد آمد .

در اثبات قضیهٔ ۱۰ تلویحا" فرض کرده‌ایم هر دوی A و B ناصفر باشند . لازم است

تحقیق شود که (۱۳) حتی اگر A یا B صفر باشد نیز صحیح است.

مثال ۱۰. فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3, 1)$ و خط $3x + 4y - 3 = 0$ را بیابید.

حل. البته، منظور از خط $3x + 4y - 3 = 0$ یعنی خط به معادلهٔ $3x + 4y - 3 = 0$ (این نوع زبان اختصاری مرسوم است). به کمک (۱۳)، درمی‌یابیم که

$$d = \frac{|3(3) + 4(1) - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

مثال ۱۱. فاصلهٔ d بین خطوط موازی در مثال ۷ را بیابید.

حل. واضح است که d مساوی فاصلهٔ بین L_1 و یک نقطهٔ L_2 است، یا بین L_2 و یک نقطهٔ L_1 می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۰). نقطهٔ $(0, 1)$ بر L_1 واقع است؛ و لذا،

$$d = \frac{|2(0) + 4(1) + 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}}.$$

مسائل

با استفاده از جدول تانژانتها و یک ماشین حساب علمی، شیب خط با میل داده شده را (تا سه رقم اعشار) بیابید.

۱. $20°$ ✓　　۲. $100°$　　۳. $50°$ ✓

۴. $165°$　　۵. $140°$ ✓　　۶. $89°$

شیب خط ماربر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۷. $(2, -3), (4, 2)$ ✓　　۸. $(3, -5), (-3, -2)$

۹. $(3, 8), (\sqrt{2}, 8)$ ✓　　۱۰. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۱. $(\pi, 7), (\pi, -1)$ ✓

میل خط ماربر بر جفت نقاط داده شده را بیابید.

۱۲. $(2, 4), (4, 6)$　　۱۳. $(2, 3), (2, 5)$ ✓

۱۴. $(2, -4), (4, -6)$　　۱۵. $(0, -1), (-\sqrt{3}, 0)$ ✓

۱۶. $(2, \sqrt{2}), (-2, \sqrt{2})$

۱۷. ✓ نشان دهید که $y = mx$ معادلهٔ خطی است به شیب m ماربر مبداء.

معادلهٔ خطی را بیابید به شیب m که از نقطهٔ داده شدهٔ P بگذرد .

۱۸ . $m = 2, P = (1, 2)$

۱۹ . $m = -1, P = (2, -1)$

۲۰ . $m = \frac{1}{2}, P = (3, 1)$

۲۱ . $m = -2, P = (-1, -2)$

۲۲ . $m = 1, P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

معادلهٔ خطی را بیابید به شیب m و قطع y ، b .

۲۳ . $m = \frac{2}{3}, b = 3$

۲۴ . $m = 3, b = 0$

۲۵ . $m = 0, b = -2$

۲۶ . $m = -\frac{3}{4}, b = 1$

۲۷ . $m = -7, b = -3$

۲۸ . تحقیق کنید هرگاه خطی قطع x ، a و قطع y ، b داشته باشد ، آنگاه $a = b = 0$ یا a و b هر دو ناصفرند .

شیب m ، قطع x ، a ، و قطع y ، b خط داده شده را بیابید .

۲۹ . $5x - y + 3 = 0$

۳۰ . $2x + 3y - 5 = 0$

۳۱ . $5x + 2y + 2 = 0$

۳۲ . $3x + 2y = 0$

۳۳ . $2y - 4 = 0$

معادلهٔ خط ماربر جفت نقاط داده شده را بیابید .

۳۴ . $(2, -5), (3, 2)$

۳۵ . $(-\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{4})$

۳۶ . $(-3, 1), (7, 8)$

۳۷ . $(5, 3), (-1, 6)$

۳۸ . $(-3, -7), (-4, -5)$

معادلهٔ خط با قطع x ، a و قطع y ، b را بیابید .

۳۹ . $a = -1, b = 2$

۴۰ . $a = -\frac{1}{3}, b = -1$

۴۱ . $a = 4, b = -\frac{1}{2}$

۴۲ . $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{8}$

۴۳ . $a = 5, b = \frac{1}{5}$

اگر میل خطی مقدار داده شدهٔ زیر باشد ، قطع x ، a و قطع y ، b آن چگونه به هم مربوطند ؟

۴۴ . $45°$

۴۵ . $60°$

۴۶ . $135°$

نقطهٔ برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید .

۴۷ . $5x + y - 2 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0$

۴۸ . $3x - 2y + 4 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$

۴۹ . $2x + 6y - 1 = 0,\ x + 3y + 4 = 0$

۵۰. $-4x + 5y + 1 = 0,\ 3x + 4y + 7 = 0$

معادلهٔ خط مار بر نقطهٔ P موازی خط داده شده را بیابید.

۵۱. $P = (0, 0),\ x + y + 1 = 0$

۵۲. $P = (2, -3),\ 3x - 7y + 3 = 0$

۵۳. $P = (1, 2),\ x + 9y - 11 = 0$

۵۴. $P = (-4, 1),\ 16x - 24y - 7 = 0$

معادلهٔ خط مار بر نقطهٔ P عمود بر خط داده شده را بیابید.

۵۵. $P = (0, 0),\ 3x - y + 2 = 0$

۵۶. $P = (2, 3),\ 4x + 3y + 5 = 0$

۵۷. $P = (-1, 4),\ x - 2y - 7 = 0$

۵۸. $P = (0, 5),\ 2x - 5y + 6 = 0$

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل بین نقاط داده شده را بیابید.

۵۹. $(2, 1), (1, 2)$

۶۰. $(7, 4), (-3, 5)$

۶۱. $(3, 3), (0, -1)$

۶۲. $(-5, -2), (6, -4)$

فاصلهٔ بین نقطهٔ P و خط داده شده را بیابید.

۶۳. $P = (2, -1),\ 4x + 3y + 10 = 0$

۶۴. $P = (0, 3),\ 5x - 12y - 29 = 0$

۶۵. $P = (-2, 3),\ 2x - y - 3 = 0$

۶۶. $P = (1, -2),\ x - 2y - 5 = 0$

فاصلهٔ بین جفت خطوط موازی داده شده را بیابید.

۶۷. $3x - 4y - 10 = 0,\ 6x - 8y + 5 = 0$

۶۸. $5x - 12y + 26 = 0,\ 5x - 12y - 13 = 0$

۶۹. $4x - 3y + 15 = 0,\ 8x - 6y + 25 = 0$

۷۰. $24x - 10y + 39 = 0,\ 12x - 5y - 26 = 0$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مجموعه‌ها و اعداد، مجموعهٔ تهی

اعداد گویا و گنگ، اعداد حقیقی و خط حقیقی

محاسبات جبری با نامساویها
ماکزیمم و مینیمم یک مجموعه از n عدد
توانها و ریشه‌ها، قوانین نماها
قدرمطلق و نامساوی مثلثی
بازه‌های بسته، باز، و نیمباز؛ بازه‌های نامتناهی
همسایگیها و همسایگیهای سفته
جفتهای مرتب و مختصات قائم
فاصله بین دو نقطه در صفحه
نمودارهای معادلات و نامعادلات
معادلات دوایر و کامل کردن مربع
شیب، میل، و قطعهای خط
معادلات نقطه ـ شیب و شیب ـ قطع خط
شرط تعامد
فاصلهٔ بین نقطه و خط

مسائل تکمیلی

مجموعهٔ تمام عناصر متعلق به دست کم یکی از دو مجموعهٔ A و B ***اجتماع*** A و B نام دارد و با $A \cup B$ نموده‌می‌شود، و مجموعهٔ تمام عناصر متعلق به هر دوی A و B ***اشتراک*** A و B نام دارد و با $A \cap B$ نموده می‌شود. $A \cup B$ و $A \cap B$ را درصورتی بیابید که

۱. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$

۲. $A = \{x: x^2 = 4\}, B = \{x: 2x = 4\}$

۳. $A = \{x: x \geq 1\}, B = \{x: |x| > 1\}$

۴. $A = \{x: x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x: x^2 + 1 = 0\}$

دو مجموعهٔ A و B داده شده‌اند. منظور از ***تفاضل*** بین A و B، که با $A - B$ نموده می‌شود، یعنی مجموعهٔ تمام عناصر متعلق به B ولی غیرمتعلق به A. فرض‌کنید $A = \{1, 2, 3\}$. $A - B$ را درصورتی بیابید که

۵. $B = \{1, 2\}$ ۶. $B = \{4, 5\}$

۷. $B = \varnothing$ ۸. $B = \{1, 2, 3\}$

۹. $16 \quad 2^4 \cdot 4^3 \cdot 8^2$ را به صورت توانی از 2، و به صورت توانی از 4 بیان کنید.

۱۰. نشان دهید که اگر n زوج باشد، a^n به ازای هر a نامنفی است، درحالی که‌اگر n

فرد باشد، $a(\neq 0)$ با a^n هم‌علامت خواهد بود.

۱۱. عدد گویای دیگری بین $\frac{31}{100}$ و $\frac{3111}{10000}$ قرار دهید.

۱۲. فرض کنید $r = m/n$ عددی گویا به صورت تحویل ناپذیر، با n مثبت، باشد. نشان دهید که اگر n فرد باشد، a^r به ازای a ی منفی تعریف شده است، ولی اگر n زوج باشد تعریف نشده است.

نشان دهید هرگاه $a > 0$، آنگاه

۱۳. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

۱۴. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a+1}}$

تحقیق کنید که

۱۵. $|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$

۱۶. $\min\{a, b\} = \frac{(a+b) - |a-b|}{2}$ و $\max\{a, b\} = \frac{(a+b) + |a-b|}{2}$

۱۷. وقتی x از 0 تا 1 تغییر کند، بر سر نقطهٔ $(1-x)a + xb$ چه خواهد آمد؟ (فرض کنید $a \neq b$.)

۱۸. چه وقت نقطهٔ x^2 سمت راست x واقع است؟ چه وقت سمت چپ x است؟ چه وقت بر x منطبق است؟

۱۹. بدون محاسبات عددی، نشان دهید که

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

۲۰. نشان دهید که به ازای اعداد دلخواه a، b، و c،

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$M = \max\{a, a^2, \ldots, a^n\}$ و $m = \min\{a, a^2, \ldots, a^n\}$ را به‌ازای $n > 1$ درصورتی بیابید که

۲۱. $0 < a < 1$ ۲۲. $a > 1$ ۲۳. $a = 0, \pm 1$

۲۴. $-1 < a < 0$ ۲۵. $a < -1$

هر یک از مجموعه‌های داده شده، که اجتماع یا اشتراک دوبازه‌اند (ر.ک. مقدمهٔ مسائل ۱تا۴)، را به صورت یک بازه بنویسید.

۲۶. $(-\infty, 1) \cup (0, \infty)$ ۲۷. $[-1, 2) \cup [2, 4)$

۲۸. $[-2, 3] \cap [0, 4]$ ۲۹. $(-\infty, 1] \cap (-2, \infty)$

نمودار معادلهٔ داده شده را توصیف کنید.

۳۰. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

۳۱. $x^2 + y^2 + x = 0$

۳۲. $x^2 + y^2 + y = 0$

۳۳. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$

۳۴. معادلهٔ $x^2 - y^2 = 0$ را رسم کنید.

۳۵. نمودار نامعادلهٔ $x^2 - y^2 > 0$ را رسم کنید.

۳۶. نمودار نامعادلات همزمان $x^2 + y^2 < 1,\ x^2 - y^2 > 0$ را رسم کنید.

۳۷. جمیع نقاطی از صفحهٔ xy که از محور x، محور y، و نقطهٔ $(3, 6)$ هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۸. جمیع نقاطی از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ که از نقاط $(1, 3)$ و $(-2, 2)$ هم فاصله‌اند را بیابید.

۳۹. چند نقطه مانند (m, n)، که m و n هر دو اعدادی صحیح‌اند، داخل دایره به شعاع $\frac{5}{2}$ و مرکز مبداء قرار دارند؟

۴۰. نقطهٔ $P = (x, y)$ طوری‌حرکت می‌کندکه تفاضل بین مربعات فواصل‌آن تا نقاط $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ همواره مساوی 4 است. مسیر نقطه را بیابید.

۴۱. مساحت ناحیهٔ مثلثی محدود به محورهای مختصات و خط $2x + 5y - 20 = 0$ چقدر است؟

۴۲. از تمام خطوط ماربر نقطهٔ $(2, 3)$، دو تا قطع مساوی دارند. این دو خط را بیابید.

۴۳. خط ماربر نقطهٔ $(1, 2)$ عمود برخط ماربر نقاط $(2, 4)$ و $(3, 5)$ را بیابید. نقطهٔ برخورد این دو خط را بیابید.

خط واصل بین مبداء و نقطهٔ برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

۴۴. $x + 2y - 3 = 0,\ x - 3y + 7 = 0$

۴۵. $2x + 3y + 4 = 0,\ x - 2y - 3 = 0$

۴۶. تحقیق کنید که چهارضلعی به رئوس $(2, -2)$، $(5, 1)$، $(3, 6)$، و $(0, 3)$ یک متوازی‌الاضلاع است. معادلات اقطار آن را بیابید. نقطهٔ برخورد اقطار چیست؟

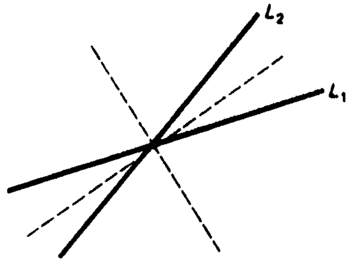
دو خط متقاطع L_1 و L_2 داده شده‌اند. دو خط دیگر، یعنی خطوط نقطه‌چین درشکل ۳۴، وجوددارندکه **نیمسازهای** زوایای بین L_1 و L_2 اند (چرا نیمسازها همواره برهم عمودند؟). نیمسازهای زوایای بین جفت خطوط داده شده را بیابید، و در هر حالت عمودبودن آنها را تحقیق نمایید.

۴۷. $x - y = 0,\ x + y = 0$

۴۸. $2x + 3y - 4 = 0,\ 3x + 2y + 1 = 0$

۴۹. $6x + 2y + 1 = 0,\ x - 3y - 2 = 0$

۵۰. $x + y + 2 = 0,\ 2x - 2y - 3 = 0$



شکل ۳۴

راهنمایی. نقاط هر نیمساز از L_1 و L_2 متساوی‌الفاصله‌اند.

نامعادلهٔ خطی داده شده را رسم کنید.

۵۱. $x + 2y - 2 < 0$

۵۲. $x + y - 3 > 0$

۵۳. $3x - 4y + 6 \geq 0$

۵۴. $2x - 3y - 3 \leq 0$

مسائل ۵۵ تا ۶۲ نشان می‌دهند که چگونه خطوط مستقیم در حل مسائل تجارت و اقتصاد به‌کار می‌روند. فرض کنیم q_d مقداری از یک کالای مورد تقاضا به بهای p بوده، و q_s مقدار تولید شده به بهای p باشد. اغلب فرض اینکه q_d و q_s توابعی خطی از p اند تقریب موجهی است، و بدین معنی است که

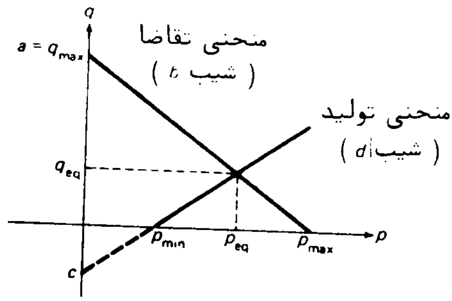
$$q_d = a + bp, \qquad (\text{یک})$$

$$q_s = c + dp, \qquad (\text{دو})$$

که در آنها a ، b ، c ، و d ثابت‌اند. در شرایط عادی بازار، افزایش بها به‌کاهش q_d و افزایش q_s منجر می‌شود. همچنین، q_d ، q_s ، و p به‌جهت معنی اقتصادی آنها، ذاتاً نامنفی‌اند، و $q_s = 0$ اگر p کوچکتر از عدد معینی باشد (در قیمت خیلی پایین تولیدی وجود ندارد). پس نتیجه می‌شود که ضرایب a و d مثبت اند، حال آنکه b و c منفی می‌باشند (ر.ک. شکل ۳۵). توجه کنید که b شیب **منحنی تقاضای** (یک) است، حال آنکه d شیب **منحنی تولید** (دو) می‌باشد.

۵۵. فرض کنید ماکزیمم تقاضا برای کالایی خاص در هر بها q_{max} بوده، و بهایی که در آن تقاضا متوقف می‌شود p_{max} باشد. منحنی تقاضای (یک) را بیابید.

۵۶. فرض کنید بهایی که در آن کالای مفروضی شروع به تولید می‌شود p_{min} باشد، درحالی



شکل ۳۵

که به ازای هر واحد افزایش در بها تولید d واحد بالا رود. منحنی تولید (دو) را پیدا کنید.

۵۷. بازار یک کالا وقتی در حال تعادل است که کمیت مورد تقاضا مساوی کمیت تولیدشده باشد. ***بهای تعادل*** نظیر p_{eq} و ***تقاضای تعادل*** (***یا تولید تعادل***) q_{eq} برای مدل بازار خطی (یک) و (دو) را معین نمایید.

۵۸. فرض کنید تقاضا برای کالایی در هر بها به یک مقدار افزایش یابد؛ این ممکن است مثلا" در بازار شکر رخ دهد، پس از آنکه دولت شکر خاصی را که احتمالا" سرطان‌زا است قدغن نماید. نشان دهید که اثر این کار افزایش بهای تعادل و تقاضای تعادل می‌باشد.

بهای تعادل q_{eq} و تقاضای تعادل p_{eq} را برای بازار با **منحنیهای تقاضا و تولیدداده شده** بیابید.

۵۹. $q_d = 450 - 3p,\ q_s = -100 + 2p$

۶۰. $q_d = 1000 - 40p,\ q_s = -50 + 10p$

۶۱. $q_d = 3000 - 12p,\ q_s = -2000 + 38p$

۶۲. $q_d = 1600 - 5p,\ q_s = 75p$