پاسخ تشریحی توسط: محمدصادق معتقدی

۳۱. گزینه ۴ درست است.

$$x\frac{dy}{dx}=-y^2 \quad\to\quad \frac{dy}{-y^2}=\frac{dx}{x} \quad \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{1}{y}=\operatorname{Ln}|x|+C$$

از شرط $y(1)=1$ به دست می‌آید $C=1$ لذا:

$$y=\frac{1}{1+\operatorname{Ln}|x|}$$

برای تعیین دامنه این جواب می‌نویسیم:

$$x\neq 0 \quad , \quad 1+\operatorname{Ln}|x|\neq 0 \quad\to\quad \operatorname{Ln}|x|\neq -1 \quad\Rightarrow\quad |x|\neq\frac{1}{e} \quad\to\quad x\neq\pm\frac{1}{e}$$

چون شرط مرزی در $x=1$ داده شده، بزرگ‌ترین بازه‌ای که جواب در آن اعتبار داشته باشد به صورت $\left(\frac{1}{e}\,,+\infty\right)$ خواهد بود.

۳۲.گزینه ۳ درست است.

طبق تعریف رونسکین داریم:

$$W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=fg'-gf'$$

$$W(u,v)=\begin{vmatrix} 2f-g & f+2g \\ 2f'-g' & f'+2g' \end{vmatrix}$$

$$=(2f-g)(f'+2g')-(f+2g)(2f'-g')=2ff'+4fg'-gf'-2gg'-2ff'+fg'-4gf'+2gg'$$

$$=5(fg'-gf')=5W(f,g)$$

۳۳. گزینه ۳ درست است.

با استفاده از قضیه لایپ‌نیتس داریم:

$$J_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha\theta-x\sin\theta)dx \xrightarrow{\frac{d}{dx}}$$

$$J'_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(\alpha\theta-x\sin\theta)d\theta \xrightarrow{\frac{d}{dx}}$$

$$J''_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin^2\theta\cos(\alpha\theta-x\sin\theta)d\theta$$

به ازاء $\alpha=0$ به دست می‌آید:

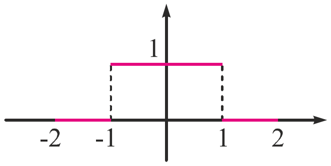
$$J''_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin^2\theta\cos(-x\sin\theta)d\theta \rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta=-J''_0(x)$$

۳۴.گزینه ۱ درست است.

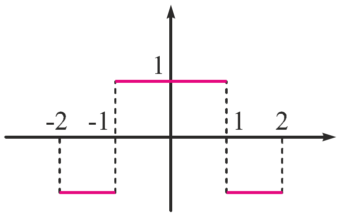
این‌که در سری فوریه نوشته شده فقط جملات کسینوسی موجود است، تصریح می‌کند سری فوریه یک تابع زوج نوشته شده و از آنجا که جمله $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ به صورت $\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$ ظاهر شده بدان معناست که دوره تناوب تابع $P=2L=4$ مدنظر قرار گرفته و $L=2$ است.

اما مشکلی که وجود دارد این است که شکل ترسیم شده مقدار f را در بازه $0<x<1$ را یک نشان می‌دهد و تعریفی برای مقدار f در بازه $1<x<2$ صورت نگرفته است.

اولین انتخاب آن است که مطابق شکل زیر فکر کنیم مقدار تابع در این بازه صفر می‌باشد و در واقع سری فوریه تابع زیر را مدنظر قرار می‌دهیم.



اما تابع مذکور قطعاً دارای ثابت سری فوریه خواهد بود، در حالی که سری فوریه نوشته شده در فرض مسأله چنین جمله‌ای را ندارد. مضافاً سری فوریه مذکور فقط دارای هارمونیک‌های فرد است $(n=1,3,5,...)$ پس باید پذیرفت تابع طوری تنظیم شده که دارای تقارن نیم‌موجی باشد و به تعبیری برای شکل زیر سری فوریه نوشته شده است.



ملاحظه شده با ترسیم قرینه نیم پریود نسبت به خط $y=\frac{a_0}{2}=0$ و انتقال شکل حاصله به اندازه نیم پریود، بر شکل نیم پریود دیگر منطبق می‌شویم، پس در سری فوریه نوشته شده فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی ظاهر خواهد شد.

اینک داریم:

$$a_3=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx=\int_0^1 (1)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx+\int_1^2 (-1)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx=\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}x\Big|_0^1-\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}x\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{3\pi}\{(-1-0)-(0+1)\}=\frac{-4}{3\pi}$$

۳۵. گزینه ۲ درست است.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sinh(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sinh(x)(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sinh|x|\cos\omega x}_{\text{تابع زوج}}\,dx-i\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sinh|x|\sin\omega x}_{\text{تابع فرد}}\,dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\sinh x\cos\omega x\,dx$$

با فرض: $I=\int\sinh x\cos\omega x\,dx$

مشتق		انتگرال
$\sinh x$	$+$	$\cos\omega x$
$\cosh x$	$-$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
$\sinh x$	$+\int$	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$I=\frac{1}{\omega}\sin hx\sin\omega x+\frac{1}{\omega^2}\cosh x\cos\omega x-\frac{1}{\omega^2}I\quad\rightarrow$$

$$\frac{\omega^2+1}{\omega^2}I=\frac{\sin hx\sin\omega x}{\omega}+\frac{\cos hx\cos\omega x}{\omega^2}\quad\rightarrow$$

$$I=\frac{1}{\omega^2+1}(\omega\sin hx\sin\omega x+\cos hx\cos\omega x)$$

بنابراین:

$$F(\omega)=2I\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\omega^2+1}\{\omega\sin h\pi\sin\omega\pi+\cos h\pi\cos\omega\pi-1\}\quad\rightarrow$$

$$F(1)=\frac{2}{1^2+1}(1\sin h\pi\sin\pi+\cos h\pi\cos\pi-1)=-\cosh\pi-1$$

۳۶. گزینه ۲ درست است.

معادله مشخصه $\lambda^2+\gamma=0\quad\rightarrow\quad\lambda=\pm\sqrt{-\gamma}$

برای داشتن جواب‌های نوسانی، فرض $\gamma>0$ را در نظر می‌گیریم و بدین ترتیب ریشه‌های معادله مشخصه $\lambda=\pm\sqrt{\gamma}\,i$ خواهد شد.

جواب عمومی : $y=C\sin\sqrt{\gamma}x+k\cos\sqrt{\gamma}x$

شرط $y(0)=0 \quad\rightarrow\quad K=0$

$$y(1)+y'(1)=0 \xrightarrow{K=0} C\sin\sqrt{\gamma}+C\sqrt{\gamma}\cos\sqrt{\gamma}=0 \rightarrow \sin\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}\cos\sqrt{\gamma}=0$$
$$\rightarrow \tan\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}=0$$

۳۷. گزینه ۲ درست است.

حل معادله موج با $f(x):$ $u(x,0)=0$: مکان اولیه

و

سرعت اولیه : $u_t(x,0)=h(x):g(x)$

طول $L=1$ مدنظر است و طبق حل دالامبر داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(K)dk \xrightarrow{f=0}$$

$$u\left(\frac{1}{3},\frac{13}{a}\right)=\frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{3}-a.\frac{13}{a}}^{\frac{1}{3}+a.\frac{13}{a}}h(K)dK=\frac{1}{2a}\int_{-\frac{38}{3}}^{\frac{40}{3}}h(K)dK$$

چون شرط مرزی هم در $x=1$ و هم در $x=0$ روی خود u داده شده، تابع h باید نسبت به خط $x=1$ (یا نسبت به خط $x=0$) گسترش فرد یافته و سپس با دوره تناوب $2L=2$ توسیع متناوب یابد.

$$u\left(\frac{1}{3},\frac{13}{a}\right)=\frac{1}{2a}\left\{\underbrace{\int_{-\frac{38}{3}}^{\frac{38}{3}}h(K)dK}_{\text{صفر است زیرا h نسبت به } x=0 \text{ گسترش فرد دارد.}}+\int_{\frac{38}{3}}^{\frac{40}{3}}h(K)dK\right\}$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{\frac{38}{3}-12}^{\frac{40}{3}-12}h(K)dK=\frac{1}{2a}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}h(K)dK=0$$

زیرا h نسبت به خط $x=1$ گسترش فرد دارد.

۳۸. گزینه ۱ درست است.

برای ارضاء شرط مرزی همگن $T(r,\pi)=0$، گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که تمام توابعش در $\theta=\pi$، صفر باشد و این فقط در گزینه اول ارضاء می‌شود. دقت کنید اختلاف گزینه اول و چهارم در عدد $\frac{1}{2}$ موجود در گزینه چهارم است و این عدد در $\theta=\pi$ صفر نمی‌شود.

توجه کنید که برای ارضاء شرط مرزی همگن $T_\theta(r,0)=0$، گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که مشتق تمام توابعش در $\theta=0$، صفر باشد که همه گزینه‌ها این شرط را ارضاء می‌کنند.

راه دقیق مسأله: با فرض $T=A(r)B(\theta)$ و قرار دادن آن در معادله لاپلاس داده شده داریم:

$$A''B+\frac{1}{r}A'B+\frac{1}{r^2}AB''=0 \quad\rightarrow\quad r^2\frac{A''}{A}+r\frac{A'}{A}=-\frac{B''}{B}=K$$

چون شرط مرزی همگن روی θ داده شده باید کاری کنیم که جواب‌های $B(\theta)$ نوسانی باشد و این می‌طلبد $K=\lambda^2>0$

$$-\frac{B''}{B}=\lambda^2 \quad \rightarrow \quad B''+\lambda^2 B=0 \quad \rightarrow \quad B(\theta)=C_1\sin\lambda\theta+C_2\cos\lambda\theta$$

از شرط $T_\theta(r,0)=0$ داریم $B'(0)=0$ که نتیجه می‌دهد $C_1=0$

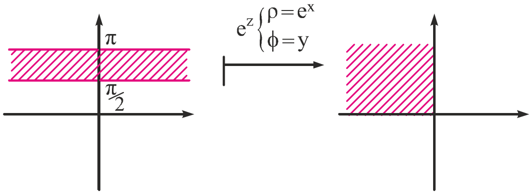
از شرط $T(r,\pi)=0$ داریم $B(\pi)=0$ و لذا:

$$c_2\cos\lambda\pi=0 \quad \rightarrow \quad \lambda\pi=\frac{2k-1}{2}\pi \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{2k-1}{2}(k\in N)$$

لذا توابع ویژه مسأله $\cos\frac{2k-1}{2}\theta$ با شرط $k\in N$ هستند.

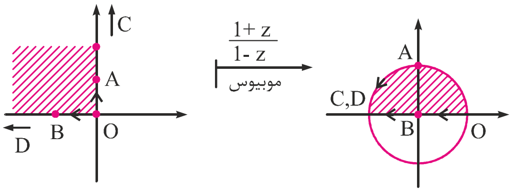
۳۹.گزینه ۱ درست است.

$$W: e^z \ , \ \frac{1+z}{1-z}$$



$$-\infty<x<+\infty \quad \Rightarrow \quad e^{-\infty}<\rho<e^{+\infty} \quad \Rightarrow \quad 0<\rho<+\infty$$

$$\frac{\pi}{2}<y\le\pi \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$$



$$O:0 \quad \rightarrow \quad \frac{1+0}{1-0}=1$$

$$A:i \quad \rightarrow \quad \frac{1+i}{1-i}=i$$

$$D\ ,\ C:\infty \quad \rightarrow \quad \frac{1+\infty}{1-\infty}=-1$$

$$B:-1 \quad \rightarrow \quad \frac{1-1}{1+1}=0$$

۴۰. گزینه ۴ درست است.

$z=0$ تکین اساسی تابع بوده و بسط لوران حول این نقطه چنین است.

$$f(z)=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^5 5!}+\dots\right)$$

$$\frac{1}{z}\ \text{ضریب جمله}=\operatorname{Res}\Big|_{z=0}=1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!5!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$