

فصل پنجم

«سری فوریه، انتگرال و تبدیل فوریه»

یادآوری

قبل از بحث در مورد سری فوریه لازم دیدم مطالبی از مباحث «ریاضی عمومی (۱)» را که پیش نیاز این فصل می باشد، یادآوری کنم. پیشنهاد می کنم این چند صفحه را برای راحتی خودتان در یادگیری مطالب ریاضی مهندسی حتماً بخوانید.

توابع متناوب

تابع f را با دامنه D_f در نظر بگیرید، هرگاه عددی مانند $T > 0$ وجود داشته باشد به شکلی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$1) \forall x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f \quad \text{و} \quad 2) \forall x \in D_f \Rightarrow f(x \pm T) = f(x)$$

در این صورت تابع f را متناوب می گوئیم و T را دوره تناوب تابع می نامیم، لازم به ذکر است که وقتی صحبت از دوره تناوب می شود، منظور کوچکترین مقدار مثبت T است. برای مثال دوره تناوب توابع $\cos x$ و $\sin x$ برابر 2π و دوره تناوب توابع $\cot x$ و $\tan x$ برابر π می باشد.

در حالت کلی می توان گفت دوره تناوب توابع مثلثاتی $\cos^n ax$ و $\sin^n ax$ اگر توان آنها زوج باشد برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ می باشد و اگر توان آنها فرد باشد

برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می باشد. برای مثال دوره تناوب تابع $y = \sin^3 x$ برابر $T = \frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب تابع $y = \cos^2 x$ برابر π می باشد.

نکته ۱: تابع $f(x) = a$ (تابع ثابت) متناوب است. ولی دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

نکته ۲: اگر تابعی متناوب باشد و دوره تناوب آن T باشد، اگر داخل قدر مطلق قرار گیرد، دوره تناوب آن معمولاً یا همان مقدار T ، $\frac{T}{2}$ و $\frac{T}{4}$ ،

به طور کلی کسری از دوره تناوب اصلی خواهد شد.

مثال ۱: دوره تناوب $f(x) = |\cos x|$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 2\pi & (1) & \frac{\pi}{2} & (2) \\ \pi & (3) & 3\pi & (4) \end{array}$$

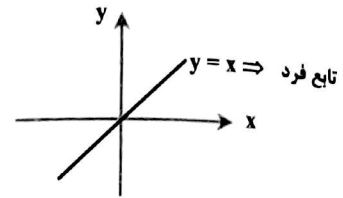
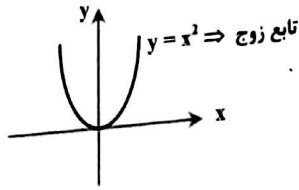
پاسخ: گزینه «۳» می دانیم دوره تناوب $f(x) = \cos x$ برابر $T_1 = 2\pi$ می باشد، اما با توجه به نکته فوق با قرار دادن نصف دوره تناوب فوق خواهیم دید تابع $f(x) = |\cos x|$ متناوب است.

توابع زوج و فرد: تابع با ضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیرید اگر به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$ آنگاه:

تابع $f(x)$ زوج است اگر $f(x) = f(-x)$ و تابع $f(x)$ فرد است اگر $f(x) = -f(-x)$

تذکره ۱: با توجه به تعریف های فوق، در توابع فرد $f(-x) + f(x) = 0$ و در توابع زوج $f(-x) - f(x) = 0$ خواهد بود.

نکته ۳: نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است.



- تابع با ضابطه $f(x) = c$ همواره زوج است.
- تابع با ضابطه $f(x) = 0$ تابعی هم زوج و هم فرد است.
- حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی زوج و حاصلضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.
- حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است.
- مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است.
- تابع علامت $\text{Sgn}(x)$ تابعی فرد می باشد.

مثال ۲: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

۴) $y = x^y + \sin x$

۳) $y = x^2$

۲) $y = x \cos x$

۱) $y = x \sin x$

پاسخ: گزینه «۱» ✓

- ۱) $f(x) = x \rightarrow f(-x) = -x = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است
 ۲) $f(x) = \cos x \rightarrow f(-x) = \cos(x) = f(x) \Rightarrow$ تابع زوج است
 ۳) $f(x) = \sin x \rightarrow f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است

با توجه به نکات فوق تابع $y = x \sin x$ حاصلضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و تابع $y = x \cos x$ تابعی فرد است و همچنین $y = x^y + \sin x$ مجموع دو تابع فرد است و لذا خود تابعی فرد است.

مثال ۳: کدامیک از توابع زیر فرد، زوج یا نه فرد و نه زوج هستند؟

۱) $x|x|$: فرد

۷) $e^{-|x|}$: زوج

۲) $\sin x + \cos x$: نه فرد و نه زوج

۸) $\ln x$: نه فرد و نه زوج

۳) $\sinh x$: فرد

۹) $x \sin nx$: زوج

۴) $\cosh x$: زوج

۱۰) e^x : نه فرد و نه زوج

۵) $x^2 \cos nx$: زوج

۱۱) $x + x^2$: نه فرد و نه زوج

۶) $x \cos x$: فرد

۱۲) $|x^3|$: زوج

انتگرال $\sin$ و $\cos$ با توان زوج:

با استفاده از فرمول های توان شکن (طلالی) توان آنها را کاهش می دهیم و سپس حاصل انتگرال را بدست می آوریم:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال ۴:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int [1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x] dx = \frac{1}{4} \int [1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)] dx \\ &= \frac{1}{4} (x + \sin 2x) + \frac{1}{8} (x + \frac{\sin 4x}{4}) + c = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c \end{aligned}$$

مثال ۵: حاصل انتگرال $I = \int \sin^4 x dx$ کدام است ؟

$$\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (2)$$

$$\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (4)$$

$$\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» ☒

$$\begin{aligned} I = \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \Rightarrow \\ I &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \right) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \end{aligned}$$

روش انتگرال گیری جزء به جزء:

از این روش معمولاً در محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int f(x).g(x)dx$ استفاده می‌شود که f تابعی است که بدست آوردن مشتق آن به سادگی صورت می‌گیرد. (مانند x^2 , $\text{Arcsin } x$, ...). g تابعی است که انتگرال آن به راحتی قابل محاسبه است. (مانند: $\sin x$, $\cos x$, e^x). حل اینگونه انتگرالها در حالت کلی به این صورت است که ابتدا یکی از توابع را U در نظر گرفته و بقیه عبارت زیر انتگرال را برابر dV در نظر می‌گیریم و با استفاده فرمول $\int U dV = UV - \int V dU$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۶: حاصل $I = \int x \sin x dx$ کدام است ؟

$$\cos x + x \sin x + c \quad (4)$$

$$\sin x + x \cos x + c \quad (3)$$

$$\cos x - x \sin x + c \quad (2)$$

$$\sin x - x \cos x + c \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» ☒

$$\begin{aligned} x = u \Rightarrow dx = du \\ \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \Rightarrow \int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

انتگرال گیری جزء به جزء به کمک تشکیل جدول:

در این روش ابتدا در یک جدول، تابع $f(x)$ و مشتق‌هایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرال‌هایش را در سمت راست قرار می‌دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود از تابع $g(x)$ انتگرال می‌گیریم و در نهایت مطابق پیکانهای مشخص شده توابعی که با پیکان به هم وصل شده‌اند را در هم ضرب و آنها را با توجه به علامت روی آنها با جمله بعد جمع یا تفریق می‌نماییم که البته این علامتها از بالا به پایین یک در میان مثبت و منفی هستند.

مثال ۷: حاصل انتگرال $I = \int x e^{2x} dx$ را تعیین کنید.

$f(x)$ و مشتقاتش	$g(x)$ و انتگرال‌هایش
x	e^{2x}
$\oplus$	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
$\ominus$	$\frac{e^{2x}}{4}$
0	

$$\begin{cases} f(x) = x, g(x) = e^{2x} \\ I = x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - \left(1 \times \frac{e^{2x}}{4} \right) + c \end{cases}$$

مثال ۸: حاصل انتگرال $I = \int x \cos 3x dx$ کدام است؟

(۴) $\frac{x \cos 3x}{3} - \frac{\sin 3x}{9} + c$

(۳) $\frac{x \sin 3x}{3} - \frac{\cos 3x}{9} + c$

(۲) $\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + c$

(۱) $\frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روش جدول داریم:

x	$\cos 3x$
1	$+$
1	$+$
0	$-$
0	$-$

$\Rightarrow I = \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$

مثال ۹: مطلوبست محاسبه $I = \int (x^3 + 1) \cos x dx$

$x^3 + 1$	$\cos x$
$3x^2$	$+$
$6x$	$+$
6	$-$
0	$-$

$\Rightarrow I = (x^3 + 1) \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$

نکته ۴: به ازای هر عدد صحیح n ، همواره دو تساوی مقابل برقرار است:

۱) $\cos n\pi = (-1)^n$ ، ۲) $\sin n\pi = 0$ ، ۳) $\sin(n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$

مثال ۱۰: حاصل انتگرال $I = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$ به ازای n های زوج کدام است؟

(۴) $-\frac{2\pi}{n}$

(۳) $\frac{2\pi}{n}$

(۲) $\frac{\pi}{n}$

(۱) $-\frac{\pi}{n}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از روش جزء به جزء (روش جدول) داریم:

x	$\sin nx$
1	$\oplus$
1	$\oplus$
0	$\ominus$
0	$\ominus$

$I = \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow$

$I = -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin n\pi - \frac{\pi}{n} \cos(-\pi n) - \frac{\sin(-\pi n)}{n^2} = -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi$

از طرفی $\cos n\pi = (-1)^n$ تعریف می‌شود و به ازای n های زوج برابر «+۱» می‌باشد لذا $I = -\frac{2\pi}{n}$ است.

مثال ۱۱: حاصل انتگرال $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$ ، $(n \neq 0)$ کدام است؟

(۴) $\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$

(۳) $-\frac{4\pi(-1)^n}{n^2}$

(۲) صفر

(۱) $\frac{4\pi(-1)^n}{n^2}$

✓ پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روش جزء به جزء (روش جدول) داریم:

$$I = \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2 \sin n\pi}{n} + \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} - \frac{2 \sin n\pi}{n^3} - \left(\frac{(-\pi)^2 \sin(-n\pi)}{n} + \frac{2(-\pi) \cos(-n\pi)}{n^2} - \frac{2 \sin(-n\pi)}{n^3} \right)$$

$$+ \frac{2\pi \cos(-n\pi)}{n^2} + \frac{2 \sin(-n\pi)}{n^3} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}$$

تذکره ۲: تنها زمانی می‌توان از روش جدول به روش گفته شده استفاده کرد که مشتق یکی از دو تابع بر حسب x نهایتاً صفر شود (در مورد انتگرال‌هایی که دارای توابع $\ln$, $\arcsin$ و یا انتگرال‌هایی که دارای هر دو نوع تابع نمایی و مثلثاتی با هم هستند نمی‌توان استفاده کرد) البته به ذکر است در درس ریاضیات مهندسی اکثر انتگرال‌ها با روش ذکر شده قابل حل می‌باشد. دو نوع انتگرال که در درس ریاضیات مهندسی کاربرد دارند زیر آمده است و پیشنهاد می‌شود نتایج آنها به خاطر سپرده شود.

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c \quad \text{و} \quad \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$$

مثال ۱۲: مطلوبست محاسبه $I = \int e^{5x} \cos 4x dx$

✓ پاسخ: با توجه به نکته فوق داریم:

$$I = \frac{e^{5x}}{41} (5 \cos 4x + 4 \sin 4x) + c$$

محاسبه انتگرالهای حاصلضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی:

برای محاسبه این نوع انتگرالها باید از فرمول تبدیل حاصلضرب به مجموع استفاده نمود.

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

مثال ۱۳: حاصل هریک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int \sin 2x \sin 2x dx = \int \frac{1}{2} [\cos(2x-2x) - \cos(2x+2x)] dx = \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 4x}{10} + c$$

$$I = \int \sin 2x \cos 4x dx = \int \frac{1}{2} [\sin(2x-4x) + \sin(2x+4x)] dx = -\frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \frac{1}{2} \int \sin 6x dx = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + c$$

$$I = \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx = \int \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \int \cos\left(\frac{x}{6}\right) dx + \frac{1}{2} \int \cos\left(\frac{5x}{6}\right) dx = 3 \sin\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{3}{5} \sin\left(\frac{5x}{6}\right) + c$$

نکته ۵: نتایج تعامد برای توابع $\sin$ و $\cos$ در یک دوره تناوب که در مسائل کاربرد دارد به شرح زیر است:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x dx = 0$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx = \begin{cases} L & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx = 0$$

نکته ۶: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 2L$ باشد، آنگاه به ازای هر عدد دلخواه α داریم:

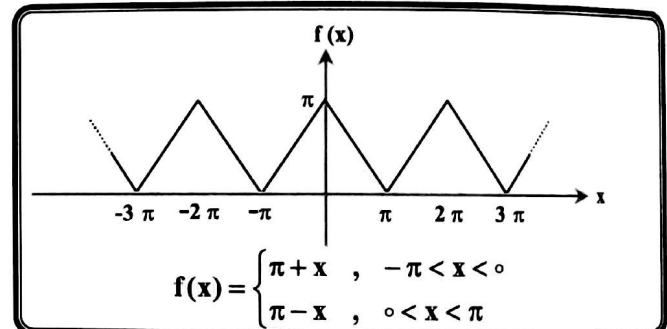
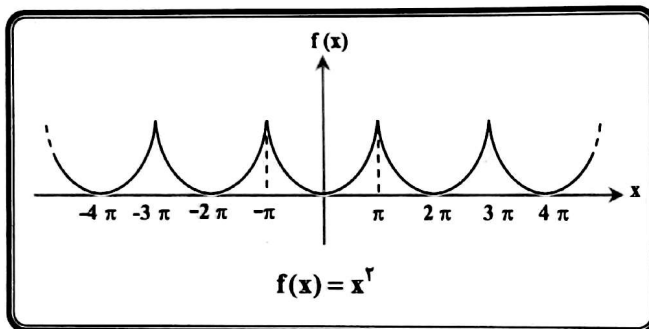
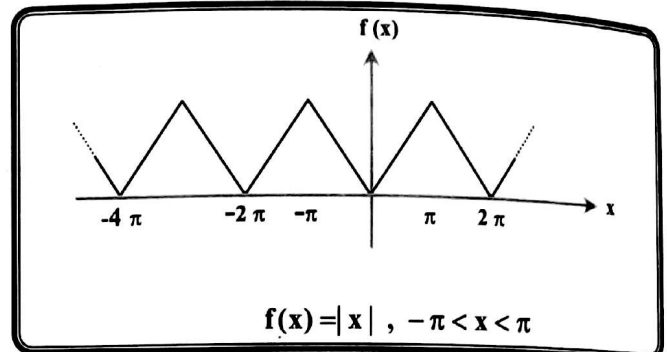
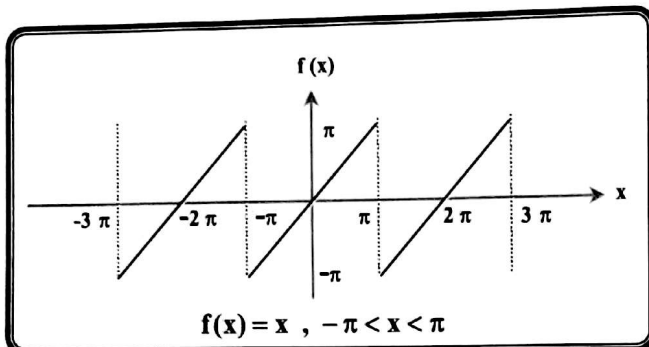
$$\int_{-L}^L f(x).dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).dx$$

$$\int_{-L}^L f(x).dx = \int_0^{2L} f(x).dx$$

و در حالت خاص که $\alpha = 0$ می‌باشد، داریم:

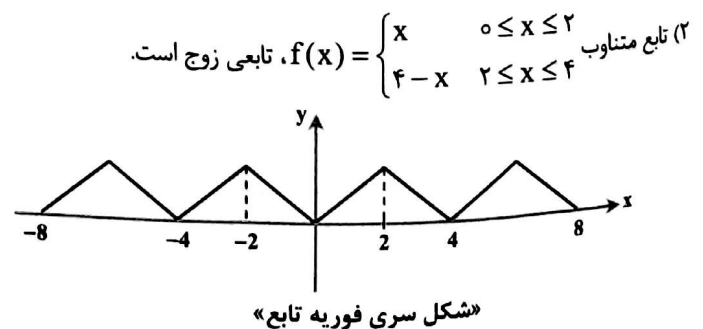
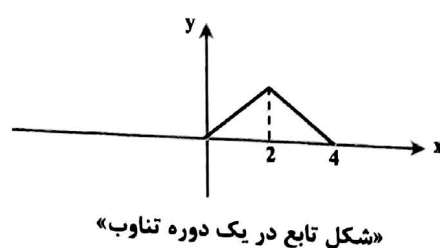
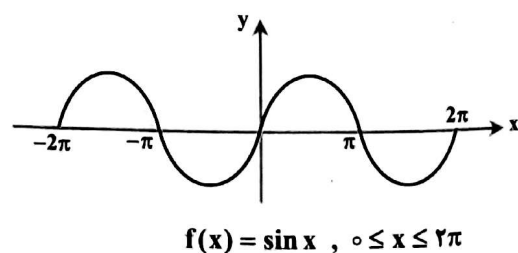
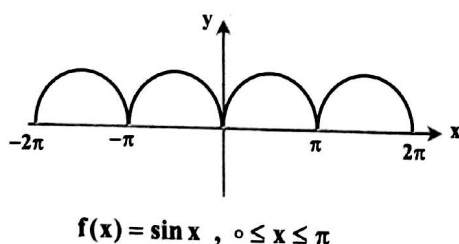
توابع به طور مجازی متناوب

چون برای به دست آوردن سری فوریه توابع باید شرط متناوب بودن توابع رعایت شود، برای توابعی که ذاتاً متناوب نیستند ما می‌توانیم آنها را به صورت مجازی متناوب تعریف کنیم. برای مثال کلیه توابع زیر که ذاتاً متناوب نیستند، با دوره تناوب $T = 2\pi$ به طور مجازی متناوب تعریف شده‌اند.



نکته ۷: در بعضی مسائل زوج و یا فرد بودن تابع به وضوح معلوم نیست، در این حالت شکل موج آن تابع زوج و یا فرد بودن آن را معلوم می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

(۱) تابع $f(x) = \sin x$ در بازه $0 \leq x \leq \pi$ نه زوج است و نه فرد. اما با رسم شکل موج تابع، مشخص می‌شود که شکل سری فوریه آن زوج است. اگر همین تابع در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ تعریف شود، با رسم شکل موج تابع به طور مجازی متناوب آن مشخص می‌شود، بسط فوریه آن تابعی فرد است:



(۲) تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ ، تابعی زوج است.

سری فوریه

برای هر تابع مانند $f(x)$ که با دوره تناوب $T = 2L$ متناوب می‌باشد با شرایط اینکه تابع $f(x)$ در فاصله $(-L, L)$ تعریف شده باشد و شرایط کافی برای داشتن سری فوریه را داشته باشد، می‌توان بسط فوریه نوشت، به عبارت ساده‌تر نمایش سری فوریه یک تابع فرم دیگری از نمایش ضابطه آن تابع با استفاده از جملات سینوس و کسینوس می‌باشد. در حالت کلی سری فوریه هر تابع مانند $f(x)$ را می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

(۱)

در رابطه فوق a_0 ، a_n و b_n ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند و از فرمولهای زیر بدست می‌آیند:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

a_0 مقدار متوسط تابع در یک دوره تناوب و یا مقدار ثابت بسط که برای توابع فرد صفر می‌باشد.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

a_n ضریب جملات کسینوسی است که برای توابع فرد صفر می‌باشد.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

b_n ضریب جملات سینوسی است که برای توابع زوج صفر می‌باشد.

* شرایط کافی برای این که تابعی سری فوریه داشته باشد، به صورت زیر است:

(۱) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در فاصله تناوب آن، محدود باشد.

(۲) تعدد نقاط اکسترمم تابع در فاصله تناوب آن، محدود باشد.

(۳) انتگرال معین تابع در فاصله تناوب آن، همگرا باشد.

خلاصه روش حل و نکات مهم در مسائل سری فوریه

در حل مسائل سری فوریه، اول دوره تناوب تابع و سپس بازه انتگرال گیری را معلوم کرده و با استفاده از روابط انتگرال گیری به محاسبه ضرایب می‌پردازیم:

* اگر بازه انتگرال گیری متقارن نباشد، آنگاه بازه انتگرال گیری همان بازه‌ای است که برای تابع به عنوان دامنه در صورت سؤال مشخص شده است.

* در محاسبه ضرایب سری فوریه باید بدانیم برای تمام n های طبیعی همواره روابط زیر برقرار است:

$$۱) \cos n\pi = (-1)^n, \quad ۲) \sin n\pi = 0, \quad ۳) \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$$

* انتگرال در یک دوره به شکل‌های گوناگون ممکن است تعریف شود، مهم این است که حد بالا، منهای حد پایین، برابر دوره تناوب شود:

$$\int_T = \int_0^T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_T^{2T} = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}}, \dots$$

* به گزینه‌ها نگاه کنید اگر مقادیر a_0 در آن‌ها متفاوت بود، فقط a_0 را حساب کنید چون محاسبه‌ی آن آسان است.

* بسط فوریه یک عدد ثابت، خود آن عدد ثابت است.

* حد ضرایب سری فوریه در بی‌نهایت، برابر صفر است.

مثال ۱۵: فرض کنیم $f(x) = f(x + 2\pi)$ و $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ باشد، مقدار ثابت این تابع در بسط سری مثلثاتی (فوریه) کدام است؟

$$a_0 = 3\pi^2 \quad (۴)$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad (۳)$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad (۲)$$

$$a_0 = \frac{3\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» دوره تناوب تابع $T = 2\pi$ می باشد، لذا داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

توضیح: اگر در این سؤال مقادیر b_n سؤال شود چون تابع زوج می باشد، واضح است $b_n = 0$ خواهد بود.

مثال ۱۶: تابع $f(x) = \begin{cases} -k & ; -\pi < x < 0 \\ k & ; 0 < x < \pi \end{cases}$ مفروض است. ضریب جملات سینوسی این تابع در بسط مثلثاتی سری فوریه کدام است؟

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} (1 - \sin n\pi) \quad (۴)$$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad (۳)$$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} (1 + \cos n\pi) \quad (۲)$$

$$b_n = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» دوره تناوب تابع $T = 2\pi$ می باشد و این یعنی $L = \pi$ است:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -k \sin nx dx + \int_0^{\pi} k \sin nx dx \right] = \frac{k}{n\pi} [\cos nx]_{-\pi}^0 - \left[\frac{k}{n\pi} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

مثال ۱۷: سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , 1 < x < 2 \end{cases}$ را بنویسید.

پاسخ: ابتدا دوره تناوب تابع و مقدار L را حساب می کنیم:

$$T = 2L = 2 \Rightarrow L = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \times dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (0) dx = \frac{1}{2} [x]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{1} \int_0^1 1 \times \cos n\pi x dx + \frac{1}{1} \int_1^2 (0) \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} [\sin n\pi x]_0^1 = \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = \int_0^1 \sin n\pi x dx + \int_1^2 (0) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} [-\cos n\pi x]_0^1 = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi x)$$

اگر n زوج باشد، آنگاه $b_n = 0$ و اگر n فرد باشد $b_n = \frac{2}{n\pi}$ ، لذا داریم:

نکته ۹: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد، طبق مطالب بیان شده برای انتگرال تابع زوج و سری فوریه می دانیم $b_n = 0$ و مقادیر a_0 و a_n را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

یعنی برای راحتی کار در مسائل مقادیر انتگرالها را به جای بازه $(-L, L)$ در بازه $(0, L)$ حساب می کنیم و آن را در عدد ۲ ضرب می کنیم و اگر چنانچه تابع $f(x)$ فرد باشد، می دانیم $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ و مقدار b_n از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

مثال ۱۸: سری فوری تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$ و دوره تناوب $T = 2\pi$ کدام است؟

$$\frac{fk}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (۴) \quad \frac{fk}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (۳) \quad \frac{fk}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (۲) \quad \frac{fk}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» چون $-\pi < x < \pi$ و $f(-x) = -f(x)$ لذا تابع فرد است و $a_n = 0$ و باید b_n را محاسبه کنیم:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin nx dx = \frac{2k}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2k}{\pi n} [-\cos n\pi + \cos(0)] = \frac{2k[1 - (-1)^n]}{n\pi}$$

ملاحظه می‌گردد به ازای n های زوج $b_n = 0$ خواهد بود و به ازای n های فرد $b_n = \frac{4k}{n\pi}$ می‌باشد، لذا سری گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۱۹: سری فوری تابع $f(x) = x$ در صورتی که $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x \quad (۲) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos n\pi x \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x \quad (۴) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin n\pi x \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» تابع فرد و دارای دوره تناوب $T = 2$ می‌باشد، لذا $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ اما برای محاسبه b_n داریم:

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری جزء به جزء}} b_n = 2 \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi} \xrightarrow{-\cos n\pi = (-1)^{n+1}} b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$$

مثال ۲۰: اگر α عددی ناصحیح و $f(x) = \cos \alpha x$ و $-\pi \leq x \leq \pi$ باشد، سری فوری f کدام است؟

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \pi \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx \quad (۲) \quad \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \sin \pi \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx \quad (۱)$$

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \pi \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx \quad (۴) \quad \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» واضح است تابع f تابعی زوج است لذا داریم:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x] dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n + \alpha} \sin(n + \alpha)x + \frac{1}{\alpha - n} \sin(\alpha - n)x \right]_0^{\pi}$$

اگر n زوج باشد. $(n = 2k)$ آنگاه:

$$\begin{cases} \sin(n + \alpha)\pi = \sin(2k\pi + \alpha\pi) = \sin \alpha\pi \\ \sin(\alpha - n)\pi = \sin(\alpha\pi - 2k\pi) = -\sin(2k\pi - \alpha\pi) = \sin \alpha\pi \end{cases}$$

به همین ترتیب اگر n فرد باشد:

$$\sin(\alpha + n)\pi = -\sin \alpha\pi \quad , \quad \sin(\alpha - n)\pi = -\sin \alpha\pi$$