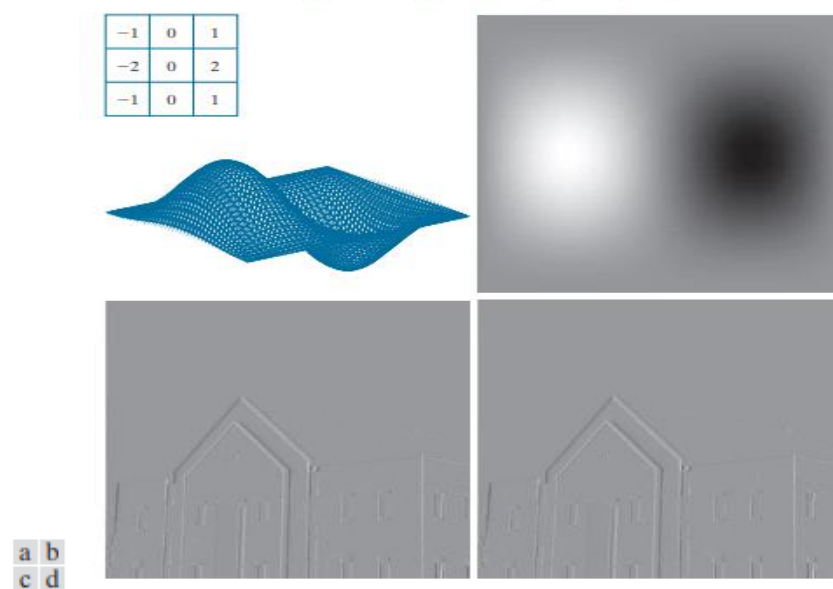


کتاب پردازش تصویر دیجیتال گونزالس  
[برای دانلود کتاب کامل اینجا کلیک کنید](#)

می دهند. شکل فیلتر باترورث توسط پارامتری به نام ترتیب فیلتر کنترل می شود. برای مقادیر زیاد این پارامتر ، فیلتر باترورث به فیلتر ایده آل نزدیک می شود.

برای مقادیر کمتر ، فیلتر باترورث بیشتر شبیه یک فیلتر گوسی است. بنابراین ، فیلتر باترورث یک تبدیل بین دو "افراط" را فراهم می کند. تمام فیلترهای این بخش از روشی که در قسمت قبل بیان شده است پیروی می کند ، بنابراین همه توابع تبدیل فیلتر ،  $H(u, v)$  ، اندازه  $P * Q$  دارند. یعنی متغیرهای فرکانس گسسته در محدوده  $u = 0, 1, 2, \dots, P - 1$  and  $v = 0, 1, 2, \dots, Q - 1$  هستند ، جایی که  $P$  و  $Q$  اندازه های بالایی هستند که با معادلات (۴-۱۰۰) و (۴-۱۰۱) داده شده است به



شکل ۴.۳۸ (الف) یک هسته فضایی و یک نمودار منظم از عملکرد تبدیل فیلتر دامنه فرکانس مربوطه. (ب) تبدیل عملکرد نشان داده شده به عنوان یک تصویر. (ج) نتیجه فیلترینگ شکل ۴.۳۷ (a) در حوزه فرکانس با عملکرد تبدیل در (b) (d) نتیجه فیلتر کردن یک تصویر مشابه در حوزه فضایی با هسته در (a). نتایج یکسان است.

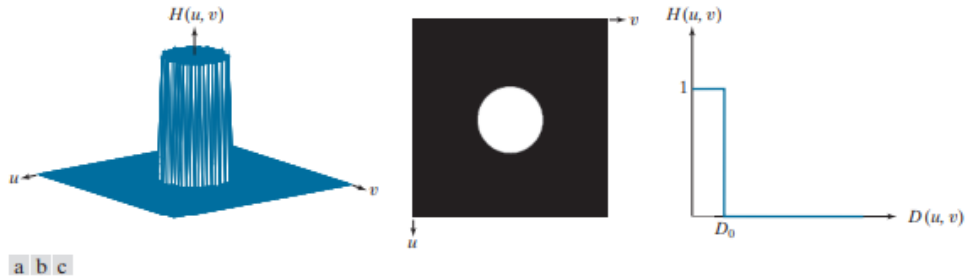
### فیلترهای ایده آل پایین گذر

یک فیلتر دو طرفه پایین گذر که بدون تضعیف همه فرکانسهای درون یک دایره شعاع از مبدا عبور می کند و همه فرکانسهای خارج از این را "قطع" می کند ، دایره را فیلتر پایین گذر ایده آل (ILPF) می نامند. با تابع تبدیل مشخص می شود

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4-111)$$

جایی که  $D_0$  ثابت مثبت است و  $D(u, v)$  فاصله بین نقطه  $(u, v)$  در حوزه فرکانس و مرکز مستطیل فرکانس  $P$  \*  $Q$  است. به این معنا که،

$$D(u, v) = \left[ (u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2} \quad (4-112)$$



شکل ۴.۳۹ (الف) نمودار چشم انداز یک تابع تبدیل ایده آل فیلتر پایین گذر. (ب) عملکردی که به صورت تصویر نمایش داده می شود. (ج) سطح مقطع شعاعی.

جایی که ، مانند قبل ،  $P$  و  $Q$  اندازه های بالایی از معادلات (۴-۱۰۲) و (۴-۱۰۳) هستند. شکل ۴.۳۹ (الف) نمودار چشم انداز تابع تبدیل  $H(u, v)$  و شکل ۴.۳۹ (ب) آن را به صورت تصویر نشان می دهد. همانطور که در بخش ۴.۳ ذکر شد ، نام ایده آل نشان می دهد که تمام فرکانسهای داخل یا داخل یک دایره از شعاع  $D_0$  بدون تضعیف عبور می کنند ، در حالی که همه فرکانسهای خارج از دایره به طور کامل تضعیف می شوند (فیلتر می شوند). عملکرد ایده آل تبدیل فیلتر پایین گذر از نظر شعاع در مورد مبدأ متقارن است. این بدان معناست که همانطور که شکل ۴.۳۹ (c) نشان می دهد ، به طور کامل با یک سطح مقطع شعاعی تعریف شده است. نمایش دو بعدی فیلتر با چرخش سطح  $360^\circ$  درجه به دست می آید.

برای سطح مقطع ILPF ، نقطه تبدیل بین مقادیر  $H(u, v) = 1$  و  $H(u, v) = 0$  فرکانس قطع نامیده می شود. در شکل ۴.۳۹ ، فرکانس قطع  $D_0$  است. فرکانس برش شدید یک ILPF با قطعات الکترونیکی قابل درک نیست ، اگرچه مطمئناً می توان آنها را در رایانه شبیه سازی کرد (با این شرط که سریعترین تبدیل ممکن با فاصله بین پیکسل ها محدود شود).

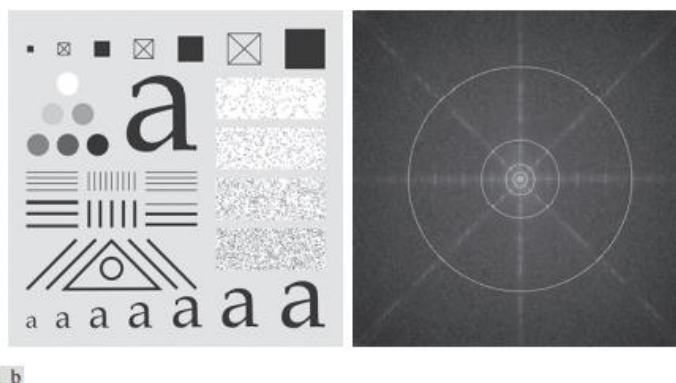
فیلترهای پایین گذر در این فصل با مطالعه رفتار آنها به عنوان تابعی از فرکانس های قطع یکسان مقایسه می شوند. یک راه برای ایجاد مکانهای استاندارد فرکانس قطع با استفاده از دایره هایی که مقادیر مشخصی از قدرت PT کل تصویر را در بر می گیرد ، که با جمع بندی اجزای طیف توان تصاویر پد شده در هر نقطه  $(u, v)$  برای  $u = 0, 1, 2, \dots, P-1$  and  $v = 0, 1, 2, \dots, Q-1$  بدست می آید. ، به این معنا که،

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v) \quad (4-113)$$

جایی که  $P(u, v)$  توسط معادله (۴-۸۹) داده شده است. اگر DFT متمرکز شده باشد ، دایره ای از شعاع  $D_0$  با مبدأ در مرکز مستطیل فرکانس ، درصدی از توان را در بر می گیرد ، جایی که

$$\alpha = 100 \left[ \frac{\sum_u \sum_v P(u,v)}{P_T} \right] \quad (4-114)$$

و جمع بر مقادیر  $(u, v)$  است که در داخل دایره یا در مرز آن قرار دارد. شکل ۴.۴۰ (الف) و (ب) یک تصویر الگوی آزمایشی و طیف آن را نشان می دهد. دایره هایی که روی طیف قرار گرفته اند، به ترتیب شعاع ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰ پیکسل دارند و درصد کل توان ذکر شده در عنوان تصویر را در بر می گیرند. طیف به سرعت سقوط می کند و نزدیک به ۸۷ از کل قدرت توسط یک دایره نسبتاً کوچک از شعاع ۱۰ محاصره می شود. اهمیت این امر در مثال زیر آشکار می شود.

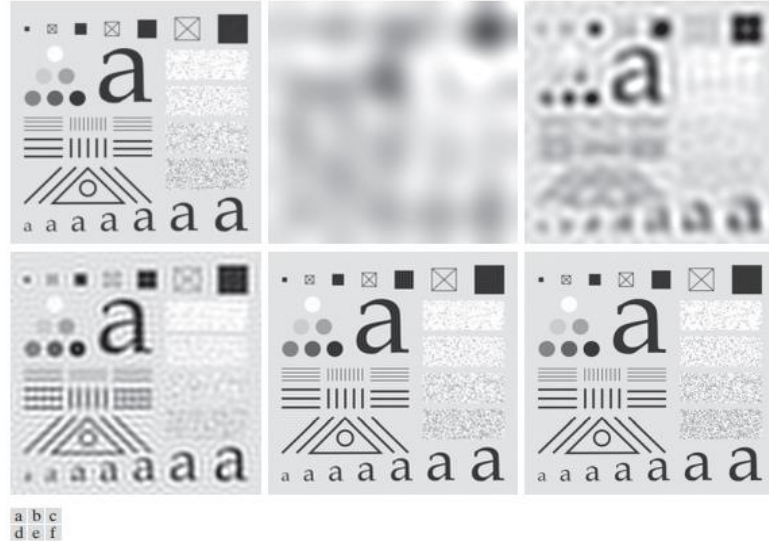


شکل ۴.۴۰ (الف) الگوی آزمایشی اندازه  $688 * 688$  پیکسل، و (ب) طیف آن. طیف در نتیجه بارگذاری دو برابر اندازه تصویر است، اما نصف اندازه آن تا  $fit$  نشان داده می شود. نسبت به طیف کامل، شعاعهای ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰ پیکسل دارند. شعاع ها به ترتیب ۸۶.۹، ۹۲.۸، ۹۵.۱، ۹۷.۶ و ۹۹.۴ درصد از قدرت تصویر پد شده را در بر می گیرند.

مثال ۴.۱۶: هموارسازی تصویر در حوزه فرکانس با استفاده از فیلترهای پایین گذر.

شکل ۴.۴۱ نتایج اعمال ILPF ها با فرکانس های قطع در شعاع های نشان داده شده در شکل ۴.۴۰ (ب) را نشان می دهد. شکل ۴.۴۱ (ب) برای همه اهداف کاربردی بی فایده است، مگر اینکه هدف از تار شدن این باشد که تمام جزئیات تصویر حذف شود، به جز "لکه ها" که بزرگترین اجسام را نشان می دهند. تار شدگی شدید در این تصویر به روشنی نشان می دهد که بیشتر اطلاعات با وضوح تصویر در قدرت ۱۳٪ حذف شده توسط فیلتر است. با افزایش شعاع فیلتر، قدرت کمتر و کمتری حذف می شود و در نتیجه تار شدن آن کمتر می شود. توجه داشته باشید که تصاویر در شکل ۴.۴۱ (ج) تا (ه) حاوی "زنگ" قابل توجهی است، که با کاهش مقدار محتوای فرکانس بالا حذف شده، بافتی هموار می شود. زنگ حتی در تصویر قابل مشاهده است که در آن تنها ۲ درصد از کل قدرت حذف شده است (شکل ۴.۴۱ (ه)). این رفتار زنگ یکی از ویژگیهای فیلترهای ایده آل است، همانطور که قبلاً چندین بار اشاره کردیم. سرانجام، نتیجه ۴.۹۹.۴ in در شکل ۴.۴۱ (f) تیرگی بسیار کمی را ایجاد می کند و زنگ تقریباً نامحسوس را نشان می دهد، اما در بیشتر موارد، این تصویر به تصویر اصلی نزدیک است. این نشان می دهد که اطلاعات لبه کمی در ۰.۶٪ بالای توان طیف حذف شده توسط ILPF وجود دارد.

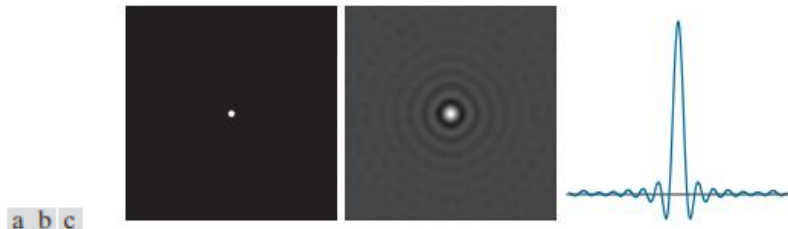
از این مثال مشخص است که فیلترینگ ایده آل کم ارتفاع عملی نیست. با این حال ، مطالعه رفتار ILPF ها به عنوان بخشی از توسعه مفاهیم فیلترینگ ما مفید است. همچنین ، همانطور که در بحث زیر نشان داده شد ، با تلاش برای توضیح ویژگی زنگ زدن ILPF ها در حوزه فضایی ، بینش جالبی به دست می آید.



شکل ۴.۴۱ (الف) تصویر اصلی با اندازه  $688 * 688$  پیکسل. (ب) - (و) نتایج فیلترینگ با استفاده از ILPF ها با فرکانسهای قطع در مقادیر شعاع ۱۰ ، ۳۰ ، ۶۰ ، ۱۶۰ و ۴۶۰ ، همانطور که در شکل ۴.۴۰ (ب) نشان داده شده است. قدرت حذف شده توسط این فیلترها به ترتیب ۱۳.۱ ، ۷.۲ ، ۴.۹ ، ۲.۴ و ۰.۶ از کل بود. ما برای جلوگیری از حاشیه های سیاه رنگ مشخصه صفحات صفر ، از پد آینه استفاده کردیم ، همانطور که در شکل ۴.۳۱ (ج) نشان داده شده است.

خواص مات شدن و زنگ زدن ILPF ها را می توان با استفاده از قضیه پیچیدگی توضیح داد. شکل ۴.۴۲ (الف) تصویری از عملکرد تبدیل دامنه فرکانس ILPF شعاع ۱۵ و اندازه  $1000 * 1000$  پیکسل را نشان می دهد. شکل ۴.۴۲ (ب) نمای فضایی ،  $h(x, y)$  از ILPF است که با گرفتن  $(IDFT(a))$  بدست می آید (به زنگ توجه کنید). شکل ۴.۴۲ (ج) پروفایل شدت خطی را که از مرکز (b) عبور می کند نشان می دهد. این پروفایل شبیه یک تابع sinc است. هر پیکسل را در یک تصویر به عنوان یک ضربه مجزا تصور کنید که قدرت آن متناسب با شدت تصویر در آن مکان است. جمع آوری این تابع شبیه به sinc با یک ضربه ضربه می زند (یعنی مبدأ آن را تغییر می دهد) به محل ضربه. به این معنا که کانولوشن یک کپی از تابع شکل ۴.۴۲ (ب) را با محوریت هر محل پیکسل در تصویر می سازد. لوب مرکزی این عملکرد فضایی علت اصلی تار شدن است ، در حالی که لوب های بیرونی و کوچکتر عمدتاً مسئول زنگ زدن هستند. از آنجا که "گسترش" تابع فضایی با شعاع  $H(u, v)$  نسبت عکس دارد ، هرچه  $D_0$  بزرگتر شود (  $e, i$  ، فرکانس های بیشتری که عبور می کنند) ،

تابع فضایی بیشتر به یک ضربه نزدیک می شود ، در حد محدود ، هنگام تطبیق با تصویر به هیچ وجه باعث ایجاد تار نمی شود. برعکس با کوچکتر شدن  $D_0$  اتفاق می افتد. این نوع رفتار متقابل باید برای شما عادی باشد. در دو بخش بعدی ، ما نشان می دهیم که ممکن است با کمی زنگ یا بدون زنگ به تار شدن دست یابیم ، یک هدف مهم در فیلترینگ پایین گذر.



شکل ۴.۴۲ (الف) عملکرد تبدیل دامنه فرکانس ILPF (ب) تابع هسته حوزه فضایی مربوطه. پروفایل شدت خط افقی از طریق مرکز (b)

### فیلترهای گوسی پایین گذر

توابع تبدیل فیلتر گذرگاه گوسی (GLPF) دارای فرم هستند

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2} \quad (4-115)$$

کجا ، مانند معادله (۴-۱۱۲) ،  $D(u, v)$  فاصله از مرکز مستطیل فرکانس  $P * Q$  تا هر نقطه ،  $(u, v)$  ، موجود در مستطیل است. بر خلاف عبارات قبلی ما برای توابع گوسی ، ما در اینجا از ضرب ضرب برای مطابقت با فیلترهای مورد بحث در این بخش و قسمتهای بعدی که بیشترین مقدار آنها ۱ است ، استفاده نمی کنیم. با اجازه دادن به  $\sigma = D_0$  ، می توانیم تابع تبدیل گوسی را با علامت مشابه توابع دیگر در این بخش بیان کنیم:

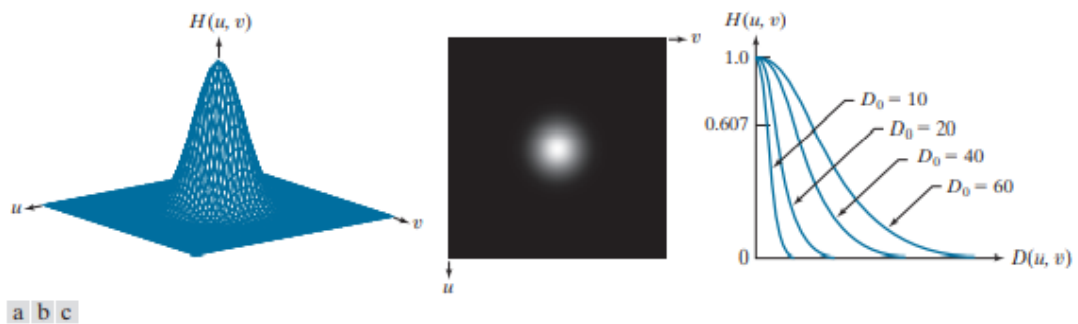
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad (4-116)$$

جایی که  $D_0$  فرکانس قطع است. وقتی  $D(u, v) = D_0$  ، تابع تبدیل GLPF تا  $0.607$  از حداکثر مقدار  $1.0$  آن کاهش می یابد.

از جدول ۴.۴ ، ما می دانیم که تبدیل معکوس فوریه یک تابع گوسی با دامنه فرکانس نیز گوسی است. این بدان معناست که یک هسته فیلتر گوس فضایی ، با محاسبه IDFT معادله به دست آمده است. (۴-۱۱۵) یا (۴-۱۱۶) ، زنگ نخواهد داشت. همانطور که خاصیت ۱۳ جدول ۴.۴ نشان می دهد ، همان رابطه معکوس که قبلاً برای ILPF ها توضیح داده شد ، در مورد GLPF ها نیز صادق است. توابع تبدیل باریک گوسی در حوزه فرکانس دلالت بر توابع وسیع تر هسته در حوزه فضایی دارد و بالعکس. شکل ۴.۴۳ یک نمودار چشم انداز ، نمایش تصویر و مقطع شعاعی یک تابع تبدیل GLPF را نشان می دهد.

مثال ۴.۱۷: هموارسازی تصویر در حوزه فرکانس با استفاده از فیلترهای گوسی کم گذر.

شکل ۴.۴۴ نتایج استفاده از GLPF معادله را نشان می دهد. (۴-۱۱۶) تا شکل ۴.۴۴ (a)، با  $D_0$  برابر پنج شعاع در شکل ۴.۴۰ (b) در مقایسه با نتایج به دست آمده با یک ILPF (شکل ۴.۴۱)، ما یک تبدیل هموار در تار شدن را به عنوان تابعی از افزایش فرکانس قطع یادداشت می کنیم. GLPF کمی هموارتر از ILPF به دست آورد. تفاوت اصلی این است که هنگام استفاده از GLPF اطمینان داریم که زنگ نمی زند. این امر در عمل بسیار مهم است، به ویژه در شرایطی که هر نوع مصنوعی غیرقابل قبول است، مانند تصویربرداری پزشکی. در مواردی که کنترل بیشتر تبدیل بین فرکانسهای پایین و زیاد در مورد فرکانس قطع مورد نیاز است، فیلتر پایین گذر باترورث که بعداً مورد بحث قرار می گیرد، انتخاب مناسب تری را ارائه می دهد. قیمت این کنترل اضافی بر روی محصول فیلتر، امکان زنگ زدن است، همانطور که به زودی خواهید دید.



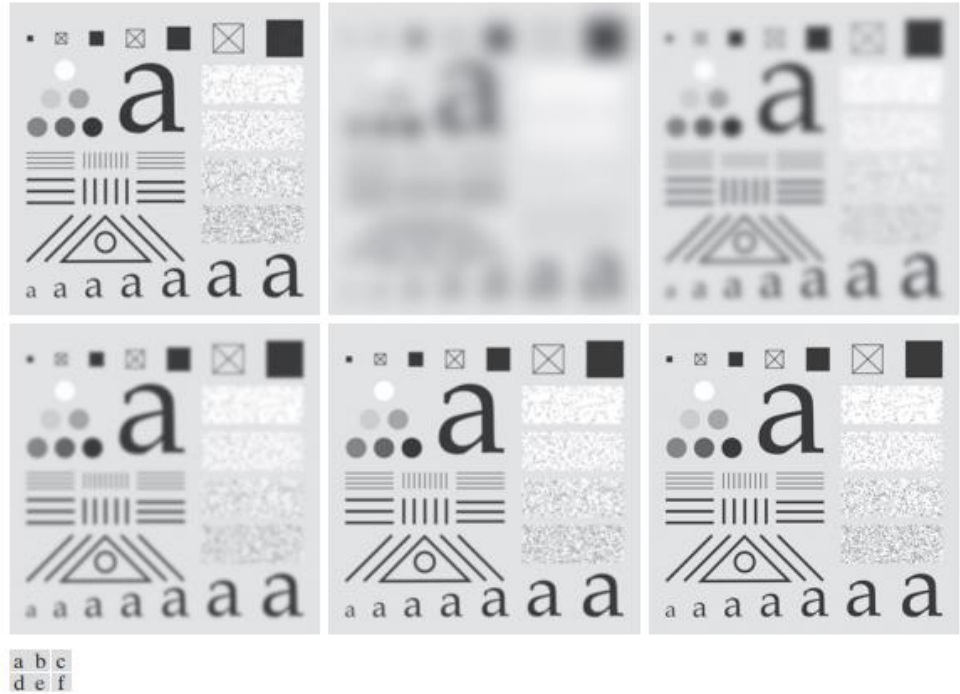
شکل ۴.۴۳ (الف) نمودار چشم انداز یک تابع تبدیل GLPF (ب) عملکردی که به صورت تصویر نمایش داده می شود. (ج) مقاطع شعاعی برای مقادیر مختلف  $D_0$ .

### فیلترهای باترورث پایین گذر

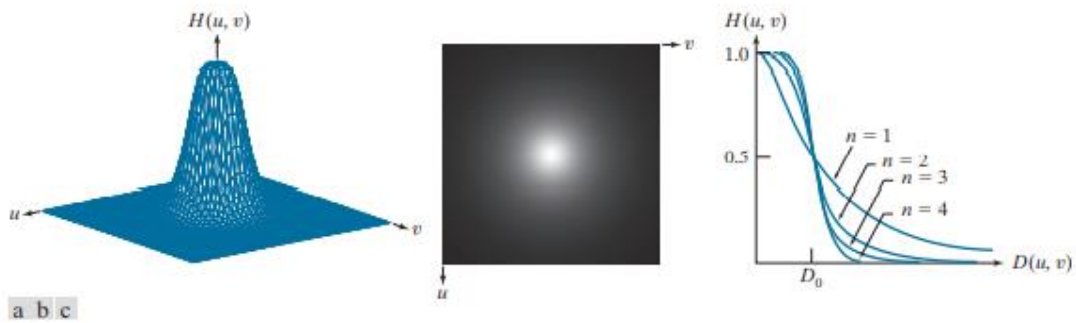
تابع تبدیل یک فیلتر پایین گذر باترورث (BLPF) از مرتبه  $n$ ، با فرکانس قطع در فاصله  $D_0$  از مرکز مستطیل فرکانس، به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (4-117)$$

جایی که  $D(u, v)$  توسط معادله (۴-۱۱۲) داده شده است. شکل ۴.۴۵ نمودار چشم انداز، نمایش تصویر و مقطع شعاعی عملکرد BLPF را نشان می دهد. مقایسه نمودارهای سطح مقطع در شکل ها. ۴.۳۹، ۴.۴۳ و ۴.۴۵، می بینیم که تابع BLPF را می توان برای نزدیک شدن به ویژگی های ILPF با استفاده از مقادیر بالاتر  $n$  و GLPF برای مقادیر کمتر  $n$  کنترل کرد، در حالی که تبدیل هموار از فرکانس پایین به بالا را فراهم می کند. بنابراین، ما می توانیم از BLPF برای نزدیک شدن به وضوح عملکرد ILPF با میزان قابل توجهی زنگ استفاده کنیم.



شکل ۴.۴۴ (الف) تصویر اصلی با اندازه  $688 * 688$  پیکسل. (ب) - (و) نتایج فیلترینگ با استفاده از GLPF با فرکانس های قطع در شعاع های نشان داده شده در شکل ۴.۴۰. با شکل ۴.۴۱ مقایسه کنید. ما برای جلوگیری از حاشیه های مشکی مشخصه پد صفر از روکش آینه استفاده کردیم.



شکل ۴.۴۵ (الف) نمودار چشم انداز یک تابع تبدیل فیلتر پایین گذر باترورث. (ب) عملکردی که به صورت تصویر نمایش داده می شود. (ج) مقاطع شعاعی BLPF های سفارشات ۱ تا ۴.

مثال ۴.۱۸: هموارسازی تصویر با استفاده از فیلتر پایین گذر باترورث.

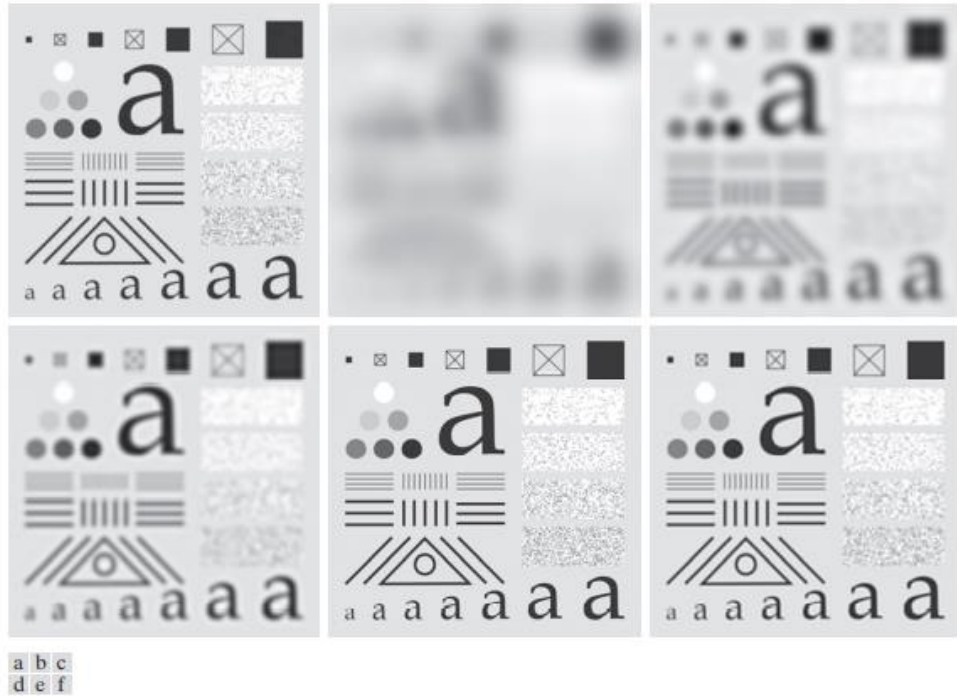
شکل ۴.۴۶ (f)-(b) نتایج اعمال BLPF معادله (۴-۱۱۷) را نشان می دهد. تا شکل ۴.۴۶ (a)، با فرکانس های قطع برابر با پنج شعاع در شکل ۴.۴۰ (b) و با  $n = 2, 25$  نتایج از نظر تار شدن بین نتایج بدست آمده با استفاده از ILPF ها و GLPF ها است. برای مثال، شکل ۴.۴۶ (b) را با شکل های ۴.۴۱ (ب) و ۴.۴۴ (ب) مقایسه کنید. میزان تار شدن با BLPF کمتر از ILPF، اما بیشتر از GLPF بود.



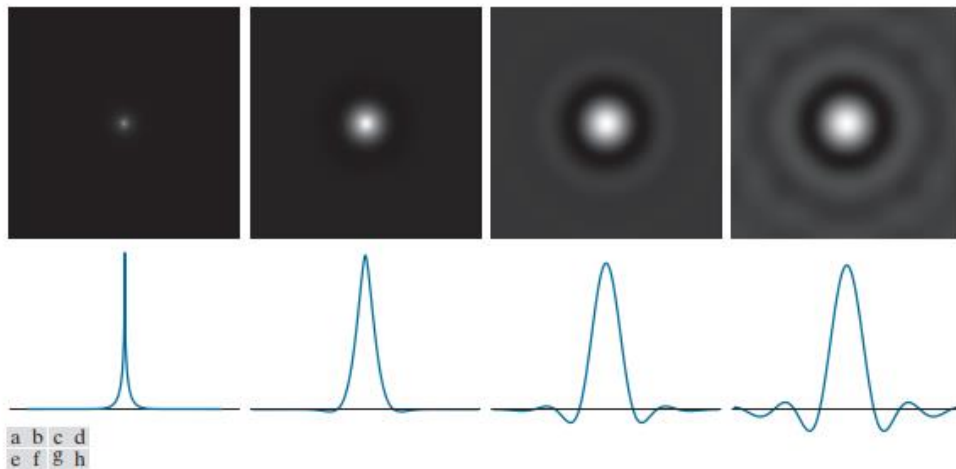
هسته حوزه فضایی قابل دریافت از BLPF مرتبه ۱ فاقد زنگ است. به طور کلی، زنگ در فیلترهای مرتبه ۲ یا ۳ نامحسوس است، اما می تواند در فیلترهای مرتبه های بالاتر قابل تامل باشد. شکل ۴.۴۷ مقایسه ای را بین نمایش فضایی (یعنی هسته های فضایی) مربوط به BLPF های مرتبه های مختلف (با استفاده از فرکانس قطع ۵ در همه موارد) نشان می دهد. همچنین پروفایل شدت در امتداد یک خط اسکن افقی از مرکز هر هسته فضایی نشان داده می شود. کرنل که با BLPF مرتبه ۱ مطابقت دارد [شکل ۴.۴۷ (a) را ببینید] هیچ مقدار زنگ و منفی ندارد. کرنل مربوط به BLPF مرتبه ۲ زنگ خفیف و مقادیر منفی منفی را نشان می دهد، اما مطمئناً کمتر از ILPF است. همانطور که تصاویر باقی مانده نشان می دهد، زنگ برای فیلم های مرتبه بالاتر معنی دار می شود. BLPF سفارش ۲۰ دارای هسته فضایی است که ویژگی های زنگ شبیه به ILPF را نشان می دهد (در حد مجاز، هر دو فیلتر یکسان هستند). BLPF سفارشات ۲ تا ۳ سازگاری خوبی بین فیلترینگ پایین گذر موثر و زنگ قابل قبول در حوزه فضایی است. جدول ۴.۵ عملکردهای تبدیل فیلتر پایین گذر را که در این بخش مورد بحث قرار گرفته است، خلاصه می کند.

### مثالهای اضافی فیلترینگ پایین گذر

در بحث زیر، ما چندین کاربرد عملی فیلترینگ پایین گذر در حوزه فرکانس را نشان می دهیم. اولین مثال از زمینه درک ماشین با کاربرد تا تشخیص کاراکتر است. دومی مربوط به صنعت چاپ و نشر است. و سوم مربوط به پردازش تصاویر ماهواره ای و هوایی است. نتایج مشابهی را می توان با استفاده از تکنیک های فیلترینگ فضایی پایین گذر که در بخش ۳.۵ مورد بحث قرار گرفته است به دست آورد. ما از GLPF در همه مثالها برای قوام استفاده می کنیم، اما نتایج مشابه را می توان با استفاده از BLPF ها بدست آورد. به خاطر داشته باشید که تصاویر برای فیلتر کردن دو برابر می شوند، همانطور که توسط معادلات (۴-۱۰۲) و (۴-۱۰۳) نشان داده شده است. و عملکردهای تبدیل فیلتر باید با اندازه تصویر پد شده مطابقت داشته باشد. مقادیر  $D_0$  مورد استفاده در مثالهای زیر نشان دهنده این اندازه فیلتر دو برابر شده است.



شکل ۴.۴۶ (الف) تصویر اصلی با اندازه  $688 * 688$  پیکسل. (ب) - (و) نتایج فیلترینگ با استفاده از BLPF با فرکانس های قطع در شعاع های نشان داده شده در شکل ۴.۴۰ و  $2,250$  با شکل مقایسه کنید. ۴.۴۱ و ۴.۴۴. ما برای جلوگیری از حاشیه های مشکی مشخصه پد صفر از روکش آینه استفاده کردیم.



شکل ۴.۴۷ (الف) - (د) نمایش های فضایی (یعنی هسته های فضایی) مربوط به توابع تبدیل BLPF در اندازه  $1000 * 1000$  پیکسل، فرکانس قطع ۵، و ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۲۰، به ترتیب. (ه) - (ح) شدت مربوط به مرکز توابع فیلتر نشان می دهد.

جدول ۴.۵ توابع تبدیل فیلتر پایین گذر  $D_0$ . فرکانس قطع است و  $n$  ترتیب فیلتر باترورث است.

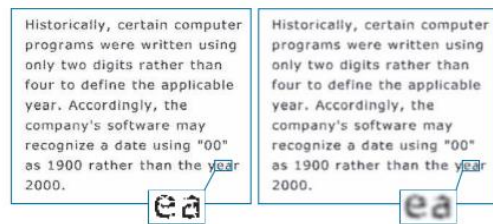
Ideal	Gaussian	Butterworth
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$	$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$

شکل ۴.۴۸ نمونه ای از متن با وضوح پایین را نشان می دهد. به عنوان مثال ، در ارسال فکس ، مطالب تکراری و سوابق تاریخی ، فردی با متنی مانند این برخورد می کند. این نمونه خاص عاری از مشکلات اضافی مانند لکه ، چین و چروک و قسمت های پاره شده است. بخش بزرگنمایی شده در شکل ۴.۴۸ (الف) نشان می دهد که شخصیت های این سند به دلیل عدم وضوح دارای اشکال شکل هستند و بسیاری از شخصیت ها شکسته شده اند. اگرچه بشر از نظر بصری این مشکلات را بدون مشکل ایجاد می کند ، اما سیستم های تشخیص ماشین دارای مشکلات واقعی در خواندن شخصیت های شکسته هستند. یک رویکرد برای رسیدگی به این مشکل این است که با تار کردن شکاف های کوچک در تصویر ورودی ، پل ایجاد کنید. شکل ۴.۴۸ (ب) نشان می دهد که چگونه می توان کاراکترها را با این روش ساده با استفاده از یک فیلتر پایین گذر گاوسی با "  $D_0 = 120$  " کرد. معمولاً از نوع "تعمیر" که با پردازش اضافی توضیح داده شده است ، مانند آستانه ، معمولی پیروی می شود. و نازک شدن ، برای به دست آوردن شخصیت های تمیزتر. ما در فصل نازک شدن و در فصل ۱۰ در مورد آستانه صحبت خواهیم کرد.

فیلترینگ پایین گذر جزء اصلی در صنعت چاپ و نشر است ، جایی که برای بسیاری از عملکردهای پیش پردازش ، از جمله پوشش غیر واضح ، همانطور که در بخش ۳.۶ مورد بحث قرار گرفته است ، استفاده می شود. شکل ۴.۴۹ کاربرد فیلترینگ پایین گذر را برای تولید یک نتیجه نرم و نرم از یک تصویر تیز نشان می دهد. برای چهره انسان ، هدف معمولی کاهش وضوح خطوط پوست و لکه های کوچک است. بخش های بزرگنمایی شده در شکل ها. ۴.۴۹ (b) و (c) به وضوح کاهش قابل توجهی در خطوط پوستی اطراف چشم افراد نشان می دهد. در واقع ، تصاویر هموار کاملاً نرم و دلپذیر به نظر می رسند.

شکل ۴.۵۰ دو کاربرد فیلترینگ پایین گذر را بر روی یک تصویر ، اما با اهداف کاملاً متفاوت نشان می دهد. شکل ۴.۵۰ (a) بخش  $808 * 754$  از یک تصویر سنج سنج با وضوح بسیار بالا (VHRR) است که بخشی از خلیج مکزیک (تاریکی) و فلوریدا (نور) را نشان می دهد (به خطوط اسکن سنسور افقی توجه کنید). مرزهای بین آنها توسط جریانهای حلقه ایجاد شده است. این تصویر گویای تصاویر سنجش از دور است که در آنها سنسورها تمایل به تولید خطوط اسکن واضح در مسیری دارند که صحنه در آن اسکن می شود. (برای توضیح شرایط تصویربرداری که می تواند منجر به چنین تخریب هایی شود ، مثال ۴.۲۴ را ببینید). رویکردهای م **effective** در بخش ۴.۱۰ و ۵.۴). این تصویر با استفاده از GLFP با  $D_0 = 50$  به دست آمده است. کاهش اثر خطوط اسکن در تصویر هموار می تواند تشخیص ویژگی های کلان ، مانند مرزهای واسط بین جریانات اقیانوس را ساده کند.

شکل ۴.۵۰ (ج) نتیجه فیلترهای کم ارتفاع گاوسی با  $D_0 = 20$  را به طور قابل توجهی بیشتر نشان می دهد. در اینجا ، هدف این است که تا حد امکان جزئیات را محو کرده و ویژگی های بزرگ را قابل تشخیص بگذاریم. به عنوان مثال ، این نوع فیلترینگ می تواند بخشی از مرحله پیش پردازش سیستم تجزیه و تحلیل تصویر باشد که ویژگی های یک بانک تصویر را جستجو می کند. نمونه ای از این ویژگی ها می تواند دریاچه هایی با اندازه معین باشد ، مانند دریاچه Okeechobee در منطقه شرقی پایین فلوریدا ، که در شکل ۴.۵۰ (ج) نشان داده شده است به عنوان یک منطقه تاریک تقریباً گرد که توسط یک منطقه روشن تر احاطه شده است. فیلترینگ پایین گذر به کمک تحلیل میانگین ویژگیهای کوچکتر از ویژگیهای مورد نظر ، به ساده سازی تجزیه و تحلیل کمک می کند.

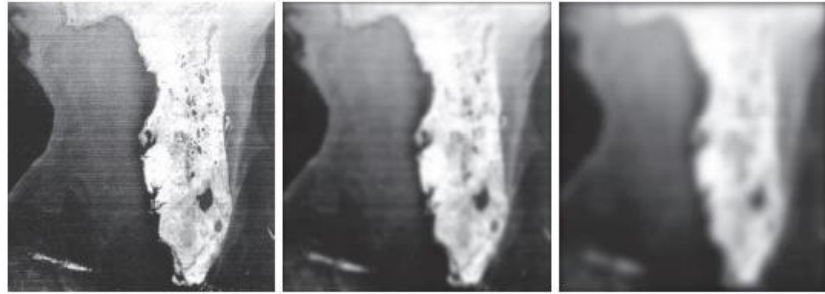


شکل ۴.۴۸ (الف) متن نمونه با وضوح پایین (به کاراکترهای شکسته در نمای بزرگنمایی شده توجه کنید). (ب) نتیجه فیلتر کردن با GLPF ، نشان می دهد که شکاف هایی در شخصیت های شکسته به هم پیوسته اند.



a b c

شکل ۴.۴۹ (الف) تصویر اصلی  $785 * 732$  (ب) نتیجه فیلتر کردن با استفاده از GLPF با  $D_0 = 150$  (ج) نتیجه فیلتر کردن با استفاده از GLPF با  $D_0 = 130$  به کاهش خطوط پوستی در بخشهای بزرگنمایی شده در (b) و (c) توجه کنید.



a b c

شکل ۴.۵۰ (الف) تصویر ماهواره ای  $۷۵۴ * ۸۰۸$  که خطوط اسکن برجسته افقی را نشان می دهد. (ب) نتیجه فیلتر کردن با استفاده از GLPF با  $D_0 = ۵۰$  (ج) نتیجه استفاده از GLPF با  $D_0 = ۲۰$  تصویر اصلی برگرفته از NOAA.)

#### ۴.۹ وضوح تصویر با استفاده از فیلترهای بالاگذر

در قسمت قبل نشان دادیم که می توان با تضعیف اجزای فرکانس بالای تبدیل فوریه یک تصویر را هموار کرد. از آنجا که لبه ها و سایر تغییرات ناگهانی شدت با اجزای فرکانس بالا همراه است ، می توان وضوح تصویر را در حوزه فرکانس با فیلتر بالا ، که اجزای فرکانس پایین را بدون ایجاد اختلال در فرکانسهای بالا در تبدیل فوریه تضعیف می کند ، به دست آورد. همانطور که در بخش ۴.۸ ، ما فقط فیلترهای تغییر مرحله صفر را در نظر می گیریم که از نظر شعاع متقارن هستند. تمام فیلترینگ در این بخش بر اساس روشی است که در بخش ۴.۷ بیان شده است ، بنابراین فرض می شود که تمام تصاویر دارای اندازه  $P * Q$  هستند [به معادله (۴-۱۰۲) و (۴-۱۰۳)] مراجعه کنید. ] ، و توابع تبدیل فیلتر ،  $H(u, v)$  ، توابع متمرکز و مجزا اندازه  $P * Q$  است.

#### فیلترهای ایده آل ، گوسی ، و باترورث بالاگذر از فیلترهای پایین گذر

همانطور که در مورد هسته های حوزه فضایی (بخش ۳.۷ را ببینید) ، تفریق یک تابع تبدیل فیلتر پایین گذر از ۱ ، عملکرد تبدیل فیلتر بالا گذر مربوطه را در حوزه فرکانس به دست می آورد:

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v) \quad (4-118)$$

جایی که  $H(u, v)$  تابع تبدیل یک فیلتر پایین گذر است. بنابراین ، از معادله (۴-۱۱۱) زیر بر می آید. که عملکرد تبدیل ایده آل فیلتر بالاگذر (IHPF) را نشان می دهد

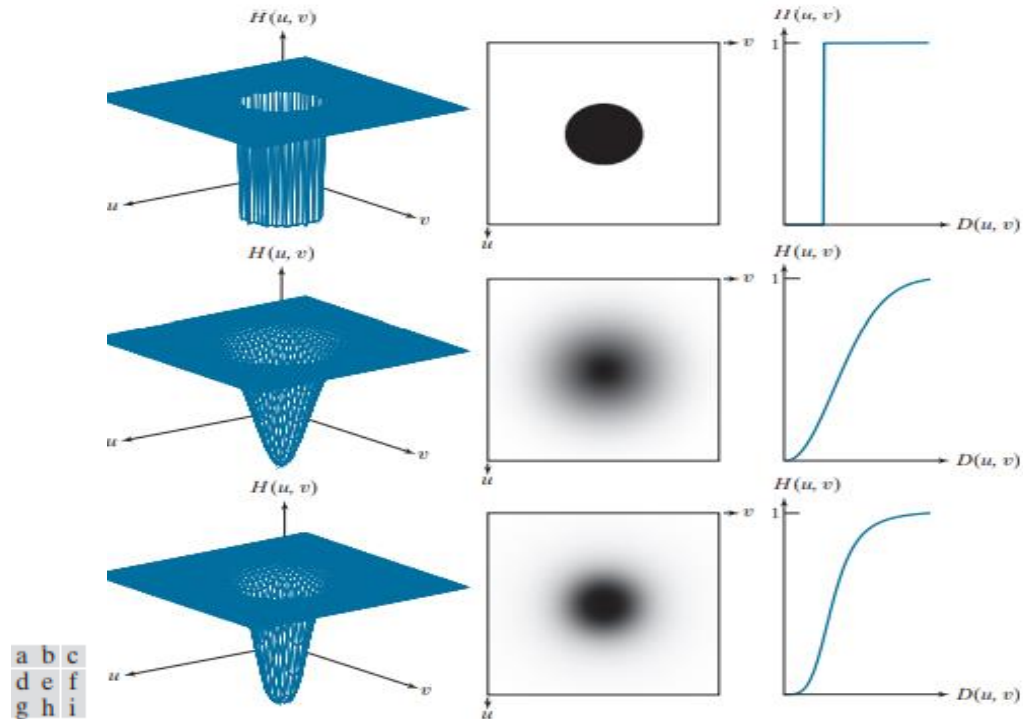
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4-119)$$

جایی که مانند قبل ،  $D(u, v)$  فاصله از مرکز زاویه فرکانس  $P * Q$  است ، همانطور که در معادله (۴-۱۱۲) داده شده است. به طور مشابه ، از معادله (۴-۱۱۶) زیر بر می آید. که تابع تبدیل یک تابع تبدیل فیلتر گاوسی (GHPF) توسط

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad (4-120)$$

و، از معادله (۴-۱۱۷)، که عملکرد تبدیل یک فیلتر گذرگاه باترورث (BHPF) است

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}} \quad (4-121)$$



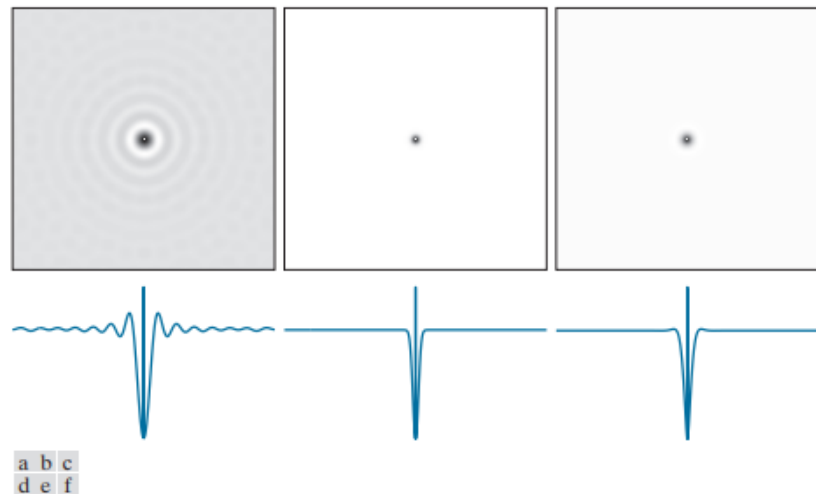
شکل ۴.۵۱ سطر بالا: نمودار، تصویر و سطح مقطع شعاعی یک تابع تبدیل IHPF. ردیف های میانی و پایینی: دنباله یکسانی برای GHPF و BHPF توابع تبدیل (حاشیه های نازک تصویر برای وضوح اضافه شده است. آنها بخشی از داده ها نیستند).

شکل ۴.۵۱ نمودارهای سه بعدی، نمایش تصویر و مقطع شعاعی را برای توابع تبدیل قبلی نشان می دهد. مانند قبل، می بینیم که عملکرد تبدیل BHPF در ردیف سوم تصویر نشان دهنده گذار بین وضوح IHPF و هموار بودن عملکرد تبدیل GHPF است. تقریب می شود از معادله (۴-۱۱۸) که هسته فضایی مربوط به یک تابع تبدیل فیلتر بالا در حوزه فرکانس توسط

$$\begin{aligned} h_{HP}(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}[H_{HP}(u,v)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[1 - H_{LP}(u,v)] \\ &= \delta(x,y) - h_{LP}(x,y) \end{aligned} \quad (4-122)$$

جایی که ما از این واقعیت استفاده کردیم که ۱ IDFT در حوزه فرکانس یک تکانه در حوزه فضایی است (جدول ۴.۴ را ببینید). این معادله دقیقاً پایه و اساس بحث در بخش ۳.۷ است، که در آن ما نشان دادیم که چگونه می توان با تفریق یک هسته پایین گذر از یک ضربه واحد، یک هسته بالا گذر ساخت.

شکل ۴.۵۲ هسته های فضایی بالا گذر را نشان می دهد که دقیقاً به این روش و با استفاده از معادله (۴-۱۲۲) ساخته شده اند. با توابع تبدیل LPF، ILPF، GLPF و BLPF مقادیر  $M$ ،  $N$ ، و  $D_0$  مورد استفاده در این تصویر همان مقداری است که برای شکل ۴.۴۲ استفاده کردیم، و BLPF مرتبه ۲ است. شکل ۴.۵۲ (a) هسته ایده آل ایده آل را نشان می دهد که با استفاده از معادله (۴-۱۲۲)، به دست آمده است. و شکل ۴.۵۲ (ب) یک پروفایل شدت افقی از طریق مرکز کارل است. عنصر مرکزی پروفایل یک تکانه واحد است که به صورت یک نقطه روشن در مرکز شکل ۴.۵۲ (a) قابل مشاهده است. توجه داشته باشید که این هسته دارای ویژگی های زنگ یکسان است که در شکل ۴.۴۲ (b) برای همتای پایین گذر مربوطه نشان داده شده است. همانطور که به زودی خواهید دید، زنگ زدن مانند قبل قابل اعتراض است، اما این بار در تصاویری که با فیلترهای ایده آل ارتفاع بالا تیز شده اند. تصاویر و پروفایل های دیگر در شکل ۴.۵۲ مربوط به هسته های گاوس و باترورث است. از شکل ۴.۵۱ می دانیم که توابع تبدیل GHPF در حوزه فرکانس دارای "دامنه" گسترده تری نسبت به توابع باترورث با اندازه قابل مقایسه و فرکانس قطع هستند. بنابراین، ما انتظار داریم که هسته های فضایی باترورث "گسترده تر" از هسته های گاوسی قابل مقایسه باشند، واقعیتی که توسط تصاویر و پروفایل آنها در شکل ۴.۵۲ تایید شده است. جدول ۴.۶ سه عملکرد تبدیل فیلترهای بالا گذر را که در پاراگرافهای قبل مورد بحث قرار گرفت خلاصه می کند.



شکل ۴.۵۲ (الف)-(ج): هسته فضایی ایده آل، گاوس و باترورث از توابع تبدیل دامنه فرکانسی IHPF، GHPF و BHPF بدست می آید. (حاشیه های نازک تصویر بخشی از داده ها نیستند). (د) - (و): شدت افقی از طریق مراکز هسته ها نمایان می شود.

جدول ۴.۶ عملکردهای تبدیل فیلتر بالا گذر  $D_0$ . فرکانس قطع و  $n$  ترتیب تابع تبدیل باترورث است

Ideal	Gaussian	Butterworth
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$

مثال ۴.۱۹: تغییر الگوی تست شخصیت.

ردیف اول شکل ۴.۵۳ نتیجه فیلتر کردن الگوی آزمایش را در شکل ۴.۳۷ (a) با استفاده از توابع تبدیل IHPF، GHPF و BHPF با  $D_0 = 60$  [شکل ۴.۳۷ (b)] و  $n = 2$  را برای نشان می دهد. فیلتر باترورث از فصل ۳ می دانیم که فیلترهای بالاگذر تصاویری با مقادیر منفی تولید می کند. تصاویر شکل ۴.۵۳ مقیاس بندی نشده اند، بنابراین مقادیر منفی توسط صفحه نمایش در ۰ (سیاه) بریده می شود.

هدف اصلی فیلتر بالاگذر تیز کردن است. همچنین، چون فیلترهای ارتفاع بالا در اینجا عبارت DC را به صفر می رسانند، تصاویر در اصل فاقد تنالیت هستند، همانطور که قبلاً در رابطه با شکل ۴.۳۰ توضیح داده شد.

هدف اصلی ما در این مثال مقایسه رفتار سه فیلتر بالاگذر است. همانطور که در شکل ۴.۵۳ (الف) نشان داده می شود، فیلتر ایده آل ارتفاع با اعوجاج شدید ناشی از زنگ نتایج ایجاد کرده است. به عنوان مثال، لکه های درون خط بزرگ "a" مصنوعات زنگ دار هستند. در مقایسه، هیچ شکل ی. ۴.۵۳ (b) یا (c) چنین تحریف هایی دارند. با اشاره به شکل ۴.۳۷ (ب)، فیلترها تقریباً ۹۵ of از انرژی تصویر را حذف یا تضعیف کرده اند. همانطور که می دانید، حذف فرکانس های پایین یک تصویر به میزان قابل توجهی محتوای سطح خاکستری آن را کاهش می دهد و بیشتر لبه ها و سایر تغییرات واضح باقی می ماند، همانطور که در شکل ۴.۵۳ مشهود است. جزئیاتی که در ردیف اول تصویر مشاهده می کنید تنها در ۵٪ بالای انرژی تصویر موجود است.

ردیف دوم، با  $D_0 = 160$  به دست آمده، جالب تر است. انرژی باقیمانده آن تصاویر حدود ۲.۵ درصد یا نصف انرژی تصاویر در ردیف اول است. با این حال، تفاوت در جزئیات جزئی قابل توجه است. به عنوان مثال، ببینید چقدر مرز "a" بزرگتر در حال حاضر تمیزتر است، به ویژه در نتایج گوسی و باترورث. همین امر در مورد همه جزئیات دیگر، تا کوچکترین اجسام صادق است. این نتیجه ای است که هنگام تشخیص حاشیه ها و حاشیه ها قابل قبول تلقی می شود.

شکل ۴.۵۴ تصاویر ردیف دوم شکل ۴.۵۳ را نشان می دهد که با استفاده از معادلات (۲-۳۱) و (۲-۳۲) مقیاس بندی شده اند. برای نمایش دامنه شدت کامل هر دو شدت مثبت و منفی. زنگ در شکل ۴.۵۴ (الف) نارسایی فیلترهای ایده آل ارتفاع را نشان می دهد. در مقابل، به هموار بودن پس زمینه در دو تصویر دیگر و ترد بودن لبه های آنها توجه کنید.

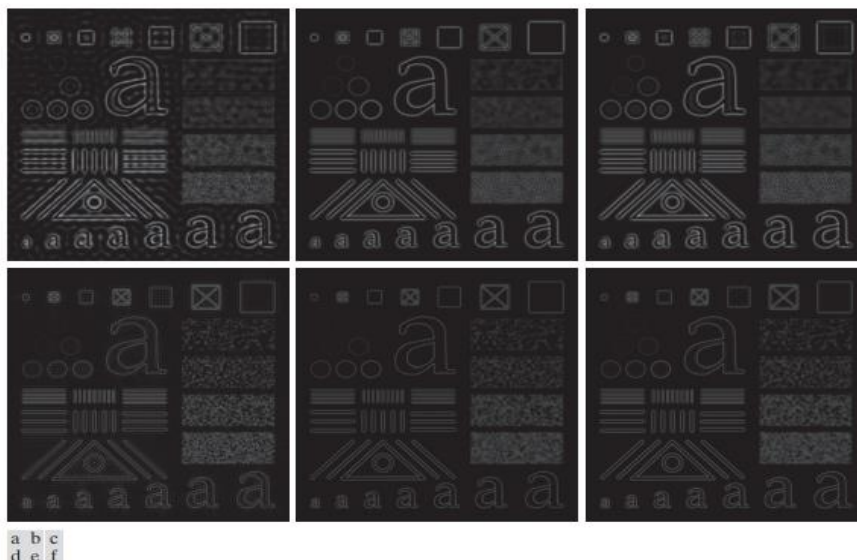
مثال ۴.۲۰: استفاده از فیلترهای بالاگذر و آستانه برای افزایش تصویر.

شکل ۴.۵۵ (الف) یک تصویر  $1026 * 962$  از یک انگشت شست است که در آن لکه ها (یک مشکل معمولی) مشهود است. یک مرحله کلیدی در تشخیص خودکار اثر انگشت، تقویت برجستگی های چاپ و کاهش لکه ها است. در این مثال، ما از فیلتر بالا برای افزایش برجستگی ها و کاهش آثار لکه گیری استفاده می کنیم. افزایش خط الراس با این واقعیت صورت می گیرد که مرزهای آنها با فرکانس های بالا مشخص می شود، که با یک فیلتر گذرگاه تغییر نمی کند. از طرف دیگر، فیلتر اجزای فرکانس پایین را کاهش می دهد، که به تدریج با شدت های

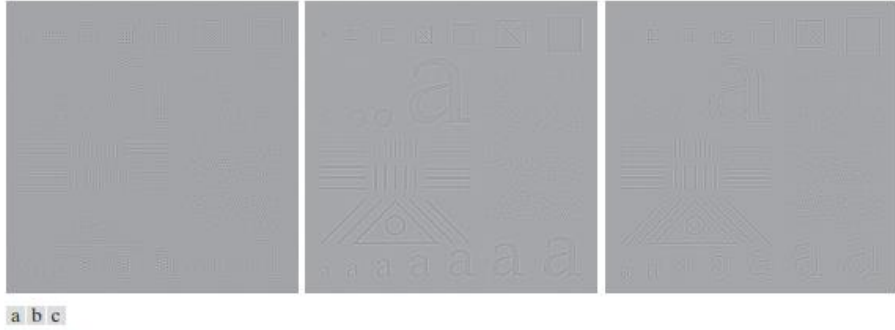


متفاوتی در تصویر ، مانند پس زمینه و لکه ها مطابقت دارد. بنابراین ، افزایش با کاهش اثر همه ویژگی ها به جز مواردی با فرکانس بالا ، که ویژگیهای مورد علاقه در این مورد است ، به دست می آید.

شکل ۴.۵۵ (ب) نتیجه استفاده از یک فیلتر باتر وورث مرتبه ۴ مرتبه ۴ با فرکانس قطع ۵۰ است. فیلتر درجه چهار یک تبدیل سریع (اما هموار) از فرکانسهای پایین به زیاد را با ویژگیهای فیلتر بین ایده آل و ایده آل ارائه می دهد. فیلتر گوسی فرکانس برش انتخاب شده حدود ۵٪ از ابعاد طولانی تصویر است. ایده این است که  $D_0$  نزدیک به مبدا باشد تا فرکانس های پایین تضعیف شوند اما به طور کامل حذف نشوند ، به جز عبارت DC که روی ۰ تنظیم شده است ، بنابراین اختلاف تنالیته بین خط الراس و پس زمینه به طور کامل از بین نمی رود. انتخاب مقدار برای  $D_0$  بین ۵ تا ۱۰ درصد از ابعاد طولانی تصویر نقطه شروع خوبی است. انتخاب مقدار زیادی از  $D_0$  جزئیات را تا حدی برجسته می کند که تعریف خط الراس تحت تأثیر قرار می گیرد. همانطور که انتظار می رفت ، تصویر فیلترشده دارای مقادیر منفی است که توسط صفحه نمایش به صورت سیاه نشان داده می شود. یک رویکرد ساده برای برجسته کردن ویژگی های واضح در یک تصویر با فیلتر بالا این است که با تنظیم سیاه (۰) همه مقادیر منفی و سفید (۱) مقادیر باقی مانده ، آن را در آستانه قرار دهید. شکل ۴.۵۵ (ج) نتیجه این عملیات را نشان می دهد. توجه داشته باشید که برجستگی ها چگونه واضح هستند و چگونه اثر لکه ها به میزان قابل توجهی کاهش یافته است. در واقع ، پشته هایی که در قسمت بالا ، سمت راست تصویر به سختی قابل مشاهده هستند در شکل ۴.۵۵ (الف) به زیبایی در شکل ۴.۵۵ (ج) افزایش یافته اند. یک الگوریتم خودکار می تواند دنباله های روی این تصویر را بسیار ساده تر از تصویر اصلی پیدا کند.



شکل ۴.۵۳ ردیف بالا: تصویر شکل ۴.۴۰ (a) فیلتر شده با توابع تبدیل IHPF، GHPF و BHPF با استفاده از  $D_0 = 70$  در همه موارد ( $n = 2$  برای BHPF). ردیف دوم: دنباله مشابه ، اما با استفاده از  $D_0 = 170$ .



شکل ۴.۵۴ تصاویر ردیف دوم شکل ۴.۵۳ با استفاده از معادلات (۲-۳۱) و (۲-۳۲) مقیاس بندی شده اند. برای نشان دادن مقادیر مثبت و منفی.



شکل ۴.۵۵ (الف) اثر انگشت شست شده لکه دار. (ب) نتیجه فیلتر بالاگذر (c) نتیجه آستانه (ب). (تصویر اصلی از موسسه ملی استاندارد و فناوری ایالات متحده تهیه شده است.)

### لاپلاسیان در حوزه فرکانس

در بخش ۳.۶، ما از لاپلاسیان برای وضوح تصویر در حوزه فضایی استفاده کردیم. در این بخش، ما لاپلاسیان را مجدداً بررسی می کنیم و نشان می دهیم که نتایج معادل با استفاده از تکنیک های حوزه فرکانس به دست می آورد. می توان نشان داد (مسئله ۴.۵۲ را ببینید) که لاپلاسیان را می توان در حوزه فرکانس با استفاده از عملکرد تبدیل فیلتر پیاده سازی کرد.

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2) \quad (4-123)$$

یا با توجه به مرکز مستطیل فرکانس، از تابع تبدیل استفاده کنید

$$\begin{aligned} H(u, v) &= -4\pi^2 \left[ \left( u - P/2 \right)^2 + \left( v - Q/2 \right)^2 \right] \\ &= -4\pi^2 D^2(u, v) \end{aligned} \quad (4-124)$$

جایی که  $D(u, v)$  تابع فاصله تعریف شده در معادله (۴-۱۱۲) است. با استفاده از این تابع تبدیل، لاپلاسیان یک تصویر،  $f(x, y)$ ، به روش آشنا بدست می آید:

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} [ H(u, v) F(u, v) ] \quad (4-125)$$

جایی که  $F(u, v)$  DFT  $f(x, y)$  است. همانطور که در معادله (۳-۵۴)، افزایش با استفاده از معادله اجرا می شود

$$g(x,y) = f(x,y) + c\nabla^2 f(x,y) \quad (4-126)$$

در اینجا  $c = 1$  زیرا  $H(u, v)$  منفی است. در فصل ۳،  $f(x, y)$  و  $f_2 f(x, y)$  مقادیر قابل مقایسه ای داشتند. با این حال، محاسبه  $\nabla^2 f(x, y)$  با معادله (۴-۱۲۵) عوامل مقیاس بندی DFT را معرفی می کند که می توانند چندین مرتبه بزرگتر از حداکثر باشند

مقدار  $f$ . بنابراین، تفاوت بین  $f$  و لاپلاکی آن باید در محدوده های قابل مقایسه آورده شود. ساده ترین راه برای حل این مشکل عادی سازی مقادیر  $f(x, y)$  در محدوده  $[0, 1]$  (قبل از محاسبه DFT آن) و تقسیم  $\nabla^2 f(x, y)$  بر حداکثر مقدار آن، که آن را به محدوده تقریبی می رساند  $[-1, 1]$ . (یاد آوردن، لاپلاکی ارزش منفی دارد). سپس می توان از معادله (۴-۱۲۶) استفاده کرد. ما می توانیم معادله بنویسیم (۴-۱۲۶) به طور مستقیم در حوزه فرکانس به عنوان

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(u,v) - H(u,v)F(u,v)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{[1 - H(u,v)]F(u,v)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u,v)]F(u,v)\} \end{aligned} \quad (4-127)$$

اگرچه این نتیجه زیبا است، اما همان مسائل مربوط به مقیاس بندی را که ذکر شد، با این واقعیت که عامل نرمالیزاسیون به راحتی محاسبه نمی شود، دارد. به همین دلیل، معادله (۴-۱۲۶) پیاده سازی ترجیحی در حوزه فرکانس است، با  $f_2 f(x, y)$  با استفاده از معادله محاسبه می شود. (۴-۱۲۵) و با استفاده از رویکرد ذکر شده در پاراگراف قبلی مقیاس بندی شده است.

مثال ۴.۲۱: وضوح تصویر در حوزه فرکانس با استفاده از لاپلاسیان.

شکل ۴.۵۶ (a) همان شکل ۳.۴۶ (a) است و شکل ۴.۵۶ (b) نتیجه استفاده از معادله (۴-۱۲۶)، را نشان می دهد. که در آن لاپلاسی در حوزه فرکانس با استفاده از معادله (۴-۱۲۵). محاسبه شد. مقیاس بندی همانطور که در رابطه با معادله (۴-۱۲۶) توضیح داده شد انجام شد.

ما با مقایسه شکلها می بینیم. ۴.۵۶ (b) و ۳.۴۶ (d) که نتیجه دامنه فرکانس برتر است. تصویر شکل ۴.۵۶ (ب) بسیار واضح تر است و جزئیاتی را نشان می دهد که در ۳.۴۶ (د) به سختی قابل مشاهده است، که با استفاده از هسته لاپلاسیایی در شکل ۳.۴۵ (ب) و با ۸- در مرکز به دست آمده است. پیشرفت چشمگیر در حوزه فرکانس غیر منتظره نیست. هسته فضایی لاپلاکی محله بسیار کوچکی را در بر می گیرد، در حالی که فرمول آن در معادله است. (۴-۱۲۵) و (۴-۱۲۶) کل تصویر را شامل می شود.



a b

شکل ۴.۵۶ (الف) تصویر اصلی و تار. (ب) تصویر با استفاده از لاپلاسیان در حوزه فرکانس افزایش یافته است. با شکل ۳.۴۶ (d) مقایسه کنید. (تصویر اصلی از ناسا گرفته شده است.)

### پوشش دهی تیره ، فیلترینگ با شدت بالا ، و فیلتر کردن فرکانس بالا

در این بخش ، ما در مورد فرمولاسیون حوزه فرکانس روشهای پوشش دهی تیره بدون وضوح و روشهای تصفیه فیلتر با شدت بالا که در بخش ۳.۶ معرفی شده است بحث می کنیم. با استفاده از روش های حوزه فرکانس ، پوشش دهی تیره تعریف شده در معادله (۳-۵۵) توسط داده شده است

$$g_{\text{mask}}(x,y) = f(x,y) - f_{\text{LP}}(x,y) \quad (4-128)$$

$$f_{\text{LP}}(x,y) = \mathcal{F}^{-1} [H_{\text{LP}}(u,v)F(u,v)] \quad (4-129)$$

جایی که  $H_{\text{LP}}(u,v)$  یک تابع تبدیل فیلتر پایین گذر است و  $f(x,y)$  DFT  $F(u,v)$  است. در اینجا ،  $f_{\text{LP}}$   $(x,y)$  تصویری هموار و مشابه  $f(x,y)$  در معادله است. (۳-۵۵). سپس ، مانند معادله (۳-۵۶) ،

$$g(x,y) = f(x,y) + kg_{\text{mask}}(x,y) \quad (4-130)$$

این عبارت در هنگام  $k = 1$  پوشاندگی تیز و در زمان  $k = 1$  فیلترینگ قوی را تعریف می کند. با استفاده از نتایج قبلی ، می توان معادله را بیان کرد. (۴-۱۳۰) کاملاً از نظر محاسبات حوزه فرکانس شامل فیلتر پایین گذر:

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ (1 + k[1 - H_{\text{LP}}(u,v)])F(u,v) \right\} \quad (4-131)$$

ما می توانیم این نتیجه را بر اساس یک فیلتر بالا گذر با استفاده از معادله (۴-۱۱۸) بیان کنیم.

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ [1 + kH_{\text{HP}}(u,v)]F(u,v) \right\} \quad (4-132)$$

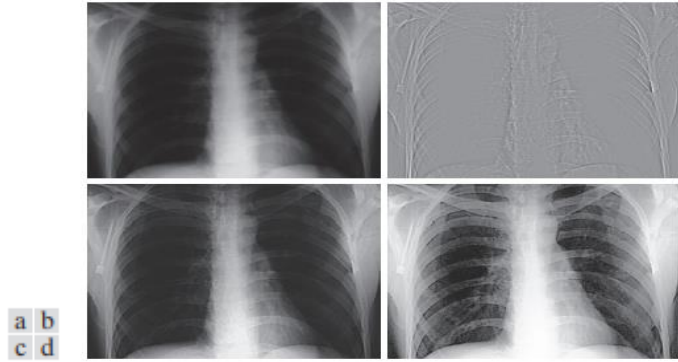
عبارت موجود در داخل پرانتزها را تابع تبدیل فیلتر با تأکید بر فرکانس بالا می نامند. همانطور که قبلاً اشاره شد ، فیلترهای بالاگذر اصطلاح dc را به صفر می رسانند ، بنابراین شدت متوسط تصویر تصفیه شده را به  $\cdot$  کاهش می دهند. فیلتر با تأکید بر فرکانس بالا به دلیل فیلتری که به فیلتر بالا اضافه می شود ، این مشکل را ندارد. تابع تبدیل . ثابت  $k$  کنترل نسبت فرکانس های بالا را که بر نتیجه نهایی تأثیر می گذارد ، می دهد. یک فرمول کمی کلی تر از فیلتر با تأکید بر فرکانس بالا عبارت است

$$g(x, y) = \mathcal{D}^{-1} \{ [k_1 + k_2 H_{HP}(u, v)] F(u, v) \} \quad (4-133)$$

جایی که  $k_1 = 0$  مقدار تابع تبدیل را خنثی می کند تا اصطلاح dc را صفر نکند [شکل ۴.۳۰ (ج) را ببینید] و  $k_2 = 0$  سهم فرکانس های بالا را کنترل می کند.

مثال ۴.۲۲: افزایش تصویر با استفاده از فیلترهای تأکید با فرکانس بالا.

شکل ۴.۵۷ (الف) تصویری از اشعه ایکس قفسه سینه  $503 \times 720$  پیکسل را با محدوده محدودی از شدت نشان می دهد. هدف این مثال افزایش تصویر با استفاده از فیلترهای با تأکید بر فرکانس بالا است. اشعه ایکس نمی تواند به همان روشی که لنزهای نوری می توانند متمرکز شوند، و تصاویر به طور کلی تمایل کمی تار دارند. از آنجا که شدت در این تصویر خاص به سمت انتهای تاریک مقیاس خاکستری متمایل است، ما همچنین از این فرصت استفاده می کنیم و مثالی از نحوه استفاده از پردازش حوزه فضایی برای تکمیل فیلتر دامنه فرکانسی ارائه می دهیم. مصنوعات تصویری، مانند زنگ زدن، در پردازش تصویر پزشکی غیرقابل قبول است، بنابراین ما از یک عملکرد تبدیل فیلتر گاوسی استفاده می کنیم. از آنجا که نمایش فضایی یک تابع GHPF نیز گاوسی است، ما می دانیم که زنگ زدن مشکلی نخواهد بود. مقدار انتخاب شده برای  $D_0$  باید فیلتر کافی برای وضوح مرزها و در عین حال جزئیات ریز دقیقه (مانند نویز) را بیش از حد تیز نکند. ما از  $D_0 = 70$ ، تقریباً  $10\%$  از ابعاد تصویر طولانی استفاده کردیم، اما سایر مقادیر مشابه نیز کار می کنند. شکل ۴.۵۷ (ب) حاصل فیلتر کردن تصویر اصلی (به شکل تصاویر ۴.۵۴) است. همانطور که انتظار می رفت، تصویر نسبتاً بدون ویژگی است، اما مرزهای مهم (به عنوان مثال، لبه های دنده ها) به وضوح مشخص شده است. شکل ۴.۵۷ (ج) مزیت فیلترینگ با تأکید بر فرکانس بالا را نشان می دهد، جایی که از معادله استفاده کردیم. (۴-۱۳۳) با  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 0.75$  اگرچه تصویر هنوز تیره است، اما رنگ خاکستری با مزیت بیشتر ویژگی های واضح بازسازی شده است. همانطور که در بخش ۳.۳ بحث کردیم، تصویری که با سطوح شدت در محدوده باریک مقیاس خاکستری مشخص می شود، کاندیدای ایده آل برای هموارسازی هیستوگرام است. همانطور که شکل ۴.۵۷ (d) نشان می دهد، این در واقع یک روش مناسب برای افزایش بیشتر تصویر بود. به وضوح ساختار استخوان و سایر جزئیات توجه کنید که به سادگی در هیچ یک از سه تصویر دیگر قابل مشاهده نیستند. تصویر پیشرفته نهایی کمی پر نویز است، اما این معمولاً برای تصاویر اشعه ایکس زمانی است که مقیاس خاکستری آنها گسترده می شود. نتیجه به دست آمده با استفاده از ترکیبی از تأکید فراوانی بالا و تساوی هیستوگرام برتر از نتیجه ای است که با استفاده از هر دو روش به تنهایی بدست می آید.



شکل ۴.۵۷ الف) اشعه ایکس قفسه سینه. (ب) نتیجه فیلتر کردن با عملکرد GHPF (ج) نتیجه فرکانس بالا-تأکید با استفاده از GHPF یکسان (د) نتیجه انجام هموارسازی هیستوگرام در (ج). (تصویر اصلی برگرفته از دکتر توماس آر. گست ، بخش علوم تشریحی ، دانشکده پزشکی دانشگاه میشیگان.)

### فیلتر همومورفیک

مدل انعکاس روشنایی که در بخش ۲.۳ معرفی شده است می تواند برای توسعه یک روش دامنه فرکانسی برای بهبود ظاهر یک تصویر با فشرده سازی محدوده شدت همزمان و افزایش کنتراست استفاده شود. از بحث در آن بخش ، یک تصویر  $f(x, y)$  را می توان حاصل روشنایی آن ،  $i(x, y)$  او بازتاب ،  $r(x, y)$  ، اجزاء بیان کرد:

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (4-134)$$

این معادله نمی تواند مستقیماً برای کار بر روی اجزای فرکانس روشنایی و بازتاب استفاده شود ، زیرا تبدیل فوریه یک محصول حاصل تبدیلات نیست:

$$\mathfrak{F}[f(x, y)] \neq \mathfrak{F}[i(x, y)]\mathfrak{F}[r(x, y)] \quad (4-135)$$

با این حال ، فرض کنید ما تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln f(x, y) \\ &= \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \end{aligned} \quad (4-136)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[z(x, y)] &= \mathfrak{F}[\ln f(x, y)] \\ &= \mathfrak{F}[\ln i(x, y)] + \mathfrak{F}[\ln r(x, y)] \end{aligned} \quad (4-137)$$

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v) \quad (4-138)$$

جایی که  $F_i(u, v)$  و  $F_r(u, v)$  به ترتیب تبدیل فوریه  $\ln i(x, y)$  و  $\ln r(x, y)$  هستند. ما می توانیم  $Z(u, v)$  را با استفاده از یک تابع تبدیل فیلتر  $H(u, v)$  فیلتر کنیم تا

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned} \quad (4-139)$$

سپس تصویر فیلتر شده در حوزه فضایی است

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}[S(u, v)] \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F_i(u, v)] + \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F_r(u, v)] \end{aligned} \quad (4-140)$$

با تعریف

$$i'(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}[H(u, v)F_i(u, v)] \quad (4-141)$$

$$r'(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}[H(u, v)F_r(u, v)] \quad (4-142)$$

ما می توانیم معادله (۴-۱۴۰) را بیان کنیم در فرم

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y) \quad (4-143)$$

سرانجام ، چون  $(x, z, y)$  با گرفتن لگاریتم طبیعی تصویر ورودی شکل گرفته است ، ما با گرفتن نمایی از نتیجه فیلتر شده ، این فرایند را معکوس می کنیم و تصویر خروجی را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= e^{s(x, y)} \\ &= e^{i'(x, y)} e^{r'(x, y)} \\ &= i_0(x, y) r_0(x, y) \end{aligned} \quad (4-144)$$

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)} \quad (4-145)$$

$$r_0(x, y) = e^{r'(x, y)} \quad (4-146)$$

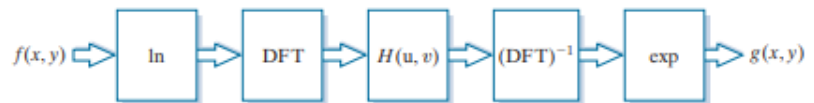
اجزای روشنایی و بازتاب تصویر خروجی (پردازش شده) هستند.

شکل ۴.۵۸ خلاصه ای از روش فیلترینگ است که به تازگی به دست آمده است. این روش مبتنی بر مورد خاصی از طبقه ای از سیستم ها است که به نام سیستم های همومورفیک شناخته می شوند. در این کاربرد خاص ، کلید رویکرد جداسازی اجزای روشنایی و بازتاب به شکلی است که در رابطه (۴-۱۳۸) نشان داده شده است. (تابع تبدیل فیلتر همومورفیک ،  $H(u, v)$  ، سپس می تواند بر روی این اجزا به طور جداگانه عمل کند ، همانطور که در رابطه (۴-۱۳۹) نشان داده شده است.

جزء روشنایی یک تصویر به طور کلی با تغییرات فضایی آهسته مشخص می شود ، در حالی که جزء انعکاس تمایل دارد به طور ناگهانی تغییر کند ، به ویژه در محل اتصال اشیاء متفاوت. این ویژگیها منجر به ارتباط فرکانسهای پایین تبدیل فوریه لگاریتم یک تصویر با روشنایی و فرکانسهای بالا با بازتاب می شود. اگرچه این پیوندها تقریبی هستند ، اما می توان از آنها در فیلترینگ تصویر استفاده کرد ، همانطور که در مثال ۴.۲۳ نشان داده شده است. می توان کنترل خوبی بر روی اجزای روشنایی و بازتاب با یک فیلتر همومورفیک به دست آورد. این کنترل نیاز به مشخص کردن یک تابع تبدیل فیلتر  $H(u, v)$  دارد که بر اجزای فرکانس پایین و زیاد تبدیل فوریه به روشهای مختلف و قابل کنترل تأثیر می گذارد. شکل ۴.۵۹ بخش متقاطع چنین عملکردی را نشان می دهد. اگر پارامترهای  $gH$  و  $gL$  به گونه ای انتخاب شوند که  $gL-1$  و  $gH-1$  ، تابع فیلتر در شکل ۴.۵۹ سهم فرکانسهای پایین (روشنایی)



را کاهش داده و سهم فرکانسهای بالا را افزایش می دهد (بازتاب) به نتیجه خالص فشرده سازی همزمان دامنه دینامیکی و افزایش کنتراست است.

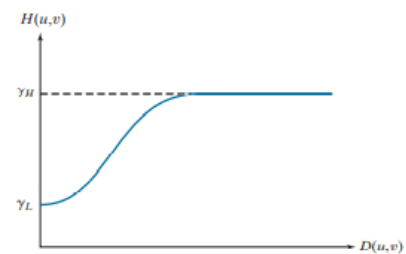


شکل ۴.۵۸ خلاصه مراحل فیلترینگ همومورفیک.

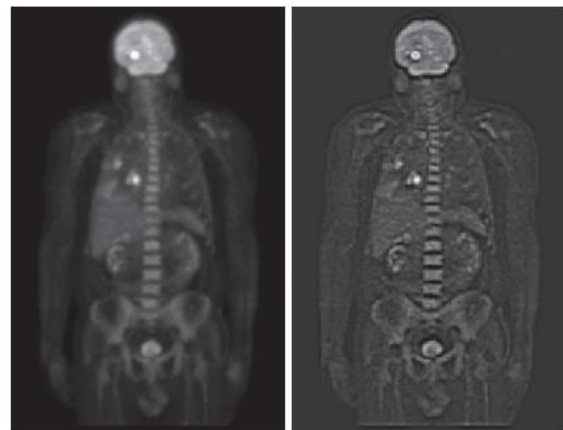
شکل عملکرد در شکل ۴.۵۹ را می توان با استفاده از یک تابع تبدیل فیلتر گذرگاه تقریبی تخمین زد. به عنوان مثال ، با استفاده از یک شکل کمی اصلاح شده از تابع GHPF ، تابع همومورفیک به دست می آید.

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-cD^2(u,v)/D_0^2} \right] + \gamma_L \quad (4-147)$$

جایی که  $D(u,v)$  در معادله (۴-۱۱۲) تعریف شده است. و ثابت  $c$  وضوح شیب تابع را هنگام تبدیل بین  $\gamma_L$  و  $\gamma_H$  کنترل می کند. این عملکرد تبدیل فیلتر شبیه به عملکرد تأکید با فرکانس بالا است که در قسمت قبل مورد بحث قرار گرفت.



شکل ۴.۵۹ سطح مقطع شعاعی یک تابع تبدیل فیلتر همومورفیک



a b

شکل ۴.۶۰ (الف) اسکن PET کل بدن. (ب) تصویر با استفاده از فیلتر همومورف افزایش یافته است. (تصویر اصلی برگرفته دکتر مایکل ای کیسی ، CTI سیستم).

مثال ۴.۲۳: فیلتر همومورفیک.



شکل ۴.۶۰ (الف) اسکن PET تمام بدن (توموگرافی گسیل پوزیترون) را در اندازه ۱۱۶۲ × ۷۴۶ پیکسل نشان می دهد. تصویر کمی تار شده است و بسیاری از ویژگی های کم شدت آن توسط شدت زیاد "نقاط داغ" تحت سلطه دامنه پویای صفحه نمایش پنهان می شود. (این نقاط داغ در اثر تومور در مغز و یکی در ریه ها ایجاد شده است.) شکل ۴.۶۰ (ب) با استفاده از فیلترهای همومرفیک شکل ۴.۶۰ (a) با استفاده از عملکرد تبدیل فیلتر در معادله (۴-۱۴۷) بدست آمده است. با  $\gamma_L = 0.4, \gamma_H = 3.0, c = 5, \text{ and } D_0 = 20$ . بخش شعاعی این عملکرد درست مانند شکل ۴.۵۹، اما با شیب بسیار تیزتر، و تبدیل بین فرکانسهای پایین و زیاد بسیار نزدیکتر به مبدا در شکل ۴.۶۰ (ب) توجه کنید که نقاط داغ، مغز و اسکلت در تصویر پردازش شده چقدر تیزتر هستند و جزئیات بیشتری در این تصویر از جمله، به عنوان مثال، برخی از اندام ها، شانه ها قابل مشاهده است. و منطقه لگن. با کاهش اثرات اجزای روشنایی غالب (نقاط داغ)، امکان ایجاد محدوده دینامیکی نمایشگر برای مشاهده شدت بیشتر فراهم شد. به طور مشابه، از آنجا که فرکانس های بالا با فیلتر همومورفیک افزایش می یابد، اجزای بازتاب تصویر (اطلاعات لبه) به میزان قابل توجهی وضوح می یابد. تصویر تقویت شده در شکل ۴.۶۰ (ب) بهبود چشمگیری نسبت به نسخه اصلی دارد

#### ۴.۱۰ فیلتر انتخابی

فیلترهای مورد بحث در دو بخش قبلی روی کل مستطیل فرکانس کار می کنند. برنامه هایی وجود دارد که در آنها پردازش نوارهای خاص فرکانس یا مناطق کوچک مستطیل فرکانس مورد توجه است. فیلترهای دسته اول را فیلترهای باند می نامند. اگر فرکانس های موجود در باند فیلتر شوند، فیلتر باند فیلتر میان ناگذر نامیده می شود. به طور مشابه، در صورت عبور فرکانس ها، فیلتر را فیلتر گذر باند می نامند. به فیلترهای دسته دوم فیلترهای ناچ گفته می شود. این فیلترها بسته به رد یا رد شدن فرکانس در نواحی بریدگی به عنوان فیلترهای میان ناگذر یا بریدگی ناچ شناخته می شوند.

#### فیلترهای باند میان ناگذر و باند گذر

همانطور که در بخش ۳.۷ آموختید، توابع تبدیل فیلتر باند و میان ناگذر در حوزه فرکانس را می توان با ترکیب توابع تبدیل فیلتر پایین گذر و بالاگذر ایجاد کرد، در حالی که دومی نیز از توابع پایین گذر مشتق شده است (شکل ۳.۵۲ را ببینید). به عبارت دیگر، توابع تبدیل فیلتر پایین گذر اساس تشکیل توابع فیلتر بالاگذر، باند میان ناگذر و باند گذر است. علاوه بر این، یک تابع تبدیل فیلتر باند از تابع میان ناگذر به همان روشی که ما از یک تابع تبدیل پایین گذر به دست آوردیم بدست می آید:

$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v) \quad (4-148)$$

شکل ۴.۶۱ (الف) نحوه ایجاد یک تابع تبدیل ایده آل فیلتر میان ناگذر (IBRF) را نشان می دهد. این شامل یک ILPF و یک عملکرد IHPF با فرکانس های مختلف قطع است. هنگام کار با توابع باند، پارامترهای مورد علاقه

عبارتند از عرض  $W$  و مرکز  $C_0$  باند. معادله ای برای عملکرد IBRF به آسانی با بازرسی از شکل ۴.۶۱ (a) بدست می آید، همانطور که در سمت چپ جدول ۴.۷ نشان داده شده است. الزامات کلیدی تابع تبدیل باند عبارتند از: (۱) مقادیر عملکرد باید در محدوده  $[0, 1]$  باشد. (۲) مقدار تابع باید در فاصله  $C_0$  از مبدأ (مرکز) تابع صفر باشد. و (۳) ما باید بتوانیم مقداری را برای  $W$  افزودن توابع تبدیل پایین گذر و بالا گذر به شکل توابع گاوسی و باترورث ارزش رد کردن برخی مشکلات را به همراه دارد. به عنوان مثال، شکل ۴.۶۱ (ب) یک تابع باند را نشان می دهد که به عنوان مجموع توابع گاوسی پایین گذر و بالا گذر با نقاط برش متفاوت تشکیل شده است. دو مشکل فوراً آشکار است: ما کنترل مستقیمی بر  $W$  نداریم و مقدار  $H(u, v)$  در  $C_0$  نیست. ما می توانیم تابع را جبران کرده و آن را مقیاس بندی کنیم تا مقادیر در محدوده  $[0, 1]$  قرار گیرند، اما یافتن یک راه حل تحلیلی برای نقطه ای که توابع گاوسی گذرگاه کم ارتفاع و ارتفاع بالا متقاطع است غیرممکن است و این تقاطع برای حل نیاز است نقاط برش از نظر  $C_0$  تنها گزینه های جایگزین آزمایش و خطا یا روش های عددی است. خوشبختانه، بجای افزودن تابع تبدیل پایین گذر و بالا گذر، یک جایگزین این است که عبارات مربوط به توابع تبدیل گذرگاه گاوسین و باترورث را به گونه ای تغییر دهید که سه الزامات قبلی را برآورده سازند. ما روش یک تابع گاوسی را نشان می دهیم. در این مورد، ما با تغییر نقطه شروع می کنیم که در آن  $H(u, v) = 0$  از  $D(u, v) = C_0$  to  $D(u, v) = 0$  در معادله (۴-۱۲۰):

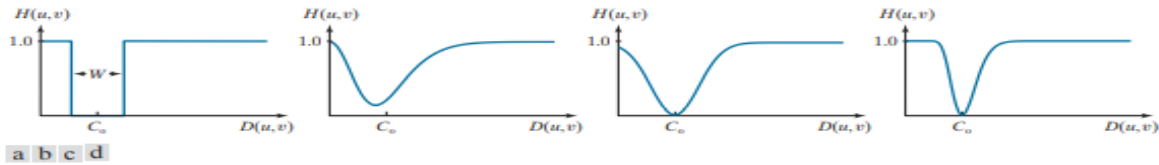
$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D(u, v) - C_0}{W}\right]^2} \quad (4-149)$$

نمودار این تابع [شکل ۴.۶۱ (c)] نشان می دهد که زیر  $C_0$ ، تابع به عنوان یک تابع گاوسی پایین گذر رفتار می کند، در  $C_0$  تابع همیشه ۰ خواهد بود و برای مقادیر بالاتر از  $C_0$  تابع به عنوان یک تابع گاوسی بالاگذر رفتار می کند. پارامتر  $W$  متناسب با انحراف استاندارد است و بنابراین "عرض" باند را کنترل می کند. تنها مشکلی که باقی می ماند این است که تابع همیشه در مبدأ ۱ نیست. یک اصلاح ساده از معادله (۴-۱۴۹) این نقص را برطرف می کند:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u, v) - C_0^2}{D(u, v)W}\right]^2} \quad (4-150)$$

در حال حاضر، ضریب بی نهایت است وقتی  $D(u, v) = 0$ ، که باعث می شود عبارت نمایی به صفر برسد و  $H(u, v) = 1$  در مبدأ، به دلخواه. در این اصلاح معادله (۴-۱۴۹)، شکل اولیه گاوسی حفظ می شود و سه شرط پیش گفته شده برآورده می شود. شکل ۴.۶۱ (d) یک نمودار از معادله (۴-۱۵۰) را نشان می دهد. تجزیه و تحلیل مشابه منجر به شکل یک تابع تبدیل فیلتر میان ناگذر باترورث می شود که در جدول ۴.۷ نشان داده شده است. شکل ۴.۶۲ نمودارهای چشم انداز توابع تبدیل فیلتر را که مورد بحث قرار گرفت نشان می دهد. در نگاه اول به نظر می رسد که توابع گاوس و باترورث تقریباً یکسان هستند، اما مانند قبل رفتار تابع باترورث بین عملکردهای ایده آل و گاوسی است. همانطور که در شکل ۴.۶۳ نشان داده شده است، مشاهده این امر با مشاهده عملکردهای

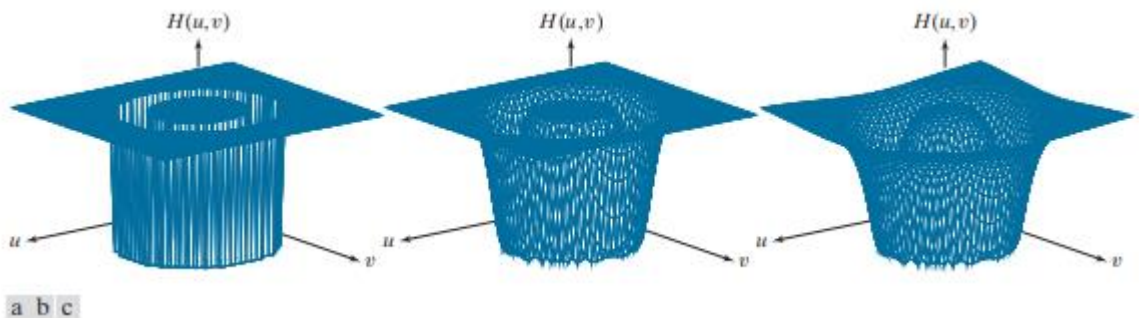
سه فیلتری به عنوان تصویر آسان تر است. افزایش نظم تابع باترورث آن را به تابع تبدیل ایده آل باند میان ناگذر نزدیک می کند.



شکل ۴.۶۱ سطح مقطع شعاعی. (الف) تابع تبدیل فیلتر ایده آل ردپای ایده آل. (ب) تابع تبدیل باند ردیف که از مجموع توابع فیلتر پایین گذر و بالا گذر گاوسی تشکیل شده است. (حداقل ۰ نیست و با  $C_0$  همخوانی ندارد.) (ج) نمودار شعاعی معادله (۴-۱۴۹). (حداقل ۰ است و به درستی با  $C_0$  تراز شده است، اما مقدار آن در مبدأ ۱ نیست.) (د) نمودار شعاعی معادله (۴-۱۵۰)؛ این طرح به شکل گاوسی تمام الزامات یک تابع تبدیل فیلتر میان ناگذر را برآورده می کند.

جدول ۴.۷ توابع تبدیل فیلتر باند میان ناگذر  $C_0$ . مرکز نوار است،  $W$  عرض نوار است و  $D(u, v)$  فاصله از مرکز تابع تبدیل به نقطه  $(u, v)$  در مستطیل فرکانس است.

Ideal (IBRF)	Gaussian (GBRF)	Butterworth (BBRF)
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } C_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq C_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u, v) - C_0^2}{D(u, v)W}\right]^2}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - C_0^2}\right]^{2n}}$



شکل ۴.۶۲ نمودارهای آینده نگر از (الف) ایده آل، (ب) اصلاح شده گاوسی و (ج) اصلاح شده باترورث (مرتبه ۱) توابع تبدیل فیلترهای خطی از جدول ۴.۷. همه توابع تبدیل دارای اندازه  $512 * 512$  عناصر با  $C_0 = 128$  و  $W = 60$  هستند.

### فیلترهای ناچ

فیلترهای ناچ از مفیدترین فیلترهای انتخابی هستند. یک فیلتر ناچ فرکانس ها را در یک محله از پیش تعیین شده از مستطیل فرکانس رد می کند (یا عبور می دهد). فیلترهای تغییر مرحله فاز صفر باید در مورد مبدأ (مرکز مستطیل فرکانس) متقارن باشند، بنابراین یک تابع تبدیل فیلتر درجه با مرکز در  $(u_0, v_0)$  باید دارای بریدگی

مربوطه در محل  $(-u_0, -v_0)$  باشد. توابع تبدیل فیلتر میان ناگذرناچ به عنوان محصولاتی از توابع تبدیل فیلتر با درجه بالا ساخته شده اند که مراکز آنها به مراکز شکافها تبدیل شده است. شکل کلی این است:

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v) \quad (4-151)$$

جایی که  $H_k(u, v)$  و  $H_{-k}(u, v)$  توابع تبدیل فیلتر بالا هستند که مراکز آنها به ترتیب در  $(u_k, v_k)$  and  $(-u_k, -v_k)$  هستند. این مراکز با توجه به مرکز مستطیل فرکانس  $(M/2, N/2)$ ، که در آن، طبق معمول،  $M$  و  $N$  تعداد ردیف ها و ستون ها در تصویر ورودی هستند، مشخص شده اند. بنابراین، محاسبات فاصله برای هر تابع تبدیل فیلتر توسط

$$D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{1/2} \quad (4-152)$$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{1/2} \quad (4-153)$$

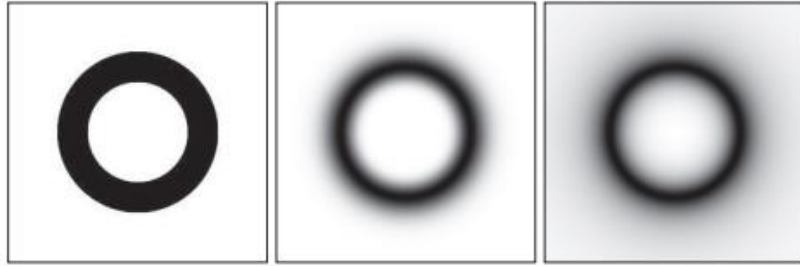
به عنوان مثال، زیر یک تابع تبدیل فیلتر میان ناگذردرجه یک باترورث به ترتیب  $n$  است که شامل سه جفت بریدگی است:

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^n} \right] \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^n} \right] \quad (4-154)$$

جایی که  $D_k(u, v)$  and  $D_{-k}(u, v)$  توسط معادله  $(4-152)$  و  $(4-153)$  داده می شود. ثابت  $D_0k$  برای هر جفت ناچ یکسان است، اما می تواند برای جفت های مختلف متفاوت باشد. سایر عملکردهای فیلتر میان ناگذردرجه یک بسته به عملکرد فیلتر بالاگذر انتخاب شده به همان شیوه ساخته می شوند. همانند فیلترهایی که قبلاً مورد بحث قرار گرفتند، یک تابع تبدیل فیلتر ناچ از یک تابع رد کردن ناچ با استفاده از عبارت بدست می آید

$$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v) \quad (4-155)$$

همانطور که دو مثال بعدی نشان می دهد، یکی از کاربردهای اصلی فیلترینگ برای اصلاح انتخابی مناطق محلی DFT است. اغلب، این نوع پردازش به صورت تعاملی انجام می شود و مستقیماً با DFT هایی که بدون پد به دست آمده کار می کند. مزایای کار تعاملی با DFT های واقعی (بر خلاف نیاز به "تبدیل" از مقادیر فرکانس به مقادیر واقعی فرکانس) به طور کلی بیشتر از خطاهای جمع آوری شده است که ممکن است ناشی از عدم استفاده از پد در فرایند فیلتر شدن باشد. در صورت لزوم، پس از به دست آوردن محلول قابل قبول، می توان با تنظیم همه پارامترهای فیلتر برای جبران اندازه DFT پر شده، نتیجه نهایی با استفاده از پد را ایجاد کرد. دو مثال زیر بدون پر کردن انجام شد. برای آگاهی از چگونگی تغییر مقادیر DFT به عنوان تابعی، به مسئله ۴.۴۲ مراجعه کنید.



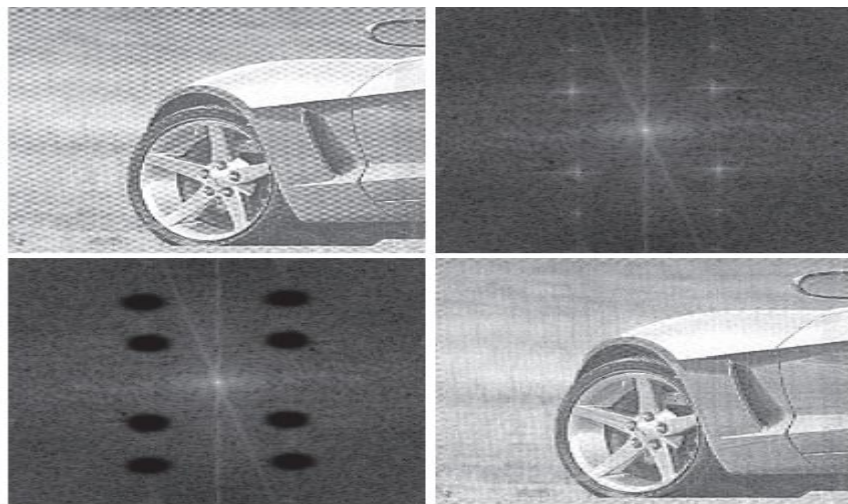
a b c

شکل ۴.۶۳ (الف) ایده آل ، (ب) گوسی ، و (ج) توابع تبدیل باترورث از شکل ۴.۶۲ که به صورت تصاویر نشان داده شده است. (خطوط باریک حاشیه ای بخشی از داده های تصویر نیستند).

مثال ۴.۲۴: استفاده از فیلترینگ ناچ برای حذف الگوهای مویر از تصاویر رسانه چاپی دیجیتالی شده.

شکل ۴.۶۴ (الف) تصویر روزنامه اسکن شده در شکل ۴.۲۱ است که الگوی برجسته مویری را نشان می دهد و شکل ۴.۶۴ (ب) طیف آن است. تبدیل فوریه سینوس خالص ، که یک تابع متناوب است ، یک جفت تکانه متقارن مزدوج است (جدول ۴.۴ را ببینید). انفجارهای متقارن "شبهه ضربه" در شکل ۴.۶۴ (ب) نتیجه متناوب نزدیک الگوی مویر است. ما می توانیم با استفاده از فیلترینگ ناچ این انفجارها را کاهش دهیم.

شکل ۴.۶۴ (ج) نتیجه ضرب DFT شکل ۴.۶۴ (الف) را در یک تابع تبدیل رد باترورث با  $D_0 = 9$  و  $n = 4$  برای همه جفت های شکاف نشان می دهد (مرکز شکاف ها با مراکز مناطق دایره ای سیاه در تصویر). مقدار شعاع (با بازرسی بصری طیف) به گونه ای انتخاب شد که انفجارهای انرژی را به طور کامل در بر بگیرد و مقدار  $n$  برای ایجاد شکاف هایی با تبدیل شدید انتخاب شد. مکانهای مرکز شکافها بصورت تعاملی از طیف تعیین شد. شکل ۴.۶۴ (د) نتیجه به دست آمده با این عملکرد تبدیل فیلتر را با استفاده از روش فیلترینگ مشخص شده در بخش ۴.۷ نشان می دهد. با توجه به وضوح پایین و درجه تخریب تصویر اصلی ، بهبود قابل توجه است.

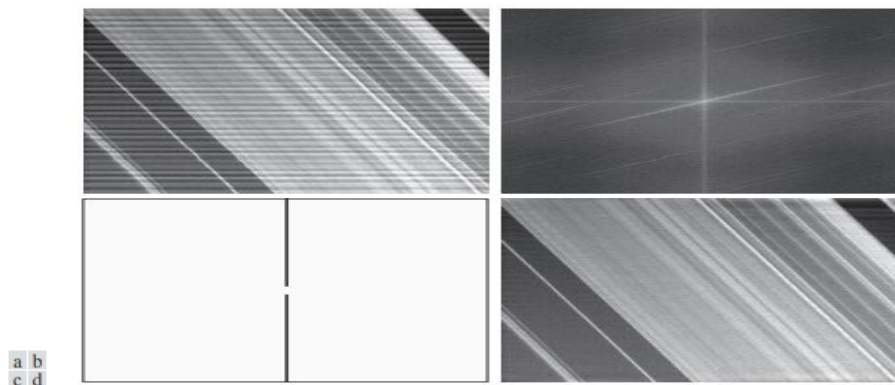


a b  
c d

شکل ۴.۶۴ (الف) تصویر روزنامه نمونه که الگوی مویر را نشان می دهد. (ب) طیف (ج) تبدیل فوریه ضرب در باترورث تابع تبدیل فیلتر میان ناگذردرجه (د) تصویر فیلتر شده  
 مثال ۴.۲۵: استفاده از فیلترینگ ناچ برای حذف تداخل متناوب .

شکل ۴.۶۵ (الف) تصویری از بخشی از حلقه های اطراف سیاره زحل را نشان می دهد. این تصویر توسط کاسینی ، اولین سفینه فضایی که وارد مدار سیاره شد ، ثبت شد. الگوی تقریباً سینوسی که در تصویر قابل مشاهده است ناشی از سیگنال AC است که روی سیگنال ویدئویی دوربین درست قبل از دیجیتالی شدن تصویر قرار گرفته است. این یک مشکل غیرمنتظره بود که برخی از تصاویر مأموریت را خراب کرد. خوشبختانه تصحیح این نوع تداخل با پردازش پس از پردازش بسیار آسان است. یک رویکرد استفاده از فیلترینگ ناچ است. شکل ۴.۶۵ (ب) طیف DFT را نشان می دهد. تجزیه و تحلیل دقیق محور عمودی مجموعه ای از انفجارهای کوچک انرژی در نزدیکی مبدا را نشان می دهد که مربوط به تداخل تقریباً سینوسی است. یک روش ساده این است که از یک فیلتر مستطیل شکاف باریک استفاده کنید که با کمترین انفجار فرکانس شروع می شود و تا بقیه محور عمودی گسترش می یابد. شکل ۴.۶۵ (ج) عملکرد تبدیل چنین فیلتری را نشان می دهد (سفید نشان دهنده ۱ و سیاه ۰ است). شکل ۴.۶۵ (د) نتیجه پردازش تصویر خراب را با این نشان می دهد. فیلتر این نتیجه یک پیشرفت چشمگیر نسبت به تصویر اصلی است.

برای به دست آوردن و تصویر فقط از الگوی تداخل ، ما فرکانس ها را در محور عمودی با استفاده از یک تابع تبدیل درجه عبور جدا کرده ایم ، که با تفریق تابع رد شکاف از ۱ بدست می آید [شکل ۴.۶۶ (الف) را ببینید]. سپس ، همانطور که در شکل ۴.۶۶ (ب) نشان داده شده است ، IDFT تصویر فیلتر شده الگوی تداخل فضایی است.



شکل ۴.۶۵ (الف) تصویر حلقه های زحل تداخل تقریباً متناوب را نشان می دهد. (ب) طیف (انفجارهای انرژی در محور عمودی نزدیک مبدا با الگوی تداخل مطابقت دارد). (ج) تابع تبدیل فیلتر میان ناگذرفیلتر عمودی. (د) نتیجه فیلترینگ. (حاشیه سیاه نازک در (ج) بخشی از داده ها نیست). (تصویر اصلی از دکترا رابرت آ. وست ، ناسا/

JPL.



شکل ۴.۶۶ (الف) تابع فیلتر ناچ جدا کردن محور عمودی DFT شکل ۴.۶۵ (الف). (ب) الگوی فضایی که با محاسبه (a) IDFT بدست می آید.

### ۴.۱۱ تبدیل فوریه سریع

ما تا کنون توجه خود را بر مفاهیم نظری و نمونه هایی از فیلترینگ در حوزه فرکانس متمرکز کرده ایم. چیزی که باید در حال حاضر روشن باشد این است که الزامات رایانه ای در این زمینه از پردازش تصویر بی اهمیت نیست. بنابراین، توسعه درک اساسی از روش هایی که می توان با استفاده از آنها محاسبات تبدیل فوریه را ساده و سرعت بخشید، بسیار مهم است. این بخش به این مسائل می پردازد.

### قابلیت تفکیک DFT دو بعدی

همانطور که در جدول ۴.۳ ذکر شد، DFT دو بعدی به شکل های ۱ بعدی قابل تفکیک است. ما می توانیم معادله (۴-۶۷) بنویسیم به عنوان

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \quad (4-156)$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M}$$

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \quad (4-157)$$

برای یک مقدار  $x$  و برای  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$  می بینیم که  $f(x, y)$  یک ردیف  $f(x, y)$  است. با تغییر  $x$  از ۰ تا  $M-1$  در معادله (۴-۱۵۷)، ما مجموعه ای از DFT های ۱ بعدی را برای همه سطرهای  $f(x, y)$  محاسبه می کنیم. محاسبات در معادله (۴-۱۵۶) به طور مشابه تبدیل  $D-1$  از ستون های  $F(x, v)$  است. بنابراین، ما نتیجه می گیریم که DFT دوبعدی  $f(x, y)$  را می توان با محاسبه تبدیل  $D-1$  هر ردیف  $f(x, y)$  و سپس محاسبه تبدیل  $D-1$  در امتداد هر ستون از نتیجه این یک ساده سازی مهم است زیرا ما باید فقط با یک متغیر در یک زمان برخورد کنیم. توسعه مشابهی در محاسبه IDFT دو بعدی با استفاده از IDFT بعدی نیز صدق می کند. با این حال، همانطور که در بخش زیر نشان می دهیم، می توان IDFT را با استفاده از الگوریتمی



که برای محاسبه DFT پیشرو طراحی شده است ، محاسبه کرد ، بنابراین همه محاسبات تبدیل دو بعدی فوری به چندین پاس از یک الگوریتم  $D-1$  برای محاسبه  $D$  DFT-1 کاهش می یابد.

### محاسبه IDFT با استفاده از الگوریتم DFT

گرفتن مزدوج پیچیده هر دو طرف معادله (۴-۶۸) و ضرب نتایج در بازه MN

$$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (4-158)$$

اما ، ما شکل سمت راست این نتیجه را به عنوان **DFT of  $F^*(u, v)$**  تشخیص می دهیم. بنابراین ، معادله (۴-۱۵۸) نشان می دهد که اگر  $F^*(u, v)$  را در یک الگوریتم طراحی شده برای محاسبه تبدیل دو بعدی فوری جایگزین کنیم ، نتیجه  $MNf^*(x, y)$  خواهد بود. با گرفتن مزدوج پیچیده و تقسیم این نتیجه بر MN ،  $f(x, y)$  حاصل می شود که معکوس  $F(u, v)$  است.

محاسبه معکوس ۲ بعدی از یک الگوریتم DFT دو بعدی که بر اساس گذرهای پی در پی از تبدیل های  $D-1$  (مانند بخش قبلی) ایجاد شده است ، منبع مکرر سردرگمی است که شامل ترکیبات پیچیده و ضرب در یک ثابت ثابت می شود. که در الگوریتم های ۱ بعدی انجام می شود. مفهوم کلیدی که باید در نظر داشته باشید این است که ما به سادگی  $F^*(u, v)$  را در هر الگوریتم پیش رو وارد می کنیم. نتیجه  $MNf^*(x, y)$  خواهد بود. برای بدست آوردن  $f(x, y)$  تنها کاری که باید با این نتیجه انجام دهیم این است که مزدوج پیچیده آن را گرفته و بر MN ثابت تقسیم کنیم. البته ، وقتی  $f(x, y)$  واقعی است ، همانطور که معمولاً وجود دارد ، پس  $f^*(x, y) = f(x, y)$ .

### تبدیل فوری سریع (FFT)

اگر مجبور باشیم معادله (۴-۶۷) و (۴-۶۸) را اجرا کنیم ، کار در حوزه فرکانس عملی نخواهد بود. به طور مستقیم. اجرای بی رحم این معادلات

به ترتیب  $(MN)^2$  ضرب و اضافه نیاز دارد. برای تصاویر متوسط-اندازه غذا (به عنوان مثال ،  $2048 * 2048$  پیکسل) ، این بدان معناست که در حدود ۱۷ تریلیون ضرب-افزودنیها فقط برای یک DFT دو بعدی ، بدون احتساب نماها ، که می تواند یکبار محاسبه و در یک جدول جستجو ذخیره شود.

بدون کشف تبدیل فوری سریع (FFT) که محاسبات را به ترتیب چندین برابر و اضافه  $MN \log_2 MN$  کاهش می دهد ، می توان گفت مواد ارائه شده در این فصل از ارزش عملی کمی برخوردار است. کاهش محاسباتی ارائه شده توسط FFT واقعاً چشمگیر است. به عنوان مثال ، برای محاسبه FFT دو بعدی یک تصویر  $2048 * 2048$  به ترتیب ۹۲ میلیون ضرب و افزوده نیاز است که از یک تریلیون و محاسبه ذکر شده در بالا کاهش قابل توجهی دارد. اگرچه FFT موضوعی است که به طور گسترده در ادبیات مربوط به پردازش سیگنال پوشش داده شده است ، اما این موضوع در کار ما آنقدر مهم است که اگر مقدمه ای را توضیح ندهیم که چرا FFT همانطور که کار می



کند ارائه نمی دهیم ، این فصل ناقص خواهد بود. الگوریتمی که ما برای دستیابی به این هدف انتخاب کردیم ، روش اصطلاحاً دوپل متوالی است که الگوریتم اصلی بود که منجر به تولد یک صنعت کامل شد. این الگوریتم خاص فرض می کند که تعداد نمونه ها یک عدد صحیح ۲ است ، اما این یک الزام کلی برای سایر رویکردها نیست (Brigham [۱۹۸۸] از قسمت قبل می دانیم که DFT های دو بعدی را می توان با استفاده از گذرهای پی در پی تبدیل  $D-1$  ، بنابراین ما باید فقط بر روی FFT یک متغیر تمرکز کنیم. در مشتقات FFT ، معمول است که معادله (۴-۴۴) را بیان کنیم. در فرم

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux} \quad (4-159)$$

برای  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ، جایی که

$$W_M = e^{-j2\pi/M} \quad (4-160)$$

و  $M$  فرض می شود که از شکل باشد

$$M = 2^p \quad (4-161)$$

جایی که  $p$  یک عدد صحیح مثبت است. سپس نتیجه می شود که  $M$  را می توان به صورت بیان کرد

$$M = 2K \quad (4-162)$$

با  $K$  نیز یک عدد صحیح مثبت است. جایگزینی معادله (۴-۱۶۲) به معادله (۴-۱۵۹) بازده

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{ux} \\ &= \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)} \end{aligned} \quad (4-163)$$

با این حال ، می توان آن را با استفاده از معادله نشان داد. (۴-۱۶۰) که  $W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$  ، بنابراین معادله (۴-۱۶۳) را می توان به عنوان نوشت

$$F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} W_{2K}^u \quad (4-164)$$

$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} \quad (4-165)$$

for  $u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ , and

$$F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} \quad (4-166)$$

for  $u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ , reduces Eq. (4-164) to

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u \quad (4-167)$$

همچنین ، از آنجا که  $W_M^{u+K} = W_K^u$  and  $W_{2K}^{u+K} = -W_{2K}^u$  ، از آن نتیجه می شود.

$$F(u+K) = F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u \quad (4-168)$$

تجزیه و تحلیل معادلات (۴-۱۶۵) تا (۴-۱۶۸) برخی از ویژگیهای مهم (و شگفت انگیز) این عبارات را آشکار می کند. DFT نقطه  $M$  را می توان با تقسیم عبارت اصلی به دو قسمت ، همانطور که در معادله (۴-۱۶۷) و (۴-۱۶۸) نشان داده شده است ، محاسبه کرد. محاسبه نیمه اول  $F(u)$  مستلزم ارزیابی دو تغییر (  $M/2$  نقطه ای است که در معادله (۴-۱۶۵) و (۴-۱۶۶) داده می شود. مقادیر حاصل از  $F_{\text{Even}}(u)$  و  $F_{\text{Odd}}(u)$  هستند جایگزین معادله (۴-۱۶۷) برای بدست آوردن  $F(u)$  برای  $u = 0, 1, 2, \dots, (M/2 - 1)$  دیگری نیمی سپس مستقیماً از معادله دنبال می شود. (۴-۱۶۸) بدون ارزیابی تغییرات اضافی. بررسی مفاهیم محاسباتی روش قبلی بسیار جالب است. بگذارید ش (  $p$  و  $a(p)$  به ترتیب نشان دهنده تعداد ضربات و جمع های پیچیده مورد نیاز برای پیاده سازی روش باشند. مانند قبل ، تعداد نمونه ها  $2^p$  است ، جایی که  $p$  یک عدد صحیح مثبت است. ابتدا فرض کنید  $p = 1$  به طوری که تعداد نمونه ها دو عدد باشد. تبدیل دو نقطه ای نیاز به ارزیابی  $F(0)$  دارد. سپس  $F(1)$  از معادله به دست می آید (۴-۱۶۸). برای بدست آوردن  $F(0)$  نیاز به محاسبه  $F_{\text{Even}}(0)$  و  $F_{\text{Odd}}(0)$  در این مورد  $K = 1$  و معادلات. (۴-۱۶۵) و (۴-۱۶۶) تبدیل یک نقطه ای هستند. با این حال ، از آنجا که DFT یک نقطه نمونه واحد ، خود نمونه است ، برای بدست آوردن  $F_{\text{Even}}(0)$  و  $F_{\text{Odd}}(0)$  به هیچگونه ضرب یا افزودنی نیاز نیست. یک ضرب  $F_{\text{Odd}}(0)$  در  $W_0$  و یک جمع  $F(0)$  از معادله به دست می آورد. (۴-۱۶۷). سپس  $F(1)$  از معادله به دست می آید. (۴-۱۶۸) با یک جمع دیگر (تفریق همان جمع محسوب می شود). از آنجا که  $F_{\text{Odd}}(0)W_2^0$  قبلاً محاسبه شده است ، تعداد کل عملیات مورد نیاز برای تبدیل دو نقطه ای شامل ضرب  $m(1) = 1$  است. و  $\alpha(1) = 2$ . مقدار مجاز بعدی برای  $2^p$  است. با توجه به توسعه قبلی ، تبدیل چهار نقطه ای را می توان به دو قسمت تقسیم کرد. نیمه اول  $F(u)$  نیاز به ارزیابی دو تبدیل دو نقطه ای دارد ، همانطور که در معادله (۴-۱۶۵) و (۴-۱۶۶) آمده است.

برای  $K = 2$  تبدیل دو نقطه ای به (۱)  $W_2$  ضرب و (۱) جمع نیاز دارد. بنابراین ، ارزیابی این دو معادله به مجموع  $2(1)$  ضرب و  $2$  الف (۱) جمع نیاز دارد. برای بدست آوردن  $F(0)$  و  $F(1)$  از معادله دو ضرب و افزوده دیگر ضروری است.

(۴-۱۶۷). از آنجا که  $F_{\text{Odd}}(u)W_{2K}^u$  قبلاً برای  $u = \{0, 1\}$  دو مورد دیگر محاسبه شده است. با افزودن  $F(2)$  و  $F(3)$  مجموع سپس  $m(2) = 2m(1) + 2$  و  $\alpha(2) = 2\alpha(1) + 4$  است. وقتی  $p$  برابر ۳ است ، برای تبدیل  $F_{\text{Even}}(u)$  و  $F_{\text{Odd}}(u)$  به دو تبدیل چهار نقطه ای نیاز است. (تو) آنها به  $2^{m(2)}$  ضرب و  $2\alpha(2)$  جمع نیاز دارند. چهار ضرب دیگر و هشت جمع دیگر تبدیل کامل را به دست می آورند. کل سپس ضرب  $m(3) = 2m(2) + 4$  و جمع  $S$   $\alpha(3) = 2\alpha(2) + 8$  است. ادامه این استدلال برای هر عدد صحیح مثبت منجر به عباراتی بازگشتی برای تعداد ضرب و اضافات مورد نیاز برای اجرای FFT می شود:

$$m(p) = 2m(p-1) + 2^{p-1} \quad p \geq 1 \quad (4-169)$$

$$\alpha(p) = 2\alpha(p-1) + 2^p \quad p \geq 1 \quad (4-170)$$

جایی که  $m(0) = 0$  and  $\alpha(0) = 0$  زیرا تبدیل یک نقطه واحد به هیچ ضرب یا افزودنی نیاز ندارد. روشی که به تازگی توسعه داده شده است، الگوریتم FFT دو برابر شدن پی در پی نامیده می شود، زیرا مبتنی بر محاسبه تبدیل دو نقطه ای از دو تبدیل یک نقطه ای، تبدیل چهار نقطه ای از دو تبدیل دو نقطه ای و غیره برای هر  $M$  است. برابر با یک عدد صحیح ۲ است. برای نشان دادن آن به عنوان یک تمرین باقی می ماند (به مسئله ۴.۶۳ مراجعه کنید)

$$m(p) = \frac{1}{2} M \log_2 M \quad (4-171)$$

$$\alpha(n) = M \log_2 M \quad (4-172)$$

جایی که  $M = 2^p$ . مزیت محاسباتی FFT نسبت به اجرای مستقیم ۱-D DFT به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} C(M) &= \frac{M^2}{M \log_2 M} \\ &= \frac{M}{\log_2 M} \end{aligned} \quad (4-173)$$

جایی که  $M^2$  تعداد عملیات مورد نیاز برای اجرای "روش برنامه سازی پر قدرت" ۱-D DFT است. چون فرض بر این است که  $M \square 2^p$ ، ما می توانیم معادله بنویسیم. (۴-۱۷۳) از نظر  $p$ :

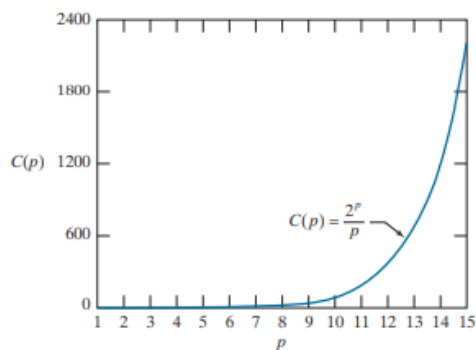
$$C(p) = \frac{2^p}{p} \quad (4-174)$$

نمودار این تابع (شکل ۴.۶۷) نشان می دهد که مزیت محاسباتی به سرعت به عنوان تابعی از  $p$  افزایش می یابد. به عنوان مثال، وقتی  $(32, 768)$   $p = 15$  امتیاز، FFT تقریباً ۲۲۰۰ تا ۱ برتری نسبت به اجرای DFT با روش برنامه سازی پر قدرت آنه دارد. بنابراین، ما انتظار داریم که FFT را می توان تقریباً ۲۲۰۰ بار سریعتر از DFT در همان دستگاه محاسبه کرد. همانطور که در بخش ۴.۱ آموختید، FFT همچنین مزایای محاسباتی قابل توجهی را نسبت به فیلترینگ فضایی ارائه می دهد، که تقابل بین دو رویکرد مربوط به هسته های نسبتاً کوچک است. منابع بسیار زیادی وجود دارد که جزئیات FFT را پوشش می دهد، بنابراین ما بیشتر روی این موضوع نمی پردازیم (به عنوان مثال، بریگهام [۱۹۸۸] را ببینید). بیشترین بسته های نرم افزاری پردازش سیگنال و تصویر شامل پیاده سازی های کلی FFT هستند که نیازی به تعداد نقاط به عنوان یک عدد صحیح ۲ ندارند (به دلیل محاسبه کمی کارآمدتر). برنامه های FFT رایگان نیز به راحتی در دسترس هستند، عمدتاً از طریق اینترنت.

## خلاصه ، منابع ، و خواندن بیشتر

مطالب موجود در این فصل از نمونه گیری تا تبدیل فوریه و سپس فیلتر شدن در حوزه فرکانس است. برخی از مفاهیم ، مانند قضیه نمونه گیری ، اگر در زمینه حوزه فرکانس توضیح داده نشوند ، بسیار اندک هستند. همین امر در مورد اثراتی مانند الایزینگ صادق است. بنابراین ، مطالبی که در بخشهای قبلی تهیه شده است پایه محکمی برای درک اصول پردازش سیگنال دیجیتال دو بعدی است. ما مراقبت ویژه ای کردیم تا مطالب را با اصول اولیه توسعه دهیم ، به طوری که هر خواننده ای با پیشینه ریاضی متوسط ، نه تنها می تواند مواد را جذب کند ، بلکه از آن استفاده کند.

برای خواندن مکمل در مورد تغییرات پیوسته فوریه D-1 و D-2 ، کتابهای بریسکول را ببینید [۱۹۹۵ ، ۲۰۰۳]. این دو کتاب ، همراه با [۱۹۹۶] Castleman ، [۲۰۱۰] Petrou and Petrou ، [۱۹۸۸] Brigham و [۲۰۰۳] Smith ، زمینه های اضافی را برای مطالب در بخشهای ۴.۲ تا ۴.۶ ارائه می دهند. نمونه برداری از پدیده هایی مانند الگوهای الایزینگ و مویر موضوعاتی هستند که در کتابهای مربوط به گرافیک کامپیوتری به طور کامل نشان داده شده است ، به عنوان مثال توسط هیوز و اندریس [۲۰۱۳]. برای اطلاعات کلی بیشتر در مورد مطالب در بخشهای ۴.۷ تا ۴.۱۱ به هال [۱۹۷۹] ، جین [۱۹۸۹] ، [۱۹۹۶] Castleman و پرات [۲۰۱۴] مراجعه کنید. برای جزئیات بیشتر در مورد جنبه های نرم افزاری بسیاری از مثالهای این فصل ، به Woods ، Gonzalez ، [۲۰۰۹] and Eddins مراجعه کنید.



شکل ۴.۶۷ مزیت محاسباتی FFT نسبت به اجرای مستقیم D-1 DFT تعداد نمونه  $M = ۲$  ص است. مزیت محاسباتی به سرعت به عنوان تابعی از  $p$  افزایش می یابد.

## چالش ها و مسائل

راه حل مشکلاتی که با علامت (\*) مشخص شده اند در بسته پشتیبانی دانشجویی DIP $\epsilon$ E وجود دارد (به وب سایت کتاب مراجعه کنید: [www.ImageProcessingPlace.com](http://www.ImageProcessingPlace.com))

۴.۱ به موارد زیر پاسخ دهید:

(الف) \* معادله ای مشابه معادله (۴-۱۰) ، بدهید اما برای یک ضربه واقع در  $t = t_0$

(ب) برای معادله (۴-۱۵) تکرار کنید.

(ج) \* آیا صحیح است که بگوییم  $\delta(t-a) = \delta(a-t)$  به طور کلی؟ توضیح.

۴.۲ مثال ۴.۱ را تکرار کنید، اما با استفاده از تابع  $f(t) = A$  for  $0 \leq t < T$  and  $f(t) = 0$  برای همه مقادیر دیگر  $t$ . دلیل تفاوت بین نتایج خود و نتایج را در مثال توضیح دهید.

۴.۳ تراکم دو تکانه تک بعدی چیست:

(a) \*  $\delta(t)$  and  $\delta(t - t_0)$ ?

(b)  $\delta(t - t_0)$  and  $\delta(t + t_0)$ ?

۴.۴ \* از ویژگی غربالگری ضربه استفاده کنید تا نشان دهید که تابع پیوسته یک بعدی،  $f(t)$ ، با یک ضربه واقع در  $t_0$ ، تابع را تغییر می دهد به طوری که مبدأ آن به مکان ضربه منتقل می شود (اگر ضربه در مبدا است، عملکرد تغییر نمی کند).

۴.۵ \* با اشاره به شکل ۴.۹، یک تصویر گرافیکی از یک جفت توابع مستعار که متناوب نیستند نشان دهید.

۴.۶ با اشاره به شکل ۴.۱۱:

(الف) \* تصویر را دوباره ترسیم کنید، نشان می دهد که نقاط برای نمونه گیری که کمی از نرخ نایکویست فراتر می رود، چگونه به نظر می رسند.

(ب) میزان نمونه گیری تقریبی که توسط نقاط بزرگ شکل ۴.۱۱ نشان داده می شود چقدر است؟

(ج) به طور تقریبی، پایین ترین میزان نمونه برداری که می توانید استفاده کنید تا (۱) میزان نایکویست راضی باشد و (۲) نمونه ها شبیه موج سینوسی باشد، چقدر خواهد بود؟

۴.۷ یک تابع  $f(t)$ ، از مجموع سه تابع،  $f_1(t) = A \sin(\pi t)$ ،  $f_2(t) = B \sin(4\pi t)$ ،  $f_3(t) = C \cos(8\pi t)$  تشکیل می شود.

(الف) با فرض اینکه توابع در هر دو جهت به فاز وارد شوند، بیشترین فراوانی  $f(t)$  چقدر است؟ (نکته: با پیدا کردن دوره مجموع سه تابع شروع کنید).

(ب) \* نرخ نایکویست مربوط به نتیجه شما در (a) چقدر است؟ (جواب عددی بدهید).

(ج) با چه سرعتی از  $f(t)$  نمونه گیری می کنید تا بازایی کامل عملکرد از نمونه های آن امکان پذیر باشد؟

۴.۸ \* نشان دهید که  $\mathfrak{F}\{e^{j2\pi t_0 t}\} = \delta(\mu - t_0)$ ، جایی که  $t_0$  ثابت است. (نکته: مثال مطالعه ۴.۲).

۴.۹ نشان دهید که عبارات زیر درست است. (نکته: از راه حل مسئله ۴.۸ استفاده کنید):

(a) \*  $\mathfrak{F}\{\cos(2\pi\mu_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(\mu - \mu_0) + \delta(\mu + \mu_0)]$

(b)  $\mathfrak{F}\{\sin(2\pi\mu_0 t)\} = \frac{1}{2j}[\delta(\mu - \mu_0) - \delta(\mu + \mu_0)]$

۴.۱۰ تابع  $f(t) = \sin(2\pi nt)$  را در نظر بگیرید، جایی که  $n$  یک عدد صحیح است. تبدیل فوریه آن،  $F(m)$ ، کاملاً تخیلی است (به مسئله ۴.۹ مراجعه کنید). از آنجا که تبدیل،  $F^*(m)$  داده های نمونه شامل نسخه های متناوب از  $F(m)$  است، نتیجه می شود که  $F(m)$  نیز کاملاً تخیلی خواهد بود. نمودار مشابه شکل ۴.۶ رسم کنید و به سوالات زیر بر اساس نمودار خود پاسخ دهید (فرض کنید نمونه گیری از  $t = 0$  شروع می شود).

a\* دوره  $f(t)$  چقدر است؟

(b) \* فرکانس  $f(t)$  چقدر است؟

\* (c) اگر  $f(t)$  با سرعتی بیشتر از نرخ نایکویست نمونه برداری شود، عملکرد نمونه و تبدیل فوریه آن به طور کلی چگونه خواهد بود؟

(d) اگر  $f(t)$  با سرعتی کمتر از نرخ نایکویست نمونه برداری شود، عملکرد نمونه به طور کلی چگونه خواهد بود؟

(e) اگر  $f(t)$  با نرخ نایکویست نمونه برداری شود، با نمونه های گرفته شده در  $t = 0, \pm\Delta T, \pm 2\Delta T, \dots$  عملکرد نمونه چگونه خواهد بود؟

۴.۱۱ \* اثبات اعتبار قضیه کانولوشن یک متغیر پیوسته، همانطور که در معادله (۴-۲۵) و (۴-۲۶) آمده است.

۴.۱۲ ما در پاراگراف بعد از معادله (۴-۳۶) توضیح دادیم که به طور خودسرانه طول مدت یک تابع محدود شده توسط باند را با ضرب آن در یک تابع جعبه محدود می کنیم.

می تواند عملکرد محدود بودن باند را متوقف کند. با محدود کردن مدت زمان تابع  $f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t)$  به صورت گرافیکی نشان دهید که چرا این اتفاق می افتد [تبدیل فوریه این تابع در مسئله ۴.۹ (a) آمده است]. (نکته: تغییر عملکرد یک تابع جعبه در مثال ۴.۱ آمده است. از آن نتیجه را در حل خود استفاده کنید، و همچنین این واقعیت که ترکیب یک تابع با یک ضربه، عملکرد را به محل ضربه تغییر می دهد، در حل مسئله ۴.۴ بحث شده است.)

۴.۱۳ \* مراحل انجام شده از معادله (۴-۳۷) را کامل کنید. به معادله (۴-۳۸).

۴.۱۴ نشان دهید که  $F^*(m)$  در معادله (۴-۴۰) به طور متناوب در هر دو جهت، با دوره  $\Delta T$  است.

۴.۱۵ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) نشان دهید که معادلات (۴-۴۲) و (۴-۴۳) یک جفت تبدیل چهارگانه هستند  $f_n \Leftrightarrow F_m$ .

آن معادله ها (۴-۴۴) و (۴-۴۵) را نشان دهید نیز یک جفت تبدیل فوریه هستند:  $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ .

در هر دو قسمت این مشکل به ویژگی متعارف زیر نیاز دارید:

$$\sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi rx/M} e^{-j2\pi ux/M} = \begin{cases} M & \text{if } r = u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۴.۱۶ نشان دهید که هر دو  $F(u)$  و  $f(x)$  در معادله (۴-۴۴) و (۴-۴۵) به طور متناوب با دوره  $M$  هستند. یعنی  $F(u) = F(u + kM)$  and  $f(x) = f(x + M)$  جایی که  $k$  یک عدد صحیح است. [به معادله مراجعه شود. (۴-۴۶) و (۴-۴۷)].

۴.۱۷ اعتبار خواص تبدیل (shift) زوجهای تبدیل فوریه  $D^{-1}$  زیر را نشان دهید. (نکته: در قسمت (ب) کار با IDFT آسان تر است.)

$$(a) * f(x)e^{j2\pi u_0 x/M} \Leftrightarrow F(u - u_0)$$

$$(b) f(x - x_0) \Leftrightarrow F(u)e^{-j2\pi u x_0/M}$$

۴.۱۸ نشان دهید که قضیه پیچیدگی  $D^{-1}$  داده شده در معادله (۴-۲۵) و (۴-۲۶) همچنین برای متغیرهای گسسته، اما با سمت راست معادله (۴-۲۶) مناسب است. ضرب شده توسط  $M$  یعنی نشان دهید که

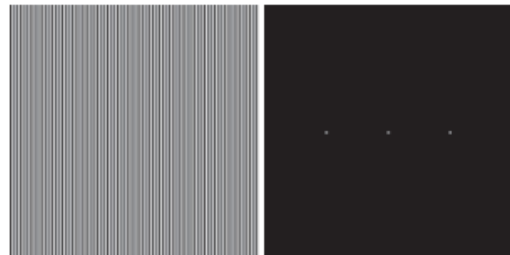
$$(a) * (f \star h)(x) \Leftrightarrow (F \cdot H)(u), \text{ and}$$

$$(b) (f \cdot h)(x) \Leftrightarrow \frac{1}{M}(F \star H)(u)$$

۴.۱۹ \* عبارت را برای پیچیدگی  $1$  بعدی گسترش دهید [نگاه کنید به معادل (۴-۲۴)] به دو متغیر پیوسته. برای متغیرهای سمت چپ عبارت از  $t$  و  $z$  و برای متغیرهای انتگرال  $2$  بعدی از  $a$  و  $b$  استفاده کنید.

۴.۲۰ از ویژگی غربالگری ضربه دو بعدی استفاده کنید تا نشان دهید که تلاقی یک عملکرد پیوسته دو بعدی  $f$ ،  $(t, z)$ ، با یک ضربه، عملکرد را تغییر می دهد به طوری که مبدأ آن در محل ضربه قرار دارد. به (اگر انگیزه در مبدأ باشد، عملکرد دقیقاً همانطور که قبلاً کپی شده است) (راهنمایی: راه حل مسئله ۴.۴ را مطالعه کنید).

۴.۲۱ تصویر سمت چپ در تصویر زیر شامل نوارهای متناوب سیاه/سفید است که هر نوار آن دو پیکسل عرض دارد. تصویر سمت راست طیف فوریه از تصویر سمت چپ است که عبارت  $dc$  و عبارات فرکانسی را نشان می دهد که به نوارها پاسخ می دهد. (به یاد داشته باشید، طیف متقارن است، بنابراین همه اجزا، به غیر از عبارت  $dc$ ، در دو مکان متقارن ظاهر می شوند.)



(الف) \* فرض کنید نوارهای یک تصویر با اندازه یکسان، چهار پیکسل عرض داشته باشند. طیف تصویر را به تصویر بکشید، فقط عبارت  $dc$  و دو عبارت فرکانسی با ارزش ترین، که مربوط به دو خوشه در طیف بالا است.

(ب) چرا اجزای طیف محدود به محور افقی هستند؟

(ج) طیف برای تصویری با اندازه یکسان اما دارای نوارهایی به عرض یک پیکسل چگونه خواهد بود؟ دلیل پاسخ خود را توضیح دهید.

(د) آیا اصطلاحات dc در (a) و (c) یکسان هستند یا متفاوت هستند؟ توضیح.

۴.۲۲ یک شرکت با تکنولوژی بالا در توسعه سیستم های تصویربرداری برای دیجیتالی کردن تصاویر پارچه های تجاری تخصص دارد. این شرکت سفارش جدیدی برای ۱۰۰۰ سیستم دیجیتالی کردن پارچه شامل نوارهای عمودی سیاه و سفید با عرض ۲ سانتی متر دارد. مهندسان اپتیک و مکانیک در حال حاضر مکانیزم های نوری و مکانیکی موقعیت مکانی را طوری طراحی کرده اند که شما تضمین می کنید هر تصویری که سیستم شما دیجیتالی می کند با یک نوار عمودی سیاه کامل شروع می شود و با یک نوار کامل سفید به پایان می رسد. هر تصویری که بدست می آید دقیقاً شامل ۲۵۰ نوار عمودی است. نویز و اعوجاج نوری قابل اغماض است. با آگاهی از موفقیت شما در گذراندن دوره پردازش تصویر، این شرکت از شما استفاده می کند تا وضوح تراشه تصویربرداری را برای استفاده در سیستم جدید مشخص کنید. اپتیک را می توان طوری تنظیم کرد که با توجه به اندازه تراشه ای که تعیین کرده اید، میدان دید را به طور دقیق بر روی ناحیه ای که تعیین شده است، نمایش دهد. طراحی شما در صدها مکان اجرا می شود، بنابراین هزینه یک ملاحظه مهم است. چه تراشه وضوح (از نظر تعداد عناصر تصویربرداری در هر خط افقی) را برای جلوگیری از الایزینگ دیگر مشخص می کنید؟

۴.۲۳ \* از بحث در بخش ۴.۵ می دانیم که بزرگنمایی یا کوچک شدن یک تصویر دیجیتال به طور کلی باعث ایجاد الایزینگ می شود. نمونه ای از تصویری را که در صورت بزرگنمایی با پیکسل بزرگنمایی می کند، ذکر کنید.

۴.۲۴ با اشاره به بحث خطی بودن در بخش ۲.۶، آن را نشان دهید

(الف) \* تبدیل پیوسته دو بعدی فوریه یک عملگر خطی است.

(ب) DFT دو بعدی نیز یک عملگر خطی است.

۴.۲۵ با استناد به معادلات (۴-۵۹) و (۴-۶۰)، اعتبار تبدیل (تغییر) زیر را برای جفت های تبدیل دو بعدی و پیوسته فوریه نشان می دهند. (نکته: راه حل های مسئله ۴.۱۱ را مطالعه کنید.)

$$(a) * f(t, z) e^{j2\pi(\mu_0 t + \nu_0 z)} \Leftrightarrow F(\mu - \mu_0, \nu - \nu_0)$$

$$(b) f(t - t_0, z - z_0) \Leftrightarrow F(\mu, \nu) e^{-j2\pi(t_0 \mu + z_0 \nu)}$$

۴.۲۶ اعتبار پیوسته دو بعدی زیر را نشان دهید

جفت تبدیل فوریه



- (a)\*  $\delta(t, z) \Leftrightarrow 1$
- (b)\*  $1 \Leftrightarrow \delta(\mu, \nu)$
- (c)\*  $\delta(t - t_0, z - z_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(t_0\mu + z_0\nu)}$
- (d)  $e^{j2\pi(t_0\mu + z_0\nu)} \Leftrightarrow \delta(\mu - t_0, \nu - z_0)$
- (e)\*  $\cos(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z) \Leftrightarrow$   
 $(1/2)[\delta(\mu - \mu_0, \nu - \nu_0) + \delta(\mu + \mu_0, \nu + \nu_0)]$
- (f)  $\sin(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z) \Leftrightarrow$   
 $(1/2j)[\delta(\mu - \mu_0, \nu - \nu_0) - \delta(\mu + \mu_0, \nu + \nu_0)]$

۴.۲۷ با اشاره به معادلات (۴-۷۱) و (۴-۷۲)، اعتبار خواص تبدیل زیر (جابجایی) زوج های دو بعدی گسسته فوریه را از جدول ۴.۴ نشان می دهد. (نکته: راه حل های مسئله ۴.۱۷ را مطالعه کنید).

- (a)  $f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$
- (b)\*  $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)}$

۴.۲۸ اعتبار دو بعدی گسسته زیر را نشان دهید

- (a)\*  $\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
- (b)\*  $1 \Leftrightarrow MN\delta(u, v)$
- (c)  $\delta(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
- (d)\*  $e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow MN\delta(u - u_0, v - v_0)$
- (e)  $\cos(2\pi\mu_0x/M + 2\pi\nu_0y/N) \Leftrightarrow$   
 $(MN/2)[\delta(u + \mu_0, v + \nu_0) + \delta(u - \mu_0, v - \nu_0)]$
- (f)\*  $\sin(2\pi\mu_0x/M + 2\pi\nu_0y/N) \Leftrightarrow$   
 $(jMN/2)[\delta(u + \mu_0, v + \nu_0) - \delta(u - \mu_0, v - \nu_0)]$

۴.۲۹ به شما یک برنامه "کنسرو شده" داده می شود که جفت دو بعدی، DFT را محاسبه می کند. با این حال، مشخص نیست که عبارت ۱ MN در کدام یک از دو معادله گنجانده شده است یا به صورت دو ثابت تقسیم شده است، ۱ MN، در مقابل هر دو حرکت رو به جلو و معکوس. اگر این اطلاعات در اسناد موجود نباشد، چگونه می توانید بفهمید که اصطلاح (ها) شامل چه مواردی است؟

۴.۳۰ دوره و فرکانس هر یک از توالی های دیجیتال زیر چقدر است (نکته: اینها را به صورت موج مربعی در نظر بگیرید).

- (a)\* 01010101...
- (b) 001001001....
- (c) 001100110011...

۴.۳۱ با اشاره به توالی های ۱ بعدی در مثال ۴.۱۰:

- (الف) \* وقتی M زوج است، چرا نقطه ۲ M در یک دنباله همیشه دلخواه است؟
- (ب) وقتی M زوج است، چرا نقطه ۲ M در یک دنباله فرد همیشه ۰ است؟

۴.۳۲ ما در مثال ۴.۱۰ ذکر کردیم که قرار دادن یک آرایه دو بعدی از ابعاد زوج (فرد) در یک آرایه بزرگتر از صفرهای ابعاد زوج (فرد) تقارن آرایه اصلی را حفظ می کند ، به شرطی که مراکز با هم منطبق باشند. نشان دهید که این امر برای آرایه های ۱ بعدی زیر نیز صادق است (یعنی نشان دهید که آرایه های بزرگتر تقارن یکسانی با آرایه های کوچکتر دارند). برای آرایه هایی با طول یکنواخت ، از آرایه هایی با ده عنصر \* استفاده کنید. برای آرایه هایی با طول فرد ، از آرایه هایی با طول نه عنصر \* استفاده کنید.

$$(a) * \{a, b, c, c, b\}$$

$$(b) \{0, -b, -c, 0, c, b\}$$

$$(c) \{a, b, c, d, c, b\}$$

$$(d) \{0, -b, -c, c, b\}$$

۴.۳۳ در مثال ۴.۱۰ ما یک هسته Sobel را نشان دادیم که در یک میدان صفر تعبیه شده است. اندازه هسته ۳ \* ۳ است و بنظر می رسد ساختار آن فرد است. با این حال ، اولین عنصر آن ۱- است و ما می دانیم که برای فرد بودن ، عنصر اول (بالا ، چپ) یک آرایه ۲ بعدی باید صفر باشد. کوچکترین میدان صفرها را نشان دهید که می توانید هسته Sobel را در آن جاسازی کنید تا شرایط غرابت را برآورده کند.

۴.۳۴ موارد زیر را انجام دهید:

(a) \* نشان دهید که آرایه  $6 * 6$  در مثال ۴.۱۰ فرد است.

(ب) اگر علامت های منفی به مثبت تغییر کنند ، چه اتفاقی می افتد؟

(ج) توضیح دهید که چرا ، همانطور که در پایان مثال ذکر شد ، افزودن ردیف دیگر \* در بالا و ستون \* به چپ به آرایه ، نتیجه ای را می دهد که نه زوج و نه فرد است.

(د) فرض می کنیم که ردیف به bottom و ستون در سمت راست اضافه شده است؟ آیا این پاسخ شما را در

(ج) تغییر می دهد؟

۴.۳۵ مشکلات زیر مربوط به مناسبات موجود در جدول ۴.۱ است.

(الف) \* اعتبار دارایی را نشان دهید ۲.

(ب) \* اعتبار دارایی را نشان دهید ۴.

(ج) اعتبار دارایی را نشان دهید ۵.

(د) \* اعتبار دارایی را نشان دهید ۷.

(ه) اعتبار دارایی را نشان دهید ۹.

۴.۳۶ شما از جدول ۴.۳ می دانید که عبارت  $F, dc, (0, 0)$  از DFT متناسب با مقدار متوسط تصویر فضایی مربوطه است. فرض کنید که اندازه تصویر  $M * N$  است. فرض کنید که تصویر را با صفر به اندازه  $P * Q$  قرار دهید ،

جایی که P و Q در معادله (۴-۱۰۲) و (۴-۱۰۳) ذکر شده است. اجازه دهید  $F_p(0,0)$  عبارت dc از DFT تابع لایه گذاری را نشان دهد. نسبت میانگین مقادیر تصاویر اصلی و لایه گذاری چقدر است؟ ( آیا  $F_p(0,0) = F(0,0)$  است؟ از نظر ریاضی. از پاسخ خود حمایت کنید )

۴.۳۷ اعتبار ویژگی های متناوب (ورودی ۸) را در جدول ۴.۳ نشان دهید.

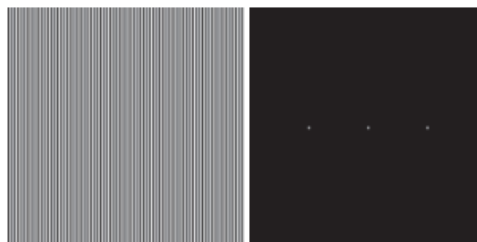
۴.۳۸ با اشاره به قضیه پیچیدگی گسسته ۲ بعدی در معادلات. (۴-۹۵) و (۴-۹۶) (ورودی ۶ در جدول ۴.۴) ، نشان دهید که

$$(a) (f \star h)(x,y) \Leftrightarrow (F \bullet H)(u,v)$$

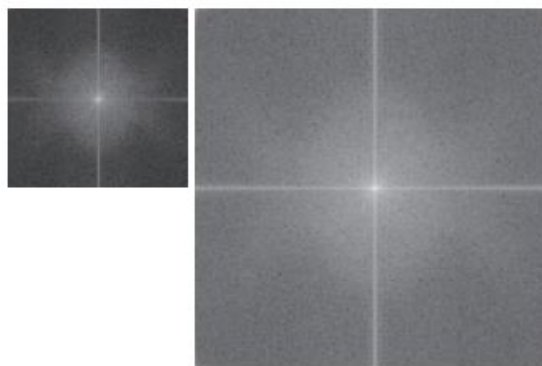
$$(b) (f \bullet h)(x,y) \Leftrightarrow (1/MN)[(F \star H)(u,v)]$$

۴.۳۹ با اشاره به قضیه همبستگی گسسته ۲ بعدی (ورودی ۷ در جدول ۴.۴) ، نشان دهید که اعتبار زوج های تمایز را در ورودی ۱۲ جدول ۴.۴ نشان دهید.

۴.۴۱ ما در بخش ۴.۶ در مورد نیاز به پر کردن تصویر هنگام فیلتر کردن در حوزه فرکانس بحث کردیم. در آن قسمت نشان دادیم که می توان تصاویر را با افزودن صفر به انتهای سطرها و ستون های تصویر پر کرد (تصویر زیر را در سمت چپ ببینید). آیا فکر می کنید اگر تصویر را مرکز قرار دهیم و به جای آن صفر را احاطه کنیم (تصویر سمت راست را ببینید) ، اما بدون تغییر تعداد کل صفرهای استفاده شده ، تفاوت ایجاد می کند؟ توضیح.



دو طیف فوریه نشان داده شده از یک تصویر هستند. طیف سمت چپ مطابق تصویر اصلی است و طیف سمت راست پس از پر شدن تصویر با صفر به دست آمد. افزایش چشمگیر قدرت سیگنال در امتداد محورهای عمودی و افقی طیف نشان داده شده در سمت راست را توضیح دهید.



۴.۴۳ تصاویر نشان داده شده را در نظر بگیرید. تصویر سمت راست با: (الف) ضرب تصویر سمت چپ در  $x+y$  (-۱) به دست آمد. (ب) محاسبه DFT ؛ (ج) گرفتن مزدوج پیچیده تبدیل. (د) محاسبه DFT معکوس ؛ و (ه) ضرب قسمت واقعی نتیجه در  $x+y$  (-۱). توضیح دهید (از نظر ریاضی) چرا تصویر سمت راست به این شکل ظاهر می شود.



تصویر شکل ۴.۳۴ (ب) از طریق ضرب کردن -۱ در زاویه فاز تصویر در شکل ۴.۳۴ (الف) و سپس محاسبه IDFT به دست آمده است. با اشاره به معادله (۴-۸۶) و ورودی ۵ در جدول ۴.۱، توضیح دهید که چرا این عملیات باعث بازتاب تصویر در مورد هر دو محور مختصات شد.

۴.۴۵ در شکل ۴.۳۴ (ب) مشاهده کردیم که ضرب زاویه فاز در ۱- باعث تغییر تصویر نسبت به هر دو محور مختصات می شود. فرض کنید در عوض ما مقدار تبدیل را ۱- ضرب کرده و سپس با استفاده از معادله DFT معکوس را گرفته ایم:

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ -|F(u, v)| e^{j\phi(u, v)} \}.$$

(الف) \* تفاوت بین دو تصویر  $g(x, y)$  و  $f(x, y)$  چیست؟ [یاد آوردن،  $f(x, y)$  DFT  $F(u, v)$  است.]  
 (ب) فرض اینکه هر دوی آنها تصاویر ۸ بیتی باشند، اگر مقادیر شدت  $g(x, y)$  را با استفاده از معادله (۲-۳۱) و (۲-۳۲)، مقیاس بندی کنیم  $g(x, y)$  از نظر  $f(x, y)$  چگونه خواهد بود با  $255K$ ؟؟

۴-۴۶ منبع نقاط روشن تقریباً متناوب در محور افقی شکل ۴.۴۰ (ب) چیست؟  
 ۴.۴۷  $3 * 3$  را در نظر بگیرید

هسته فضایی که میانگین چهار نزدیکترین همسایه یک نقطه  $(x, y)$  را دارد، اما خود نقطه را از میانگین حذف می کند.

(الف) تابع تبدیل فیلتر معادل را بیابید،  
 $H(u, v)$ ، در حوزه فرکانس.

(ب) نشان دهید که نتیجه شما یک تابع تبدیل فیلتر پایین گذر است.  
 یک فیلتر پایین گذر گاوسی در حوزه فرکانس پیوسته عملکرد تبدیل را دارد.

$$H(\mu, \nu) = A e^{-(\mu^2 + \nu^2)/2\sigma^2}$$

نشان دهید که هسته فیلتر مربوطه در حوزه فضایی پیوسته است

$$h(t, z) = A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)}$$

۴.۴۹ با توجه به تصویری با اندازه  $N * M$  ، از شما خواسته می شود آزمایشی را انجام دهید که شامل تصحیح مجدد تصویر کم در محدوده فرکانس با استفاده از یک تابع تبدیل فیلتر پایین گذر گاوس با فرکانس قطع ،  $D_0$  می باشد. شما ممکن است خطاهای محاسبه دور زدن را نادیده بگیرید.

(الف) \* بگذارید  $K$  تعداد برنامه های کاربردی فیلتر را نشان دهد. آیا می توانید پیش بینی کنید (بدون انجام آزمایش) نتیجه (تصویر) برای مقدار کافی بزرگ  $K$  چقدر خواهد بود؟ اگر چنین است ، آن نتیجه چیست؟

(ب) اجازه دهید  $C_{min}$  کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش در دستگاهی که آزمایش پیشنهادی در آن انجام می شود را نشان دهد (هر عدد کمتر  $C_{min}$  به طور خودکار روی  $0$  تنظیم می شود). یک عبارت (بر حسب  $C_{min}$ ) برای حداقل مقدار  $K$  بدست آورید که نتیجه ای را که در (a) پیش بینی کرده اید تضمین می کند.

۴.۵۰ همانطور که در بخش ۳.۶ توضیح داده شد ، مشتقات مرتبه اول را می توان با تفاوت های فضایی  $g_x = \partial f(x, y) / \partial x = f(x + 1, y) - f(x, y)$  تقریب زد.

$$g_y = \partial f(x, y) / \partial y = f(x, y + 1) - f(x, y).$$

(الف) عملکردهای تبدیل فیلتر معادل  $H_x(u, v)$  and  $H_y(u, v)$  را در حوزه فرکانس پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که اینها توابع تبدیل فیلتر بالا هستند.

(نکته: راه حل مسئله ۴.۴۷ را مطالعه کنید.)

۴.۵۱ تابع تبدیل فیلتر دامنه فرکانس معادل برای هسته لاپلاکی نشان داده شده در شکل ۳.۴۵ (a) را پیدا کنید. نشان دهید که نتیجه شما به عنوان یک عملکرد تبدیل فیلتر بالا عمل می کند. (نکته: راه حل مسئله ۴.۴۷ را مطالعه کنید.)

۴.۵۲ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) نشان دهید که لاپلاکی یک تابع پیوسته  $f(z, t)$  دو متغیر پیوسته ،  $t$  و  $z$  ، زوج تبدیل فوریه زیر را راضی می کند:

$$\nabla^2 f(t, z) \Leftrightarrow -4\pi^2(\mu^2 + \nu^2)F(\mu, \nu)$$

(نکته: به معادله (۳-۵۰) مراجعه کنید و ورودی ۱۲ را در جدول ۴.۴ مطالعه کنید.)

(ب) \* نتیجه (الف) فقط برای متغیرهای پیوسته معتبر است. چگونه می توانید عملکرد تبدیل دامنه فرکانس پیوسته  $H(\mu, \nu) = -4\pi^2(\mu^2 + \nu^2)$  را برای متغیرهای مجزا پیاده سازی کنید؟

(ج) همانطور که در مثال ۴.۲۱ مشاهده کردید ، نتیجه لاپلاسی در حوزه فرکانس مشابه نتیجه در شکل ۳.۴۶ (d) بود ، که با استفاده از یک هسته فضایی با ضخامت مرکزی  $\delta$  - برابر بدست آمد. توضیح دهید که چرا دامنه

فرکانس به جای نتیجه مشابه در شکل ۳.۴۶ (ج) نیست ، که با استفاده از یک هسته با ضرایب مرکزی -۴ بدست آمد.

۴.۵۳ \* آیا راهی برای استفاده از تبدیل فوریه برای محاسبه (یا تا حدی محاسبه) بزرگی گرادیان [معادله (۳-۵۸)] برای استفاده در تمایز تصویر؟ اگر پاسخ شما مثبت است ، روشی برای انجام آن ارائه دهید. اگر پاسخ شما منفی است ، دلیل آن را توضیح دهید.

۴.۵۴ همانطور که در معادله (۴-۱۱۸) ، توضیح داده شده است. ممکن است با تفریق دومی از ۱ ، عملکرد تبدیل یک فیلتر بالا گذر را از تابع تبدیل یک فیلتر پایین گذر بدست آوریم. هسته فضایی بالا گذر مربوط به تابع تبدیل گاوسی پایین گذر است که در مشکل ۴.۴۸؟

۴.۵۵ هر هسته فضایی بالا گذر در شکل ۴.۵۲ دارای یک نمونه قوی در مرکز است. منبع این خوشه ها را توضیح دهید.

۴.۵۶ \* نحوه عملکرد فرستنده فیلتر باترورث در معادله را نشان دهید. (۴-۱۲۱) از همتای پایین گذر خود در معادله (۴-۱۱۷) استفاده می شود.

۴.۵۷ تصاویر اشعه ایکس دست را که در زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. تصویر سمت راست توسط پایین گذر به دست آمده است

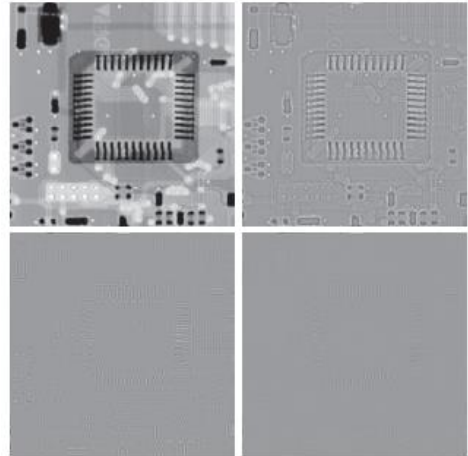


(تصویر اصلی از دکتر توماس آر. گست ، بخش علوم تشریحی ، دانشکده پزشکی دانشگاه میشیگان.)  
فیلتر کردن تصویر در سمت چپ با یک فیلتر پایین گذر گاوسی ، و سپس بالا گذراندن نتیجه با یک فیلتر بالا گذر گاوسی. اندازه تصاویر ۴۲۰ \* ۳۴۴ پیکسل است و از  $D_0 = 25$  برای هر دو عملکرد تبدیل فیلم استفاده شده است.

(الف) \* توضیح دهید که چرا قسمت مرکزی حلقه گلوله در تصویر سمت راست بسیار روشن و محکم به نظر می رسد ، با توجه به این که ویژگی غالب تصویر فیلتر شده شامل لبه های زخم ها و استخوان های میج است و قسمت های تیره تری در بین آنها وجود دارد. به عبارت دیگر ، آیا انتظار ندارید که فیلتر گذرگاه مساحت ثابت را در داخل حلقه به صورت یکسان درآورد

(ب) آیا فکر می کنید اگر ترتیب فرایند فیلتر معکوس می شد ، نتیجه متفاوت بود؟

۴.۵۸ ترتیب تصاویر زیر را در نظر بگیرید. تصویر بالا سمت چپ قسمتی از تصویر اشعه ایکس یک برد مدار چاپی تجاری است. تصاویری که به دنبال آن می آیند، به ترتیب، نتایج قرار دادن تصویر در ۱، ۱۰ و ۱۰۰ گذر از یک فیلتر ارتفاع گاوسی با  $D_0 = 30$  است. اندازه تصاویر  $330 * 334$  پیکسل است که هر پیکسل با ۸ بیت نشان داده شده است. از خاکستری تصاویر برای نمایش مقیاس بندی شده اند، اما این هیچ تاثیری بر روی مشکل ندارد.



(تصویر اصلی از آقای Joseph E. Pascente، Lixi، Inc. گرفته شده است)

(الف) از تصاویر به نظر می رسد که تغییرات پس از تعداد نامحدود گذرها متوقف می شوند. نشان دهید که آیا این مورد وجود دارد یا خیر. شما ممکن است خطاهای محاسبه دور زدن را نادیده بگیرید. اجازه دهید  $C_{min}$  کوچکترین عدد مثبت را در دستگامی که محاسبات در آن انجام می شود نشان دهد.

(ب) اگر در (الف) تعیین کردید که تغییرات پس از تعداد نامحدود تکرارها متوقف می شوند، حداقل مقدار آن را تعیین کنید.

(نکته: راه حل مسئله ۴.۴۹ را مطالعه کنید.)

۴.۵۹ همانطور که در شکل ۴.۵۷ نشان داده شده است، ترکیب تأکید بر فرکانس بالا و هموارسازی هیستوگرام یک روش م  $f_{OR}$  برای دستیابی به تیز شدن لبه و افزایش کنتراست است.

(الف) \* نشان دهید که آیا فرایند اول اعمال می شود یا خیر.

(ب) اگر دستور اهمیت دارد، ابتدا برای استفاده از یکی از روش های دیگر منطقی ارائه دهید.

۴.۶۰ برای ساختن یک تابع تبدیل فیلتر همومرفیک که از شکل کلی مشابه عملکرد در شکل ۴.۵۹ برخوردار است، از یک فیلتر گذرگاه باترورث استفاده کنید.

۴.۶۱ فرض کنید مجموعه ای از تصاویر به شما داده می شود که در آزمایش تجزیه و تحلیل رویدادهای ستاره ای ایجاد شده است. هر تصویر شامل مجموعه ای از نقاط روشن و پراکنده است که مربوط به ستارگان در یک منطقه پراکنده از جهان است. مشکل این است که ستارگان در نتیجه نور اضافی ناشی از پراکندگی جوی به سختی قابل مشاهده هستند. اگر این تصاویر به عنوان محصول یک جزء روشنایی ثابت با مجموعه ای از پالس ها مدل شده

اند ، بر اساس فیلترهای همومورفیک که برای بیرون آوردن اجزای تصویر به واسطه خود ستارگان طراحی شده است ، یک روش بهبود را ارائه دهید.

۴.۶۲ چگونه می توانید تصویری از الگوی تداخل موجود در شکل ۴.۶۴ (الف) ایجاد کنید؟

۴.۶۳ \* اعتبار معادله (۴-۱۷۱) و (۴-۱۷۲) را نشان دهید. (نکته: از اثبات به روش استقرا استفاده کنید.)

۴.۶۴ یک تکنسین پزشکی ماهر وظیفه دارد که مجموعه ای از تصاویر را که توسط آزمایش میکروسکوپ الکترونی ایجاد شده اند ، بازرسی کند.

به منظور ساده سازی کار بازرسی ، تکنسین تصمیم می گیرد از تصویر پیشرفته استفاده کند و به همین منظور مجموعه ای از تصاویر نمایشی را بررسی می کند و مشکلات زیر را پیدا می کند: (۱) نقاط روشن و جدا که هیچ علاقه ای ندارند. (۲) عدم وضوح ؛ (۳) کنتراست کافی در برخی از تصاویر وجود ندارد. و (۴) شدت متوسط را به مقادیری غیر از  $A_0$  تغییر می دهد ، که مقدار متوسط مورد نیاز برای انجام صحیح اندازه گیری شدت خاص است. تکنسین می خواهد این مشکلات را برطرف کند و سپس تمام شدت ها را در نوار بین شدت های ۱۱ و ۱۲ با رنگ سفید نمایش دهد ، در حالی که در شدت های باقیمانده طبیعی بودن را حفظ می کند. دنباله ای از مراحل پردازش را پیشنهاد کنید که تکنسین می تواند برای رسیدن به هدف مورد نظر دنبال کند. شما می توانید از تکنیک های فصل ۳ و ۴ استفاده کنید.



## فصل پنجم : بازیابی و بازسازی تصویر

چیزهایی که ما می بینیم خود آنها نیستند که می بینیم. برای ما کاملاً ناشناخته است که اشیاء به تنهایی و جدا از پذیرش حواس ما چه هستند. ما فقط نحوه درک آنها را می دانیم. امانوئل کانت

### پیش نمایش

همانطور که در بهبود تصویر ، هدف اصلی تکنیک های بازسازی بهبود تصویر به معنای از پیش تعیین شده است. اگرچه مناطق همپوشانی وجود دارد ، اما افزایش تصویر تا حد زیادی یک فرآیند ذهنی است ، در حالی که بازسازی تصویر در بیشتر موارد یک فرایند عینی است. بازسازی سعی می کند تصویری را که با استفاده از دانش پیشین پدیده تخریب شده است بازیابی کند. بنابراین ، تکنیک های بازسازی جهت مدل سازی تخریب و اعمال روند معکوس به منظور بازیابی تصویر اصلی متمرکز شده اند. در این فصل ، ما مدل های مرمت خطی و تغییر ناپذیر فضا را در نظر می گیریم که در شرایط مختلف مرمت قابل اجرا هستند. ما همچنین درباره تکنیک های اساسی بازسازی تصویر از پیش بینی ها و کاربرد آنها در توموگرافی کامپیوتری (CT) ، یکی از مهمترین کاربردهای تجاری پردازش تصویر ، به ویژه در مراقبت های بهداشتی بحث می کنیم.

### پس از اتمام این فصل ، خوانندگان باید:

با ویژگی های مدل های مختلف نويز مورد استفاده در پردازش تصویر و نحوه تقریب پارامترهای تعیین کننده آن مدل ها از داده های تصویر آشنا باشید.

با فیلترهای فضایی خطی، غیر خطی و تطبیقی که برای بازبازی (حذف نویز) تصاویری که فقط توسط نویز تخریب شده اند، استفاده می شود، آشنا باشید.

بدانید که چگونه برای حذف نویز متناوب در یک تصویر از فیلترهای ناچ در حوزه فرکانس استفاده کنید. درک پایه و اساس مفاهیم سیستم تغییرناپذیر فضا، و چگونگی آنها در تدوین راه حل های بازسازی تصویر در حوزه فرکانس استفاده شود.

با فیلتر معکوس مستقیم و محدودیت های آن آشنا باشید.

حداقل میزان فیلترینگ میانگین مربع (وینر) و مزایای آن نسبت به فیلتر معکوس مستقیم را درک کنید. فیلترهای محدود، حداقل مربعات را درک کنید.

با اصول بازسازی تصویر از پیش بینی ها و کاربرد آنها در توموگرافی کامپیوتری آشنا باشید.

## ۵.۱ مدلی از روند تخریب/بازسازی تصویر

در این فصل، ما تخریب تصویر را به عنوان یک عملگر  $\$$  مدل می کنیم که همراه با یک اصطلاح نویز اضافی، روی یک تصویر ورودی  $f(x, y)$  عمل می کند تا یک تصویر تخریب شده  $g(x, y)$  تولید کند (شکل ۵.۱ را ببینید). با توجه به  $g(x, y)$ ، برخی دانش در مورد  $\$$ ، و برخی دانش در مورد اصطلاح نویز افزودنی  $h(x, y)$ ، هدف از بازسازی بدست آوردن تقریب  $\hat{f}(x, y)$  از تصویر اصلی است. ما می خواهیم تقریب تا حد امکان به تصویر اصلی نزدیک باشد و به طور کلی، هرچه بیشتر در مورد  $h$  بدانیم،  $\hat{f}(x, y)$  به  $f(x, y)$  نزدیکتر خواهد بود.

در بخش ۵.۵ نشان خواهیم داد که اگر  $\$$  یک عملگر خطی و متغیر موقعیت باشد، تصویر تخریب شده در حوزه فضایی توسط

$$g(x, y) = (h \star f)(x, y) + \eta(x, y) \quad (5-1)$$

جایی که  $h(x, y)$  نمایش فضایی تابع تخریب است. همانطور که در فصل های ۳ و ۴، نماد " $\star$ " نشان دهنده حرکت است. از قضیه کانولوشن نتیجه می گیرد که معادله (۵-۱) در حوزه فرکانس است

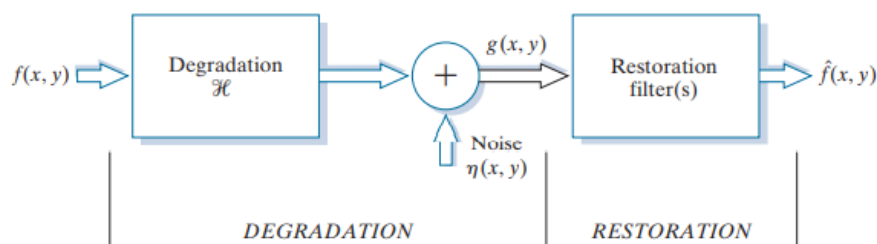
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (5-2)$$

جایی که اصطلاحات با حروف بزرگ تبدیل فوریه از اصطلاحات مربوطه در معادله (۵-۱) است. این دو معادله پایه و اساس بسیاری از مواد بازسازی کننده در این فصل است.

در سه بخش زیر، ما فقط با تخریب های ناشی از نویز کار می کنیم. با شروع در بخش ۵.۵، ما چندین روش را برای بازسازی تصویر در حضور  $\$$  و  $h$  بررسی می کنیم.

## ۵.۲ مدل های نویز

منابع اصلی نویز در تصاویر دیجیتال در حین تهیه و/یا تبدیل تصویر بوجود می آیند. عملکرد سنسورهای تصویربرداری تحت تأثیر عوامل محیطی متنوعی در حین تصویربرداری و همچنین کیفیت خود عناصر حسگر قرار می گیرد. به عنوان مثال ، در به دست آوردن تصاویر با دوربین CCD ، سطح نور و دمای سنسور از عوامل اصلی تأثیرگذار بر میزان نویز در تصویر حاصله هستند. تصاویر در حین تبدیل عمدتاً با تداخل در کانال تبدیل خراب می شوند. به عنوان مثال ، تصویری که با استفاده از شبکه بی سیم منتقل می شود ممکن است بر اثر صاعقه یا سایر اختلالات جوی خراب شود.



شکل ۵.۱ مدلی از روند تخریب/ بازسازی تصویر.

## ویژگی های فضایی و مکرر نویز

پارامترهایی که ویژگی های فضایی نویز را مشخص می کنند و اینکه آیا نویز با تصویر ارتباط دارد ، مربوط به بحث ما هستند. ویژگیهای فرکانس به محتوای فرکانس نویز در حوزه فوریه (فرکانس) اشاره شده است که در فصل ۴ به تفصیل مورد بحث قرار گرفته است.

به عنوان مثال ، هنگامی که طیف نویز فوریه ثابت است ، نویز را نویز سفید می نامند. این اصطلاح یک تبدیل از ویژگی های فیزیکی نور سفید است که شامل همه فرکانس های طیف مرئی به نسبت مساوی است.

به استثنای نویز متناوب فضایی ، در این فصل فرض می کنیم که نویز مستقل از مختصات فضایی است و نسبت به خود تصویر ارتباطی ندارد (یعنی هیچ ارتباطی بین مقادیر پیکسل و مقادیر اجزای نویز وجود ندارد) به اگرچه این مفروضات در برخی از کاربردها حداقل تا حدی معتبر نیستند (تصویربرداری با کوانتوم محدود ، مانند اشعه ایکس و تصویربرداری پزشکی هسته ای ، مثال خوبی است) ، پیچیدگی های برخورد با نویز وابسته به مکان و خارج از محدوده آن است. بحث ما

ممکن است برای بررسی مختصر احتمالات به بخش آموزشهای وب سایت کتاب نگاهی بیاندازید.

## برخی از توابع مهم تراکم احتمال نویز

در بحث بعدی ، ما باید به رفتار آماری مقادیر شدت در جزء نویز مدل در شکل ۵.۱ توجه کنیم. اینها ممکن است متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شوند ، که با تابع چگالی احتمال (PDF) مشخص می شوند ، همانطور که قبلاً به طور خلاصه ذکر شد. جزء نویز مدل در شکل ۵.۱ یک تصویر  $h(x, y)$  ، با اندازه تصویر ورودی است.

ما با ایجاد آرایه ای که مقادیر شدت آن اعداد تصادفی با تابع چگالی احتمال مشخص است ، یک تصویر نویز برای اهداف شبیه سازی ایجاد می کنیم. این رویکرد در مورد همه PDF هایی که به زودی مورد بحث قرار می گیرند صادق است ، به استثنای نویز نمک و فلفل ، که به طور متفاوتی اعمال می شود. موارد زیر یکی از رایج ترین PDF های نویز است که در برنامه های پردازش تصویر یافت می شود.

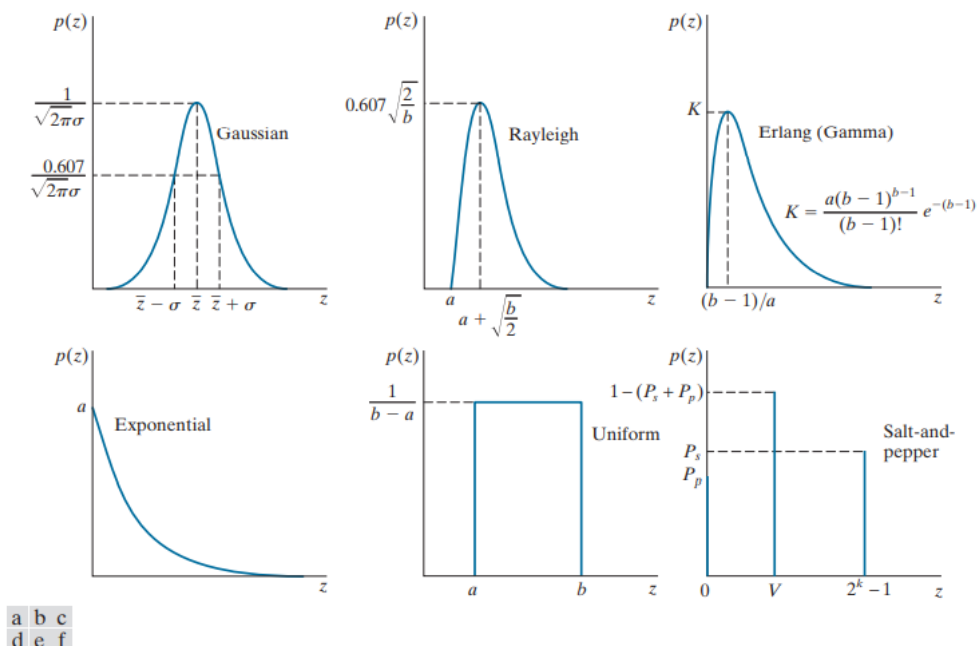
### نویز گاوسی

مدل های نویز گاوسی به دلیل قابلیت ریاضی بودن آن در دو حوزه فضایی و فرکانسی ، اغلب در عمل مورد استفاده قرار می گیرند. در واقع ، این قابلیت جذب آنقدر راحت است که اغلب باعث می شود مدل های گاوسی در شرایطی مورد استفاده قرار گیرند که در بهترین حالت به صورت حاشیه ای قابل اجرا هستند.

PDF متغیر تصادفی گاوسی ،  $Z$  ، با عبارت آشنا زیر تعریف می شود

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < z < \infty \quad (5-3)$$

جایی که  $Z$  نشان دهنده شدت است ،  $Z$  مقدار متوسط (متوسط)  $Z$  و  $S$  انحراف معیار آن است. شکل ۵.۲ (الف) نمودار این تابع را نشان می دهد. ما می دانیم که برای یک متغیر تصادفی گاوسی ، احتمال اینکه مقادیر  $Z$  در محدوده  $\bar{z} \pm \sigma$  باشد تقریباً  $0.68$  است. احتمال حدود  $0.95$  است که مقادیر  $Z$  در محدوده  $\bar{z} \pm 2\sigma$  باشد.



شکل ۵.۲ برخی از توابع چگالی احتمال مهم.

### نویز رایلی

PDF نویز رایلی توسط ارائه شده است

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases} \quad (5-4)$$

میانگین و واریانس Z زمانی که این متغیر تصادفی با PDF رایلی مشخص می شود

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4} \quad (5-5)$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4} \quad (5-6)$$

شکل ۵.۲ (ب) نمودار چگالی رایلی را نشان می دهد. به جابجایی از مبدا و این واقعیت که شکل اصلی چگالی به سمت راست خم شده است توجه کنید. چگالی رایلی می تواند برای مدل سازی شکل هیستوگرام های کج بسیار مفید باشد.

### نویز ارلانگ (گاما)

PDF نویز ارلانگ است

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (5-7)$$

جایی که پارامترها به گونه ای هستند که  $a > b$ ، b یک عدد صحیح مثبت است و "!" فاکتوریل را نشان می دهد میانگین و واریانس Z هستند

$$\bar{z} = \frac{b}{a} \quad (5-8)$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2} \quad (5-9)$$

شکل ۵.۲ (ج) نمودار این چگالی را نشان می دهد. اگرچه معادله (۵-۹) اغلب به عنوان چگالی گاما نامیده می شود، به طور دقیق این تنها زمانی صحیح است که مخرج تابع گاما،  $\Gamma(b)$  باشد. وقتی مخرج مطابق شکل باشد، چگالی مناسب تر تراکم ارلانگ نامیده می شود.

### نویز نمایی

PDF نویز نمایی توسط

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (5-10)$$

که در آن  $a > 0$  میانگین و واریانس Z هستند

$$\bar{z} = \frac{1}{a} \quad (5-11)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2} \quad (5-12)$$

توجه داشته باشید که این PDF مورد خاصی از PDF اریلانگ با  $b=1$  است. شکل ۵.۲ (d) نمودار عملکرد تراکم نمایی را نشان می دهد.

### نویز یکنواخت

PDF نویز یکنواخت است

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-13)$$

میانگین و واریانس Z هستند

$$\bar{z} = \frac{a+b}{2} \quad (5-14)$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (5-15)$$

شکل ۵.۲ (e) نمودار چگالی یکنواخت را نشان می دهد.

### نویز نمک و فلفل

اگر k نشان دهنده تعداد بیت های مورد استفاده برای نشان دادن مقادیر شدت در یک تصویر دیجیتال باشد، محدوده مقادیر شدت ممکن برای آن تصویر  $[0, 2^k - 1]$  است (به عنوان مثال،  $[0, 255]$  برای یک تصویر ۸ بیتی) PDF نویز نمک و فلفل توسط

$$p(z) = \begin{cases} P_s & \text{for } z = 2^k - 1 \\ P_p & \text{for } z = 0 \\ 1 - (P_s + P_p) & \text{for } z = V \end{cases} \quad (5-16)$$

جایی که  $V$  هر مقدار صحیح در محدوده  $0 < V < 2^k - 1$  است.

اجازه دهید  $h(x, y)$  یک تصویر نویز نمک و فلفل را نشان دهد، که مقادیر شدت آن معادله (۵-۱۶) را برآورده می کند. با توجه به تصویری  $f(x, y)$ ، به اندازه  $h(x, y)$ ، آن را با نویز نمک و فلفل خراب می کنیم و یک عدد  $\cdot$  را به همه مکانهای  $f$  که  $\cdot$  در  $h$  رخ می دهد اختصاص می دهیم. به طور مشابه، ما مقدار  $2^k - 1$  را به همه مکانهای  $f$  اختصاص می دهیم که این مقدار در  $h$  نشان داده می شود. سرانجام، ما تمام مکان را در  $V$  در  $h$  رخ می دهد، بدون تغییر می گذاریم.

اگر نه PS و نه Pp صفر باشند ، و به ویژه اگر مساوی باشند ، مقادیر نویز معادله را برآورده می کند. (۵-۱۶) سفید  $(2^k - 1)$  یا سیاه (۰) خواهد بود و شبیه دانه های نمک و فلفل است که به طور تصادفی روی تصویر توزیع شده اند. بنابراین نام این نوع نویز است.

نامهای دیگری که در ادبیات پیدا خواهید کرد عبارتند از نویز دو قطبی (یک قطبی اگر PS یا Pp صفر باشد) ، نویز خروج داده ها و نویز نمونه . ما از اصطلاحات ضربه و نویز نمک و فلفل به جای یکدیگر استفاده می کنیم. احتمال P ، این است که پیکسل با نویز نمک یا فلفل خراب شود  $P = P_s + P_p$ . این اصطلاح رایج است که از P به عنوان چگالی نویز یاد می شود. اگر ، به عنوان مثال ،  $P_s = 0.02$  و  $P_p = 0.01$  ، سپس  $P = 0.03$  و ما می گوئیم که تقریباً ۲ پیکسل های یک تصویر توسط نویز نمک ، ۱ با نویز فلفل خراب شده و چگالی نویز ۳ است % ، به این معنی که تقریباً ۳ پیکسل های تصویر توسط نویز نمک و فلفل خراب شده است. اگرچه ، همانطور که مشاهده کردید ، نویز نمک و فلفل با احتمال هر یک مشخص می شود ، نه با میانگین و واریانس ، اما ما دومی را برای کامل بودن در اینجا قرار می دهیم. میانگین نویز نمک و فلفل با استفاده از آن نشان داده شده است

$$\bar{z} = (0)P_p + K(1 - P_s - P_p) + (2^k - 1)P_s \quad (5-17)$$

و واریانس توسط

$$\sigma^2 = (0 - \bar{z})^2 P_p + (K - \bar{z})^2 (1 - P_s - P_p) + (2^k - 1)^2 P_s \quad (5-18)$$

جایی که ما ۰ را به عنوان یک مقدار صریح در هر دو معادله گنجانده ایم تا نشان دهیم که مقدار نویز فلفل صفر فرض می شود. به عنوان یک گروه ، PDF های قبلی ابزارهای مفیدی برای مدل سازی طیف وسیعی از شرایط فساد نویز در عمل ارائه می دهند. به عنوان مثال ، نویز گوسی در یک تصویر به دلیل عواملی مانند نویز مدار الکترونیکی و نویز سنسور ناشی از روشنایی ضعیف و/یا درجه حرارت بالا ایجاد می شود. تراکم رایی در مشخص کردن پدیده های نویز در تصویربرداری برد مفید است. کاربرد چگالی نمایی و گاما در تصویربرداری با لیزر نویز ضربه ای در شرایطی مشاهده می شود که گذرهای سریع مانند تعویض معیوب هنگام تصویربرداری رخ می دهد. چگالی یکنواخت شاید کمترین توصیف کننده شرایط عملی باشد. با این حال ، چگالی یکنواخت به عنوان مبنایی برای تعداد زیادی مولد اعداد تصادفی که به طور گسترده در شبیه سازی ها استفاده می شوند مفید است (گونزالز ، وودز و ادینز [۲۰۰۹]).

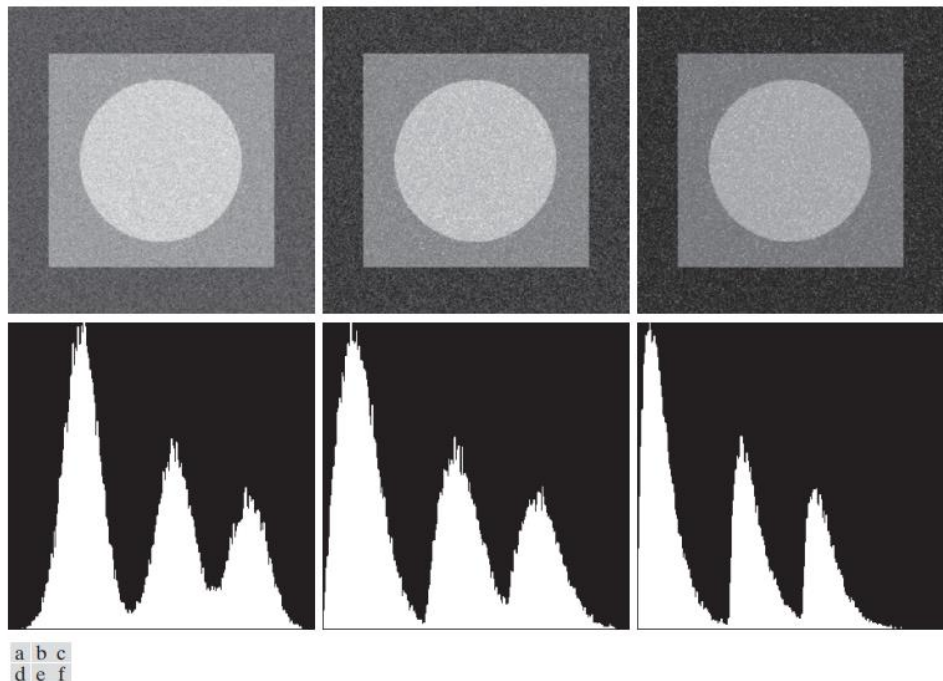
مثال	۵.۱:	تصاویر	پر	نویز	و	هیستوگرام	آنها.
شکل ۵.۳ یک الگوی آزمایشی را نشان می دهد که برای نشان دادن مدل های نویز مورد بحث استفاده می شود. این یک الگوی مناسب برای استفاده است زیرا از مناطق ساده و ثابت تشکیل شده است که مقیاس خاکستری را از سیاه تا سفید تقریباً در سه مرحله گسترش می دهند. این امر تجزیه و تحلیل بصری ویژگی های اجزای مختلف نویز اضافه شده به تصویر را تسهیل می کند.							

شکل ۵.۴ الگوی آزمایش را پس از افزودن شش نوع نویز در شکل ۵.۲ نشان می دهد. در زیر هر تصویر ، هیستوگرام محاسبه شده مستقیم از آن تصویر وجود دارد. پارامترهای نویز در هر مورد انتخاب شد تا هیستوگرام مربوط به سه سطح شدت در الگوی آزمایش شروع به ادغام کند. این باعث می شود که نویز کاملاً قابل مشاهده باشد ، بدون اینکه ساختار اصلی تصویر زیر را پنهان کند. ما مکاتبات نزدیکی را در مقایسه هیستوگرامهای شکل ۵.۴ با فایل های PDF در شکل ۵.۲ مشاهده می کنیم.

هیستوگرام برای مثال نمک و فلفل حاوی یک قله خاص برای  $V$  نیست زیرا همانطور که به خاطر می آورید  $V$  فقط در هنگام ایجاد تصویر نویز استفاده می شود تا مقادیر در تصویر اصلی بدون تغییر باقی بمانند. البته ، علاوه بر قله های نمک و فلفل ، قله هایی برای شدت های دیگر در تصویر وجود دارد. به استثنای شدت کلی کمی متفاوت ، تمایز آن دشوار است



شکل ۵.۳ الگوی آزمایشی که برای نشان دادن ویژگی های PDF از شکل ۵.۲ استفاده می شود.



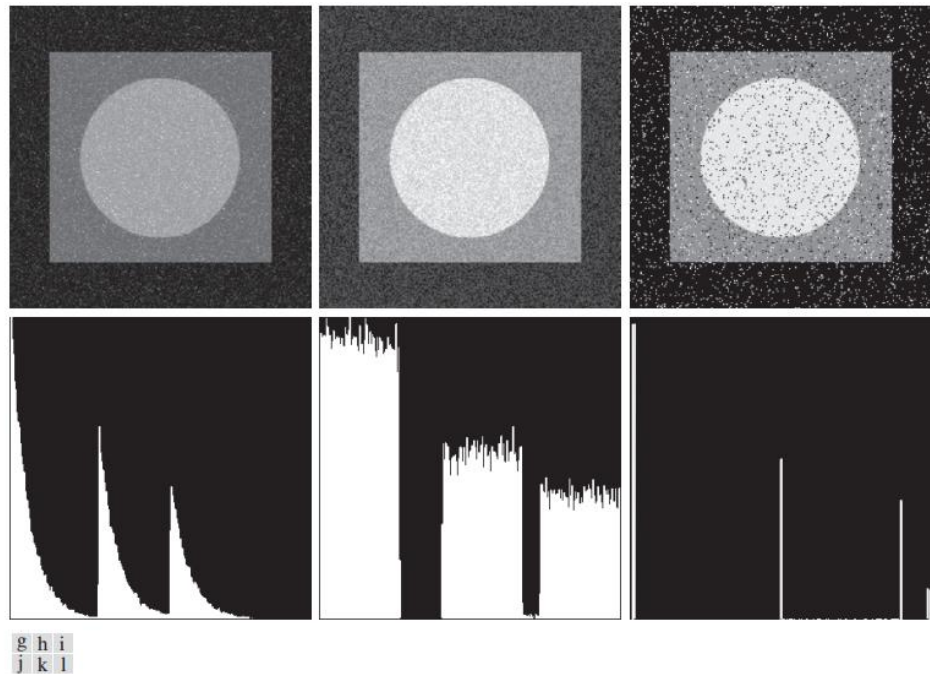
شکل ۵.۴ تصاویر و هیستوگرامهای حاصل از افزودن نویز گوسی ، ریلی و ارلانگ  $a$  به تصویر در شکل ۵.۳.



از نظر بصری بین اولین پنج تصویر در شکل ۵.۴، حتی اگر هیستوگرام آنها به طور قابل توجهی متفاوت باشد. ظاهر نمک و فلفل در تصویر در شکل ۵.۴ (i) تنها چیزی است که از نظر بصری نشان دهنده نوع نویز ایجاد کننده تخریب است.

### نویز متناوب

نویز متناوب در تصاویر به طور معمول از تداخل الکتریکی یا الکترومکانیکی در حین تهیه تصویر ناشی می شود. این تنها نوع نویز وابسته به مکان است که در این فصل در نظر خواهیم گرفت. همانطور که در بخش ۵.۴ بحث خواهیم کرد، نویز متناوب را می توان از طریق فیلتر دامنه فرکانسی به میزان قابل توجهی کاهش داد. برای مثال، تصویر شکل ۵.۵ (الف) را در نظر بگیرید. این تصویر توسط نویز سینوسی اضافی<sup>۲۱</sup> (فضایی) خراب می شود.



شکل ۵.۴ (ادامه) تصاویر و هیستوگرامهای حاصل از افزودن نویز نمایی، یکنواخت و نمک و فلفل به تصویر در شکل ۵.۳. در هیستوگرام نمک و فلفل، قله ها در مبدا (شدت صفر) و در انتهای مقیاس کمی جابجا شده اند تا با پس زمینه صفحه ترکیب نشوند.

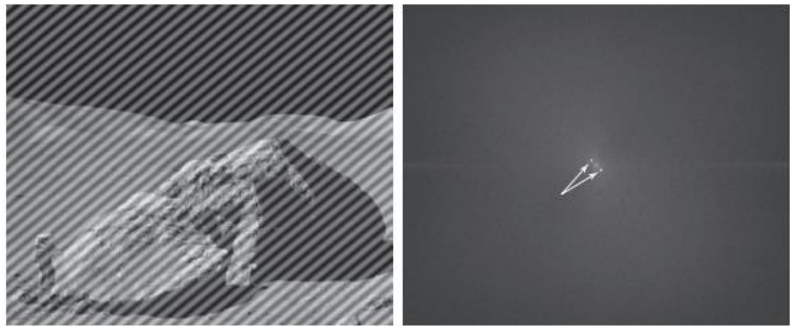
تبدیل فوریه یک سینوسی خالص یک جفت تکانه مزدوج است که در فرکانس های مزدوج موج سینوسی واقع شده است (جدول ۴.۴ را ببینید). بنابراین، اگر دامنه یک موج سینوسی در حوزه فضایی به اندازه کافی قوی باشد، ما انتظار داریم در طیف تصویر یک جفت ضربه برای هر موج سینوسی در تصویر ببینیم. همانطور که در شکل

<sup>۲۱</sup> مراقب باشید که اصطلاح ضربه در حوزه فرکانس را با استفاده از همان اصطلاح در نویز ضربه ای که قبلاً بحث شد، که در حوزه فضایی است، اشتباه نگیرید.

۵.۵ (ب) نشان داده شده است ، در واقع این مورد است. حذف یا کاهش این تکانه ها در حوزه فرکانس باعث حذف یا کاهش نویز سینوسی در حوزه فضایی می شود. در بخش ۵.۴ در مورد این و نمونه های دیگر نویزمتناوب مطالب بیشتری خواهیم داشت.

### تقریب پارامترهای نویز

پارامترهای نویز متناوب معمولاً با بازرسی طیف فوریه تقریب می شود. نویزمتناوب تمایل به ایجاد نوسانات فرکانسی دارد که اغلب حتی با تجزیه و تحلیل بصری قابل تشخیص است. رویکرد دیگر این است که سعی کنیم متناوب بودن اجزای نویز را مستقیماً از تصویر استنباط کنیم ، اما این تنها در موارد ساده امکان پذیر است. تجزیه و تحلیل خودکار در شرایطی امکان پذیر است که موج نویز یا به طور استثنایی تلفظ می شود ، یا زمانی که اطلاعاتی در مورد مکان کلی اجزای فرکانس تداخل در دسترس است (بخش ۵.۴ را ببینید).



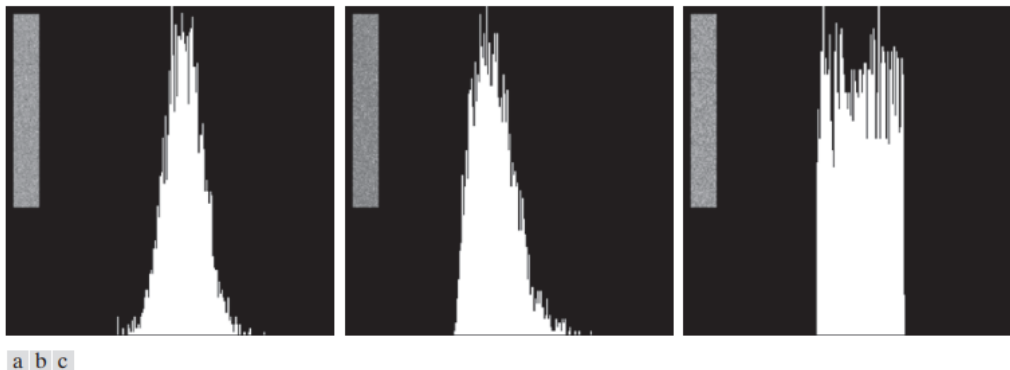
شکل ۵.۵ (الف) تصویر توسط نویز سینوسی اضافی خراب شده است. (ب) طیفی که دو تکانه مزدوج ناشی از موج سینوسی را نشان می دهد. (اصلی تصویر از ناسا گرفته شده است)

پارامترهای PDF های نویز ممکن است تا حدی از مشخصات سنسور شناخته شوند ، اما اغلب تقریب آنها برای یک ترتیب تصویربرداری خاص ضروری است. اگر سیستم تصویربرداری در دسترس است ، یک روش ساده برای مطالعه ویژگی های نویز سیستم ، گرفتن مجموعه ای از تصاویر "تخت" است. به عنوان مثال ، در مورد سنسور نوری ، این به سادگی تصویربرداری از تخته خاکستری جامد است که به طور یکنواخت روشن می شود. تصاویر بدست آمده معمولاً شاخص های خوبی برای نویز سیستم هستند.

هنگامی که فقط تصاویری که قبلاً توسط یک سنسور ایجاد شده است در دسترس باشد ، اغلب می توان پارامترهای PDF را از تکه های کوچک با شدت پس زمینه منطقی تقریب کرد. به عنوان مثال ، نوارهای عمودی نشان داده شده در شکل ۵.۶ از تصاویر گاوسی ، رایلی و تصاویر یکنواخت در شکل ۵.۴ بریده شده است. هیستوگرام های نشان داده شده با استفاده از داده های تصویر از این نوارهای کوچک محاسبه شد. هیستوگرامهای شکل ۵.۴ که با هیستوگرامهای شکل ۵.۶ مطابقت دارند ، آنها را می بینیم که در وسط گروه سه در شکلها قرار دارند. ۵.۴ (d)، (e)، و (k). ما می بینیم که اشکال این هیستوگرام ها بسیار نزدیک به شکل هیستوگرام های مربوطه در شکل ۵.۶ پاسخ می دهند. ارتفاع آنها به دلیل مقیاس بندی متفاوت است ، اما شکل آنها بی تردید مشابه است. ساده ترین

استفاده از داده های نوارهای تصویر برای محاسبه میانگین و واریانس سطوح شدت است. یک نوار (زیر تصویر) را که با  $S$  نشان داده شده است در نظر بگیرید و اجازه دهید  $p_S(z_i)$ ،  $i = 0, 1, 2, \dots, L-1$ ، تقریب احتمال (مقادیر هیستوگرام نرمال شده) را نشان دهد. از شدت پیکسل ها در  $S$ ، جایی که  $L$  تعداد شدت های ممکن در کل تصویر است (به عنوان مثال،  $256$  برای یک تصویر  $8$  بیتی). همانطور که در معادله (۲-۶۹) و (۲-۷۰)، ما میانگین و واریانس مقادیر پیکسل در  $S$  را به صورت زیر تقریب می کنیم:

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p_S(z_i) \quad (5-19)$$



شکل ۵.۶ هیستوگرام با استفاده از نوارهای کوچک (نشان داده شده به عنوان درج) از (الف) گوسی، (ب) رایلی و (ج) تصاویر پر نویز یکنواخت در شکل ۵.۴.

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p_S(z_i) \quad (5-20)$$

شکل هیستوگرام نزدیک ترین مطابقت PDF را مشخص می کند. اگر شکل تقریباً گاوسی باشد، میانگین و واریانس تنها چیزی است که ما نیاز داریم زیرا PDF گاوسی به طور کامل با این دو پارامتر مشخص شده است. برای اشکال دیگر که قبلاً بحث شد، از میانگین و واریانس برای حل پارامترهای  $a$  و  $b$  استفاده می کنیم. نویز ضربه ای متفاوت اداره می شود زیرا تقریب مورد نیاز احتمال واقعی وقوع پیکسل های سفید و سیاه است. بدست آوردن این تخمین مستلزم این است که پیکسل های سیاه و سفید قابل مشاهده باشند، بنابراین یک منطقه خاکستری متوسط و نسبتاً ثابت در تصویر مورد نیاز است تا بتوان هیستوگرام معنی دار نویز را محاسبه کرد. ارتفاع قله های مربوط به پیکسل های سیاه و سفید تقریب  $Pa$  است و سرب در معادله (۵-۱۶).

### ۵.۳ بازسازی فقط در حضور نویز - فیلترینگ فضایی

هنگامی که یک تصویر فقط با نویز اضافی تخریب می شود، معادله (۵-۱) و (۵-۲) می شوند

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y) \quad (5-21)$$

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v) \quad (5-22)$$

اصطلاحات نويز به طور کلی ناشناخته هستند ، بنابراین تفریق آنها از  $g(x,y) [G(u,v)]$  برای بدست آوردن معمولاً یک گزینه نیست. در مورد نويزمتناوب ، گاهی اوقات ممکن است  $N(u, v)$  از طیف  $f(x,y) [F(u,v)]$  تقریب شود ، همانطور که در بخش ۵.۲ ذکر شده است. در این مورد  $N(u, v)$  را می توان از  $G(u, v)$  کم کرد تا تقریب ی از تصویر اصلی بدست آورد ، اما این نوع دانش استثنا است و نه قاعده. فیلترینگ فضایی روش انتخابی برای تقریب  $f(x, y)$  [یعنی کاهش نويز  $g(x, y)$ ] در شرایطی است که فقط نويز تصادفی اضافی وجود دارد. فیلترینگ فضایی به تفصیل در فصل ۳ مورد بحث قرار گرفت. به استثنای ماهیت محاسبه انجام شده توسط یک فیلتر خاص ، مکانیزم اجرای همه فیلترهای بعدی دقیقاً همانطور است که در بخشهای ۳.۴ تا ۳.۷ مورد بحث قرار گرفته است.

### فیلترهای میانگین

در این بخش ، ما به طور خلاصه قابلیت های کاهش نويز فیلترهای فضایی معرفی شده در بخش ۳.۵ را مطرح کرده و چندین فیلتر دیگر را توسعه می دهیم که عملکرد آنها در بسیاری موارد بر فیلترهای مورد بحث در آن بخش برتری دارد.

### فیلتر میانگین حسابی

میانگین فیلتر میانگین ساده ترین فیلتر میانگین است (فیلتر میانگین حسابی همان فیلتر جعبه ای است که در فصل ۳ بحث کردیم). اجازه دهید  $S_{xy}$  مجموعه ای از مختصات را در یک پنجره مستطیل شکل زیر تصویر (محل) با اندازه  $m * n$  ، با محوریت نقطه  $(y, x)$  نشان دهد. فیلتر میانگین حسابی مقدار متوسط تصویر خراب شده ،  $g(x, y)$  را در ناحیه تعریف شده توسط  $S_{xy}$  محاسبه می کند. مقدار تصویر بازسازی شده  $\hat{f}$  در نقطه  $(y, x)$  میانگین حسابی است که با استفاده از پیکسل ها در منطقه تعریف شده توسط  $S_{xy}$  محاسبه می شود. به عبارت دیگر ،

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c) \quad (5-23)$$

فرض می کنیم که  $m$  و  $n$  اعداد صحیح فرد هستند. اندازه یک فیلتر میانگین همان اندازه محل  $S_{xy}$  است یعنی  $m \times n$

مانند معادله (۲-۴۳) ،  $r$  و  $c$  مختصات سطر و ستون پیکسل های موجود در محل  $S_{xy}$  هستند. این عملیات را می توان با استفاده از یک هسته فضایی به اندازه  $m * n$  اجرا کرد که در آن همه ضرایب ۱ میلیون ارزش دارند. یک فیلتر متوسط تغییرات محلی تصویر را هموار می کند و نويز در نتیجه تار شدن کاهش می یابد.

### فیلتر میانگین هندسی

تصویری که با استفاده از فیلتر میانگین هندسی بازسازی شده است با عبارت ارائه می شود

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (5-24)$$

جایی که  $M$  نشان دهنده ضرب است. در اینجا، هر پیکسل بازسازی شده با حاصلضرب تمام پیکسل های موجود در ناحیه زیر تصویر، به توان  $1/mn$  ارائه می شود. همانطور که در مثال ۵.۲ زیر نشان داده شده است، یک فیلتر میانگین هندسی به همواری قابل مقایسه با حسابی دست می یابد متوسط فیلتر، اما تمایل دارد جزئیات تصویر کمتری را در این فرایند از دست بدهد.

### فیلتر میانگین هارمونیک

میانگین عمل فیلتر کردن هارمونیک با عبارت ارائه می شود

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(r, c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r, c)}} \quad (5-25)$$

فیلتر هارمونیک متوسط برای نویزنمک خوب عمل می کند، اما در مورد نویز فلفل ناموفق است. همچنین با انواع دیگر نویز مانند نویز گاوسی خوب عمل می کند.

### میانگین فیلتر ضد هارمونیک

میانگین فیلتر ضد هارمونیک بر اساس عبارت تصویری بازسازی شده ارائه می دهد

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c)^{Q+1}}{\sum_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c)^Q} \quad (5-26)$$

جایی که  $Q$  مرتبه فیلتر نامیده می شود. این فیلتر برای کاهش یا از بین بردن واقعی نویزنمک و فلفل بسیار مناسب است. برای مقادیر مثبت  $Q$ ، فیلتر نویز فلفل را حذف می کند. برای مقادیر منفی  $Q$ ، نویزنمک را حذف می کند. نمی تواند هر دو را همزمان انجام دهد. توجه داشته باشید که فیلتر ضد هارمونیک در صورت  $Q = 0$  به فیلتر میانگین حسابی و اگر  $Q = -1$  به فیلتر میانگین هارمونیک کاهش می یابد.

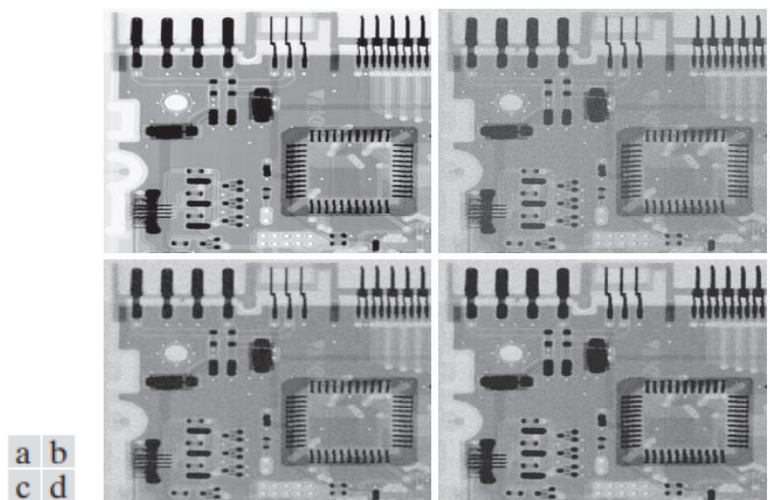
مثال ۵.۲: حذف تصویر با استفاده از فیلترهای میانگین فضایی.

شکل ۵.۷ (a) یک تصویر اشعه ایکس ۸ بیتی از یک برد مدار را نشان می دهد، و شکل ۵.۷ (b) همان تصویر را نشان می دهد، اما با نویز اضافی گوسی با میانگین صفر و واریانس ۴۰۰ خراب شده است. برای این نوع تصویر، این میزان قابل توجهی از نویز است. شکلهای ۵.۷ (ج) و (د) به ترتیب، نتیجه فیلتر کردن تصویر پر نویز با میانگین فیلتر حسابی با اندازه  $3 * 3$  و میانگین فیلتر هندسی با همان اندازه را نشان می دهند.

اگرچه هر دو فیلتر کار معقولی برای کاهش سهم ناشی از نویز انجام دادند، اما فیلتر میانگین هندسی به اندازه فیلتر حسابی تصویر را تار نمی کند. به عنوان مثال، فیبرهای اتصال دهنده در بالای تصویر در شکل ۵.۷ (d) نسبت به (c) واضح تر هستند. در قسمت های دیگر تصویر نیز همین امر صادق است.

شکل ۵.۸ (الف) همان تصویر مدار را نشان می دهد ، اما در حال حاضر به احتمال زیاد با نویز فلفل خراب شده است. ۰.۱ به طور مشابه ، شکل ۵.۸ (ب) تصویری را که با نویز نمک خراب شده است با همان احتمال نشان می دهد. شکل ۵.۸ (ج) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (الف) با استفاده از فیلتر میان هارمونیک با  $Q = -1.5$  و شکل ۵.۸ (د) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (ب) با  $Q = 1.5$  را نشان می دهد. هر دو فیلتر کار خوبی در کاهش اثر نویز انجام دادند. این فیلتر با نظم مثبت ، کار بهتری در تمیز کردن پس زمینه انجام داد ، به این دلیل که قسمت های تاریک کمی نازک شده و تار شد. برعکس فیلتر نظم منفی صادق بود.

به طور کلی ، فیلترهای میانگین حسابی و هندسی (به ویژه دومی) برای نویز معمولی مانند نویز گاوسی یا یکنواخت مناسب است. فیلتر ضد هارمونیک برای نویز ضربه مناسب است ، اما این عیب را دارد که باید مشخص شود که آیا نویز تاریک است یا روشن ، برای انتخاب علامت مناسب برای  $Q$ . نتایج انتخاب علامت اشتباه برای  $Q$  می تواند فاجعه بار باشد ، همانطور که شکل ۵.۹ نشان می دهد. برخی از فیلترهای مورد بحث در بخشهای بعدی این نقص را برطرف می کند.



شکل ۵.۷ (الف) تصویر اشعه ایکس از برد مدار. (ب) تصویر توسط نویزاضافی گاوسی خراب شده است. (ج) نتیجه فیلتر کردن با میانگین محاسبه فیلتر اندازه  $3 \times 3$ . (د) نتیجه فیلتر کردن با یک فیلتر میانگین هندسی به همان اندازه. (تصویر اصلی از آقای Joseph E. Pascente، Lixi، Inc. گرفته شده است)

### فیلترهای آمار-سفارش

ما فیلترهای آمار سفارش را در بخش ۳.۶ معرفی کردیم. ما اکنون بحث را در آن بخش گسترش می دهیم و برخی فیلترهای آمار سفارش را معرفی می کنیم. همانطور که در بخش ۳.۶ ذکر شد ، فیلترهای آمار سفارش فیلترهای فضایی هستند که پاسخ آنها بر اساس ترتیب (رتبه بندی) مقادیر پیکسل های موجود در محله ای است که توسط فیلتر احاطه شده است. نتیجه رتبه بندی پاسخ فیلتر را تعیین می کند.

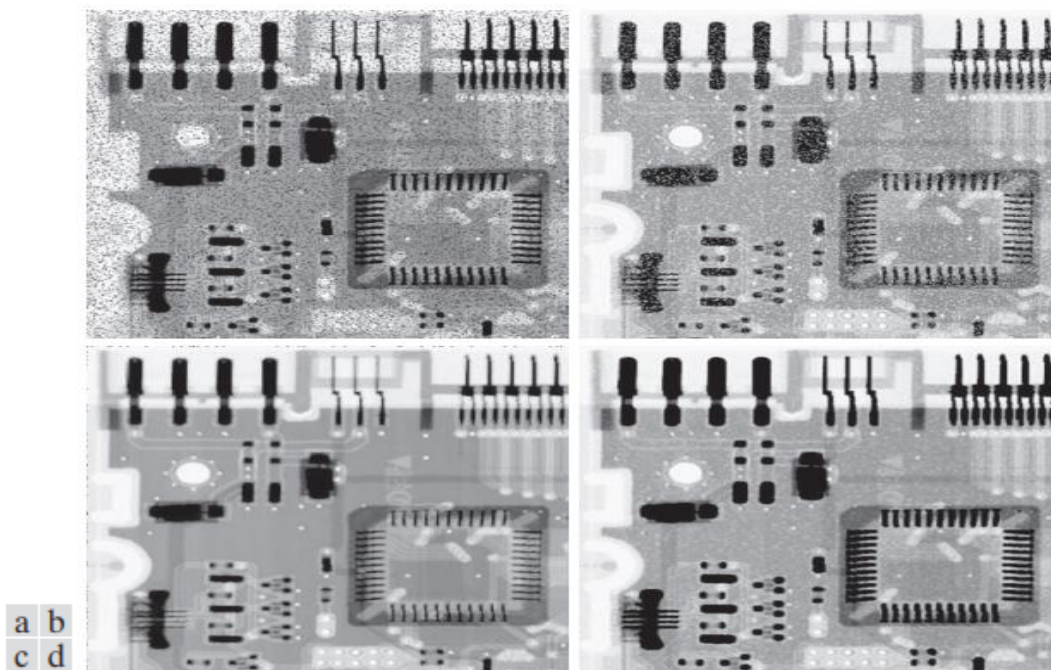


## فیلتر متوسط

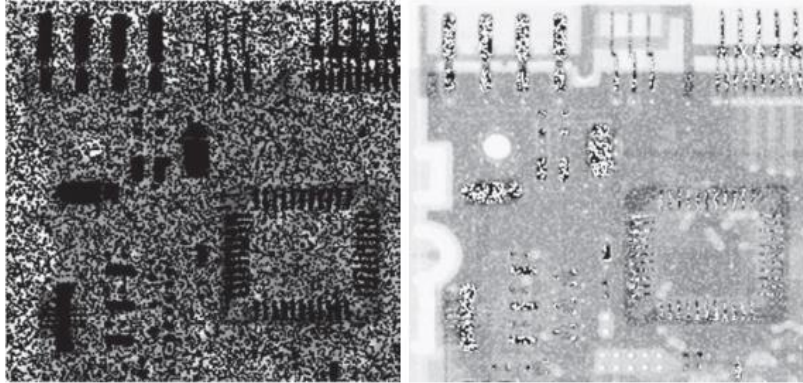
شناخته شده ترین فیلتر آماری مرتب در پردازش تصویر ، فیلتر میانی است ، که همانطور که از نامش مشخص است ، مقدار پیکسل را با متوسط شدت در یک محله از پیش تعریف شده از آن پیکسل جایگزین می کند:

$$\hat{f}(x,y) = \text{median}_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} \quad (5-27)$$

همانطور که قبلاً  $S_{XY}$  یک زیر تصویر (محل) است که روی نقطه  $(Y, X)$  متمرکز شده است. ارزش پیکسل در  $(X, Y)$  در محاسبه میانگین گنجانده شده است. فیلترهای متوسط بسیار محبوب هستند زیرا ، برای انواع خاصی از نویزهای تصادفی ، قابلیت های بسیار خوبی برای کاهش نویز ارائه می دهند ، به طور قابل توجهی کمتر از فیلترهای هموار کننده خطی با اندازه مشابه. فیلترهای متوسط در حضور نویز ضربه دو قطبی و تک قطبی ، همانطور که مثال ۵.۳ زیر نشان می دهد ، نمایان هستند. محاسبه میانگین و اجرای این فیلتر در بخش ۳.۶ مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۵.۸ (الف) تصویر با نویز فلفل با احتمال تخریب شده است. ۰.۱ (ب) تصویر با نویز نمک با احتمال مشابه خراب شده است. (ج) نتیجه فیلتر (الف) با فیلتر  $3 \times 3$  ضد هارمونیک  $Q$  ۱,۵. (د) نتیجه فیلتر کردن (ب) با  $Q$  ۱,۵ =.



شکل ۵.۹ نتایج انتخاب علامت اشتباه در فیلترهای ضد هارمونیک. (الف) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (الف) با یک فیلتر ضد هارمونیک با اندازه  $3 \times 3$  و  $Q = 1,5$  و  $0,5$ . (ب) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (ب) با استفاده از  $Q = 1,5$ .

### حداکثر و حداقل فیلترها

اگرچه فیلتر میانی فیلتر آماری است که بیشتر در پردازش تصویر استفاده می شود ، اما به هیچ وجه تنها آن نیست. میانگین نشان دهنده صدک ۵۰ از مجموعه اعداد رتبه بندی شده است ، اما از آمارهای اساسی به یاد می آورید که رتبه بندی به بسیاری از امکانات دیگر کمک می کند. به عنوان مثال ، استفاده از صدک صد در نتایج به اصطلاح max filter ، ارائه شده توسط

$$\hat{f}(x,y) = \max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} \quad (5-28)$$

این فیلتر برای یافتن روشن ترین نقاط در یک تصویر یا برای فرسایش مناطق تاریک مجاور مناطق روشن مفید است. همچنین ، چون نویز فلفل دارای مقادیر بسیار پایینی است ، در نتیجه فرایند حداکثر انتخاب در ناحیه زیر تصویر  $S_{xy}$  ، توسط این فیلتر کاهش می یابد. صفر درصد صدک ، دقیقه است:

$$\hat{f}(x,y) = \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} \quad (5-29)$$

این فیلتر برای یافتن تاریک ترین نقاط در یک تصویر یا برای فرسایش مناطق روشن مجاور مناطق تاریک مفید است. همچنین ، نویز نمک را در نتیجه عملیات کوچک کاهش می دهد.

### فیلتر نقطه وسط

فیلتر نقطه وسط نقطه وسط را بین حداکثر و حداقل مقادیر در ناحیه ای که توسط فیلتر احاطه شده است محاسبه می کند:

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} + \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} \right] \quad (5-30)$$



توجه داشته باشید که این فیلتر آمار سفارش و میانگین را ترکیب می کند. برای نویز توزیع شده معمولی ، مانند نویز گاوسی یا یکنواخت ، بهتر عمل می کند.

### میانگین فیلتر برش آلفا

فرض کنید که  $d_2$  کمترین و  $d_2$  بیشترین شدت  $g(r, c)$  را در همسایگی  $S_{xy}$  حذف می کنیم. اجازه دهید  $g_R(r, c)$  پیکسل های باقی مانده  $mn - d$  در  $S_{xy}$  را نشان دهد. فیلتری که از میانگین این پیکسل های باقیمانده ایجاد می شود ، فیلتر میانگین برش آلفا نامیده می شود. فرم این فیلتر است

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(r, c) \in S_{xy}} g_R(r, c) \quad (5-31)$$

جایی که مقدار  $d$  می تواند از ۰ تا  $mn - 1$  متغیر باشد. هنگامی که  $d = 0$  فیلتر برش آلفا به فیلتر میانگین حسابی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت کاهش می یابد. اگر  $d = mn - 1$  را انتخاب کنیم ، فیلتر تبدیل به یک فیلتر متوسط می شود. برای سایر مقادیر  $d$  ، فیلتر برش آلفا در شرایطی که شامل انواع مختلفی از نویز است ، مانند ترکیبی از نمک و فلفل و نویز گاوس ، مفید است.

مثال ۵.۳: حذف تصویر با استفاده از فیلترهای آمار سفارش.

شکل ۵.۱۰ (الف) تصویر مدار را خراب می کند که توسط نویز نمک و فلفل با احتمالات  $P_s = P_p = 0.1$  خراب شده است. شکل ۵.۱۰ (ب) نتیجه فیلتر متوسط با فیلتر اندازه  $3 * 3$  را نشان می دهد.

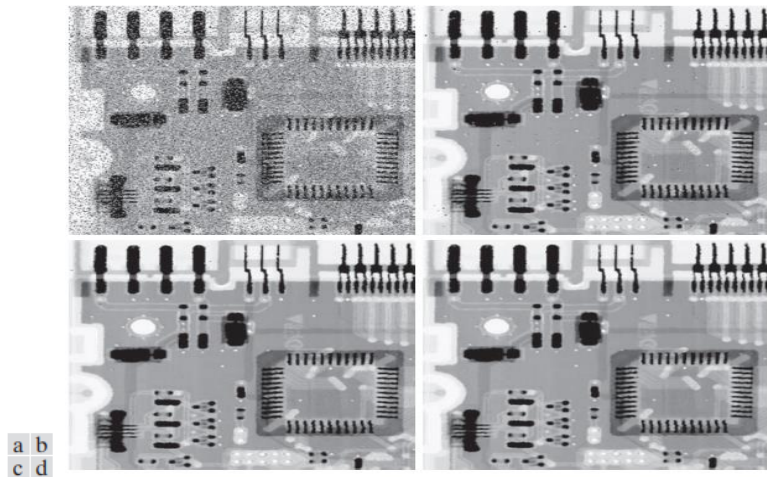
بهبود نسبت به شکل ۵.۱۰ (الف) قابل توجه است ، اما چندین نقطه نویز هنوز قابل مشاهده است. گذر دوم در تصویر شکل ۵.۱۰ (ب) با فیلتر میانی اکثر این نقاط را حذف کرد و تنها چند نقطه نویز به سختی قابل مشاهده باقی گذاشت. اینها با گذر سوم فیلتر حذف شدند. این نتایج نمونه های خوبی از قدرت فیلتر میانی در مدیریت نویز افزودنی شبیه ضربه است. به خاطر داشته باشید که گذرهای مکرر یک فیلم میانی باعث تار شدن تصویر می شود ، بنابراین مطلوب است که تعداد پالس هارا تا حد ممکن پایین نگه دارید.

شکل ۵.۱۱ (الف) نتیجه اعمال حداکثر فیلتر به تصویر نویز فلفل شکل ۵.۸ (الف) را نشان می دهد. این فیلتر در حذف نویز فلفل کار معقولی انجام داد ، اما توجه داشته باشید که برخی پیکسل های تیره را نیز از مرز اجسام تاریک حذف کرده (در سطح شدت نور تنظیم کرده است). شکل ۵.۱۱ (ب) نتیجه اعمال فیلتر بر روی تصویر را در شکل ۵.۸ (ب) نشان می دهد. در این حالت ، این فیلتر در حذف نویز کار بهتری نسبت به حداکثر عمل کرد ، اما برخی نقاط سفید اطراف مرز اجسام سبک را حذف کرد. اینها اجسام روشن را کوچکتر و برخی از اشیاء تاریک را بزرگتر می کند (مانند اتصال دهنده ها در بالای تصویر) زیرا نقاط سفید اطراف این اجسام در سطح تاریک تنظیم شده اند. فیلتر برش آلفا در ادامه نشان داده شده است. شکل ۵.۱۲ (الف) تصویر برد مدار را نشان می دهد که این بار با نویز افزودنی و یکنواخت واریانس  $800$  و میانگین صفر خراب شده است. این میزان بالایی از فساد نویز است که با افزودن بیشتر نویز نمک و فلفل با  $P_s = P_p = 0.1$  بدتر می شود ، همانطور که شکل ۵.۱۲ (ب)

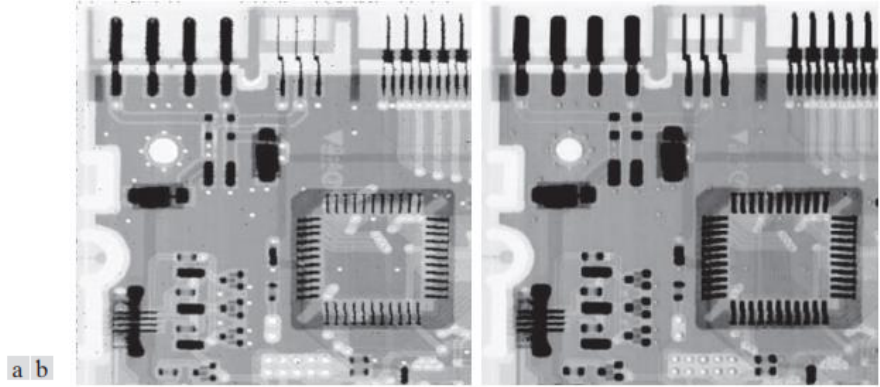
نشان می دهد. سطح بالای نویز در این تصویر باعث استفاده از فیلترهای بزرگتر می شود. شکل‌های ۵.۱۲ (ج) تا (و) نتایج را به ترتیب با استفاده از میانگین حسابی، میانگین هندسی، میانگین و میانگین برش آلفا (با  $d \geq 6$ ) fi فیلترهای اندازه  $5 * 5$  نشان می دهد. همانطور که انتظار می رفت، حسابی و هندسی میانگین فیلترها (به ویژه دومی) به دلیل وجود نویز ضربه ای خوب عمل نکردند. فیلترهای متوسط و برش آلفا بسیار بهتر عمل کردند، با فیلتر برش آلفا کاهش نویز کمی بهتر ایجاد شد. به عنوان مثال، در شکل ۵.۱۲ (f) توجه داشته باشید که چهارمین اتصال دهنده از بالا سمت چپ در نتیجه برش آلفا کمی هموار تر است. این غیرمنتظره نیست زیرا، برای مقدار بالای  $d$ ، فیلتر کوتاه شده آلفا به عملکرد فیلتر میانی نزدیک می شود، اما هنوز برخی از قابلیت های هموارسازی را حفظ می کند.

### فیلترهای تطبیقی

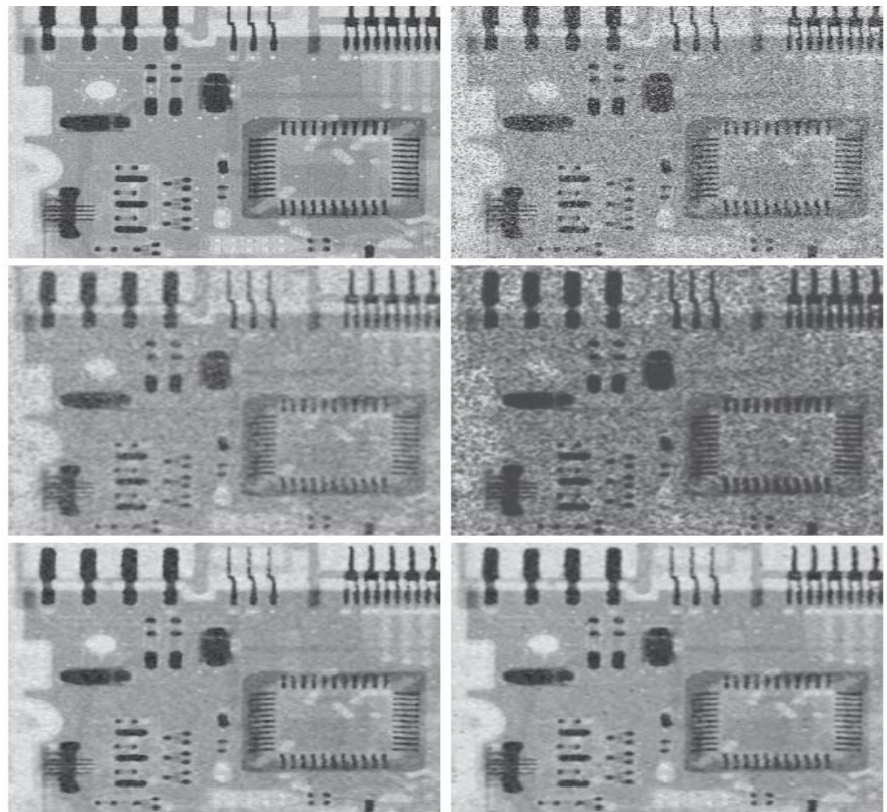
پس از انتخاب، فیلترهای مورد بحث تا کنون بدون در نظر گرفتن اینکه چگونه ویژگی های تصویر از نقطه ای به نقطه دیگر متفاوت است، روی یک تصویر اعمال می شود. در این بخش، ما نگاهی به دو فیلتر تطبیقی می اندازیم که رفتار آنها بر اساس ویژگی های آماری تصویر درون ناحیه فیلتر که توسط همسایگی  $m * n$  Sxy تعریف شده است، تغییر می کند. همانطور که بحث زیر نشان می دهد، فیلترهای تطبیقی قادر به عملکرد برتر از فیلترهایی هستند که تاکنون مورد بحث قرار گرفته است. بهایی که پرداخت شده است



شکل ۵.۱۰ (الف) تصویر با نویز نمک و فلفل با احتمالات  $P_s = P_p = 0.1$  خراب شده است. (ب) نتیجه یک با یک فیلتر اندازه عبور کنید  $3 * 3$ . (ج) نتیجه پردازش (ب) با این فیلتر. (د) نتیجه پردازش (ج) با همان فیلتر.



شکل ۵.۱۱ (الف) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (الف) با حداکثر فیلتر اندازه ۳ \* ۳. (ب) نتیجه فیلتر کردن شکل ۵.۸ (ب) با یک فیلتر کوچک به همان اندازه.



شکل ۵.۱۲ (الف) تصویر توسط نویز یکنواخت افزودنی خراب شده است. (ب) تصویر علاوه بر نویز نمک و فلفل اضافی خراب شده است. (ج)-(و) تصویر (ب) با  $a$  تغییر یافته است  $5 * 5$ : (ج) فیلتر میانگین حساب؛ (د) فیلتر میانگین هندسی؛ (ه) فیلتر متوسط؛ (ف) فیلتر متوسط آلفا، با  $d = 6$ . افزایش قدرت فیلتر افزایش پیچیدگی فیلتر است. به خاطر داشته باشید که ما هنوز با موردی سروکار داریم که در آن تصویر تخریب شده با تصویر اصلی به علاوه نویز برابر است. هنوز هیچ نوع تخریب دیگری در نظر گرفته نشده است.

## فیلتر تطبیقی ، کاهش نویز محلی

ساده ترین معیارهای آماری یک متغیر تصادفی میانگین و واریانس آن است. اینها پارامترهای معقولی هستند که بر اساس آنها می توان یک فیلتر تطبیقی را پایه ریزی کرد ، زیرا مقادیر کمی با ظاهر یک تصویر مرتبط هستند. میانگین میزان متوسطی را در ناحیه ای که میانگین بر روی آن محاسبه می شود اندازه گیری می کند و واریانس اندازه ای از کنتراست تصویر را در آن ناحیه نشان می دهد.

فیلتر ما این است که در یک محله ،  $S_{XY}$  ، با محوریت مختصات  $(y, x)$  عمل کنیم. پاسخ فیلتر در  $(y, x)$  بر اساس مقادیر زیر است:  $g(x, y)$  مقدار تصویر پر نویز در  $(y, x)$  ؛  $S^2$  ، واریانس نویز ؛  $Z$  ، محلی ساعت شدت متوسط پیکسل ها در  $S^2$

$XY$  و  $S_{SXY}$  ، واریانس محلی شدت پیکسل در  $S_{XY}$  ما می خواهیم رفتار فیلتر به شرح زیر باشد:

۱. اگر  $S^2$  صفر باشد ، فیلتر باید مقدار  $g$  را در  $(y, x)$  بازگرداند. این حالت بی اهمیت و بدون نویز است که در آن  $g$  برابر  $f$  در  $(y, x)$  است.

۲. اگر واریانس محلی  $S^2$  نسبت به  $S^2$  زیاد باشد ، فیلتر باید مقداری را برگرداند  $S_{XY} h$

نزدیک به  $g$  در  $(y, x)$ . یک واریانس محلی بالا معمولاً با لبه ها مرتبط است ، و اینها باید حفظ شوند.

۳. اگر دو واریانس برابر باشند ، ما می خواهیم فیلتر مقدار میانگین حسابی پیکسل ها را در  $S_{XY}$  برگرداند. این حالت زمانی رخ می دهد که ناحیه محلی دارای ویژگی های مشابه تصویر کلی باشد و نویز محلی با میانگین گیری کاهش یابد.

یک عبارت تطبیقی برای بدست آوردن  $f(x, y)$  بر اساس این مفروضات ممکن است به صورت زیر نوشته شود

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{S_{xy}}^2} [g(x, y) - \bar{z}_{S_{xy}}] \quad (5-32)$$

تنها کمیتی که باید به طور پیشینی شناخته شود  $S^2$  است ، واریانس تصویر با فساد نویز  $f(x, y)$ . این یک ثابت است که می توان از نمونه تصاویر پر نویز با استفاده از معادله تقریب کرد. (۳-۲۶). پارامترهای دیگر از پیکسل های محله  $S_{XY}$  با استفاده از معادله (۳-۲۷) و (۳-۲۸) محاسبه می شوند.

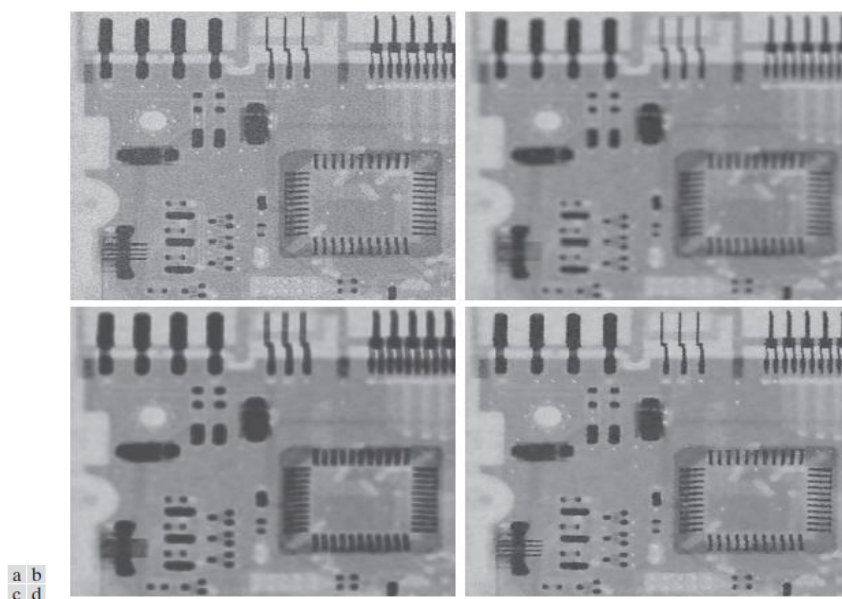
یک فرض در معادله (۵-۳۲) این است که نسبت دو واریانس از ۱ تجاوز نمی کند ، که دلالت بر آن دارد که  $\sigma_n^2 \leq \sigma_{S_{xy}}^2$  نویز در مدل ما افزودنی و موقعیت مستقل است  $S_{XY} h$  بنابراین این فرض منطقی است زیرا  $S_{XY}$  زیر مجموعه ای از  $g(x, y)$  است. با این حال ، ما به ندرت دانش دقیقی از  $S^2$  داریم. بنابراین ، ممکن است این شرط در عمل نقض شود. به همین دلیل ، یک آزمایش باید در یک آزمون ساخته شود. اجرای معادله (۵-۳۲) به طوری که در صورت شرط  $\sigma_n^2 > \sigma_{S_{xy}}^2$  ، نسبت به ۱ تنظیم می شود  $S_{XY} h$  رخ می دهد این فیلتر را غیر خطی می کند. با این حال ، از نتایج نامعقول (یعنی سطوح شدت منفی ، بسته به مقدار  $ZS_{XY}$ ) به دلیل عدم آگاهی بالقوه در مورد واریانس نویز تصویر جلوگیری می کند. رویکرد دیگر این است که اجازه دهید مقادیر منفی رخ می دهد

و سپس مجدداً مقادیر شدت را در انتها تجدید می کند. نتیجه آن از دست دادن محدوده دینامیکی در تصویر خواهد بود.

مثال ۵.۴: حذف تصویر با استفاده از فیلترهای تطبیقی و کاهش نویز محلی.

شکل ۵.۱۳ (الف) تصویر برد مدار را نشان می دهد، این بار با نویز افزودنی گوسی صفر متوسط و واریانس ۱۰۰۰ خراب شده است. این سطح قابل توجهی از فساد نویز است، اما یک بستر آزمایشی ایده آل برای مقایسه فیلترهای نسبی ایجاد می کند. کارایی. شکل ۵.۱۳ (ب) نتیجه پردازش تصویر پر نویز با میانگین محاسبه فیلتر اندازه ۷  $\times$  ۷ است. نویز برطرف شد، اما به قیمت محو شدن قابل توجه. توضیحات مشابهی در مورد شکل ۵.۱۳ (ج) اعمال می شود، که نتیجه پردازش تصویر پر نویز با یک فیلتر میانگین هندسی، همچنین در اندازه  $7 \times 7$  را نشان می دهد. تفاوت بین این دو تصویر فیلتر مشابه مواردی است که در مثال ۵.۲ مورد بحث قرار گرفتیم. فقط میزان تار شدن متفاوت است.

شکل ۵.۱۳ (د) نتیجه استفاده از فیلتر تطبیقی معادله (۵-۳۲) را نشان می دهد. با  $\sigma_{\eta}^2 = 1000$  پیشرفتهای حاصل از این نتیجه در مقایسه با دو فیلتر قبلی قابل ملاحظه است. از نظر کاهش کلی نویز، فیلتر تطبیقی به نتایج مشابه فیلترهای حسابی و هندسی دست یافت. به هر حال، تصویر فیلتر شده با فیلتر تطبیقی بسیار واضح تر است. به عنوان مثال، اتصال دهنده های بالای تصویر در شکل ۵.۱۳ (د) به طور قابل توجهی واضح تر هستند. سایر ویژگی ها، مانند سوراخ ها و هشت پایه مولفه تاریک در سمت چپ پایین تصویر، در شکل ۵.۱۳ (د) بسیار واضح تر است. این نتایج معمولی برای آنچه می توان با یک فیلم تطبیقی به دست آورد، است. همانطور که قبلاً ذکر شد، هزینه پرداخت شده برای عملکرد بهتر پیچیدگی فیلتر اضافی است.





شکل ۵.۱۳ (الف) تصویر توسط نویز اضافی گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱۰۰۰ خراب شده است. (ب) نتیجه تغییر میانگین حسابی. (ج) نتیجه تغییر میانگین هندسی. (د) نتیجه فیلترهای کاهش نویز تطبیقی. اندازه تمام فیلترهای مورد استفاده در اندازه  $7 * 7$  بود.

نتایج قبلی از مقداری برای  $52$  استفاده کرد که دقیقاً با واریانس نویز مطابقت داشت. اگر این مقدار مشخص نباشد و تقریب استفاده شده بسیار کم باشد، الگوریتم تصویری شبیه به اصل را باز می گرداند، زیرا اصلاحات کوچکتر از آن چیزی است که باید باشد. تقریب های بیش از حد بالا باعث می شود که نسبت واریانس ها در  $1.0$  بریده شود و الگوریتم بیشتر از حد معمول میانگین را از تصویر کم می کند. اگر مقادیر منفی مجاز باشند و تصویر در پایان تغییر اندازه داده شود، همانطور که قبلاً ذکر شد، دامنه دینامیکی از بین می رود.

### فیلتر متوسط تطبیقی

فیلتر متوسط در معادله (۵-۲۷) اگر چگالی فضایی نویز نمک و فلفل کم باشد (به عنوان یک قاعده کلی،  $PS$  و  $Pp$  کمتر از  $0.2$ ) عملکرد خوبی دارد. ما در بحث بعدی نشان می دهیم که فیلتر میانی تطبیقی می تواند نویز را با احتمالات بزرگتر از اینها کنترل کند. یک مزیت اضافی فیلتر میانی تطبیقی این است که به دنبال حفظ جزئیات و همزمان هموار کردن نویز بدون ضربه است، چیزی که فیلتر متوسط "سنتی" انجام نمی دهد. همانطور که در تمام فیلترهای مورد بحث در بخشهای قبلی، فیلتر میانی تطبیقی نیز در همسایگی مستطیلی  $S_{xy}$  کار می کند. برخلاف آن فیلترها، فیلتر میانی تطبیقی بسته به شرایط خاصی که به طور کوتاه لیست می شوند، در طول فیلترینگ اندازه  $S_{xy}$  را تغییر می دهد (افزایش می دهد). به خاطر داشته باشید که خروجی فیلتر یک مقدار واحد است که برای جایگزینی مقدار پیکسل در  $(x, y)$  استفاده می شود، نقطه ای که  $S_{xy}$  در یک زمان معین بر روی آن منطقه متمرکز شده است.

ما از علامت زیر استفاده می کنیم:

Level A :	If $z_{min} < z_{med} < z_{max}$ , go to Level B	$z_{min}$ = minimum intensity value in $S_{xy}$
	Else, increase the size of $S_{xy}$	$z_{max}$ = maximum intensity value in $S_{xy}$
	If $S_{xy} \leq S_{max}$ , repeat level A	$z_{med}$ = median of intensity values in $S_{xy}$
	Else, output $z_{med}$ .	$z_{xy}$ = intensity at coordinates $(x, y)$
Level B :	If $z_{min} < z_{xy} < z_{max}$ , output $z_{xy}$	$S_{max}$ = maximum allowed size of $S_{xy}$
	Else output $z_{med}$ .	

جایی که  $S_{xy}$  و  $S_{max}$  فرد هستند، اعداد صحیح مثبت بزرگتر از ۱. گزینه دیگر در آخرین مرحله سطح A خروجی  $Z_{xy}$  به جای  $Z_{med}$  است. این نتیجه کمی تأثیر ایجاد می کند، اما نمی تواند نویز نمک (فلفل) تعبیه شده در یک پس زمینه ثابت با ارزش نویز فلفل (نمک) را تشخیص دهد.

این الگوریتم سه هدف اصلی دارد: حذف نویز نمک و فلفل (ضربه ای)، ایجاد همواری سایر نویزها که ممکن است تکان دهنده نباشد و کاهش اعوجاج، مانند نازک شدن بیش از حد یا ضخیم شدن مرزهای اجسام. مقادیر  $Z_{min}$

و  $Z_{max}$  از نظر آماری توسط الگوریتم به عنوان اجزای نویز "شبه ضربه" در منطقه  $S_{xy}$  در نظر گرفته می شوند ، حتی اگر این کمترین و بالاترین مقدار پیکسل ممکن در تصویر نباشند. با در نظر گرفتن این مشاهدات ، می بینیم که هدف از سطح  $A$  این است که مشخص شود آیا خروجی متوسط فیلتر ،  $Z_{med}$  ، یک انگیزه (نمک یا لفل) است یا خیر. اگر شرایط  $Z_{min} < Z_{med} < Z_{max}$  برقرار باشد ،  $Z_{med}$  نمی تواند به عنوان یک انگیزه باشد ذکر شده در پاراگراف قبلی در این حالت ، ما به سطح  $B$  می رویم و آزمایش می کنیم تا ببینیم اگر نقطه در مرکز محله خود یک ضربه باشد (به یاد بیاورید که  $(x, y)$  محل نقطه در حال پردازش است ، و  $Z_{xy}$  شدت آن است). اگر شرط  $Z_{min} < Z_{xy} < Z_{max}$  صادق باشد ، پیکسل در  $Z_{xy}$  نمی تواند شدت یک ضربه را به همان دلیلی که  $Z_{med}$  نبوده باشد. در این حالت ، الگوریتم مقدار پیکسل بدون تغییر ،  $Z_{xy}$  را خروجی می دهد. با تغییر ندادن این نقاط "سطح متوسط" ، اعوجاج در تصویر فیلتر کاهش می یابد. اگر شرط  $Z_{min} < Z_{xy} < Z_{max}$  نادرست است ، پس یا  $Z_{xy} = Z_{min}$  or  $Z_{xy} = Z_{max}$  در هر صورت ، مقدار پیکسل یک مقدار فوق العاده است و الگوریتم مقدار متوسط را نشان می دهد ،  $Z_{med}$  ، که از سطح  $A$  می دانیم یک ضربه نویز نیست. آخرین مرحله این است که فیلتر متوسط چه کار می کند. مشکل این است که میانگین فیلتر معمولی هر نقطه در تصویر را با میانگین محله مربوطه جایگزین می کند. این باعث از دست دادن جزئیات غیر ضروری می شود.

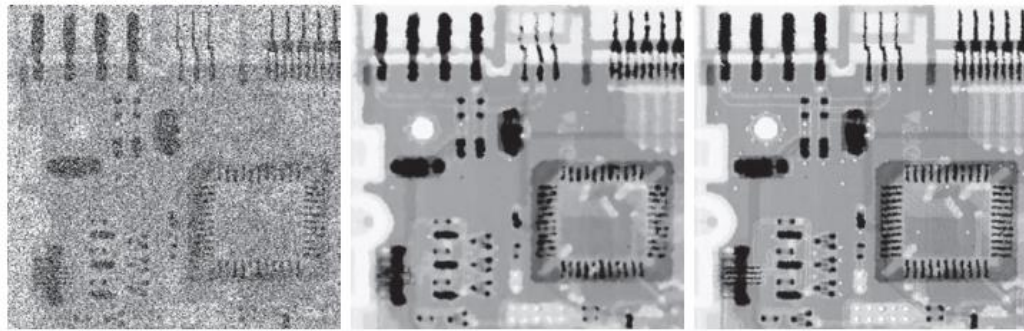
در ادامه توضیحات ، فرض کنید که سطح  $A$  یک انگیزه پیدا می کند (یعنی در آزمونی که باعث انشعاب آن به سطح  $B$  می شود ، شکست می خورد). الگوریتم سپس اندازه محله را افزایش می دهد و سطح  $A$  را تکرار می کند. این حلقه ادامه می یابد تا زمانی که الگوریتم یا مقدار متوسطی را پیدا کند که یک ضربه نیست (و به مرحله  $B$  انشعاب می یابد) ، یا به حداکثر اندازه محله برسد. در صورت رسیدن به حداکثر اندازه ، الگوریتم مقدار  $Z_{med}$  را برمی گرداند. توجه داشته باشید که هیچ تضمینی وجود ندارد که این مقدار یک انگیزه نباشد. هرچه احتمال نویز  $P_a$  و/یا  $P_b$  کمتر باشد ، یا  $S_{max}$  بزرگتر باشد ، احتمال خروج زودرس کمتر است. این قابل قبول است. با افزایش تراکم تکانه های نویز ، منطقی است که ما به یک پنجره بزرگتر برای "پاکسازی" نوسانات نویز نیاز داریم. هر بار که الگوریتم مقداری را خروجی می دهد ، مرکز محله  $S_{xy}$  به مکان بعدی تصویر منتقل می شود.

سپس الگوریتم مجدداً راه اندازی شده و بر روی پیکسل های منطقه جدید که توسط محله احاطه شده است ، اعمال می شود. همانطور که در مسئله ۳.۳۷ نشان داده شده است ، مقدار متوسط را می توان به طور مکرر از یک مکان به مکان دیگر به روز کرد ، بنابراین بار محاسباتی را کاهش می دهد.

مثال ۵.۵: حذف تصویر با استفاده از فیلتر متوسط سازگار.

شکل ۵.۱۴ (الف) تصویر مدار را خراب می کند که توسط نویز نمک و لفل با احتمالات  $P_s = P_p = 0,25$  خراب شده است ، که  $2,5$  برابر سطح نویز استفاده شده در شکل ۵.۱۰ (الف) است. در اینجا سطح نویز به حدی بالا است

که بیشتر جزئیات تصویر را مبهم می کند. به عنوان مبنایی برای مقایسه ، تصویر ابتدا با استفاده از یک فیلتر متوسط  $7 * 7$  ، کوچکترین فیلتر مورد نیاز برای حذف بیشتر آثار قابل مشاهده نویز ضربه در این حالت ، تصحیح شد. شکل ۵.۱۴ (ب) نتیجه را نشان می دهد. اگرچه نویز به طور موثری حذف شد ، اما فیلتر باعث از بین رفتن جزئیات تصویر شد. به عنوان مثال ، برخی از اتصالات اتصال دهنده در بالای تصویر مخدوش یا شکسته به نظر می رسند. سایر جزئیات تصویر نیز به طور مشابه تحریف شده است.



a b c

شکل ۵.۱۴ (الف) تصویر با نویز نمک و فلفل با احتمالات  $Ps = Pp = 0.25$  خراب شده است. (ب) نتیجه فیلتر کردن با یک فیلتر متوسط  $7 * 7$  . (ج) نتیجه میانه فیلتر تطبیقی با  $Smax - V$ .

شکل ۵.۱۴ (ج) نتیجه استفاده از فیلتر میانی تطبیقی با  $Smax - V$  را نشان می دهد. عملکرد حذف نویز شبیه به فیلتر میانی بود. با این حال ، فیلم تطبیقی کار بسیار بهتری را از قبل انجام داد. ارائه وضوح و جزئیات پیچ های اتصال دهنده کمتر تحریف شده اند و برخی دیگر از ویژگی هایی که یا از طریق فیلتر میانی مبهم شده اند یا غیرقابل تشخیص هستند در شکل ۵.۱۴ (ج) واضح تر و بهتر به نظر می رسند. دو نمونه قابل توجه عبارتند از سوراخهای سفید کوچک در سراسر صفحه و قسمت تیره با هشت پایه در پایین ، چهار ضلعی سمت چپ تصویر. با توجه به سطح بالای نویز در شکل ۵.۱۴ (الف) ، الگوریتم تطبیقی بسیار خوب عمل کرد. انتخاب حداکثر اندازه مجاز برای  $Sxy$  به برنامه بستگی دارد ، اما می توان مقدار اولیه معقول را ابتدا با آزمایش اندازه های مختلف متوسط متوسط تقریب کرد. این امر باعث ایجاد یک مبنای بصری در مورد انتظارات از عملکرد الگوریتم تطبیقی

#### ۵.۴ کاهش نویز متناوب با استفاده از فیلتر دامنه فرکانس

نویزمتناوب را می توان با استفاده از تکنیک های حوزه فرکانس کاملاً موثر تحلیل و فیلتر کرد. ایده اصلی این است که نویزمتناوب به عنوان انفجار متمرکز انرژی در تبدیل فوریه ، در مکان های مربوط به فرکانس های تداخل متناوب ظاهر می شود. رویکرد استفاده از فیلتر انتخابی (بخش ۴.۱۰ را ببینید) برای جداسازی نویز است. سه نوع فیلترهای انتخابی (باند میان ناگذر ، باندگذر و ناچ) به طور مفصل در بخش ۴.۱۰ مورد بحث قرار گرفت. هیچ تفاوتی بین نحوه استفاده از این فیلترها در فصل ۴ و نحوه استفاده از آنها برای بازیابی تصویر وجود ندارد. در بازسازی تصاویر خراب شده توسط تداخل متناوب ، ابزار انتخابی یک فیلتر ناچ است. در بحث بعدی ما رویکرد



فیلترینگ ناچ که در بخش ۴.۱۰ معرفی شده است را گسترش می دهیم و همچنین یک روش فیلترینگ مطلوب قوی تر را توسعه می دهیم.

### فیلتر کردن ناچ

همانطور که در بخش ۴.۱۰ توضیح داده شد ، توابع تبدیل فیلتر میان ناگذرناگهانی به عنوان محصولاتی از توابع تبدیل فیلتر بالا ساخته می شوند که مرکز آنها به مراکز شکافها تبدیل شده است. شکل کلی عملکرد تبدیل فیلتر ناچ عبارت است از

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v) \quad (5-33)$$

جایی که  $H_k(u, v)$  and  $H_{-k}(u, v)$  توابع تبدیل فیلتر بالا هستند که مراکز آنها به ترتیب در  $(u_k, v_k)$  and  $(-u_k, -v_k)$  هستند. این مراکز برگرفته مشخص شده اند

به مرکز مستطیل فرکانس  $[\text{floor}(M/2), \text{floor}(N/2)]$  ، جایی که طبق معمول ،  $M$  و  $N$  تعداد سطرها و ستونها در تصویر ورودی هستند. بنابراین ، محاسبات فاصله برای توابع تبدیل فیلتر توسط داده می شود

$$D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{1/2} \quad (5-34)$$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{1/2} \quad (5-35)$$

به عنوان مثال ، زیر یک تابع تبدیل فیلتر میان ناگذردرجه یک باترورث از نظم  $n$  با سه جفت شکاف است:

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^n} \right] \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^n} \right] \quad (5-36)$$

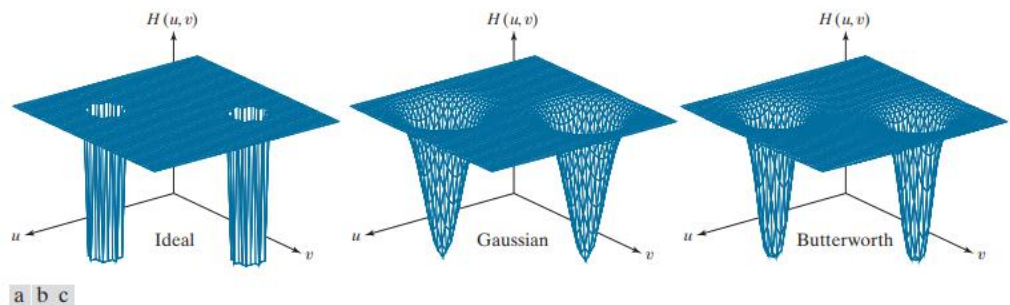
از آنجا که بریدگی ها به عنوان جفت متقارن مشخص شده اند ، ثابت  $D \cdot k$  برای هر جفت یکسان است. با این حال ، این ثابت می تواند از یک جفت به دیگری متفاوت باشد. سایر عملکردهای فیلتر میان ناگذردرجه یک بسته به عملکرد فیلتر بالاگذر انتخاب شده به همان شیوه ساخته می شوند. همانطور که در بخش ۴.۱۰ توضیح داده شد ، یک تابع تبدیل فیلتر ناچ از یک تابع رد کردن درجه با استفاده از عبارت بدست می آید

$$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v) \quad (5-37)$$

جایی که  $H_{NP}(u, v)$  تابع تبدیل فیلتر عبور ناچ مربوط به فیلتر میان ناگذرناچ با عملکرد تبدیل  $H_{NR}(u, v)$  است.<sup>۲۲</sup> شکل ۵.۱۵ نمودارهایی از عملکردهای تبدیل فیلترهای میان ناگذرایده آل ، گوسی و باترورث را با یک جفت برش نشان می دهد. همانطور که در فصل ۴ بحث کردیم ، دوباره می بینیم که شکل تابع تبدیل باترورث نشان دهنده گذار بین وضوح تابع ایده آل و شکل گسترده و هموار تابع تبدیل گوسی است. همانطور

<sup>۲۲</sup> به یاد داشته باشید ، توابع انتقال دامنه فرکانس در مورد مرکز مستطیل فرکانس متقارن هستند ، بنابراین شکافها به عنوان جفت متقارن مشخص می شوند. همچنین ، از بخش ۴.۱۰ بخاطر بسپارید که ما هنگام کار با فیلترهای ناچ از تصاویر بدون صفحه استفاده می کنیم تا مشخصات مکان های بریدگی را ساده کنیم.

که در قسمت دوم مثال زیر نشان می دهیم ، ما محدود به توابع تبدیل فیلتری از فرم مورد بحث نیستیم. ما می توانیم ناچ بسازیم



شکل ۵.۱۵ توابع تبدیل (a) ایده آل ، (ب) گوسی و (c) درجه فیلترهای رد باترورث. فیلترهای اشکال دلخواه ، به شرطی که توابع تغییر فاز صفر باشند ، همانطور که در بخش ۴.۷ تعریف شده است. مثال ۵.۶: کاهش نویز (کاهش تداخل) با استفاده از فیلترینگ ناچ.

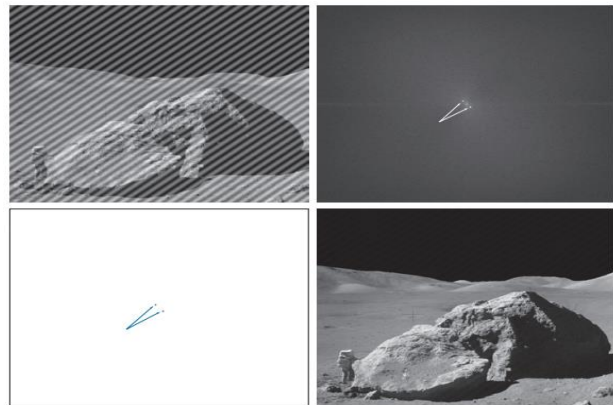
شکل ۵.۱۶ (a) همان شکل ۲.۴۵ (a) است که از آن در بخش ۲.۶ برای معرفی مفهوم فیلترینگ در حوزه فرکانس استفاده کردیم. ما اکنون با جزئیات بیشتری به روند حذف این تصویر که با یک موج سینوسی افزودنی دو بعدی آسیب دیده است ، نگاه می کنیم.

از جدول ۴.۴ می دانید که تبدیل فوریه یک موج سینوسی خالص یک جفت تکانه پیچیده و مزدوج است ، بنابراین ما انتظار داریم که طیف دارای یک جفت نقطه روشن در فرکانس های موج سینوسی باشد. همانطور که در شکل ۵.۱۶ (ب) نشان داده شده است ، این واقعاً چنین است. از آنجا که ما می توانیم موقعیت این تکانه ها را به طور دقیق تعیین کنیم ، حذف آنها یک کار ساده است ، که شامل استفاده از یک تابع تبدیل سطح فیلتر است که شکاف های آن با محل ضربه ها منطبق است.

شکل ۵.۱۶ (c) یک تابع تبدیل فیلتر میان ناگذردرجه یک ایده آل را نشان می دهد که آرایه ای از ۱ (با رنگ سفید نشان داده شده) و دو ناحیه مدور کوچک ۰ (با رنگ سیاه نشان داده شده است) است. شکل ۵.۱۶ (d) نتیجه فیلتر کردن تصویر پر نویز این تابع تبدیل را نشان می دهد. نویز سینوسی عملاً حذف شد و تعدادی از جزئیات که قبلاً در اثر تداخل مخفی شده بودند ، در تصویر فیلتر به وضوح قابل مشاهده است (برای مثال ، به علائم نازک دوستی و جزئیات دقیق در سازه های زمین و صخره نگاه کنید). همانطور که در مثال ۴.۲۵ نشان دادیم ، بدست آوردن تصویری از الگوی تداخل ساده است. ما به سادگی فیلتر میان ناگذر را با تفریق از ۱ تبدیل می کنیم و تصویر ورودی را با آن فیلتر می کنیم. شکل ۵.۱۷ نتیجه را نشان می دهد.

شکل ۵.۱۸ (الف) همان تصویر شکل ۴.۵۰ (الف) را نشان می دهد ، اما مساحت بیشتری را پوشش می دهد (الگوی تداخل یکسان است). هنگامی که ما در مورد فیلتر پایین گذر آن تصویر در فصل ۴ بحث کردیم ، نشان دادیم که روشهای بهتری برای کاهش اثر خطوط اسکن وجود دارد. رویکرد تصفیه ناچیزی که در پی می آید ،

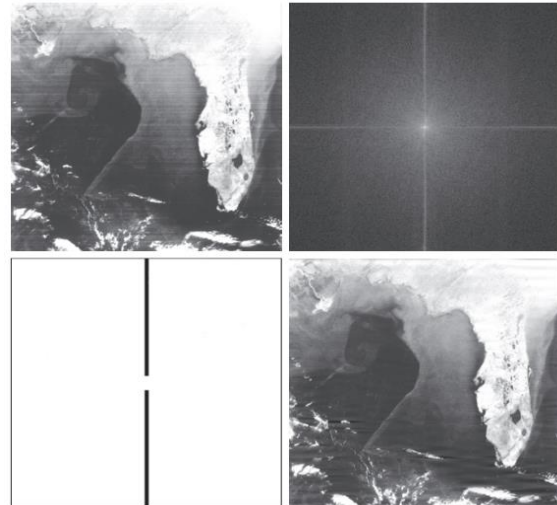
خطوط اسکن را به طور قابل توجهی کاهش می دهد ، بدون ایجاد تار شدن. مگر اینکه محوشدگی به دلایلی که در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار گرفته ایم مطلوب باشد ، فیلترینگ ناچ به طور کلی نتایج بسیار بهتری می دهد. فقط با مشاهده خطوط تقریباً افقی الگوی نویز در شکل ۵.۱۸ (a)، انتظار داریم که سهم آن در حوزه فرکانس در امتداد محور عمودی DFT متمرکز شود. با این حال ، نویز آنقدر غالب نیست که یک الگوی واضح در امتداد این محور داشته باشد ، همانطور که در طیف نشان داده شده در شکل ۵.۱۸ (ب) مشهود است.



شکل ۵.۱۶ (الف) تصویر با تداخل سینوسی دال خراب شده است. (ب) طیفی که انفجارهای انرژی ناشی از تداخل را نشان می دهد. (انفجارها برای اهداف نمایش بزرگ شده اند.) (ج) فیلتر ناچ (شعاع دایره ها ۲ پیکسل است) برای از بین بردن انفجارهای انرژی استفاده می شود. (حاشیه های نازک بخشی از داده ها نیستند.) (د) نتیجه فیلتر کردن رد درجه یک. (اصلی تصویر از ناسا گرفته شده است)



شکل ۵.۱۷ الگوی سینوسی استخراج شده از DFT



شکل ۵.۱۸ الف) تصویر ماهواره ای فلوریدا و خلیج مکزیک. (به خطوط اسکن سنسور افقی توجه کنید). (ب) طیف (الف). (ج) عملکرد تبدیل فیلتر میان ناگذربردگی. (حاشیه سیاه نازک بخشی از داده ها نیست). (د) تصویر فیلتر شده. (تصویر اصلی از NOAA تهیه شده است).



شکل ۵.۱۹ الگوی نویز از شکل ۵.۱۸ الف) با فیلتر کردن شکاف استخراج شده است. رویکردی که در مواردی از این قبیل دنبال می شود ، استفاده از یک تابع فیلتر شکاف باریک و مستطیلی است که در امتداد محور عمودی امتداد می یابد و بنابراین تمام اجزای تداخل را در طول آن محور حذف می کند. ما برای جلوگیری از حذف اصطلاح dc و فرکانسهای پایین ، که همانطور که از فصل ۴ می دانید ، مسئول تفاوت شدت بین مناطق هموار هستند ، نزدیک به مبدا فیلتر نمی کنیم. شکل ۵.۱۸ c) عملکرد تبدیل فیلتر مورد استفاده ما را نشان می دهد ، و شکل ۵.۱۸ d) نتیجه فیلتر شده را نشان می دهد. اکثر خطوط پویش حذف شده یا به طور قابل توجهی ضعیف شده اند. برای بدست آوردن تصویری از الگوی نویز ، مانند قبل فیلتر میان ناگذر را به فیلتر پاسپورت تبدیل کرده و سپس تصویر ورودی را با آن فیلتر می کنیم. شکل ۵.۱۹ نتیجه را نشان می دهد.

### فیلترینگ درجه یک

در نمونه های فیلترینگ درجه ای که تا کنون ارائه شده است ، شناسایی و مشخص کردن الگوهای تداخل در حوزه فرکانس ساده بوده و منجر به مشخصه توابع تبدیل فیلتر ناچ می شود که به صورت اکتشافی نیز ساده است.

هنگامی که چندین مولفه تداخل وجود دارد ، مشخصات ابتکاری توابع تبدیل فیلتر همیشه قابل قبول نیستند زیرا ممکن است اطلاعات زیادی را در فرایند فیلتر حذف کنند (ویژگی بسیار نامطلوب وقتی تصاویر منحصر به فرد و/یا به دست آوردن آنها گران است). علاوه بر این ، اجزای تداخل عموماً انفجارهای تک فرکانسی نیستند. در عوض ، آنها دارای دامن های پهن هستند که اطلاعات مربوط به الگوی تداخل را حمل می کنند. این دامن ها همیشه به راحتی از پس زمینه تغییر شکل معمولی قابل تشخیص نیستند. روشهای فیلتر جایگزین که تأثیر این تخریب ها را کاهش می دهد در عمل بسیار مفید است.

روشی که بعداً مورد بحث قرار می گیرد ، بهینه است ، به این معنا که واریانس های محلی را به حداقل می رساند از تقریب بازیابی  $\hat{f}(x)$  .

این روش شامل اولین جداسازی سهم اصلی الگوی تداخل و سپس کسر یک بخش متغیر و وزنی از الگو از تصویر خراب است. اگرچه ما این روش را در زمینه یک برنامه کاربردی خاص توسعه می دهیم ، اما رویکرد اساسی کلی است و می تواند برای سایر کارهای بازسازی که در آنها تداخل متناوب متعدد مشکل ساز است ، اعمال شود. ما با استخراج اجزای فرکانس اصلی الگوی تداخل شروع می کنیم. مانند قبل ، ما این کار را با قرار دادن یک تابع تبدیل فیلتر درجه یک،  $HNP(u, v)$ ، در محل هر نمونه انجام می دهیم. اگر فیلتر طوری ساخته شود که فقط اجزای مرتبط با الگوی تداخل را عبور دهد ، تبدیل فوریه از

الگوی نویز تداخل با عبارت ارائه می شود

$$N(u, v) = H_{NP}(u, v)G(u, v) \quad (5-38)$$

جایی که طبق معمول DFT  $G(u, v)$  تصویر خراب است.

تعیین  $HNP(u, v)$  نیاز به قضاوت قابل ملاحظه ای در مورد آنچه که افزایش تداخل دارد یا ندارد ، دارد. به همین دلیل ، گذرگاه درجه یک به طور متقابل با مشاهده طیف  $G(u, v)$  بر روی صفحه نمایش ساخته می شود. پس از انتخاب یک تابع فیلتر خاص ، الگوی نویز مربوطه در حوزه فضایی با استفاده از عبارت آشنا بدست می آید.

$$\eta(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ H_{NP}(u, v)G(u, v) \} \quad (5-39)$$

از آنجا که تصور می شود تصویر خراب با افزودن تصویر فاسد نشده  $f(x, y)$  و تداخل ،  $h(x, y)$  شکل می گیرد ، اگر دومی به طور کامل شناخته شده باشد ، الگو را از  $g$  (با کاهش)  $(x, y)$  بدست آوردن  $f(x, y)$  یک موضوع ساده است. البته مشکل این است که این روش فیلترینگ معمولاً تنها تقریبی از الگوی نویز واقعی را ارائه می دهد. اثر اجزای ناقصی که در تقریب  $h(x, y)$  وجود ندارد را می توان با تفریق بخش  $(h, y)$  از  $g(x, y)$  برای بدست آوردن تقریب  $\hat{f}(x, y)$  به حداقل رساند :

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y) \quad (5-40)$$

جایی که ، مانند قبل ،  $f(x, y)$  تقریب  $f(x, y)$  است و  $W(x, y)$  باید تعیین شود. این تابع یک تابع وزنی یا تعدیل نامیده می شود و هدف از این روش انتخاب  $W(x, y)$  است تا نتیجه به نحوی معنی دار بهینه شود. یک رویکرد این است که  $W(x, y)$  را انتخاب کنید تا واریانس  $f(x, y)$  در یک محله مشخص از هر نقطه  $(y, x)$  به حداقل برسد. یک محله  $S_{xy}$  با اندازه (فرد)  $m * n$  ، با محوریت  $(y, x)$  در نظر بگیرید. واریانس "محلی"  $f(x, y)$  در نقطه  $(y, x)$  را می توان با استفاده از نمونه های  $S_{xy}$  تقریب کرد:

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} [\hat{f}(r, c) - \bar{f}]^2 \quad (5-41)$$

جایی که  $\bar{f}$  ،  $S_{xy}$  مقدار متوسط  $\hat{f}$  در محله  $S_{xy}$  است. به این معنا که،

$$\bar{f} = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} \hat{f}(r, c) \quad (5-42)$$

نقاطی را که در لبه تصویر یا نزدیک آن هستند می توان با در نظر گرفتن همسایگی های جزئی یا با پر کردن مرز با صفر درست کرد.

جایگزینی معادله (۴۰-۵) به معادله (۴۱-۵) به دست می آوریم

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} \left\{ [g(r, c) - w(r, c)\eta(r, c)] - [\bar{g} - \bar{w}\eta] \right\}^2 \quad (5-43)$$

جایی که  $g$  و  $w$  نشان دهنده مقدار متوسط  $g$  و محصول  $w$  در همسایه است- هود  $S_{xy}$  ، به ترتیب. اگر فرض کنیم که  $w$  تقریباً در  $S_{xy}$  ثابت است ، می توانیم  $w(r, c)$  ،  $w$  را با مقدار  $w$  در مرکز محله جایگزین کنیم:

$$w(r, c) = w(x, y) \quad (5-44)$$

از آنجا که فرض می شود که  $W(x, y)$  در  $S_{xy}$  ثابت است ،  $\bar{w} = w(x, y)$  و بنابراین ،

$$\bar{w}\eta = w(x, y)\eta \quad (5-45)$$

در  $S_{xy}$  ، که  $h$  مقدار متوسط  $h$  در همسایگی است. با استفاده از این تقریب ها ، معادله (۴۳-۵) می شود

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} \left\{ [g(r, c) - w(x, y)\eta(r, c)] - [\bar{g} - w(x, y)\eta] \right\}^2 \quad (5-46)$$

برای به حداقل رساندن  $\sigma^2(x, y)$  نسبت به  $W(x, y)$  حل می کنیم

$$\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0 \quad (5-47)$$

برای  $W(x, y)$  نتیجه این است (مسئله ۵.۱۷ را ببینید):

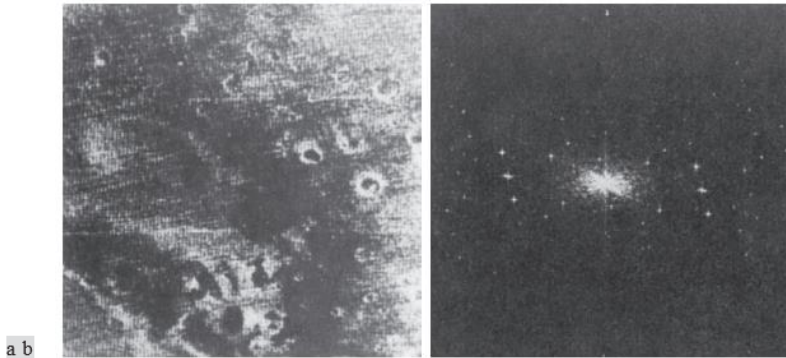
$$w(x, y) = \frac{\bar{g}\eta - \bar{g}\eta}{\eta^2 - \bar{\eta}^2} \quad (5-48)$$

برای بدست آوردن مقدار تصویر بازیابی شده در نقطه  $(x, y)$  از این معادله برای محاسبه  $W(x, y)$  استفاده می کنیم و سپس آن را در معادله (۵-۴۰) جایگزین می کنیم. برای به دست آوردن تصویر کامل بازیابی شده ، این روش ،  $g$  را در هر نقطه از تصویر پر نویز انجام می دهیم.

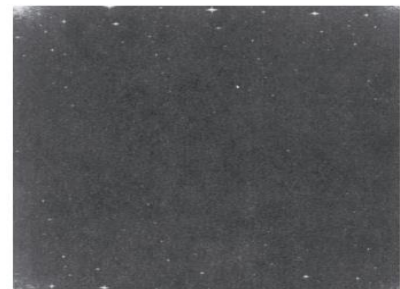
مثال ۵.۷: خنثی سازی (حذف تداخل) با استفاده از فیلترینگ مطلوب.

شکل ۵.۲۰ (الف) تصویر دیجیتالی از مریخ را نشان می دهد که توسط فضاپیمای مارینر ۶ گرفته شده است. تصویر توسط یک الگوی تداخل نیمه متناوب که بطور قابل ملاحظه ای پیچیده تر (و بسیار ظریف تر) نسبت به مواردی است که ما تا کنون مطالعه کرده ایم ، خراب می شود. طیف فوریه تصویر ، که در شکل ۵.۲۰ (ب) نشان داده شده است ، دارای چندین انفجار انرژی "ستاره ای" ناشی از تداخل است. همانطور که انتظار می رفت ، تشخیص این اجزا نسبت به مواردی که قبلاً دیده بودیم دشوارتر است. شکل ۵.۲۱ طیف را دوباره نشان می دهد ، اما بدون مرکز. این تصویر نمای واضح تری از اجزای تداخل ارائه می دهد زیرا واژه برجسته تر DC و فرکانس های پایین "در راه چپ" نیستند ، در سمت چپ بالای طیف.

شکل ۵.۲۲ (الف) اجزای طیفی را نشان می دهد که در قضاوت یک تحلیلگر مجرب تصویر ، با تداخل مرتبط هستند. استفاده از فیلتر درجه یک برای این قطعات و استفاده از معادله (۵-۳۹) الگوی نویز فضایی ،  $h(x, y)$  را نشان داد ، که در شکل ۵.۲۲ (ب) نشان داده شده است. به شباهت بین این الگو و ساختار نویز در شکل ۵.۲۰ (الف) توجه کنید.



شکل ۵.۲۰ (الف) تصویر مریخ زمین گرفته شده توسط Mariner 6. (ب) طیف فوریه که تداخل متناوب را نشان می دهد. (با اجازه ناسا).





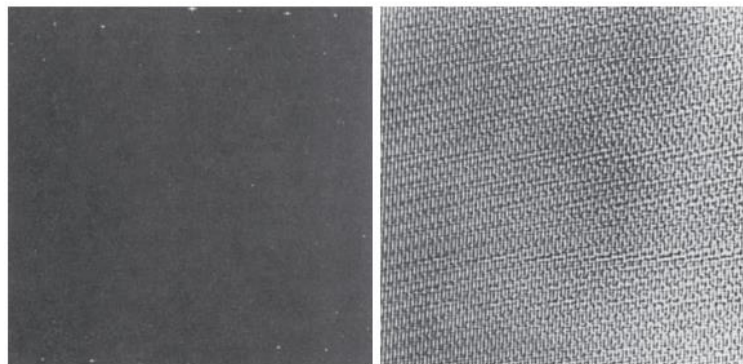
شکل ۵.۲۱ طیف فوریه غیر متمرکز از تصویر در شکل ۵.۲۰ (الف). (با اجازه ناسا).  
 در نهایت ، شکل ۵.۲۳ تصویر بازسازی شده را نشان می دهد که با استفاده از معادله (۵-۴۰) به دست آمده است.  
 با الگوی تداخل که فقط مورد بحث قرار گرفت. تابع  $W(x, y)$  با استفاده از روشی که در پاراگراف های قبل  
 توضیح داده شد محاسبه شد. همانطور که می بینید ، تداخل متناوب عملاً از تصویر پر نویز در شکل ۵.۲۰ (الف)  
 حذف شد.

### ۵.۵ تجزیه خطی ، موضعی-داخلی

رابطه ورودی-خروجی در شکل ۵.۱ قبل از مرحله بازسازی به صورت بیان شده است

$$g(x, y) = \mathcal{H}[f(x, y)] + \eta(x, y) \quad (5-49)$$

در حال حاضر ، فرض می کنیم که  $h(x, y) = 0$  به طوری که  $g(x, y) = \mathcal{H}[f(x, y)]$  بر اساس بحث در بخش  
 2.6،  $\mathcal{H}$  خطی است اگر



شکل ۵.۲۲ (الف) طیف فوریه  $N(u, v)$ ، و (ب) الگوی تداخل نویز فضایی مربوطه  $h(x, y)$  (با اجازه ناسا).



شکل ۵.۲۳ تصویر بازبازی شد. (با اجازه ناسا).

$$\mathcal{H}[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = a\mathcal{H}[f_1(x, y)] + b\mathcal{H}[f_2(x, y)] \quad (5-50)$$

جایی که  $a$  و  $b$  مقیاس پذیر هستند و  $f_1(x, y)$  و  $f_2(x, y)$  هر دو تصویر ورودی هستند. اگر  $a = b = 1$  ، معادله  
 (۵-۵۰) می شود

$$\mathcal{H}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathcal{H}[f_1(x, y)] + \mathcal{H}[f_2(x, y)] \quad (5-51)$$



که خاصیت افزودنی نامیده می شود. این ویژگی می گوید که اگر \$ یک عملگر خطی باشد ، پاسخ مجموع دو ورودی برابر است با مجموع دو پاسخ.

با  $f_2(x, y) = 0$  ، معادله (۵-۵۰) می شود

$$\mathcal{H}[af_1(x, y)] = a\mathcal{H}[f_1(x, y)] \quad (5-52)$$

که خاصیت همگنی نامیده می شود. این می گوید که پاسخ به یک ضرب ثابت از هر ورودی برابر است با پاسخ به آن ورودی ضرب در یک ثابت. بنابراین ، یک عملگر خطی هم دارای ویژگی افزودنی و هم همگن است. گفته می شود که عملگر دارای رابطه ورودی-خروجی  $g(x, y) = \mathcal{H}[f(x, y)]$  اگر موقعیت (یا فضا) ثابت باشد

$$\mathcal{H}[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta) \quad (5-53)$$

برای هر  $f(x, y)$  و هر دو مقیاس  $a$  و  $b$ . این تعریف نشان می دهد که پاسخ در هر نقطه از تصویر فقط به مقدار ورودی در آن نقطه بستگی دارد ، نه به موقعیت آن. با استفاده از ویژگی غربالگری ضربه دو بعدی [معادله (۴-۵۵)] را ببینید. ، می توانیم  $f(x, y)$  را به صورت زیر بنویسیم

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (5-54)$$

با فرض مجدد  $h(x, y) = 0$  ، این معادله را با معادله (۴۹-۵) جایگزین می کنیم. بازده

$$g(x, y) = \mathcal{H}[f(x, y)] = \mathcal{H} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right] \quad (5-55)$$

اگر  $\mathcal{H}$  یک عملگر خطی است و ما ویژگی افزودنی را به انتگرال بسط می دهیم ، پس

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (5-56)$$

از آنجا که  $(a, b)$  مستقل از  $x$  و  $y$  است و با استفاده از ویژگی همگنی ، از آن نتیجه می شود

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (5-57)$$

$$h(x, \alpha, y, \beta) = \mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] \quad (5-58)$$

پاسخ ضربه ای  $\mathcal{H}$  نامیده می شود. به عبارت دیگر ، اگر  $h(x, y) = 0$  در معادله (۴۹-۵) ، سپس  $h(x, a, y, b)$  پاسخ \$ به ضربه در مختصات  $(y, x)$  است. در اپتیک ، ضربه یک نقطه نور تبدیل می شود و  $h(x, a, y, b)$  معمولاً به عنوان تابع گسترش نقطه (PSF) نامیده می شود.

این نام بر اساس این واقعیت است که همه سیستم های نوری فیزیکی تا حدی نقطه ای از نور را تار می کنند (پخش می کنند) ، و میزان تار شدن توسط کیفیت اجزای نوری تعیین می شود. جایگزینی معادله (۵-۵۸) به معادله (۵۷-۵) ما عبارت را بدست می آوریم

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta \quad (5-59)$$

که روی هم اندیشی (یا فرد هولم) انتگرال نوع اول نامیده می شود. این بیان یک نتیجه اساسی است که در هسته نظریه سیستم خطی قرار دارد. در آن بیان می شود که اگر پاسخ  $\mathcal{H}$  به یک ضربه شناخته شده باشد، پاسخ به هر ورودی  $(a, b)$  از آن می توان با استفاده از معادل محاسبه کرد. (۵-۵۹). به عبارت دیگر، یک سیستم خطی  $\mathcal{H}$  کاملاً با پاسخ ضربه ای مشخص می شود.

اگر  $\mathcal{H}$  موقعیت ثابت است، از معادله زیر استفاده می شود. (۵-۵۳) که

$$\mathcal{H}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta) \quad (5-60)$$

در این مورد، معادله (۵-۵۹) کاهش می یابد

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (5-61)$$

این عبارت انتگرال کانولوشن است که برای یک متغیر در معادله (۴-۲۴) معرفی شده است. و در مسأله ۴.۱۹ تا ۲ روز افزایش یافته است. معادله (۵-۶۱) به ما می گوید که خروجی یک سیستم تغییر ناپذیر خطی در هر ورودی، با پیچاندن ورودی و پاسخ ضربه ای سیستم به دست می آید.

در حضور نویز افزودنی، بیان مدل تخریب خطی [معادله (۵-۵۹)] می شود

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (5-62)$$

اگر  $\mathcal{H}$  موقعیت ثابت است، این معادله تبدیل می شود

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (5-63)$$

مقادیر عبارت نویز  $\eta(x, y)$  تصادفی هستند و فرض بر این است که مستقل از موقعیت هستند. با استفاده از نماد آشنا برای پیچیدگی که در فصل ۳ و ۴ معرفی شده است، می توان معادله (۵-۶۳) را نوشت. به عنوان

$$g(x, y) = (h \star f)(x, y) + \eta(x, y) \quad (5-64)$$

یا با استفاده از قضیه کانولوشن، نتیجه معادل را در حوزه فرکانس به صورت زیر می نویسیم. این دو عبارت با معادلات (۵-۱) و (۵-۲) مطابقت دارد. به خاطر داشته باشید که برای مقادیر مختلف، همه محصولات همانطور که در بخش ۲.۶ تعریف شده است، محصولات اصلی هستند.

به طور خلاصه، بحث قبلی نشان می دهد که یک سیستم تخریب خطی و تغییر ناپذیر فضایی با نویز افزودنی را می توان در حوزه فضایی به عنوان پیچیدگی یک تصویر با عملکرد تخریب سیستم (گسترش نقطه) و به دنبال آن نویز اضافه کرد. بر اساس قضیه کانولوشن، فرآیند یکسانی را می توان در حوزه فرکانس به عنوان حاصل تغییر

شکل و تخریب تصویر و به دنبال آن تبدیل نویز بیان کرد. هنگام کار در حوزه فرکانس ، از الگوریتم FFT استفاده می کنیم.

به هر حال ، برخلاف فصل ۴ ، ما در اجرای هیچ یک از فیلترهای بازسازی دامنه فرکانس که در این فصل مورد بحث قرار گرفته است ، از پد تصویر استفاده نمی کنیم. دلیل آن این است که در کارهای مرمت ما معمولاً فقط به تصاویر تخریب شده دسترسی داریم. برای م pad اثر بودن روکش ، باید قبل از تخریب تصاویر روی آنها اعمال شود ، شرطی که بدیهی است در عمل نمی توان برآورده کرد. اگر به تصاویر اصلی دسترسی داشتیم ، بازسازی یک نقطه خاموش بود.

بسیاری از انواع تخریب ها را می توان با فرایندهای خطی و متغیر موقعیت تقریب زد. مزیت این رویکرد این است که ابزارهای گسترده نظریه سیستم خطی برای حل مشکلات بازسازی تصویر در دسترس قرار می گیرد. تکنیک های غیر خطی و وابسته به موقعیت ، اگرچه کلی تر (و معمولاً دقیق تر) هستند ، اما مشکلاتی را به وجود می آورند که اغلب راه حل مشخصی ندارند یا برای حل محاسباتی بسیار مشکل هستند. این فصل بر تکنیک های خطی و تغییر فضا متغیر تمرکز دارد. از آنجا که تخریب ها به عنوان نتیجه پیچیدگی مدلسازی می شوند و بازسازی به دنبال یافتن فیلترهایی است که این روند را برعکس اعمال می کند ، اصطلاح تکان زدایی تصویر اغلب برای نشان دادن بازسازی خطی تصویر استفاده می شود. به طور مشابه ، فیلترهای مورد استفاده در فرایند بازسازی را اغلب فیلترهای تقلب نامیده اند.

## ۵.۶ تقریب عملکرد تخریب

سه روش اصلی برای تقریب عملکرد تخریب برای استفاده در بازسازی تصویر وجود دارد: (۱) مشاهده ، (۲) آزمایش و (۳) مدل سازی ریاضی. این روشها در بخشهای بعدی مورد بحث قرار گرفته است. فرآیند بازیابی یک تصویر با استفاده از یک تابع تخریب که توسط هر یک از این روشها تخمین زده شده است ، تکان زدایی کور نامیده می شود ، تا بر این واقعیت تأکید شود که تابع تخریب واقعی به ندرت به طور کامل شناخته شده است.

## تقریب توسط مشاهده تصویر

فرض کنید که ما بدون هیچ گونه آگاهی در مورد تابع تخریب  $\mathcal{H}$  یک تصویر تخریب شده به ما داده شده است. بر اساس این فرض که تصویر با یک فرایند خطی و بدون تغییر موقعیت تخریب شده است ، یکی از راههای تقریب  $\mathcal{H}$  جمع آوری اطلاعات از خود تصویر است. به عنوان مثال ، اگر تصویر تار باشد ، می توانیم به بخش مستطیلی کوچکی از تصویر که شامل ساختارهای نمونه است ، مانند قسمتی از یک شیء و پس زمینه نگاه کنیم. به منظور کاهش اثر نویز ، ما به دنبال منطقه ای هستیم که محتوای سیگنال در آن قوی باشد (به عنوان مثال ، منطقه ای با کنتراست بالا). گام بعدی پردازش زیر تصویر برای رسیدن به نتیجه ای است که تا حد ممکن مبهم است. اجازه

دهید زیر تصویر مشاهده شده با  $gs(x, y)$  نشان داده شود، و اجازه دهید تصویر زیر پردازش شده (که در حقیقت تقریب ما از تصویر اصلی در آن منطقه است) با  $\hat{f}(x, y)$  نشان داده شود. سپس، با فرض این که اثر نویز به دلیل انتخاب ما ناچیز است. ناحیه ای با سیگنال قوی، از معادله (۵-۶۵) زیر به دست می آید. که

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)} \quad (5-66)$$

از ویژگی های این تابع، ما بر اساس فرض عدم تغییر موقعیت، تابع تخریب کامل  $H(u, v)$  را استنباط می کنیم. به عنوان مثال، فرض کنید که نمودار شعاعی  $H_s(u, v)$  دارای شکل تقریبی منحنی گاوس است. ما می توانیم از این اطلاعات برای ساختن یک تابع  $H(u, v)$  در مقیاس بزرگتر، اما دارای شکل اولیه یکسان استفاده کنیم. سپس از  $H(u, v)$  در یکی از روشهای بازسازی استفاده می کنیم که در بخشهای بعدی مورد بحث قرار می گیرد. واضح است که این یک فرایند پر زحمت است که فقط در شرایط خاص مانند بازگرداندن یک عکس قدیمی با ارزش تاریخی استفاده می شود.

### تقریب با آزمایش

اگر تجهیزات مشابه تجهیزات مورد استفاده برای به دست آوردن تصویر تخریب شده در دسترس باشد، در اصل می توان تقریب دقیقی از تخریب را بدست آورد. تصاویری مشابه تصویر تخریب شده را می توان با تنظیمات مختلف سیستم به دست آورد



شکل ۵.۲۴ تخمین تخریب با توصیف ضربه ای (الف) ضربه نور (نشان داده شده است). (ب) انگیزه تصویری (تنزل یافته).

تا زمانی که آنها تا حد ممکن به تصویری که ما می خواهیم بازبازی شود تخریب نشوند. سپس ایده این است که با استفاده از همان تنظیمات سیستم، عکس العمل ضربه ای تخریب را بدست آورید. همانطور که در بخش ۵.۵ ذکر شد، یک سیستم خطی بدون تغییر فضا به طور کامل با پاسخ ضربه ای مشخص می شود. یک ضربه با یک نقطه روشن از نور شبیه سازی می شود، تا آنجا که ممکن است تأثیر نویز را به مقادیر ناچیز کاهش می دهد. سپس، با یادآوری اینکه تبدیل فوریه یک ضربه ثابت است، از معادله (۵-۶۵) حاصل می شود. که

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A} \quad (5-67)$$

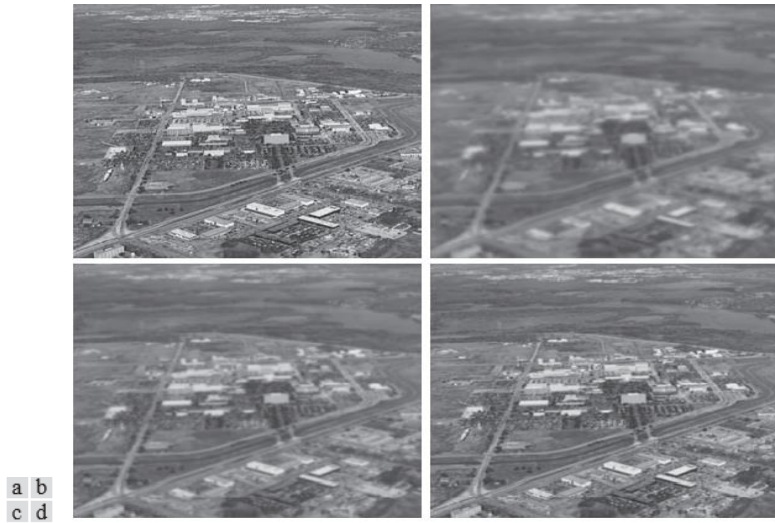
جایی که مانند قبل ،  $G(u, v)$  تبدیل فوریه تصویر مشاهده شده است و  $A$  ثابت توصیف کننده قدرت ضربه است. شکل ۵.۲۴ نمونه ای را نشان می دهد.

### تقریب با مدل سازی

مدل سازی تخریب سالهاست که مورد استفاده قرار می گیرد زیرا بینش آن در مورد مشکل بازسازی تصویر است. در برخی موارد ، مدل حتی می تواند شرایط محیطی را که باعث تخریب می شوند ، در نظر بگیرد. به عنوان مثال ، یک مدل تخریب ارائه شده توسط هافناگل و استنلی [۱۹۶۴] بر اساس ویژگی های فیزیکی تلاطم جو است. این مدل فرم آشنایی دارد:

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}} \quad (5-68)$$

جایی که  $k$  یک ثابت است که به ماهیت تلاطم بستگی دارد. به استثنای توان ۵/۶ در توان ، این معادله به همان شکل است که عملکرد تبدیل فیلتر پایین گذر گاوس در بخش ۴.۸ مورد بحث قرار گرفته است. در واقع ، LPF گوسی گاهی اوقات برای مدل سازی تارهای ملایم و یکنواخت استفاده می شود. شکل ۵.۲۵ نمونه هایی را که با شبیه سازی تار شدن تصویر با استفاده از معادله (۵-۶۸) با مقادیر  $k = 0,0025$  به دست آمده نشان می دهد.



شکل ۵.۲۵ مدل سازی آشفتگی الف) بدون آشفتگی قابل مشاهده. (ب) تلاطم شدید ،  $k = 0,0025$  (ج) تلاطم خفیف ،  $k = 0,001$  (د) تلاطم کم ،  $k = 0,0025$ . اندازه همه تصاویر  $480 * 480$  پیکسل است. (اصلی تصویر از ناسا گرفته شده است)

(تلاطم شدید) ،  $k = 0,001$  (آشفتگی خفیف) ، و  $k = 0,0025$  (آشفتگی کم). ما این تصاویر را با استفاده از روش های مختلف در ادامه این فصل بازبازی می کنیم. رویکرد دیگری که اغلب در مدل سازی استفاده می شود ، بدست آوردن یک مدل ریاضی است که از اصول اولیه شروع می شود. ما این روش را با جزئیات موردی که در آن تصویر با حرکت خطی یکنواخت بین تصویر و سنسور در حین بدست آوردن تصویر تار شده است ، نشان می دهیم. فرض کنید تصویری  $f(x, y)$  حرکت مسطح داشته باشد و  $x_0(t)$  و  $y_0(t)$  به ترتیب اجزای مختلف

حرکت در جهت  $X$  و  $Y$  هستند. با یکپارچه سازی نوردی لحظه ای در بازه زمانی که شاتر سیستم تصویربرداری باز است، کل نوردی را در هر نقطه از محیط ضبط (مثلاً میلی متر یا حافظه دیجیتال) بدست می آوریم. با فرض اینکه باز و بسته شدن شاتر به صورت آنی صورت می گیرد و فرایند تصویربرداری نوری بی عیب و نقص است، به ما اجازه می دهد تا جلوه های ناشی از حرکت تصویر را جدا کنیم. سپس، اگر  $T$  مدت زمان قرار گرفتن در معرض باشد، از آن پیروی می کند

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \quad (5-69)$$

جایی که  $G(X, Y)$  تصویر تار است. تبدیل پیوسته فوریه این عبارت است

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \quad (5-70)$$

جایگزینی معادله (۵-۶۹) به معادله (۵-۷۰) بازده

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \right] e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \quad (5-71)$$

برعکس کردن ترتیب یکپارچگی منجر به بیان می شود

$$G(u, v) = \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy \right] dt \quad (5-72)$$

اصطلاح درون براکتهای خارجی تبدیل فوریه تابع جابجا شده است

با استفاده از ورودی ۳ در جدول ۴.۴، سپس عبارت را به دست می آورید

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \end{aligned} \quad (5-73)$$

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \quad (5-74)$$

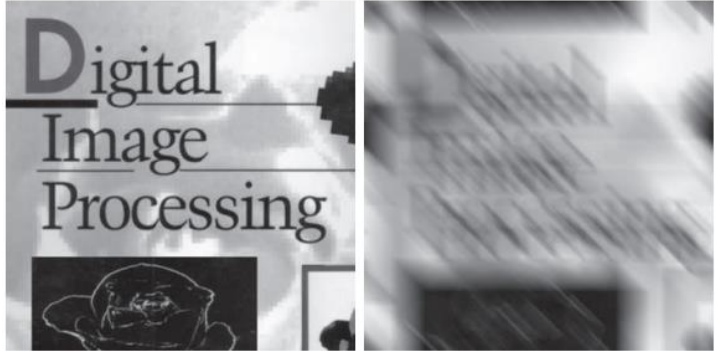
ما می توانیم معادله (۵-۷۳) را بیان کنیم به شکل آشنا

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (5-75)$$

ما می توانیم معادله را بیان کنیم اگر متغیرهای حرکت  $x_0(t)$  و  $y_0(t)$  شناخته شده باشند، تابع تبدیل  $H(u, v)$  را می توان مستقیماً از معادله (۵-۷۴) بدست آورد. به عنوان مثال، فرض کنید که تصویر مورد نظر فقط در جهت  $X$  (به عنوان مثال  $y_0(t) = 0$ )، حرکت خطی یکنواختی را انجام می دهد. وقتی  $t = T$ ، تصویر با فاصله کل  $a$  جابجا شده است. با  $y_0(t) = 0$ ، معادله (۵-۷۴) بازده

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)} dt = \int_0^T e^{-j2\pi u a t/T} dt \quad (5-76)$$

$$= \frac{T}{\pi u a} \sin(\pi u a) e^{-j\pi u a}$$



شکل ۵.۲۶ الف) تصویر اصلی (ب) نتیجه تار شدن با استفاده از تابع در معادله (۵-۷۷). با  $a = b = 0, 1$  و  $T = 1$  اگر اجازه دهیم جزء  $y$  نیز با حرکت  $T(t) = bt$  متفاوت باشد، تابع تخریب می شود

$$H(u,v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)} \quad (5-77)$$

برای ایجاد یک تابع تبدیل فیلتر گسسته با اندازه  $M * N$ ، این معادله را برای  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  و  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$  نمونه می کنیم.

مثال ۵.۸: تار شدن تصویر ناشی از حرکت.

شکل ۵.۲۶ ب) تصویری است که با محاسبه تبدیل فوریه تصویر در شکل ۵.۲۶ الف) تار می شود و تبدیل را با  $H(u, v)$  از معادله (۵-۷۷)، چند برابر می کند و تبدیل معکوس را در نظر بگیرد. اندازه تصاویر  $688 * 688$  پیکسل است و ما از  $a = b = 0, 1$  و  $T = 1$  در معادله (۵-۷۷) استفاده کردیم. همانطور که در بخشهای ۵.۸ و ۵.۹ بحث خواهیم کرد، بازیابی تصویر اصلی از تصویر مبهم آن چالشهای جالبی را ایجاد می کند، به ویژه هنگامی که نویز در تصویر تخریب شده وجود دارد. همانطور که در پایان بخش ۵.۵ ذکر شد، ما تمام محاسبات DFT را بدون پر کردن انجام می دهیم.

### ۵.۷ فیلتر معکوس

مطالب موجود در این بخش اولین گام ما در مطالعه بازسازی تصاویر تخریب شده با تابع تخریب  $\mathcal{H}$  است که ارائه شده است یا با روشی مانند آنچه در قسمت قبل مورد بحث قرار گرفته است بدست آمده است. ساده ترین رویکرد برای بازسازی، فیلتر معکوس مستقیم است، که در آن تقریب  $\hat{F}(u, v)$ ، از تبدیل تصویر اصلی را با تقسیم تبدیل تصویر تخریب شده  $G(u, v)$ ، با تبدیل تخریب محاسبه می کنیم. عملکرد:

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} \quad (5-78)$$



تقسیم بندی عنصری است ، همانطور که در بخش ۲.۶ و در رابطه با معادله (۵-۶۵) تعریف شده است.. جایگزینی سمت راست معادله (۵-۲) برای  $G(u, v)$  در معادله (۵-۷۸) بازده

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (5-79)$$

این یک عبارت جالب است. این به ما می گوید که حتی اگر عملکرد تخریب را بدانیم ، نمی توانیم تصویر تخریب نشده [تبدیل فوریه معکوس  $F(u, v)$  را دقیقاً به این دلیل که  $N(u, v)$  شناخته نشده است بازیابی کنیم. خبرهای بدتری وجود دارد. اگر تابع انحطاط دارای مقادیر صفر یا بسیار کوچک باشد ، نسبت  $N(u, v)/H(u, v)$  به راحتی می تواند بر عبارت  $F(u, v)$  تسلط داشته باشد. در واقع ، اغلب این مورد است ، همانطور که به زودی خواهید دید.

یک روش برای حل مشکل صفر یا مقدار کم ، محدود کردن فرکانس های فیلتر به مقادیر نزدیک به مبدا است. از بحث معادله (۴-۹۲) ، ما می دانیم که  $H(0, 0)$  معمولاً بالاترین مقدار  $H(u, v)$  در حوزه فرکانس است. بنابراین ، با محدود کردن تجزیه و تحلیل به فرکانس های نزدیک به مبدا ، احتمال برخورد با مقادیر صفر را کاهش می دهیم. مثال زیر این رویکرد را نشان می دهد.

مثال ۵.۹: محو شدن تصویر با فیلتر معکوس.

تصویر شکل ۵.۲۵ (ب) معادل عکس معکوس با معادله (۵-۷۸) است. با استفاده از معکوس دقیق تابع تخریب که آن تصویر را ایجاد کرده است. یعنی تابع تخریب مورد استفاده بود

$$H(u, v) = e^{-k[(u + M/2)^2 + (v - N/2)^2]}^{56}$$

با  $k = 0.0025$  ثابتهای  $M$  و  $N$  مقادیر افست هستند. آنها عملکرد را طوری متمرکز می کنند که با تبدیل فوریه محور مطابقت داشته باشد ، همانطور که در فصل قبل توضیح داده شد.

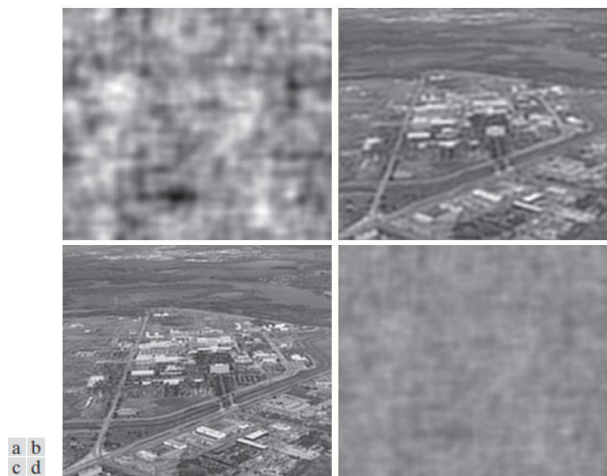
(به یاد داشته باشید ، ما از پد با این توابع استفاده نمی کنیم.) در این مورد ،  $M = N = 480$ . ما می دانیم که یک تابع گوسی صفر ندارد ، بنابراین در اینجا نگران کننده نخواهد بود. با وجود این ، ارزش تخریب آنقدر کوچک شد که نتیجه فیلتر معکوس کامل [شکل]. [۵.۲۷ (a)] بی فایده است. دلایل این نتیجه ضعیف در رابطه با معادله (۵-۷۹) ذکر شده است..

شکل ۵.۲۷ (ب) تا (د) نتایج قطع مقادیر نسبت  $H(u, v)$  به ترتیب خارج از شعاع ۴۰ ، ۷۰ و ۸۵ را نشان می دهد. قطع با استفاده از نسبت تابع پایین گذر کره از مرتبه ۱۰ به نسبت اجرا شد. این یک تبدیل شدید (اما هموار) در شعاع مورد نظر را فراهم کرد. شعاع نزدیک ۷۰ بهترین نتایج بصری را به همراه داشت [شکل]. [۵.۲۷ (ج)]. شعاع زیر ۷۰ باعث تار شدن تصاویر می شود ، مانند شکل ۵.۲۷ (b)، که با استفاده از شعاع ۴۰ بدست آمده است. مقادیر بالای ۷۰ شروع به تولید تصاویر تخریب شده می کنند ، همانطور که در شکل ۵.۲۷ (d) نشان داده شده است ، که با استفاده از شعاع ۸۵. محتوای تصویر تقریباً در این تصویر در پشت " پرده " نویز

قابل مشاهده است ، اما نویز به طور قطع بر نتیجه غالب است. افزایش بیشتر در مقادیر شعاع تصاویری را ایجاد کرد که بیشتر و بیشتر شبیه شکل ۵.۲۷ (a) بودند.

با  $k = 0.025$  ثابتهای  $M2$  و  $N2$  مقادیر افست هستند. آنها عملکرد را طوری متمرکز می کنند که با تبدیل فوریه محور مطابقت داشته باشد ، همانطور که در فصل قبل توضیح داده شد. (به یاد داشته باشید ، ما از پد با این توابع استفاده نمی کنیم.) در این مورد ،  $M = N = 480$ . ما می دانیم که یک تابع گوسی صفر ندارد ، بنابراین در اینجا نگران کننده نخواهد بود. با وجود این ، ارزش تخریب آنقدر کوچک شد که نتیجه فیلتر معکوس کامل [شکل]. ۵.۲۷ (a) بی فایده است. دلایل این نتیجه ضعیف در رابطه با معادله (۵-۷۹) ذکر شده است..

شکل ۵.۲۷ (ب) تا (د) نتایج قطع مقادیر نسبت  $G(u, v)H(u, v)$  به ترتیب خارج از شعاع ۴۰ ، ۷۰ و ۸۵ را نشان می دهد. قطع با استفاده از نسبت تابع پایین گذر کره از مرتبه ۱۰ به نسبت اجرا شد. این یک تبدیل شدید (اما هموار) در شعاع مورد نظر را فراهم کرد. شعاع نزدیک ۷۰ بهترین نتایج بصری را به همراه داشت [شکل]. ۵.۲۷ (ج). شعاع زیر ۷۰ باعث تار شدن تصاویر می شود ، مانند شکل ۵.۲۷ (b)، که با استفاده از شعاع ۴۰ بدست آمده است. مقادیر بالای ۷۰ شروع به تولید تصاویر تخریب شده می کنند ، همانطور که در شکل ۵.۲۷ (d) نشان داده شده است ، که با استفاده از شعاع ۸۵. محتوای تصویر تقریباً در این تصویر در پشت " پرده " نویز قابل مشاهده است ، اما نویز به طور قطع بر نتیجه غالب است. افزایش بیشتر در مقادیر شعاع تصاویری را ایجاد کرد که بیشتر و بیشتر شبیه شکل ۵.۲۷ (a) بودند. نتایج در مثال قبل گویای عملکرد ضعیف فیلتر معکوس مستقیم به طور کلی است. موضوع اساسی سه بخش بعدی نحوه بهبود فیلتر معکوس مستقیم است.



شکل ۵.۲۷ بازیابی شکل ۵.۲۵ (ب) با استفاده از معادله (۵-۷۸) (الف) نتیجه استفاده از فیلتر کامل. (ب) نتیجه با قطع  $H$  خارج از شعاع ۴۰. (ج) نتیجه با قطع  $H$  خارج از شعاع ۷۰. (د) نتیجه با قطع  $H$  خارج از شعاع ۸۵.

## ۵.۸ فیلتر کردن حداقل مربعات (وینر)

رویکرد فیلترینگ معکوس که در قسمت قبل مورد بحث قرار گرفت هیچ گونه تصریح صریح برای مدیریت نویز ندارد. در این بخش، ما رویکردی را مورد بحث قرار می دهیم که هم عملکرد تخریب و هم ویژگی های آماری نویز را در فرآیند بازسازی لحاظ می کند. این روش بر اساس در نظر گرفتن تصاویر و نویز به عنوان متغیرهای تصادفی بنا شده است، و هدف این است که تقریب  $\hat{f}$  تصویر فاسد نشده را به گونه ای بیابیم که میانگین خطای مربع بین آنها به حداقل برسد. این اندازه گیری خطا به صورت زیر تعریف شده است

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\} \quad (5-80)$$

جایی که  $E\{\cdot\}$  مقدار مورد انتظار آرگومان است. ما فرض می کنیم که نویز و تصویر ارتباطی ندارند، که یکی یا دیگری میانگین صفر دارد و سطوح شدت در تقریب یک تابع خطی از سطوح در تصویر تخریب شده است. مستقر در این فرض ها، حداقل تابع خطا در معادله (۵-۸۰) در حوزه فرکانس با عبارت آورده شده است

$$\begin{aligned} \hat{F}(u,v) &= \left[ \frac{H^*(u,v)S_f(u,v)}{S_f(u,v)|H(u,v)|^2 + S_n(u,v)} \right] G(u,v) \\ &= \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + S_n(u,v)/S_f(u,v)} \right] G(u,v) \\ &= \left[ \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + S_n(u,v)/S_f(u,v)} \right] G(u,v) \end{aligned} \quad (5-81)$$

جایی که ما از این واقعیت استفاده کردیم که حاصلضرب یک مقدار مختلط با مزدوج آن برابر مقدار کمیت پیچیده در مربع است. این نتیجه پس از  $N=1942$ ، که اولین بار در سال نشان داده شده، به عنوان فیلتر وینر شناخته می شود. فیلتر، که از اصطلاحات داخل براکت ها تشکیل شده است، معمولاً به عنوان حداقل فیلتر خطای میانگین مربع یا حداقل فیلتر خطای مربع نیز نامیده می شود. ما در انتهای فصل به منابع حاوی منابع مفصل از فیلتر وینر اشاره می کنیم. توجه داشته باشید از خط اول در معادله (۵-۸۱) که فیلتر وینر مشکلی مشابه فیلتر معکوس با صفر در تابع تخریب ندارد، مگر اینکه کل مخرج برای مقدار (های)  $u$  و  $v$  صفر باشد.

شرایط در معادله (۵-۸۱) به شرح زیر است:

۱. تبدیل فوریه تقریب تصویر تخریب نشده.  $\hat{F}(u,v)$

۲. تبدیل فوریه از تصویر تخریب شده.  $G(u,v)$

۳. عملکرد تبدیل تخریب (تبدیل فوریه از تخریب فضایی).  $H(u,v)$

۴. مزدوج پیچیده از  $H(u,v)$   $H^*(u,v)$

$$|H(u,v)|^2 = H^*(u,v)H(u,v). \quad ۵.$$

$$۶. \quad S_{\eta}(u,v) = |N(u,v)|^2 \quad \text{طیف توان نویز [به معادله مراجعه کنید. (۴-۸۹)]}^{۲۳}$$

$$۷. \quad S_f(u,v) = |F(u,v)|^2 \quad \text{طیف قدرت تصویر تخریب نشده.}$$

تصویر بازسازی شده در حوزه فضایی با تبدیل معکوس فوریه از تقریب دامنه فرکانس  $\hat{F}(u, v)$  داده می شود. توجه داشته باشید که اگر نویز صفر باشد، طیف توان نویز از بین می رود و فیلتر وینر به فیلتر معکوس کاهش می یابد. همچنین، بحث را در انتهای بخش ۵.۵ در رابطه با این واقعیت که همه کارهای دگرگونی در این فصل بدون بالشتک انجام می شود، در نظر داشته باشید. تعدادی از اقدامات مفید بر اساس طیف قدرت نویز و تصویر تخریب نشده است. یکی از مهمترین آنها نسبت سیگنال به نویز است که با استفاده از مقادیر حوزه فرکانس مانند تقریب تقریبی می شود

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u,v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |N(u,v)|^2} \quad (5-82)$$

این نسبت میزان قدرت سیگنال حامل اطلاعات (یعنی تصویر اصلی و درجه پایین) را به میزان نویز نشان می دهد. تصویری با نویز کم دارای SNR بالا است و برعکس، همان تصویری با نویز بالاتر SNR پایین تری خواهد داشت. این نسبت یک معیار مهم است که در توصیف عملکرد الگوریتم های بازسازی استفاده می شود. میانگین خطای مربع به صورت آماری در معادله (۵-۸۰) داده شده است. را می توان از نظر جمع بندی شامل تصاویر اصلی و بازسازی شده نیز تخمین زد:

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2 \quad (5-83)$$

در واقع، اگر کسی تصویر بازسازی شده را "سیگنال" و تفاوت بین این تصویر و تصویر اصلی را "نویز" در نظر بگیرد، می توان نسبت سیگنال به نویز را در حوزه فضایی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x,y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2} \quad (5-84)$$

هرچه  $f$  و  $\hat{f}$  نزدیکتر باشند، این نسبت بزرگتر خواهد بود. گاهی اوقات از ریشه مربعی دو معیار قبلی به جای آن استفاده می شود، در این صورت به ترتیب به عنوان خطای میانگین مربع خطا و نسبت ریشه میانگین مربع سیگنال به نویز نامیده می شود. همانطور که قبلاً نیز اشاره کردیم، به خاطر داشته باشید که اقدامات کمی ضرورتاً با کیفیت درک شده تصویر ارتباطی ندارند.

<sup>۲۳</sup> اصطلاح  $N(u, v)$ ،  $\eta$  (همچنین به عنوان همبستگی خودکار سر و صدا نیز شناخته می شود. این عبارت از قضیه همبستگی (اولین خط ورودی  $\eta$  در جدول ۴.۴) آمده است. وقتی دو تابع یکسان باشند، همبستگی خود همبستگی می شود و سمت راست آن ورودی  $(v, H(u, v), H(u, v), v)$  می شود که برابر  $(v, H(u, v), H(u, v))$  است.  $\eta$  نظرات مشابه اعمال می شود به  $(v, F(u, v), F(u, v))$  که خود همبستگی تصویر است. ما در فصل ۱۲ در مورد همبستگی به تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد.

هنگام برخورد با نویز سفید ، طیف ثابت است ، که به طور قابل توجهی چیزها را ساده می کند. با این حال ، طیف قدرت تصویر تخریب نشده به ندرت شناخته می شود. روشی که اغلب در مواقعی که این مقادیر مشخص نیستند یا نمی توان تخمین زد ، مورد استفاده قرار می گیرد ، تقریب معادله (۵-۸۱) است. توسط عبارت

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K} \right] G(u,v) \quad (5-85)$$

جایی که  $K$  یک ثابت معین است که به تمام اصطلاحات  $H(u, v)$  اضافه می شود. ۲ مثالهای زیر استفاده از این عبارت را نشان می دهد.



شکل ۵.۲۸ مقایسه فیلتر معکوس و وینر. (الف) نتیجه تصفیه کامل معکوس شکل ۵.۲۵ (ب). (ب) نتیجه فیلتر معکوس شعاعی محدود. (ج) نتیجه فیلتر وینر.

شکل ۵.۲۸ مزیت فیلترینگ وینر را نسبت به فیلتر معکوس مستقیم نشان می دهد. شکل ۵.۲۸ (الف) نتیجه کاملاً معکوس از شکل ۵.۲۷ (الف) است. به طور مشابه ، شکل ۵.۲۸ (ب) نتیجه فیلتر معکوس شعاعی محدود شکل ۵.۲۵ (ج) است. برای سهولت در مقایسه ، این تصاویر در اینجا کپی می شوند. شکل ۵.۲۸ (ج) نتیجه بدست آمده با استفاده از معادله را نشان می دهد. (۵-۸۵) با عملکرد تخریب استفاده شده در مثال ۵.۹. مقدار  $K$  به صورت متقابل انتخاب شد تا بهترین نتایج بصری را ارائه دهد. مزیت فیلترینگ وینر نسبت به روش معکوس مستقیم در این مثال مشهود است. با مقایسه شکلها. ۵.۲۵ (الف) و ۵.۲۸ (ج) ، می بینیم که فیلتر وینر نتیجه ای بسیار نزدیک به تصویر اصلی و تخریب نشده به دست آورد.

ردیف اول شکل ۵.۲۹ ، از چپ به راست ، تصویر تار شکل ۵.۲۶ (ب) را به شدت توسط نویز افزودنی گوسی با میانگین صفر و واریانس ۶۵۰ به شدت خراب می کند. نتیجه فیلتر معکوس مستقیم ؛ و نتیجه فیلترینگ وینر است. فیلتر وینر معادله (۵-۸۵) ، با  $H(u, v)$  از مثال ۵.۸ ، و با  $K$  به صورت تعاملی برای ارائه بهترین نتیجه بصری استفاده شد. همانطور که انتظار می رفت ، فیلتر معکوس مستقیم تصویری غیرقابل استفاده ایجاد کرد. توجه داشته باشید که نویز در تصویر با عکس معکوس آنقدر قوی است که محتوای تصویر را کاملاً پنهان می کند. نتیجه فیلتر وینر به هیچ وجه کامل نیست ، اما در مورد محتوای تصویر به ما اشاره می کند. متن را می توان با تلاش متوسط خواند.

ردیف دوم شکل ۵.۲۹ همان دنباله ای را که قبلاً مورد بحث قرار گرفت نشان می دهد ، اما با کاهش سطح واریانس نویز به میزان یک مرتبه. این کاهش تأثیر چندانی بر فیلتر معکوس نداشت ، اما نتایج وینر به میزان قابل توجهی

بهبود یافته است. به عنوان مثال ، خواندن متن در حال حاضر بسیار آسان تر است. در ردیف سوم شکل ۵.۲۹ ، واریانس نویز بیش از پنج مرتبه قدر از ردیف اول کاهش یافته است. در واقع ، تصویر شکل ۵.۲۹ (g) هیچ نویز قابل مشاهده ای ندارد. نتیجه فیلتر معکوس در این مورد جالب است. نویز هنوز کاملاً قابل مشاهده است ، اما متن را می توان از طریق "پرده" نویز مشاهده کرد (به مسئله ۵.۳۰ مراجعه کنید). نتیجه فیلتر وینر در شکل ۵.۲۹ (i) بسیار عالی است ، زیرا از نظر بصری کاملاً به تصویر اصلی در شکل نزدیک است.



شکل ۵.۲۹ (الف) تصویر ۸ بیتی با تاری حرکت و نویز افزودنی خراب شده است. (ب) نتیجه فیلتر معکوس. (ج) نتیجه فیلترینگ وینر. (د) - (و) دنباله یکسان ، اما با واریانس نویز یک مرتبه کمتر از اندازه. (i) - (g) دنباله یکسان ، اما واریانس نویز پنج مرتبه از (a) کاهش می یابد. در (ح) توجه کنید که چگونه تصویر محو شده از طریق "پرده" نویز کاملاً قابل مشاهده است.

۵.۲۶ (الف) در عمل ، نتایج فیلترهای بازسازی به ندرت به تصاویر اصلی نزدیک است. این مثال و مثال ۵.۱۲ در بخش بعدی ، اندکی ایده آل شده اند تا بر اثرات نویز بر الگوریتم های بازسازی تمرکز کنند.

### ۵.۹ فیلتر کردن حداقل مربعات کنترل شده

مشکل دانستن چیزی در مورد عملکرد تخریب H در همه روشهایی که در این فصل مورد بحث قرار گرفته است ، مشترک است. با این حال ، فیلتر وینر یک مشکل دیگر ایجاد می کند: طیف های قدرت تصویر و نویز نامناسب نیز باید شناخته شوند. در بخش قبل نشان دادیم که در برخی موارد می توان با تقریب در معادله (۵-۸۵) ، به نتایج قابل قبولی دست یافت. اما یک مقدار ثابت برای نسبت طیف توان همیشه راه حل مناسبی نیست.



روش مورد بحث در این بخش مستلزم آگاهی از میانگین و واریانس نویز است. همانطور که در بخش ۵.۲ بحث شد، این پارامترها به طور کلی می توانند از یک تصویر تخریب شده محاسبه شوند، بنابراین این یک مزیت مهم است. تفاوت دیگر این است که فیلتر وینر مبتنی بر به حداقل رساندن یک معیار آماری است و بنابراین، از نظر متوسط بهینه است. الگوریتم ارائه شده در این بخش دارای ویژگی قابل توجهی است که برای هر تصویری که به آن اعمال شده است نتیجه مطلوب را به دست می آورد. البته این را باید در نظر داشت که این معیارهای بهینه گرچه از نظر نظری آرامش بخش هستند، اما به پویایی ادراک بصری مربوط نمی شوند. در نتیجه، انتخاب یک الگوریتم بر الگوریتم دیگر تقریباً همیشه با توجه به کیفیت بصری درک شده از تصاویر حاصله تعیین می شود. با استفاده از تعریف انحراف داده شده در معادله (۴-۹۴)، و همانطور که در بخش ۲.۶ توضیح داده شد، می توانیم معادله (۵-۶۴) را بیان کنیم. به شکل بردار-ماتریس:

$$g = Hf + \eta \quad (5-86)$$

به عنوان مثال، فرض کنید که  $g(x, y)$  دارای اندازه  $M * N$  است. ما می توانیم اولین عناصر  $N$  بردار  $g$  را با استفاده از عناصر تصویر در ردیف اول  $g(x, y)$ ،  $N$  بعدی بعدی ایجاد کنیم. اشاره از ردیف دوم و غیره. ابعاد بردار حاصله  $1 * MN$  خواهد بود. این ابعاد  $f$  و  $H$  نیز هستند، زیرا این بردارها به یک شکل تشکیل شده اند. سپس ماتریس  $H$  دارای ابعاد  $MN * MN$  است. عناصر آن توسط عناصر متقاطع در معادله (۴-۹۴) داده شده است. منطقی است که به این نتیجه برسیم که مشکل بازسازی را می توان به دستکاری های ساده ماتریسی تقلیل داد. متأسفانه، این مورد نیست. برای مثال، فرض کنید ما در حال کار با تصاویری با اندازه متوسط هستیم، مثلاً  $M = 512$ ،  $N = 262$ . سپس بردارهای معادله (۵-۸۶) دارای بعد  $262 * 1 * 262$  و ماتریس  $H$  دارای ابعاد  $262 * 262 * 512$  خواهد بود. دستکاری بردارها و ماتریس هایی با این اندازه ها کار ساده ای نیست. مشکل این است که  $H$  به شدت به نویز حساس است (پس از تجربیاتی که در مورد تاثیر نویز در دو بخش قبلی داشتیم، این نباید تعجب آور باشد). مزیت اصلی فرمول بندی مسئله بازسازی به شکل ماتریسی این است که مشتق از الگوریتم های بازسازی را تسهیل می کند.

[Gonzalez and Woods \[1992\]](#) را برای یک فصل کامل که به موضوع تکنیک های جبری برای بازسازی تصویر اختصاص داده شده است، ببینید.

اگرچه ما روش حداقل مربعات محدود را که قصد ارائه آن را داریم به طور کامل بدست نمی آوریم، اما این روش ریشه در یک فرمول ماتریسی دارد. ما در پایان فصل به منابعی اشاره می کنیم که مشتقات آنها با جزئیات پوشش داده شده است. محور اصلی روش، مسئله حساسیت  $H$  به نویز است. یکی از راههای کاهش اثرات حساسیت به نویز، این است که بهینه سازی بازسازی را بر اساس میزان همواری، مانند مشتق دوم یک تصویر (دوست قدیمی ما، لاپلاسیان)، پایه گذاری کنید. برای معنادار بودن، بازسازی باید توسط پارامترهای مشکلات موجود محدود شود. بنابراین، آنچه مطلوب است یافتن حداقل یک تابع معیار،  $C$  است که به عنوان تعریف شده است



$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x,y)]^2 \quad (5-87)$$

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2 \quad (5-88)$$

جایی که  $\|a\|^2 \triangleq a^T a$  هنجار اقلیدسی است (بخش ۲.۶ را ببینید)، و  $\hat{f}$  تقریب تصویر تخریب نشده است. عملگر لاپلاکی  $\nabla^2$  در معادله (۳-۵۰) تعریف شده است. راه حل حوزه فرکانس برای این مشکل بهینه سازی توسط برنامه داده شده است. اصطلاح

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma|P(u,v)|^2} \right] G(u,v) \quad (5-89)$$

کمیت در براکت تابع تبدیل فیلترهای حداقل مربعات محدود است. توجه داشته باشید که به عملکرد تبدیل فیلتر معکوس کاهش می یابد وقتی  $g = 0$

که در آن  $g$  یک پارامتر است که باید به گونه ای تنظیم شود که محدودیت در معادله (۵-۸۸) راضی است و  $P(u, v)$  تبدیل فوریه تابع است

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-90)$$

ما این تابع را به عنوان یک هسته لاپلاسیایی در شکل ۳.۴۵ تشخیص می دهیم. توجه داشته باشید که معادله (۵-۸۹) اگر  $g = 0$  باشد، به فیلتر معکوس کاهش می یابد. توابع  $P(u, v)$  و  $H(u, v)$  باید از یک اندازه باشند. اگر  $H$  دارای اندازه  $M * N$  باشد، این بدان معناست که  $p(x,y)$  باید در مرکز یک آرایه  $M * N$  از صفرها تعبیه شود.

برای حفظ تقارن زوج  $p(x,y)$ ،  $M$  و  $N$  باید صحیح باشند، همانطور که در مثالهای ۴.۱۰ و ۴.۱۵ توضیح داده شده است. اگر یک تصویر تخریب شده که  $H$  از آن بدست می آید حتی دارای ابعاد یکنواخت نباشد، پس از محاسبه  $H$  برای استفاده در معادله (۵-۸۹)، باید یک ردیف و/یا ستون، به طور مناسب، حذف شود..

مثال ۵.۱۲: مقایسه رفع خطا توسط وینر و فیلترینگ محدودترین مربعات.

شکل ۵.۳۰ نتیجه پردازش شکل ۵.۲۹ (a)، (d)، و (g) را نشان می دهد. با حداقل مربعات فیلتر محدود، که در آنها مقادیر  $g$  به صورت دستی انتخاب شده اند تا بهترین نتایج بصری را به دست آورند. این همان روشی است که ما برای تولید نتایج فیلتر وینر در شکل ۵.۲۹ (f) و (i) استفاده کردیم. با مقایسه حداقل مربعات محدود و نتایج وینر، می بینیم که نمونه های اولیه نتایج بهتری (مخصوصاً در زمینه کاهش نویز) برای موارد با نویز زیاد و متوسط به همراه داشت، زیرا هر دو فیلتر اساساً تولید می کنند.



a b c

شکل ۵.۳۰ نتایج فیلترهای حداقل مربعات محدود شده. (a)، (b) و (c) را با نتایج فیلتر وینر در شکلها مقایسه کنید. ۵.۲۹ (f) و (c) و (i) به ترتیب.

نتایج برابر برای مورد کم نویز. این تعجب آور نیست زیرا پارامتر  $g$  در معادله (۵-۸۹) یک مقیاس واقعی است، در حالی که مقدار  $K$  در معادله (۵-۸۵) تقریبی مقیاس پذیر به نسبت دو تابع دامنه فرکانس ناشناخته در اندازه  $M * N$  است. بنابراین، منطقی است که نتیجه ای بر اساس انتخاب دستی  $g$ ، تقریب دقیق تری از تصویر تخریب نشده همانطور که در مثال ۵.۱۱، نتایج این مثال بهتر از نتایج معمول است. تمرکز ما در اینجا بر اثرات تار شدن نویز در بازسازی بود. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، با موقعیت هایی روبرو خواهید شد که در آن راه حل های بازسازی به همان اندازه که در این دو مثال نشان داده ایم به تصاویر اصلی نزدیک نیستند. همانطور که در مثال قبل مورد بحث قرار گرفت، می توان پارامتر  $g$  را به صورت تعاملی تنظیم کرد تا به نتایج قابل قبول دست یافت. با این حال، اگر ما به بهینه سازی ریاضی علاقه داریم، این پارامتر باید به گونه ای تنظیم شود که محدودیت در معادله (۵-۸۸) راضی است. روشی برای محاسبه  $g$  با تکرار به شرح زیر است.

بردار "باقیمانده" را تعریف کنید

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} \quad (5-91)$$

از معادله (۵-۸۹)، ما می بینیم که  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  (و به طور ضمنی  $\hat{\mathbf{f}}$ ) تابعی از  $\mathbf{g}$  است. سپس نتیجه می گیرد که  $\mathbf{r}$  نیز تابع این پارامتر است. می توان نشان داد (هانت [۱۹۷۳]، گونزالز و وودز [۱۹۹۲]) که

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &= \mathbf{r}^T \mathbf{r} \\ &= \|\mathbf{r}\|^2 \end{aligned} \quad (5-92)$$

یک تابع افزایش یکنواخت  $g$  است. کاری که ما می خواهیم انجام دهیم این است که  $g$  را طوری تنظیم کنیم که

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm \alpha \quad (5-93)$$

که در آن  $\alpha$  یک عامل دقت است. با توجه به معادله (۵-۹۱)، اگر  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$ ، محدودیت در معادله (۵-۸۸) کاملاً راضی خواهد شد.

از آنجا که  $g$  یکنواخت است، یافتن مقدار مورد نظر  $g$  دشوار نیست. یک رویکرد این است که ۱. مقدار اولیه  $g$  را مشخص کنید.

۲. محاسبه ۲.۲.

۳. اگر معادله را متوقف کنید (۵-۹۳) راضی است؛ در غیر اینصورت پس از افزایش  $g$  به مرحله ۲ بازگردید  $\|\mathbf{r}\|^2 < (\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \alpha)$  یا  $g$  کاهش اگر  $\|\mathbf{r}\|^2 > (\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \alpha)$  از مقدار جدید  $g$  در استفاده کنید

معادله (۵-۸۹) برای محاسبه مجدد تقریب مطلوب  $F^*(u, v)$

روشهای دیگر، مانند الگوریتم نیوتن-رافسون، می تواند برای بهبود سرعت همگرایی استفاده شود.

برای استفاده از این الگوریتم، برای محاس مقادیر  $r^2$  و  $H^2$  نیاز داریم

۲، ۲، ما از معادله (۵-۹۱) یادداشت می کنیم. که

$$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v)F(u, v) \quad (5-94)$$

که از آن با محاسبه تبدیل فوریه معکوس  $r(x, y)$  بدست می آوریم. سپس، از تعریف هنجار اقلیدسی، چنین نتیجه می گیرد

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y) \quad (5-95)$$

محاسبه از  $H^2$  به یک نتیجه جالب منجر می شود. ابتدا واریانس را در نظر بگیرید. نویز در کل تصویر، که ما از نمونه ها با استفاده از عبارت تخمین می کنیم

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - \bar{\eta}]^2 \quad (5-96)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y) \quad (5-97)$$

میانگین نمونه است با اشاره به فرم معادله (۵-۹۵)، ما توجه می کنیم که جمع دوگانه در معادله (۵-۹۶) متناسب با  $H^2$  است. این منجر به بیان می شود

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN[\sigma_{\eta}^2 + \bar{\eta}^2] \quad (5-98)$$

این یک نتیجه مفید است. این به ما می گوید که ما می توانیم مقدار ناشناخته را تخمین بزنیم  $H^2$  تنها با آگاهی از میانگین و واریانس نویز. تقریب این مقادیر دشوار نیست (بخش ۵.۲ را ببینید)، با این فرض که مقادیر نویز و شدت تصویر با هم ارتباط ندارند. این فرض همه روشهایی است که در این فصل مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۵.۳۱ (الف) بازسازی حداقل مربعات با محدودیت های مکرر از شکل ۵.۲۵ (ب) ، با استفاده از پارامترهای صوتی صحیح. (ب) نتیجه بدست آمده با پارامترهای نویز اشتباه.

مثال ۵.۱۳: تقریب تکراری فیلتر حداقل مربعات محدود شده مطلوب.

شکل ۵.۳۱ (الف) نتیجه به دست آمده با استفاده از الگوریتم تازه توصیف شده برای تقریب فیلتر بهینه برای بازبازی شکل ۵.۲۵ (ب) را نشان می دهد. مقدار اولیه ای که برای  $g$  استفاده می شود  $10^{-5}$  ، ضریب تصحیح برای تنظیم  $6-10$   $g$  و مقدار  $0.25$   $a$  است. پارامترهای نویز مشخص شده برای تولید شکل ۵.۲۵ (الف) یکسان بودند: واریانس نویز  $10^{-5}$  و میانگین صفر. نتیجه بازبازی شده با شکل ۵.۲۸ (ج) قابل مقایسه است ، که توسط فیلتر وینر با  $K$  به صورت دستی برای بهترین نتایج بصری مشخص شده است.

شکل ۵.۳۱ (ب) نشان می دهد که اگر از تقریب اشتباه پارامترهای نویز استفاده شود ، چه اتفاقی می افتد. در این مورد ، میزان نویز مشخص شده  $10^{-2}$  بود و میانگین آن  $0$  باقی می ماند. نتیجه در این مورد به طور قابل ملاحظه ای مبهم تر است.

### ۵.۱۰ فیلتر میانگین ژئومتری

ممکن است کمی فیلتر وینر که در بخش ۵.۸ مورد بحث قرار گرفته را کمی تعمیم دهید. تعمیم به شکل فیلتر به اصطلاح میانگین هندسی است:

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2} \right]^\alpha \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \beta \left[ \frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)} \right]} \right]^{1-\alpha} G(u,v) \quad (5-99)$$

جایی که  $a$  و  $b$  ثابت های غیر منفی و واقعی هستند. تابع تبدیل فیلتر میانگین هندسی شامل دو عبارت در برکت است که به ترتیب به توان  $a$  و  $1-a$  افزایش یافته اند.

وقتی  $a = 1$  فیلتر میانگین هندسی به فیلتر معکوس کاهش می یابد. با  $a = 0$ ، فیلتر به فیلتر پارامتری وینر تبدیل می شود، که در زمان  $1 - b$  به فیلتر استاندارد وینر کاهش می یابد. قدرت، که تعریف میانگین هندسی است، بنابراین نام آن را به فیلتر می دهد.

با  $b = 1$ ، با افزایش بیش از  $1/2$ ، عملکرد فیلتر بیشتر به سمت فیلتر معکوس متمایل می شود. به طور مشابه، هنگامی که مقدار زیر  $1/2$  کاهش می یابد، فیلتر بیشتر شبیه یک فیلتر وینر رفتار می کند. وقتی  $a = 1/2$  و  $b = 1$  معمولاً فیلتر را فیلتر تساوی طیف می نامند. معادله (۵-۹۹) هنگام اجرای فیلترهای بازسازی مفید است زیرا نمایانگر خانواده ای از فیلترها است که در یک عبارت واحد ترکیب شده اند.

### ۵.۱۱ بازسازی تصویر از پرتوافشانی ها

در بخشهای قبلی این فصل، ما تکنیک های بازیابی تصاویر تخریب شده را مورد بحث قرار دادیم. در این بخش، ما مشکل بازسازی یک تصویر از یک سری پیش بینی ها را با تمرکز بر توموگرافی کامپیوتری اشعه ایکس (CT) بررسی می کنیم. این اولین و هنوز پرکاربردترین نوع CT است و در حال حاضر یکی از کاربردهای اصلی پردازش تصویر دیجیتال در پزشکی است.

همانطور که در فصل ۱ ذکر شد، اصطلاح توموگرافی محوری کامپیوتری (CAT) به جای یکدیگر برای نشان دادن CT استفاده می شود.

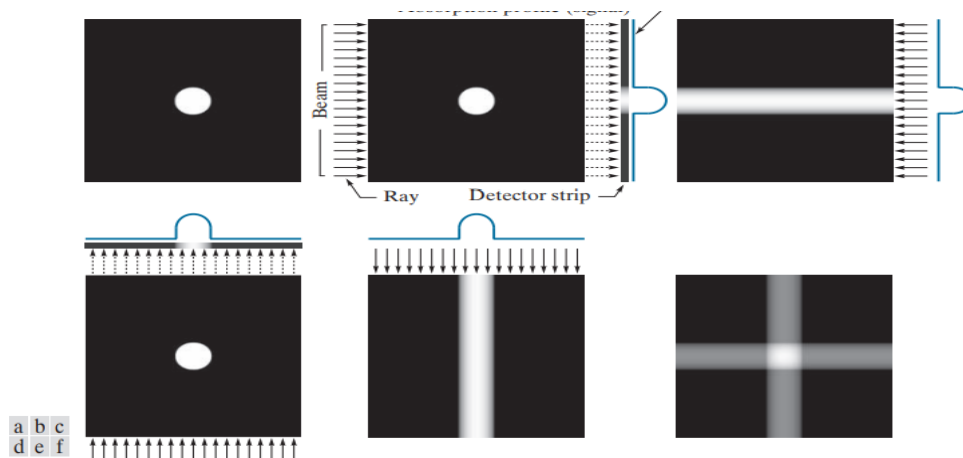
### معرفی

مشکل بازسازی در اصل ساده است و می تواند از نظر کیفی به صورت مستقیم و بصری بدون استفاده از معادلات توضیح داده شود (بعداً در این قسمت به ریاضی می پردازیم. برای شروع، شکل ۵.۳۲ (a) را در نظر بگیرید، که شامل یک شیء واحد در زمینه یکنواخت. برای اینکه به معنای فیزیکی توضیحات زیر برسید، فرض کنید این تصویر مقطعی از ناحیه سه بعدی بدن انسان است. فرض کنید همچنین پس زمینه در تصویر نشان دهنده نرم و یکنواخت است بافت، در حالی که جسم گرد تومور است، همچنین یکنواخت است، اما دارای ویژگی های جذب اشعه ایکس بالاتر است. فرض کنید بعد از عبور یک پرتو نازک از اشعه X از چپ به راست (از طریق صفحه تصویر)، همانطور که در شکل ۵.۳۲ (ب) نشان داده شده است، فرض کنید که انرژی پرتو بیشتر جذب جسم می شود. نسبت به سابقه، همانطور که معمولاً اتفاق می افتد. با استفاده از یک نوار آشکارسازهای جذب اشعه ایکس در طرف دیگر منطقه، سیگنال (پروفایل جذب) نشان داده می شود که دامنه (شدت) آن متناسب با جذب است. مقادیر جذب در پرتوی واحد در پرتو که از نظر فضایی به آن نقطه مربوط می شود (چنین مبلغی اغلب به عنوان پرتو نامیده می شود).<sup>۲۴</sup> در این مقطع، تمام اطلاعاتی که درباره جسم داریم این سیگنال جذب یک بعدی

<sup>۲۴</sup> درمان فیزیک منابع و آشکارسازهای اشعه ایکس خارج از بحث ما است که بر جنبه های پردازش تصویر CT تمرکز دارد. برای آشنایی عالی با فیزیک تشکیل تصویر اشعه ایکس به [۲۰۰۶] Prince and Links مراجعه کنید.

است.

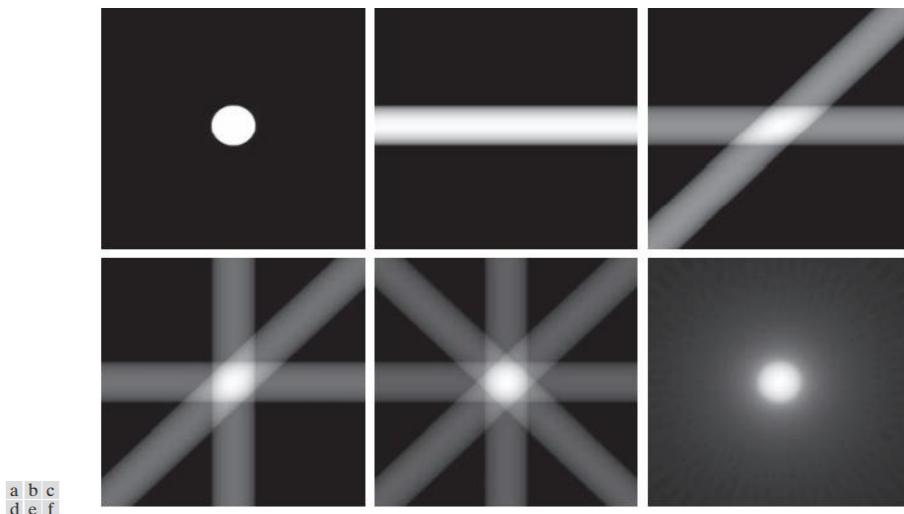
ما هیچ راهی برای تعیین اینکه آیا با یک شیء واحد یا تعداد زیادی از اجسام در امتداد پرتو سر و کار داریم ، نداریم ، اما بازسازی را با ایجاد تصویری تنها بر اساس این اطلاعات آغاز می کنیم. رویکرد این است که همانطور که در شکل ۵.۳۲ (c) نشان داده شده است ، سیگنال D-۱ در جهت مخالف که پرتو از آن آمده است ، به عقب بازگردانده شود. گاهی به فرآیند تولید مجدد یک سیگنال ۱ بعدی در یک ناحیه دو بعدی به عنوان لکه گیری مجدد طرح در سراسر منطقه گفته می شود. از نظر تصاویر دیجیتال ، این بدان معناست که همان سیگنال ۱ بعدی را در سراسر تصویر ، عمود بر جهت پرتو ، تکرار کنید. به عنوان مثال ، شکل ۵.۳۲ (ج) با تکثیر سیگنال D-۱ در تمام ستون های تصویر بازسازی شده ایجاد شد. به دلایل واضح ، رویکردی که توضیح داده شد ، پروژه عقب گرد نامیده می شود.



شکل ۵.۳۲ الف) منطقه مسطح با یک جسم واحد. (ب) پرتو موازی ، نوار آشکارساز و پروفایل سیگنال جذب ۱- D حس شده. (ج) نتیجه پیش بینی پروفیل جذب. (د) پرتو و آشکارسازها ۹۰ درجه می چرخند. (ه) طرح پشتی (و) مجموع (ج) و (ه) ، با مقیاس شدت.

این شدت محل تلاقی پرتوافشانی های عقب دو برابر شدت پیش بینی های فردی است. بعد ، فرض کنید که موقعیت جفت منبع-آشکارساز را مانند شکل ۵.۳۲ (d) ۹۰ درجه بچرخانیم. همانطور که در شکل ۵.۳۲ (e) نشان داده شده است ، تکرار روشی که در پاراگراف قبلی توضیح داده شده است ، یک تصویر برگشتی در جهت عمودی ایجاد می کند. ما بازسازی را با افزودن این نتیجه به پروژه قبلی ادامه می دهیم ، که منجر به شکل ۵.۳۲ (f) می شود. اکنون ، ما شروع به شک می کنیم که شی مورد نظر در مربع نشان داده شده وجود دارد ، زیرا دامنه آن دو برابر دامنه تصورات فردی است زیرا سیگنال ها اضافه شده اند. همانطور که در شکل ۵.۳۳ نشان داده شده است ، باید بتوانیم با مشاهده نماهای بیشتر به شیوه ای که توضیح داده شد ، بیشتر درباره شکل شی مورد نظر بیاموزیم. با افزایش تعداد پیش بینی ها ، قدرت دامنه پرتوافشانی های پیشین غیر متقاطع نسبت به قدرت مناطقی که چندین پروژه پشتی در یکدیگر تلاقی می کنند ، کاهش می یابد. اثر خالص این است که مناطق روشن تر بر

نتیجه تسلط خواهند داشت و پرتوافشانی های پشتی با چند تقاطع کم یا بدون پس زمینه با کوچک شدن تصویر برای نمایش محو می شوند. شکل ۵.۳۳ (f)، که از ۳۲ طرح عقب تشکیل شده است، این مفهوم را نشان می دهد. با این حال، توجه داشته باشید که در حالی که این تصویر بازسازی شده تقریبی مناسب برای شکل شیء اصلی است، تصویر با اثر "هاله" محو می شود، شکل گیری آن در مراحل پیشرونده در شکل ۵.۳۳ قابل مشاهده است. به عنوان مثال، هاله در شکل ۵.۳۳ (e) به عنوان "ستاره" ظاهر می شود که شدت آن کمتر از جسم، اما بیشتر از پس زمینه است. با افزایش تعداد نماها، شکل هاله دایره ای می شود، مانند شکل ۵.۳۳ (f). تار شدن در بازسازی CT یک مسئله مهم است که راه حل آن بعداً در این بخش مورد بررسی قرار می گیرد. در نهایت، ما از بحث شکل ها نتیجه می گیریم. ۵.۳۲ و ۵.۳۳ که پرتوافشانی های عقب ۱۸۰ درجه از یکدیگر تصویر آینه یکدیگر هستند، بنابراین ما باید فقط افزایش زاویه را در ناحیه دور یک دایره در نظر بگیریم تا همه پرتوافشانی های پشتی مورد نیاز برای بازسازی تولید شوند.



شکل ۵.۳۳ (الف) همانند شکل ۵.۳۲ (الف). (ب)-(ه) دوباره-آموزش با استفاده از ۱، ۲، ۳ و ۴ عقب-پیش بینی ۴۵ درجه فاصله (و) بازسازی با ۳۲ طرح پشتیبان با فاصله ۵،۶۲۵ درجه (به تار شدن توجه کنید).

مثال ۵.۱۴: پیش بینی های یک منطقه مسطح حاوی دو جسم.

شکل ۵.۳۴ بازسازی را با استفاده از پرتوافشانی های عقب در منطقه ای نشان می دهد که شامل دو جسم با خواص جذب متفاوت است (جسم بزرگتر دارای جذب بالاتری است). شکل ۵.۳۴ (ب) نتیجه استفاده از یک طرح پشتی را نشان می دهد. ما در این تصویر از پایین به بالا به سه ویژگی اصلی توجه می کنیم: یک نوار خاکستری افقی نازک که مربوط به قسمت بدون محصور شیء کوچک است، یک نوار روشن تر (جذب بیشتر) در بالای آن مربوط به مساحت مشترک هر دو شیء و یک قسمت فوقانی باند مربوط به بقیه جسم بیضوی است. شکل ۵.۳۴ (C) و (D) بازسازی را با استفاده از دو طرح به فاصله ۹۰ درجه و چهار پیش بینی به فاصله ۴۵ درجه به ترتیب نشان می دهد.