نظریه اعداد – احتمال

Subject: نظریه‌ی اعداد   Year: Month: Day:

$b|a \Leftarrow a=bq$ عدد صحیح a بر عدد صحیح $b\neq 0$ تقسیم پذیر می‌گوییم هرگاه $(q\in\mathbb{Z})$

☆ در حالت $b=0$ چون به ازای هر $q\in\mathbb{Z}$ ، $0=0\times q \Leftarrow 0|0$

تقسیم پذیری

ویژگی‌های تقسیم پذیری

$\forall a\in\mathbb{Z}$ ، $a|0$

$\pm 1|a$ ، $\pm a|a$ — هر عدد صحیح جز ۱ دارای حداقل ۴ مقسوم علیه صحیح دارد (a, $-a$, 1, -1)

$\forall a,b\in\mathbb{Z}$ و $a|b \Rightarrow \mp a|\mp b$

$a|b \xRightarrow{b\neq 0} |a|\le|b|$

$a|b$ و $b|a \Leftrightarrow a=\pm b$ یا $|a|=|b|$

$m\in\mathbb{Z}$ و $a|b \Rightarrow a|mb$ ← جای گردن

$\boxed{a|b , a|c \Rightarrow a|mb+nc}$ ★

$a|b$ و $b|a \Rightarrow a|c$

$a|b$ و $c|d \Rightarrow ac|bd$ ★

$m\in\mathbb{Z}$ ، $a|b \Leftrightarrow am|bm$

$ab|c \Rightarrow a|c$ و $b|c$

بخش پذیری توانی

$(a-b)q \leftarrow a-b|a^n-b^n$

$(a+b)q' \leftarrow a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$

$a+b|a^{2n}-b^{2n}$

$a,b\in\mathbb{Z}$ ، $a^m|b^n \xRightarrow{\begin{vmatrix} m & n \\ p & q\end{vmatrix}\ge 0} a^p|b^q$

الگوریتم تقسیم

اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی آنگاه اعداد یکتای $q,r\in\mathbb{Z}$ وجود دارند که $a=bq+r$ و $0\le r<|b|$

☆ اگر در یک تقسیم مقسوم و مقسوم علیه n برابر شوند خارج قسمت ثابت و باقی‌مانده n برابر می‌شود

اگر $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}$ —— $q=\left[\frac{a}{b}\right]$ ، $r=a-b\left[\frac{a}{b}\right]$

کاربرد

تعداد مضارب طبیعی b در بین اعداد کوچکتر یا مساوی a —— $\left[\frac{a}{b}\right]$

عضو ابتدای مجموعه $\{a-bx\ge 0 \mid x\in\mathbb{Z}\}$ برابر است با باقی‌مانده a بر b

از هر n عدد متوالی دقیقاً یکی مضرب n است.

حاصل ضرب n عدد متوالی به $n!$ بخش پذیر است.

مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است

جمع و ضرب زوج و فرد ها (چی؟)

اگر b یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا در فرم $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_0$ نشان داد که در آن $k \in \mathbb{N}$

$$n = (a_k a_{k-1} \dots a_0)_b$$

نمایش اعداد صحیح

★ در واقع بزرگترین رقم در مبنای b ، $(b-1)$ می‌باشد

اگر مبنا بزرگتر از b باشد اعداد بزرگتر از ۹ را با a=۱۰ ، b=۱۱ ، c=۱۲ ، d=۱۳ و ...

تبدیل مبناهایی که توانی از یکدیگرند —— اگر بخواهیم عددی را مستقیماً از مبنای b به مبنای b^n ببریم چون هر n رقم در مبنای b ، ۱ رقم در مبنای b^n است لذا n تا n تا جدا می‌کنیم و به مبنای ۱۰ می‌بریم

مثلاً: $(\underbrace{1}_{1}\underbrace{21}_{7}\underbrace{10}_{3})_3 = (173)_9$

تعریف —— هر عدد طبیعی جز ۱ که فقط به خودش و ۱ بخش‌پذیر باشد اول است

اعداد اول

★ هر عدد صحیح جز ۱ و ۱- حداقل بر یک عدد اول بخش‌پذیر است

★ اگر P اول و a و b اعداد طبیعی باشند —— $P = ab \xRightarrow{a<b} a=1, b=P$

★ اگر n عدد مرکب باشد آنگاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ دارد

★ $1\times2\times3\times5\times\dots\times P_n + 1$ یا عددی اول است یا عامل اول بزرگتر از P_n دارد

★ هر تعداد عدد طبیعی متوالی می‌توان نوشت —— $[(n+1)!+2 , (n+1)!+(n+1)]$

★ تنها عدد زوج اول عدد ۲ است (به چه دردی می‌خوره؟)

شکل‌های اعداد اول

هر عدد اول بزرگتر از ۲ به شکل —— $4k \pm 1$

هر عدد اول بزرگتر از ۳ به شکل —— $6k \pm 1$

★ برای سوالات چند عدد اول وجود دارد که ... به کار می‌رود

توابع مولد اعداد اول —— دیریکله ثابت کرد اگر $(a,b)=1$ بی‌نهایت عدد اول به شکل $an+b$ داریم

$3k+2$

★ $2P+1 = k^2$

$2P = k^2-1 = (k-1)(k+1)$

1 P

هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان بدون توجه به ترتیب به طور یکتا به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت.

$\alpha_p(n)$ ← برای عدد اول p ، $\alpha_p(n)$ بزرگترین توان p در عدد n است ← $p^{\alpha_p(n)} \| n$

قضیه بنیادی حساب

★ عدد $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ را مربع کامل می‌گویند هرگاه تمام عوامل اول تشکیل‌دهنده آن زوج باشد.

کاربرد

۱) تعداد حالت‌هایی که می‌توان عدد طبیعی $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ را به صورت ضرب دو عامل نسبت به هم اول نوشت ← $2^{k-1} = \frac{2^k}{2}$

۲) قضیه‌ی چبیشف (لاگرانژ) ← اگر p عددی اول و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\alpha_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right]$$

★ اگر $\alpha_m n!$ و $m = p_1 p_2$ برد تعداد عوامل عدد اول بزرگتر را حساب می‌کنیم

★ اگر p عددی اول باشد در این صورت تعداد عوامل p^m در عدد $n!$ ، $\left[\frac{\alpha_p n!}{m}\right]$

۳) تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد (τ) ← اگر n یک عدد طبیعی و تجزیه آن به صورت $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن از رابطه‌ی

$$\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$$

★ عددی مربع کامل است که تعداد شمارنده‌های مثبت n فرد باشد

ب.م.م

تعریف: عدد $d \in \mathbb{N}$ را ب.م.م $a, b \in \mathbb{Z}$ می‌نامند هرگاه اگر d مقسوم‌علیه a, b باشد باقی مقسوم‌علیه‌ها از d کوچکتر باشند (ارشد)

★ $a \sqcap b = (a,b) = d$

تعریف ← ب.م.م بین $a_1, a_2, \dots, a_n$ برابر است با بزرگترین عددی که هر a_i طبیعی باشد و هم را بشمارد

نکات

مجموعه‌ی $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه‌ی ضرایب d است ★ کوچکترین عضو d است

قضیه بزو ← فرض کنید a و b دو عدد صحیح هستند و وجود دارد p, q که ← $d = pa + qb$

این قضیه صرفاً وجودی است اما اگر $pa + qb = 1$ ← $(a,b) = 1$

$(p,q) = 1$

★ $(0, a) = |a|$ ، $(1, a) = 1$ ، $a \mid b \Leftrightarrow (a,b) = |a|$

★ $(a,b) = (a, ka+b)$ ، $|k|(a,b) = (ka, kb)$

★ $(a,b)^n = (a^n, b^n)$

★ $a = bq + r \Leftrightarrow (a,b) = (b,r)$

خارج قسمت	q_1		۱	۵	۲
a (مقسوم علیه ها)	b	۴۰۳	۳۴۱	۶۲	۳۱
باقیمانده ها	$r_1 \neq 0$		۶۲	۳۱	۰

ب م م

الگوریتم اقلیدس

با این الگوریتم می توان r_n ها را یافت

$(xa+yb, za+tb) \,\Big|\, \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} (a,b)$ ✫

مشابه سازی — دو عدد نسبت به هم اول یعنی «$(a,b)=1$» یا «$ma+nb=1$»

نکات

- $(a, b_1 b_2 \cdots b_k) = 1 \Rightarrow (a,b_1) = (a_2,b) \cdots = 1$ ✫
- $(a,b)=1$ و $c \mid a+b \Rightarrow (a,c) = (a,b) = 1$ ✫
- $(a,b)=1 \Leftrightarrow (a^n, b^m) = 1$ ✫
- $(a,b)=1 \Rightarrow (a \mp b, ab) = 1$ و $(a^n \mp b^n, ab) = 1$ ✫
- $a \mid c$ و $b \mid c$ و $(a,b)=1 \Rightarrow ab \mid c$ ✫
- $(a,b) = d \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ $\quad$ a یا $b \neq 0$ ✫
- $(a,b)=m$ و $(a,c)=n$ و $(b,c)=1 \Rightarrow (a,bc) = mn$ ✫
- $p \nmid a \Leftrightarrow (a,p)=1$ و $p \mid a \Leftrightarrow (a,p) = p$ ✫
- دو عدد متوالی نسبت به هم اولند $(n,n+1)=1$ ✫

لم اقلیدس/لم گاوس — $a \mid bc$, $(a,b)=1 \Rightarrow a \mid c$

تابع حسابی اویلر ϕ — تعداد اعداد کوچکتر مساوی n که نسبت به n اول اند

$$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

نکات

$\phi(p) = p-1$

$\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)\,\dfrac{d}{\phi(d)}$ ✫

$(m,n)=1 \Rightarrow \phi\, mn = \phi\, m\, \phi\, n$ ✫ ✫

Subject Year: Month: Day:

عدد c را مضرب مشترک دو عدد a و b نامند هرگاه: $a|c$ و $b|c$

$a[\,]b = [a,b] = m$ ← کوچکترین مقدار c را m می‌نامند و به آن کوچکترین مضرب مشترک می‌گویند

* ک‌م‌م دو عدد برابر است عوامل مشترک با توان بیشتر و عوامل غیرمشترک

* ک‌م‌م $a_1, a_2, \dots, a_n$ عبارت است از کوچکترین عدد صحیح که بر همه آن‌ها بخش‌پذیر باشد

ک‌م‌م

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow [a,b]=|ab|$$

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]]$$

$$\left.\begin{array}{l} a|c \\ b|c \end{array}\right\} \Rightarrow [a,b]\,|\,c$$

$$(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)] \quad \text{و} \quad [a,(b,c)] = ([a,b],[a,c])$$

نکات

$$[ka,kb] = |k|\,[a,b]$$

$$[a^k + b^k] = [a+b]^k$$

$$(a,b) = [a,b] \Leftrightarrow |a|=|b|$$

$$a|b \Leftrightarrow [a,b] = |b|$$

$$[a,(b,c)] = |a| \quad \text{و} \quad (a,[b,a]) = |a|$$

$$[a,b] = a'b'd$$

$$[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$$

مشابه‌سازی

فرض می‌کنیم $m \in \mathbb{N}$ دو عدد a و b را به پیمانه‌ی m همنهشت گویند هرگاه $m | a-b$ —— $a \overset{m}{\equiv} b$

★ هم نهشتی یک رابطه‌ی هم ارزی است و مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کند. پیمانه‌ی m ، $\mathbb{Z}$ را به m دسته افراز

★ هر m عدد متوالی یک دسته‌ی کامل مانده‌ها به پیمانه‌ی m است

★ بنابر تعریف اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ —— $a=mk+b$ و $[b]_m=\{b+mk | k\in\mathbb{Z}\}$

هم نهشتی

ویژگی‌های

افزودن مقدار مضرب پیمانه —— $a \overset{m}{\equiv} b \quad a+mk \overset{m}{\equiv} b+mk'$

ترکیبی با تقسیم پذیری —— $a \overset{m}{\equiv} r \quad a=mk+r$

همنهشتی‌ها با پیمانه برابر را می‌توان جمع کرد —— $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1 \quad a_2 \overset{m}{\equiv} b_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2 \\ a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2 \text{ (ضرب کرد)} \end{cases}$

یک مقدار ثابت را می‌توان با هر دو طرف جمع کرد —— $a \overset{m}{\equiv} b \quad a\mp c \overset{m}{\equiv} b\mp c$

یک مقدار ثابت را می‌توان در هر دو طرف (پیمانه) ضرب کرد —— $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc , ac \overset{mc}{\equiv} bc$

تقسیم با شرط تقسیم هنگ بر $d=(m,c)$ —— $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m/d}{\equiv} b$

یک هم نهشتی با جایگزینی مقسوم علیه های هنگ هنوز برقرار است —— $c|m , a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a \overset{c}{\equiv} b$

★ اگر $(a,b)=1$ باشد $mn\equiv$

زمانی که a و b بر هنگ m و n همنهشت باشند بر $[n,m]$ هم هستند —— $a\overset{m}{\equiv}b , a\overset{n}{\equiv}b \Rightarrow a \overset{[n,m]}{\equiv} b$

قضایا

اویلر —— اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد $(a,m)=1$ آنگاه —— $a^{\phi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$

نتیجه —— m و n نسبت به هم اول —— $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$

p,q اعداد اول اند —— $p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$

فرما —— اگر p عدد اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $(a,p)=1$ —— $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$

نتیجه —— p عدد اول باشد

ویلسون —— اگر p عددی اول باشد داریم $\overset{p>1}{\Longleftrightarrow}$ $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$

★ $\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{4,20,25,50,100}{\equiv} \overline{a_2a_1}$

$\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{4}{\equiv} 2a_2+a_1$ ★ — ۴

$\overline{a_n\cdots a_3a_2a_1} \overset{8,125,1000}{\equiv} \overline{a_3a_2a_1}$ — ★

آزمون بخش‌پذیری

$a_n\cdots a_2a_1 \overset{6}{\equiv} a_1+4(a_n+\cdots a_2)$ — ۶

$7\times11\times13=1001$ و $1000 \overset{1001}{\equiv} -1$

$\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{7,11,13}{\equiv} \overline{a_3a_2a_1}-\overline{a_6a_5a_4}+\cdots$ — ۱۳، ۷

$\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{27\times37=999}{\equiv} \overline{a_1a_2a_3}+\overline{a_6a_5a_4}+\cdots$ — ۳۷، ۲۷

$\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{33,99}{\equiv} \overline{a_2a_1}+\overline{a_4a_3}+\overline{a_5a_6}$ — ۳۳، ۹۹

$\overline{a_n\cdots a_2a_1} \overset{11}{\equiv} a_1-a_2+a_3-\cdots$ — ۱۱ ★

آزمون اعداد اول

مربع کامل‌ها به $\boxed{۲، ۳، ۷، ۸}$ ختم نمی‌شوند

مربع کامل به تعدادی فرد صفر ختم نمی‌شود

اگر به ۵ ختم شود باید به ۲۵ ختم شود ۶۲۵

★ اگر یکان آن ۶ باشد دهگان فرد است

★ مربع کامل عدد فرد به شکل $8k+1$

★ اگر مربع کاملی مضرب p باشد مضرب p^2 هم هست [p اول]

رقم یکان

۰، ۱، ۵، ۶ — در هر توانی بدون تغییر می‌ماند

4^n — n فرد — ۴

n زوج — ۶

9^n — n فرد — ۹

n زوج — ۱

★ اعدادی مانند ۲، ۸، ۳، ۷ را به ترتیب به توان ۲ می‌رسانیم تا به ۴، ۴، ۹، ۹ تبدیل شوند

معادلات

هم‌نهشتی خطی

معادله‌ای به شکل $ax \overset{m}{\equiv} b$ را گویند

شرط وجود جواب — $(a,m) \mid b$

جواب کلی — یک جواب x_0 را می‌یابیم $\boxed{x = x_0 + \frac{m}{d}k}$; $d = (a,m)$

سیاله خطی

معادله‌ای به شکل $ax+by=c$ را که هم ارز $ax \overset{b}{\equiv} c$ است

جواب کلی —

$$x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}k$$

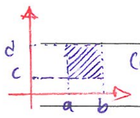
$$y = y_0 - \frac{a}{(a,b)}k$$

Subject Year: Month: Day:

n تایی مرتب — دنباله‌ی متشکل از n شیء با ترتیب معین

ضرب دکارتی

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ — واضح است که جابجایی ندارد



$(a,b) \times (c,d)$

نمودار — این مجموعه روی $\mathbb{R}^2$ نمایش داده می‌شود [x بین a و b]، [y بین c و d]

$(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$

$(A \times B) \Delta (A \times C) = A \times (B \Delta C)$

* ضرب دکارتی بر روی $\cap$ $\cup$ $-$ Δ توزیع‌پذیر است

نکات — ** $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2 = A \times A \cap B \times B = A^2 \cap B^2$

عدد اصلی (تعداد اعضا) —

$|A \times B| = |A||B| \Rightarrow |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2$

$|(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$

$|(A \times B) - (B \times A)| = |A||B| - |A \cap B|^2$

$|B^2 - A^2| = |B^2| - |A \cap B|^2$ *

رابطه

رابطه‌ی در ضرب دکارتی A و B به صورت $R \subseteq A \times B$ است — if $(a,b) \in R$ aRb

دامنه — برد

* تفاضل، اشتراک و اجتماع رابطه‌ها مانند مجموعه‌ها است و متمم آن R' [عضوهایی از کل] است که فاقد R است

* رابطه‌ی معکوس R^{-1} یعنی عوض کردن جای x و y — $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ جای دامنه و برد عوض می‌شه

$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ ، $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ ، $(R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$

ترکیب

اگر $R_1 = A \times B$, $R_2 = B \times C$ $R_2 O R_1 = A \times C$ *

aR_1b bR_2c $a R_2 O R_1 c$ *

$R O R^{-1} = I_{D_{R^{-1}}}$ $R^{-1} O R = I_{D_R}$ *

$R O R = R^2$ *

$a \xrightarrow{} \boxed{R} \xrightarrow{} \boxed{S} \xrightarrow{} b$ (R^{-1}, S^{-1}) $(S O R)^{-1} = R^{-1} O S^{-1}$ *

نمودار

* با توجه به ضابطه‌ی رابطه، صفحه مختصات آن را رسم می‌کنیم

* به دامنه دقت شود $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$

نمودار پیکانی — X

$M(R) = [m_{ij}]_{n\times n}$ $\quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & a_i \not R a_j \\ 1 & a_i R a_j \end{cases}$ تعریف

$M(R)=[1]_{n\times n}$ ماتریس رابطه $R=A\times A$ — $M(R)=0$ ماتریس رابطه $R=\emptyset$ *

$a \to b \Rightarrow b \to a$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ — $(M(R))^T = M(R^{-1})$ *

$M(R) + M(\bar{R}) = [1]_{n\times n}$ *

رابطه و ماتریس

$R_1 \subset R_2$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ — زیر مجموعه بودن ماتریس

$0+1 = 1+0 = 1+1 = 1$ — جمع — اعمال بولی

$1\odot 1 = 1$ $\quad 0\odot 0 = 1\odot 0 = 0\odot 1 = 0$ — ضرب

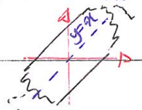
ضرب بولی ماتریس — مانند ضرب معمولی آن است با دستور بالا

اشتراک ضرب بولی مولفه به مولفه $A\wedge B = a_{ij} \odot b_{ij}$

اجتماع جمع بولی مولفه به مولفه $A \vee B = a_{ij} + b_{ij}$

اکسپرس ROR

$aRa \Leftrightarrow I \subseteq R$ — یک خاصیت وجودی است و باید یک عضو از I_A یعنی دامنه A از آن چیز ببرد

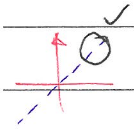


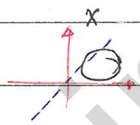
* نمودار آن تمام خط $y=x$ را باید بپوشاند — بازتابی

$I_A \ll M(R)$ — شرط ماتریس

اگر aRb باید bRa — $R=R^{-1} \Rightarrow R\neq\emptyset$

* در واقع خود رابطه تقارنی به صورت یک است قرینه هاشها





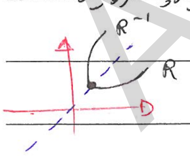
* نمودار آن نسبت به خط $y=x$ متقارن است — تقارنی

شرط ماتریس — $M(R^{-1}) = M^T(R) = M(R)$ (ماتریس متقارن)

اگر aRb و bRa باید حتماً $a=b$ — $R\cap R^{-1} \subseteq I_A$

* هیچ ناسازگاری با تقارنی ندارد در واقع یک رابطه می تواند — پاد تقارنی - تقارنی ، غیر پاد تقارنی غیر تقارنی ، تقارنی و پاد تقارنی باشد

* رابطه ای که هم پاد تقارنی و هم تقارنی است حتماً ترایایی هم هست — I_A — پاد تقارنی



نمودار آن به شکلی است که R و R^{-1} اشتراک نداشته باشند جز روی $y=x$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ — $M^T(R) \wedge M(R) = I_A$ — شرط ماتریس

خواص رابطه

اگر aRb و bRc باید aRc — $ROR \subset R$

* این خاصیت به مانند پاد تقارنی برقرار است تا زمانی که خراب شود — تعدی ترایایی

$\ll$ روش اکسپرس و چک کردن — $M^{(2)}(R) \ll M(R)$ — شرط ماتریس

Subject Year: Month: Day:

احتمال

آزمایشی است که نتیجه اش معلوم نباشد ولی نتیجه های ممکن آن مشخص باشد

اصول موضوع کولموگروف

- احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است
- $P(S)=1$
- اگر A_1 و A_2 و ... و A_n دنباله‌ی متناهی ودوبه‌دو ناسازگار باشند $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = A_1 + A_2 + ...$

احتمال هم‌شانسی در فضای گسسته (کلاسیک)

- اگر S دارای n برآمد و تابع احتمال به هر برآمد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد [شرط کلاسیک]
- اگر A در این فضای نمونه دارای m برآمد باشد ← $P(A)=\frac{m}{n}$
- * در واقع هر احتمال هم‌شانسی فراوانی نسبی مشخص‌کننده احتمال است

← قید "متوالیاً" در بیرون کشیدن مهره از جعبه ترتیب می‌دهد $\boxed{n!}$

در حل مسائل احتمال فهم درست صورت مسئله و تبدیل آن به جبر بسیار مهم است

قوانین احتمال

احتمال جبری:

- حداقل یکی از A,B رخ دهد ← $A \cup B$
- A,B باهم رخ دهند ← $A \cap B$
- فقط A یا B رخ دهد نه هردو ← $A \Delta B$
- A رخ دهد B رخ ندهد ← $A-B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(\bar{A})=1-P(A) \;*$$

← * در مسائلی که حداقل و حداکثر می‌خواهد کاربرد دارد

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

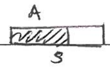
$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)+2P(A\cap B)$$

انواع پیشامد

- ناسازگار: اگر A و B نتوانند باهم رخ دهند $B\cap A=\emptyset$ ← $P(A\cap B)=0$
- سازگار: دو پیشامدی که می‌توانند باهم رخ دهند
- مستقل: اگر A و B اثری روی هم نگذارند یعنی رخ دادن یا رخ ندادن یکی احتمال دیگری را تغییر ندهد آن دو پیشامد مستقل اند ← $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- * توجه به استقلال پیشامدها حل سوال را فوق العاده آسان می‌کند

احتمال غیرهم‌شانسی در فضای گسسته

- مجموع احتمال برآمدها ۱ است ← $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)=1$
- حل این سوالات بسیار ساده بوده و از $P(A)=\frac{m}{n}$ غیرمنطقی جلو می‌رود



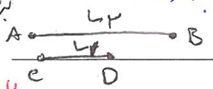
$P = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت کل}}$ — $P(A) = \frac{\text{اندازه یا اندازه مطلوب آن } A}{\text{اندازه کل}}$

* احتمال رخ داد پیشامدی با بعد کمتر از فضای نمونه برابر صفر است

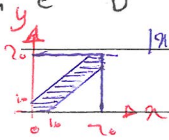
* استفاده از خودش در این مسائل بسیار کاربردی است مخصوصاً اگر ضابطه دهد

احتمال پیوسته

برش AB در این مسئله مثلث



$\frac{L_1}{L_2}$ — قضیه‌ی چهار یا شش — تیپ‌های پرکاربرد



$|x-y|<10$

بازه‌ی مربعی یا تصادفی — دیدار

ضلع‌های مطلوب را مشخص و مساحت دلخواه

از نتیجه‌ی آزمایش اول مطمئن هستیم در مورد دوم حالت مطلوب را جستجو می‌کنیم

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ — در واقع فضای نمونه را با شرط کوچک می‌کنیم

$P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C)$ — نکات — احتمال شرطی

$P(A|\bar{A}) = 0$

$P((A\Delta B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - 2P((A\cap B)|C)$ *

هر دو آزمایش تصادفی‌اند و در مورد اول و دوم به دنبال حالت مطلوب هستیم

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B|A)\cdots$ این قاعده در واقع مرحله به مرحله احتمال را بررسی می‌کند — احتمال ضربی

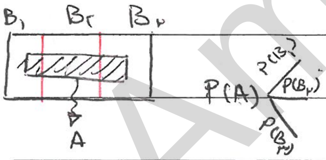
* در خارج کردن مهره‌ها اگر در مورد رنگ مهره‌های اول و دوم چیزی ندانیم مثل آن است که آن‌ها را خارج نکرده‌ایم

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ — شرط استقلال — پیشامد مستقل

* اگر A,B مستقل و ناسازگار باشند $P(A)=P(B)=0$

$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$

$P(A\cup B\cup C) = 1 - P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$

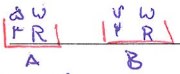


با حالت‌بندی پیشامد اول پیشامد دوم را بررسی می‌کنیم

نحوه‌ی محاسبه با توجه به حالت اتفاق افتاده

احتمال کل

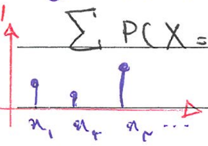
از نتیجه‌ی آزمایش دوم با خبر هستیم و حالت مطلوب را در آزمایش اول می‌خواهیم



مثلاً می‌دانیم یکی برداشتیم سفید آمده احتمال این که از A باشد؟ — تقدیر

تابع جرم احتمال یک متغیر گسسته X تابعی است هر یک از مقادیر X یعنی $x_1, x_2, \ldots$ را به یک احتمال نسبت می‌دهد

$\sum P(X=x_i)=1$ و $i=1,2,\ldots,n$ ، $0\le P(X=x_i)\le 1$ — ویژگی



در این مسائل x را می‌گویند چیست و تابع را می‌خواهند — متغیر تصادفی گسسته

یا تابع می‌دهند و شرط تابع احتمال بودن می‌خواهند $\frac{a}{1-q}$ هندسی

x_i	0	1
p	q	p

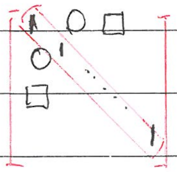
جدول احتمال توزیع دو برآمد پیروزی یا باخت — آزمایش دو حالته را امتحان می‌نامند

$P(X=i) = \begin{cases} p^i q^{1-i} & i=0,1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ — تابع احتمال — پرتاب سکه — احتمال

احتمال

Subject

Year: Month: Day:



قسمت بازتابی

شمارش روابط:

- تعداد روابط از مجموعه m عضوی به n عضوی —— 2^{mn}
- تعداد روابط روی A —— 2^{n^2}
- روابط بازتابی روی A —— 2^{n^2-n}
- روابط تقارنی روی A —— $2^{\frac{n^2-n}{2}} \times 2^n$
- روابط پادتقارنی روی A —— $3^{\frac{n^2-n}{2}} \times 2^n$
- روابط متقارن و پادمتقارن روی A —— 2^n
- روابط بازتابی ـ متقارن ـ پادمتقارن —— 1

رابطه هم‌ارزی:

رابطه‌ای که تقارنی، بازتابی و ترایایی باشد هم‌ارزی است

اگر R هم‌ارزی باشد R^{-1} و $R \circ R$ هم هم‌ارزی است

هر رابطه هم‌ارزی مجموعه A را به دسته‌های مجزا که هر کدام رابطه هم‌ارزی‌اند تقسیم می‌کند

دسته‌ها —— * دسته‌ها را با A/R ، $[a]_R$ و یا به صورت خلاصه $[a]$ که معمولا a کوچکترین عضو آن بازه است

ویژگی —— کلاس هم‌ارزی مخالف $\emptyset$ زیرا حداقل شامل نماینده کلاس هست

هر دو کلاس هم‌ارزی یا مساوی‌اند یا از هم جدا ⟸ اجتماع کلاس‌ها مجموعه کل

* برای به دست آوردن اعضای کلاس $[a]$ —— $[a]=\{x \mid xRa\}$

افراز:

$A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n$

افراز خاصیت مهم هم‌ارزی است

اگر رابطه R را به دسته‌های هم‌ارزی تقسیم کنیم تعداد اعضا —— $|R| = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2$

* مجموعه ۱ عضوی ۱ افراز، ۲ عضوی ۲ افراز، ۳ عضوی ۵ افراز، ۴ عضوی ۱۵ افراز، ۵ عضوی ۵۲ افراز —— در عبارت به عدم شمول و شمول نیاز است

با افزایش کلاس‌های هم‌ارزی ↑ تعداد اعضا ↓ ، کلاس‌های هم‌ارزی ↓ تعداد اعضا ↑

گراف جهت‌دار ـ خواص:

جهت خود حلقه‌ها به برد رابطه می‌برد

- بازتابی —— طوقه دارد
- تقارنی —— اگر $a \to b$ باید $b \to a$
- پادمتقارن —— اگر $a \to b$ نباید $b \to a$
- ترایایی —— بهتر است ماتریس رابطه را تشکیل و روی آن بحث کنیم به خصوص برای ROR ولی تعریف مشخصی دارد می‌توان از روی گراف تشخیص داد