نام کتاب: بنیان‌های هندسه osnovania Geometrii
نویسنده: و. آی. کوستین V. I. Kostin
مترجم: پرویز شهریاری - ۱۳۸۱ - نشر مهاجر

تذکرات:

۱) در این متن، منظور از «مقدمات» همان کتاب «اصول» یا Elements نوشته اقلیدس است.

۲) در این متن، منظور از آکسیوم به معنای اصل موضوع، همان «بنداشت» است.

۳) در این متن، منظور از مفهوم «بین» همان «میانبود» است.

۴) در این متن، منظور از مفهوم «همنهشتی» همان «قابلیت انطباق» است.

۵) در این متن، منظور از «ولفگانگ بایایی» همان «فارکاش بویویی» است.

۶) در این متن، منظور از «هندسه مطلق» همان «هندسه نتاری» است.

۷) 〃 〃 〃 «بی‌تناقضی اصل موضوع‌ها» همان «سازگاری بنداشت‌ها» است.

۸) 〃 〃 «مرابطه وابسته بودن» همان «رابطه وقوع» است.

بخش اول

اندکی تاریخ

§ ۱. هندسه پیش از اقلیدس

«مقدمات» مشهور **اقلیدس**، که باید آن را نخستین تلاش برای طرح و تنظیم هندسه با روش قیاسی دانست و به عنوان نمونه‌ی روشنی از طرح منطقی دانش، بیش از دو هزار سال دوام آورد، برداشتی خلاق و هوشمندانه ازکارهای فکری انسان است که در سده‌های پیش از آن انجام گرفته بود. برای این که تا حدی روشن شود، این اثر فرهنگ باستانی، بر پایه‌ی چه زمینه‌ای پدید آمد، به صورتی کوتاه و فشرده درباره‌ی کارهای ریاضی‌دانان پیش از **اقلیدس** صحبت می‌کنیم.

در بررسی‌های تاریخی، اغلب به آگاهی‌های جسته گریخته‌ای اشاره می‌کنند که، به یاری آن‌ها، بازسازی چهره‌ی واقعی تاریخ، بسیار دشوار وگاه ناممکن می‌شود. زادگاه هندسه را، بابِل و مصر به شمار می‌آورند. به وسیله‌ی **پروکلوس** (مفسر یونانی **اقلیدس**)، که درباره‌ی او صحبت خواهیم کرد، تکه‌ای از یک نوشته‌ی کهن به ما رسیده است که این گونه آغاز می‌شود:

> از آن جا که در این جا باید به آغاز دانش‌ها و هنرها بپردازیم، آگاهی می‌دهیم که بنا به بسیاری گواهی‌ها، هندسه را مصری‌ها و برای اندازه‌گیری زمین کشف کردند. این اندازه‌گیری، به دلیل برآشفتگی گاه‌به‌گاه رود نیل ضرورت داشت که هر بار مرزها را می‌شست. شگفتی ندارد که این دانش هم، همچون دیگر دانش‌ها، زاییده‌ی نیازهای انسان است؛ و هر دانشی که پدید می‌آید، اندک اندک از شکل ابتدایی و ناقص خود، به سمت کمال می‌رود. در آغاز به صورتی قابل لمس و از راه درک حسی پدید می‌آید و سپس، به تدریج به موضوعی برای

بررسی تبدیل می‌شود و سرانجام، به صورت ذخیره‌ای از عقل انسانی در می‌آید[1].

آشنایی ما با ریاضیات مصری، بیش از همه بر مبنای دو پاپیروس است: **پاپیروس آهمس**[2] که به سال‌های ۲۰۰۰ تا ۱۷۰۰ پیش از میلاد تعلق دارد و شامل مساله‌هایی از حساب و هندسه (درباره‌ی اندازه‌گیری مساحت‌ها و حجم‌ها) است؛ و دوم، **پاپیروس مسکو** (عنوان این پاپیروس، که در موزه‌ی هنر در مسکو نگه‌داری می‌شود، برای ما معلوم نیست، زیرا آغاز آن، از بین رفته است).

با بررسی این پاپیروس‌ها، می‌توان طرحی از هندسه‌ی مصری را مجسم کرد. مصری‌ها می‌توانستند، مساحت مستطیل، مثلث و ذوزنقه را، به همان ترتیبی که امروز معمول است، پیدا کنند. آن‌ها مساحت دایره را برابر مساحت مربعی می‌گرفتند که طول ضلع آن برابر $\frac{8}{9}$ طول قطر دایره باشد؛ و این به معنای آن است که برای عدد «پی»، مقدار ۳٫۱۶۰۵ را در نظر می‌گرفتند. مصری‌ها می‌دانستند، چگونه اندازه‌ی زاویه‌های حاده را در مثلث قائم‌الزاویه، به یاری نسبت طول ضلع‌های پهلوی زاویه‌ی قائمه به دست آورند؛ و این، به معنای آن است که با مفهوم تشابه در شکل‌های هندسی آشنا بودند. به‌عنوان واحد مساحت، مربعی را در نظر می‌گرفتند که طول ضلع آن واحد باشد. یکی از موفقیت‌های درخشان مصری‌ها، یافتن دستور درستِ محاسبه‌ی حجم هرم ناقص با قاعده‌های مربعی شکل است:

$$v = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

که در آن، a و b طول ضلع‌های دو قاعده و h طول ارتفاع هرم است (دستور را از پاپیروس مسکو برداشته‌ایم).

آیا مصری‌ها، از قضیه‌ای که به نام **فیثاغورس** مشهور شده است، آگاهی داشتند و آیا از مثلث ریسمانی که طول ضلع‌های آن برابر ۳، ۴ و ۵ باشد، برای رسم زاویه‌ی ۹۰ درجه استفاده می‌کرده‌اند، به درستی معلوم نیست (داستان مربوط به استفاده از چنین مثلثی برای رسم دو خط راست عمود برهم در روی زمین، به ظاهر به‌وسیله‌ی **کانتور** ارائه شد و از آن به بعد، به تمام کتاب‌های مربوط به هندسه سرایت کرد).

بررسی‌ها نشان داده است که بابلی‌ها هم، در زمینه‌ی هندسه، از مصری‌ها عقب‌تر نبودند. در ضمن، آن‌ها بسیاری از مساله‌ها را با روشی حل می‌کردند که شامل عنصرهای نخستین جبر بود.

همین بررسی‌ها روشن کرد، تصور پیشین مورخان، مبنی بر این‌که ریاضیات پیش از یونان، تنها متکی بر تجربه و بنابراین همراه با خطاهای بزرگ بوده است، درست نیست. به سختی می‌توان باور کرد، دستور پیچیده‌ای همچون دستور محاسبه‌ی حجم هرم ناقص، تنها از راه تجربه و بدون کار جدی نظری به دست آمده است.

۱. این جمله‌ها از اُدِموس رودسی (سده‌ی چهارم پیش از میلاد) فیلسوف پیرو مکتب ارسطو است.

۲. عنوان این پاپیروس، چنین است: «دستورهایی برای زدودن تاریکی‌ها و فاش کردن رازهای چیزها».

پیشرفت بعدی هندسه در یونان انجام گرفت و در دوره‌ای کم و بیش کوتاه (از سده‌ی هفتم تا سده‌ی سوم پیش از میلاد) و در مکتب‌های فلسفی **تالس**، **فیثاغورس**، **دموکریت**، **افلاتون** و **اقلیدس** به دانشی نظری تبدیل شد و خصلتی انتزاعی پیدا کرد.

معمول است آغاز دوران تکامل هندسه در یونان را، با نام **تالس** مربوط می‌کنند که از شهر «میلِت» برآمده است (سال‌های ۶۳۵ تا ۵۴۸ پیش از میلاد) و پایه‌گذار دانش و فلسفه‌ی یونان به شمار می‌رود. در زمینه‌ی هندسه (از جمله به اعتبار روایت **پروکلوس**)، کشف قائمه بودن زاویه‌ی محاط در نیم دایره، برابر بودن زاویه‌های قائمه و برابر بودن زاویه‌های مجاور به قاعده را در مثلثی که دو ساق برابر داشته باشد، به او نسبت می‌دهند. همچنین **تالس** می‌دانست، مثلث به وسیله‌ی یک ضلع و دو زاویه‌ی مجاور آن معین می‌شود، و بر همین اساس بود که توانست ارتفاع بلندی‌ها را از روی سایه‌ی آن‌ها، همچنین فاصله‌ی یک نقطه را تا نقطه‌ای که در دسترس نیست، پیدا کند.

با این همه، بنا به روایت **پروکلوس**، فیثاغوریان، یعنی پیروان مکتب فیثاغورس (که در بین سال‌های ۵۷۰ و ۴۷۱ پیش از میلاد می‌زیست) توانستند به هندسه خصلت یک دانش واقعی بدهند و قضیه‌های آن را به صورتی علمی و غیرمادی بررسی کنند؛ **فیثاغورس**، کمیت‌های گنگ و روش ساختن شکل‌های کیهانی[1] را کشف کرد.

این کشف‌ها را به مکتب فیثاغوری نسبت می‌دهند: ۱) قضیه‌ی مربوط به مجموع زاویه‌های مثلث؛ ۲) بخش کردن صفحه به چندضلعی‌های منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظم)؛ ۳) روش هندسی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم (با استفاده از مساحت‌ها)؛ ۴) ساختن یک چندضلعی، هم‌ارز با چندضلعی مفروض و در ضمن، متشابه با یک چندضلعی دیگر؛ ۵) وجود پاره خط‌های راست اندازه‌ناپذیر؛ ۶) وجود پنج نوع چندوجهی منتظم؛ ۷) قضیه‌ی فیثاغورس؛ ۸) ویژگی‌های دایره و کره که به ماکزیمم و می‌نیمم مربوط می‌شوند. کشف اخیر را می‌توان آغازی برای بررسی مساله‌ی «هم پیرامونی» دانست.

کشف کمیت‌های اندازه‌ناپذیر، که به **هیپازوس** یکی از شاگردان **فیثاغورس** منسوب است، به ظاهر بحرانی در مکتب فیثاغوری پدید آورد. پیش از این کشف، فیثاغوریان باور داشتند، نسبت طول‌های دو پاره‌خط راست را می‌توان با نسبت دو عدد درست نشان داد. به احتمالی، فیثاغوریان در تلاش برای نجات نظریه‌ی مقایسه‌ی پاره‌خط‌های راست، به این فرض متوسل شدند که، پاره‌خط‌های راستی که قابل مقایسه نیستند، مقیاس مشترکی با اندازه‌ی بی‌نهایت کوچک دارند: ساده‌ترین عنصری که باید آن را با نقطه یکی دانست. همین نقطه‌های ایده‌آلی ریاضی بود که، به اعتقاد فیثاغوریان، عنصرهای جهان مادی را می‌سازند. دشواری مربوط به کمیت‌های مقایسه‌ناپذیر، بعدها و با نظریه‌ی هوشمندانه‌ی «نسبت‌ها»، به وسیله‌ی **اودوکس** حل شد (که ما به آن خواهیم پرداخت).

۱. در دوره‌های باستانی، چندوجهی‌های منتظم را، شکل‌های کیهانی می‌نامیدند.

دموکریت (بین ۴۷۰ تا ۳۷۰ پیش از میلاد)، فرهنگی همه جانبه داشت. **ارسطو** درباره‌ی او می‌گوید، «**دموکریت** درباره‌ی همه‌چیز اندیشید و هر چیزی را بررسی کرد». او در واقع، درباره‌ی فلسفه، ریاضیات، فیزیک، صنعت، روش‌شناسی، جانورشناسی، هنر و خیلی زمینه‌های دیگر چیز نوشت. **دموکریت**، اساس ساختمان جهان را، اتم‌ها و خلاء می‌دانست که این اتم‌ها، جاودانه در آن حرکت می‌کنند. اتم‌ها یا «تقسیم‌ناپذیرهای» **دموکریت**، عنصرهایی مادی‌اند که بخشی کوچک‌تر از خود ندارند، ولی در عین حال، دارای حداقل درازا هستند. به این ترتیب، اگر تقسیم‌ناپذیرهای فیثاغوری نقطه‌های غیرمادی بودند که طولی ندارند، تقسیم‌ناپذیرهای **دموکریت**، عنصرهایی مادی و دارای اندازه‌اند. تاریخ ریاضیات گواهی می‌دهد، دیدگاه **دموکریت**، در پیشرفت هندسه نقشی جدی داشت. خودِ **دموکریت**، با روش تقسیم‌ناپذیرها، قضیه‌هایی درباره‌ی حجم هرم و حجم مخروط کشف کرد؛ و **ارشمیدس** به یاری همین روش، قضیه‌های بسیاری درباره‌ی مساحت‌ها و حجم به دست آورد. **دکارت**، **گالیله**، **کاوالیری** و **پاسکال**، هریک به گونه‌ای از تقسیم‌ناپذیرهای **دموکریت** استفاده و زمینه را برای کشف بی‌نهایت کوچک‌ها آماده کردند.

در مکتب افلاتون (۴۲۹-۳۴۸ پیش از میلاد)، احترام بی‌اندازه‌ای برای ریاضیات قایل بودند. **افلاتون**، برای یادگیری فلسفه، آشنایی با هندسه را لازم می‌دانست. در این باره روایت می‌کنند (که البته، ممکن است روایتی افسانه‌ای باشد) که، بر سر در آکادمی او نوشته شده بود: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود». ولی در هرحال روشن است، کشش خاصی به ریاضیات داشت و همه را به یادگیری آن سفارش می‌کرد. به ظاهر، زیر تأثیر **افلاتون** بود که بعد از سده‌ی چهارم پیش از میلاد، در تمامی دوران باستان و سپس در روم، آشنایی کم و بیش جدی با «مقدمات» **اقلیدس**، برای آموزش‌های رسمی، لازم شمرده می‌شد.

می‌گویند افلاتون به کروی بودن زمین، ماه و خورشید اعتقاد داشت. این اعتقاد او، به‌ظاهر بر این اساس بود که، کره را کامل‌ترین شکل هندسی می‌دانست.

ولی ارزش کار **افلاتون** را در زمینه‌ی هندسه، نباید به تعداد قضیه‌هایی مربوط کرد که او کشف کرده است (هواداران **افلاتون**، به تقریب همه چیز را به او نسبت می‌دهند، ولی در این باره باید تردید کرد)، بلکه ارزش واقعی او، در انگیزه‌هایی است که در شاگردان خود ایجاد کرد. **های برگ** مورخ ریاضیات می‌نویسد: «پیش از هر چیز، با اطمینان می‌توان گفت، روش منطقی آموزش **افلاتون**، تا اندازه‌ی زیادی به این موضوع کمک کرد که، به ساختمان منظم ریاضیات مقدماتی، چنان دقتی داده شود و با چنان ظرافت منطقی همراه باشد که، بعدها و برای همیشه، وسیله‌ای برای تشخیص ریاضیات در میان سایر دانش‌ها درآمد. این واقعیت را که تمامی دستگاه ریاضیات، بدون افتادگی و کمبودی، بر اساس تعریف‌ها و چند گزاره تکامل می‌یابد، باید بی‌تردید مدیون **افلاتون** دانست».

افلاتون، فیلسوفی ایده‌آلیست بود و مبارزه‌ی جالبی با مکتب ماتریالیستی **دموکریت** داشت (در

واقع، به قول نویسنده‌ی «امپریوکریتی سیسم»، مبارزه‌ی اصلی جریان‌های فلسفی در یونان باستان را، باید در مبارزه‌ی مکتب **دموکریت** با مکتب **افلاتون** دید). افلاتون، به ویژه، با ایده‌آل‌های **دموکریت** مخالف بود و استفاده از آن‌ها را در ریاضیات منع می‌کرد و، به این ترتیب، موجب کُند شدن تکامل ریاضیات شد. به‌گواهی **ارشمیدس**، ریاضی‌دانان دوران باستان، در آغاز پاسخ مساله‌ها را با روش اتمی **دموکریت**، به طور غیررسمی و پیش خود به دست می‌آوردند و سپس، به جست‌وجوی راه اثبات آن، از طریق برهان خُلف برمی‌آمدند.

اودوکس (۴۱۰-۳۵۶ پیش از میلاد)، انسانی با آموزش استثنایی، پزشکی صاحب اعتبار، اخترشناس، ریاضی‌دان و آشنا با مکانیک بود. در زمینه‌ی ریاضیات، «نظریه‌ی نسبت‌ها» که بعدها اقلیدس توانست بر پایه‌ی آن، منطقی‌ترین شیوه‌ی طرح هندسه را (به‌صورتی که در آن زمان ممکن بود) پیشنهاد کند، با نام **اُودُوکس** بستگی دارد. به همین دلیل، **اودوکس** را می‌توان پایه‌گذار ریاضیات آن زمان دانست. کشف اساسی دیگری که با نام **اودوکس** همراه است، روش «اِفنا» است (این نام را در سده‌ی هفدهم، روی این روش گذاشتند). این روش، بر اساس نظریه‌ی نسبت‌ها و این فرض ساخته شده است که: «اگر از کمیتی، نصف یا بیش‌تر از نصف آن را جدا کنیم، بعد همین عمل را با باقی‌مانده‌ی کمیت انجام دهیم و سپس پشت سرهم آن را تکرار کنیم، سرانجام به کمیتی می‌رسیم که از هر کمیت مفروض دلخواه کوچک‌تر است». **اودوکس** به یاری برهان خُلف و با روش اِفنا توانست حجم استوانه، مخروط و کره را پیدا کند.

مناخموس، شاگرد **اودوکس**، به حل مساله‌ی تضعیف مکعب (ساختن مکعبی که حجم آن، برابر نصف حجم مکعب مفروض باشد) پرداخت. تلاش او در این زمینه، منجر به کشف مقطع‌های مخروطی شد، نظریه‌ای که بعدها به وسیله‌ی **آپولونیوس** تکامل یافت و در هشت کتاب او مطرح شد (از این هشت کتاب، هفت تای آن به ما رسیده است).

ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ پیش از میلاد)، فیلسوف مشهور دوران باستان و پایه‌گذار منطق، در کنار کارهای خود در دانش‌های مربوط به طبیعت، به ریاضیات هم توجه داشت. به‌گواهی تاریخ، **ارسطو** به پیشرفت ریاضیات یاری بسیار رسانده است؛ ریاضی‌دانان زمان او، می‌توانستند در مکتب او، جایی برای خود پیدا کنند؛ ولی خودِ **ارسطو** کار مشخصی در زمینه‌ی هندسه انجام نداده است.

می‌بینیم، پیشرفت ریاضیات در یونان، بستگی تنگاتنگی با فلسفه دارد: «ریاضیات و فلسفه، چه در رابطه‌ی صلح‌آمیز خود و چه به دلیل برخوردهایی که با هم داشتند، بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند». به این ترتیب، ریاضیات به صورت عاملی برای پیشرفت فرهنگ یونانی در می‌آید و نحوه‌ی برخورد ریاضیات با مفهوم‌ها، موجب ظریف‌تر و دقیق‌تر شدن تفکر می‌شود و دانشمندان را وا می‌دارد، بیان خود را تا آن جا که ممکن است، دقیق و کامل کنند [«تاریخ ریاضیات در جهان باستان و سده‌های میانه» نوشته‌ی **سی‌تِن**].

به این ترتیب، در سده‌ی سوم پیش از میلاد، هندسه در مکتب‌های فلسفی یونانی، به مرحله‌ی بالایی

از تکاملِ خود رسیده بود و در اغلب حالت‌ها، بدون این‌که با عمل و زندگی بستگی داشته باشد، پیش رفته بود. **پلوتارک** تاریخ نویس معروف رومی می‌نویسد: « ... مکانیک را ... **اودوکس و آرخیتس** کشف کردند. آن‌ها می‌خواستند، به نحوی، هندسه را شرح کنند، به هندسه رنگ بیرونی بدهند و قضیه‌هایی را که به دشواری، تن به استدلال و اثبات علمی می‌دادند، بر موضوع‌های مادی و قابل لمس پایه بگذارند ... ولی **افلاتون**، با تندی و خشم، آن‌ها را سرزنش کرد، چرا که آن‌ها با کار خود، هندسه را ویران کرده و از ارزش انداخته‌اند ... این‌ها هندسه را واداشته‌اند، از بررسی موضوع‌های اندیشه‌ای و غیرمادی، به سمت موضوع‌های مادی و قابل لمس برود و، به جز استدلال، از چیزهایی هم که با دست و با کاربرده‌ها ساخته شده‌اند، استفاده کند».

این وضع تا زمان **ارشمیدس** (۲۱۲-۲۸۷ پیش از میلاد) ادامه داشت تا این‌که او، زیر تاثیر نیازهای روزافزون زندگی، به ریاضیات جنبه‌ای کاربردی داد.

به این ترتیب، از سده‌ی هفتم تا سده‌ی سوم پیش از میلاد، مفهوم‌ها و موضوع‌های فراوانی از هندسه، روی هم جمع شده بود و این ضرورت احساس می‌شد که باید آن‌ها را به‌صورتی منظم کرد و در دستگاهی منطقی قرار داد.

پروکلوس یادآوری می‌کند که بسیاری، و از آن جمله **بقراط خیوسی، له‌ئون** و دیگران؛ در این راه تلاش کردند. ولی از آن هنگام که اثر جاودان **اقلیدس** با نام «مقدمات» نوشته شد ـ که بنا به گفته‌ی همان **پروکلوس**، همه‌ی عنصرها را جمع و همه‌ی کشف‌های پیش از خود را منظم و همه‌ی آن چه را که اثباتی ضعیف داشت، به طورکامل ثابت کرده بود ـ همه‌ی نوشته‌های دیگر به فراموشی سپرده شد.

هیچ کتاب علمی دیگری نتوانسته است، همچون «مقدمات» **اقلیدس**، در دورانی چنین طولانی، نیرومندی و استواریِ خود را حفظ کند. از سال ۱۴۸۲ میلادی تاکنون، کتاب **اقلیدس**، بیش از ۵۰۰ بار و به اغلب زبان‌ها چاپ شده است.

§ ۲. «مقدمات» اقلیدس

از زندگی **اقلیدس** (بین سال‌های ۳۳۰ تا ۲۷۵ پیش از میلاد) آگاهی درستی نداریم. چه در «مقدمات» و چه در نوشته‌هایِ دیگر او (که به ما رسیده است)، هیچ اطلاعی درباره‌ی نویسنده‌ی آن‌ها، داده نشده است. آن چه روشن است، او در مکتب **افلاتون** درس خواند و ریاضیات را در اسکندریه، نزد **بطلمیوس** اول یادگرفت. تنظیم مجموعه‌ی عظیمی از داده‌های علمی، کاری ساده و مکانیکی نیست؛ چنین کاری به نظام‌های علمی راهنما، به معرفتی بالا و به زمینه‌ی گسترده‌ای از تفکر نیاز دارد. می‌توان گمان را بر این گذاشت که طرح «مقدمات» از نظر فلسفی، بر اساس نظام ارسطویی ساختمان دانش انجام گرفته است، ساختمانی که تکامل آن را در «آنالیتیک» اول و دوم می‌بینیم (کتاب اول به نظریه‌ی استنتاج وکتاب دوم به نظریه‌ی اثبات علمی مربوط است). این گمان به این دلیل پذیرفتنی است که هندسه، رابطه‌ی نزدیکی

با فلسفه داشت و، همراه با فلسفه، تکامل می‌یافت؛ در ضمن، خود **اقلیدس** به مکتب **افلاتون** تعلق داشت. ساختار خودِ مقدمات هم، گواهی بر درستی این گمان است.

به‌عقیده‌ی ارسطو (و هم به عقیده‌ی **افلاتون**)، دانش عبارت است از معرفت به علت‌هایی که ناشی از رابطه‌ی ضروری پدیده‌هاست. همه‌ی موقعیت‌های علمی، باید نتیجه‌ای از حکم‌های بدیهی و ضروری (فرض‌ها یا اصل موضوع‌ها) باشند و از راه استنتاج، به‌شیوه‌ای که **ارسطو** آماده کرده است، به دست آیند.

اقلیدس، با پیروی از **ارسطو و افلاتون**، باید مفهوم‌های اساسی هندسه را بیرون می‌آورد (**ارسطو**، این مفهوم‌های بیانی را «مقوله» می‌نامید که به‌عقیده‌ی او، ۱۰ حالتِ ممکن داشت: موضوع، کمیت، کیفیت، نسبت، مکان، زمان، موقعیت، چگونگی، عمل، نامعلومی)؛ اصل موضوع‌ها را تنظیم می‌کرد و سپس، براین اساس و به‌صورتی منطقی، تمامی مضمون هندسه را نتیجه می‌گرفت. ولی، همان طورکه امروز می‌بینیم، **اقلیدس** نتوانست به آرمان خود برسد، و این عدم توفیق نه به دلیل پیچیده بودن آرمان، بلکه به این علت بود که در آن زمان، ساختمان هندسه‌ی مقدماتی ازکمال خود دور بود. کافی است یادآور شویم، مفهوم‌های پیوستگی، حرکت و دیگر مفهوم‌های بسیار مهم، در آن زمان، تنها طرح شده بود.

اساس ساختمانِ «مقدمات» **اقلیدس** بر تعریف‌ها، پوستولاها و آکسیوم‌ها ریخته شده است. کتاب اول، با ۳۵ تعریف[۱]، ۵ پوستولا و ۵ آکسیوم آغاز می‌شود. آن‌ها را در این جا می‌آوریم.

تعریف‌ها

۱) نقطه چیزی است که بخشی [کوچک‌تر از خود] ندارد.
۲) خط عبارت است از درازای بدون پهنا.
۳) هر یک از دو انتهای خط، یک نقطه است.
۴) خط راست چیزی است که، نسبت به همه‌ی نقطه‌های خود، یکنواخت باشد.
۵) سطح چیزی است که پهنا و درازا دارد.
۶) مرزهای انتهایی سطح را، خط‌ها تشکیل می‌دهند.
۷) صفحه آن است که نسبت به همه‌ی خط‌های راست خود، یکنواخت قرارگرفته باشد.
۸) زاویه‌ی روی صفحه، عبارت است از انحراف دو خط نسبت به هم، به شرطی که این دو خط با هم برخورد داشته باشند و در ضمن، روی یک خط راست نباشند.
۹) اگر خط‌های شامل زاویه، خط‌های راست باشند، آن وقت زاویه را مستقیم‌الخط گویند.

در ۲۵ تعریف بعدی (از تعریف ۱۰ تا تعریف ۳۴)، از زاویه‌ی قائمه و عمود، زاویه‌های حاده و منفرجه، سطح دایره، محیط دایره و مرکز آن، شکل مستقیم‌الخط، مثلث، چهارضلعی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین و غیرمشخص، مربع، مستطیل، لوزی و غیره صحبت شده است.

۱. «اقلیدس، در این فراوانی تعریف‌ها، از شیوه‌ای شبیه نام‌گذاری استفاده می‌کند. کار او شبیه کار ساعت‌ساز یا صنعتگر دیگری است که تلاش می‌کند شاگردان خود را، با نام ابزارهایی که باید به کار ببرند، آشنا کند.» (**لامبرت**).

سرانجام تعریف پایانی، که برای بحث بعدی ما اهمیت زیادی دارد، می‌گوید:

۳۵. خط‌های راست موازی آن‌هایی هستند که روی یک صفحه باشند و هر قدر آن‌ها را ادامه دهیم، به هم نرسند.

پوستولاها

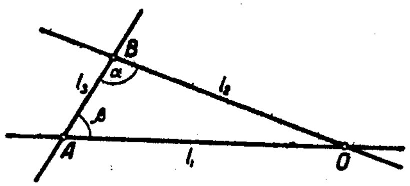
۱) از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر، می‌توان خط راستی گذراند.

۲) خط راست محدود را می‌توان تا هرجا ادامه داد.

۳) به هر مرکز می‌توان دایره‌ای با شعاع دلخواه رسم کرد.

۴) همه‌ی زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵) اگر دو خط راست، ضمن برخورد با خط راست سوم، در یک طرف چنان زاویه‌های داخلی بسازند که مجموعی کم‌تر از دو قائمه داشته باشند (شکل ۱ را ببینید)، آن وقت، این خط‌های راست در همان طرف به هم می‌رسند.



شکل ۱

آکسیوم‌ها

۱) دو چیز برابر با یک چیز، با هم برابرند.

۲) اگر به دو چیز برابر، مقدارهای برابر بیفزاییم، دو چیز برابر به دست می‌آید.

۳) اگر از دو چیز برابر، مقدارهای برابر کم کنیم، مانده‌های حاصل با هم برابرند.

۴) دو چیز قابل انطباق، با هم برابرند.

۵) کل از جزء خود، بیش‌تر است.

اگر در تعریف‌های اقلیدس دقت کنیم، متوجه می‌شویم که مفهوم‌های بخش، جزء، درازا و پهنا را به عنوان مفهوم‌های اصلی پذیرفته است و به یاری آن‌ها، نقطه، خط و سطح را تعریف می‌کند و سپس، تعریف خط راست و صفحه را چون حالت‌های خاصی از خط و سطح می‌آورد. چنین انتخابی از مفهوم‌های اصلی تصادفی نیست.

در واقع، مفهوم‌های درازا و پهنا، از نظر تاریخی، بر مفهوم‌های نقطه، خط و سطح مقدم‌ترند. پیش از این هم گفته‌ایم، هندسه به دلیل ضرورت اندازه‌گیری تکه زمین‌ها پدید آمد. عمل اصلی عبارت بود از

اندازه‌گیری طول به یاری ریسمان، گام‌های انسان یا چیزی دیگر. این اندازه‌گیری‌ها، از راه انتزاع، منجر به مفهوم درازا شد. معین کردن مرزهای «دقیق» این تکه زمین‌ها و «خط‌کشیِ» این مرزها، همراه با نیازهای دیگر، به تدریج منجر به مفهوم خط شد که پهنایی ندارد. تقسیم زمین‌های کشاورزی به یاری ترازبندی (طناب‌کشی)، مشاهده‌ی پرتوهای خورشیدی، برخی کارهای مهندسی و دیگر نیازهای زندگی و عمل، مفهوم خط و صفحه را به وجود آورد.

با این همه، «سطح، خط و نقطه، به صورتی که در هندسه تعریف می‌شود، تنها در تصور ما وجود دارد ... در طبیعت، نه خط راست وجود دارد و نه خط منحنی، نه صفحه پیدا می‌شود و نه سطح خمیده؛ در طبیعت، تنها جسم دیده می‌شود و نقطه‌هایی را که در ذهن خود ساخته‌ایم، در جایی نمی‌توان پیدا کرد» [**لباچوسکی**]. برای نمونه، تعریف **اقلیدس** را برای نقطه در نظر بگیریم: این نقطه، بدون جزء است. ولی هر چیز مادیِ واقعی، دارای جزء است. در یک روند انتزاعی، وقتی اندازه‌های جسم را، به اصطلاح، بی‌نهایت بار تقسیم کنیم، به مفهوم نقطه می‌رسیم؛ در ضمن «نقطه» به عنوان «حد» ظاهر می‌شود. ولی «این روند را در واقع امر و در عمل نمی‌توان به انجام رساند، زیرا از هر چیزی هر قدر اندک باشد، اندک‌تر وجود دارد و نمی‌تواند «وجود داشتن» خود را، با تقسیم، از دست بدهد، با تقسیم کردن، هرگز به آخرین جزء نمی‌رسیم» [**آناکساگورس**، فیلسوف یونانی]. به زبان دیگر، فضا، نه تنها به این مفهوم که پایانی ندارد، نامتناهی است، بلکه در ضمن، در درون خود و در هر جزء کوچک خود هم، نامتناهی است.

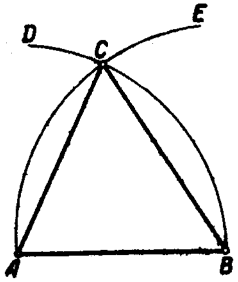
در عمل می‌توانیم خود را به این تعریف محدود کنیم: جسمی را که تقسیم بعدی آن، در محدوده‌ی مشاهده، ممکن نباشد، «نقطه» گوییم. پرتو نوری را که به اندازه‌ی کافی ظریف و نازک باشد، می‌توان به عنوان «خط راست» پذیرفت، همان‌طور که در اخترشناسی برای تعیین فاصله‌ی بین دو ستاره عمل می‌کنند. در اخترشناسی، ستاره‌ها را نقطه به حساب می‌آوریم، چرا که اندازه‌های آن‌ها، نسبت به فاصله‌ی بین آن‌ها، بسیار کوچک است.

تعریف‌های **اقلیدس**، که مسیر طبیعی انتزاع را بازتاب می‌دهند و از همان راه مفهوم‌های اصلی هندسه به دست آمده‌اند، مضمونی دقیق که برای نتیجه‌گیری‌های منطقی سودمند باشد، ندارند و به همین دلیل، در واقع ضمن ساختمان هندسه به کار گرفته نمی‌شوند. در مثل، چگونه می‌توان از تعریف مبهمی که برای خط راست و صفحه داده شده است، استفاده کرد؟ و به راستی، چه چیزی از این جمله دستگیرمان می‌شود که «خط راست چیزی است که نسبت به همه‌ی نقطه‌های خود، یکنواخت باشد»؟ این جمله را، هر طور که بخواهیم می‌توان تفسیر کرد. می‌توان این‌جور فهمید که، خط راست در همه‌ی نقطه‌های خود، امتداد یکسانی دارد. ولی در این صورت، مفهوم «امتداد» را اساس کار قرار داده‌ایم. «استقرار یکنواخت» را می‌توان این طور تفسیر کرد: اگر خط راست را به صورت یک میله در نظر بگیریم، در این صورت ضمن حرکت‌های معین فضا، بر خودش منطبق می‌ماند. ولی در این صورت، مفهوم حرکت را اساس قرار داده‌ایم. همین گونه تفسیرها را در باره‌ی صفحه، زاویه و دیگر تعریف‌ها هم می‌توان داشت.

اکنون، به فرض‌های بنیانی می‌پردازیم که باید، بر اساس آن‌ها، دستگاه اقلیدسی را ساخت. **اقلیدس**، این پیش فرض‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کند: پوستولاها و آکسیوم‌ها.

این که چه اختلافی بین پوستولا و آکسیوم وجود دارد، به دیدگاه‌های مختلفی بر می‌خوریم. به احتمالی بهترینِ این نظرها، چنین است: آکسیوم‌ها فرض‌هایی هستند که درباره‌ی کمیت‌ها (به مفهوم عامِ خود) شکل گرفته‌اند، در حالی که پوستولاها به هندسه مربوط‌اند و امکان ساختمان‌های هندسی معینی را فراهم می‌کنند. ولی در این صورت، خصلت هندسی آکسیوم ۴، چندان به جا و روشن نیست. یادآوری می‌کنیم، در ریاضیات امروز، تفاوتی بین آکسیوم و پوستولا نمی‌گذارند و همه‌ی پیش فرض‌های بنیانی را آکسیوم (اصل موضوع) می‌نامند. (یا بُنداشت)

از دیدگاه منطقی، کمبود ریشه‌ای «مقدمات» در نارسایی آن از جهت «اصل موضوعی کردن» هندسه است: برای برپا کردن بنای هندسه‌ی اقلیدسی، به صورتی روشن یا مبهم، از ویژگی‌های شکل استفاده می‌کنیم که از نظر منطقی از پیش فرض‌های **اقلیدس** ـ پوستولاها و آکسیوم‌ها ـ نتیجه نمی‌شود. روشن کردن این کمبود و اثبات وجود شکاف بین پیش فرض‌ها و نتیجه‌گیری‌ها، برای ما نقشی اساسی دارد و به همین مناسبت، اندکی بیش‌تر به آن می‌پردازیم و چند نمونه می‌آوریم.



شکل ۲

مثال اول. اقلیدس از اندیشه‌ی پیوستگی استفاده می‌کند، در حالی‌که در دستگاه او، اصل موضوعی وجود ندارد که بتوان در این باره، به آن تکیه کرد. برای این که در این باره قانع شویم، تکلیف اول از کتاب اول **اقلیدس** را، به‌طور کامل، می‌آوریم.

تکلیف اول. روی خط راست معین [یعنی روی پاره‌خط راست مفروض]، مثلثی با ضلع‌های برابر بسازید.

AB را خط راست معین مفروض می‌گیریم. باید روی خط راست معین AB، مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازیم [شکل ۲].

به مرکز A و به فاصله‌ی AB دایره‌ای، و به مرکز B و به فاصله‌ی BA دایره‌ی دیگری رسم می‌کنیم. نقطه‌ی C محل برخورد محیط‌های این دو دایره را، به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. چون نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی BCD است، پس $AC = AB$؛ همچنین نقطه‌ی B مرکز دایره‌ی ACE است، پس $BC = BA$؛ بنابراین $CA = BC = AB$. به این ترتیب، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و روی خط مفروض AB ساخته شده است؛ و این، همان چیزی است که می‌خواستیم.

اقلیدس در این استدلال، بر عینی بودن مطلب تکیه می‌کند و فرض را بر این می‌گیرد که اگر دو دایره چنان باشند که هرکدام از مرکز دیگری بگذرد، آن‌ها به هم بر می‌خورند و نقطه‌ی مشترکی دارند. ولی ببینیم، این فرض از دیدگاه منطقی، چگونه به دست می‌آید؟

نوآموزی که در هندسه تازه‌کار باشد، ممکن است از طرح چنین پرسشی شگفت‌زده شود: «مگر روشن نیست که، این دو دایره، یکدیگر را قطع می‌کنند؟». ولی مطلب بر سر روشن بودن نیست: بسیاری

از قضیه‌هایی که در هندسه ثابت می‌شوند، گاهی در مقایسه با پیش فرض‌هایی که برای اثبات بر آن‌ها تکیه می‌شود، روشنی کم‌تری ندارند، با وجود این، ثابت می‌شوند.

به جز این، هدف این است که بین گزاره‌های مختلف، رابطه‌ای منطقی برقرار کنیم. **اقلیدس** طرح خود را با پیش فرض‌های بنیانی ـ پوستولاها و آکسیوم‌ها ـ آغاز می‌کند و سپس می‌کوشد تمامی مضمون هندسه را به صورتی منطقی، از همین پیش فرض‌های بنیانی نتیجه بگیرد، بی‌آن‌که به روشن بودن یا روشن نبودن گزاره‌های بعدی توجه داشته باشد.

ولی این مساله، در زمان **اقلیدس**، نمی‌توانست به طور کامل و تا پایان حل شود. در واقع، اگر به مثال خود برگردیم، باید بپذیریم که فرض **اقلیدس** درباره‌ی برخورد محیط‌های دو دایره، نتیجه‌ی منطقی پوستولاها و آکسیوم‌ها نیست. در مثل، اگر دایره‌ها را منحنی‌های گسسته‌ای بگیریم که شامل نقطه‌ی C نباشند، آن وقت استدلال اقلیدس بی‌اثر می‌شود. بنابراین، فرض وجود نقطه‌ی C بر اساس پیوسته بودن محیط دایره قرار دارد. ولی وقتی به پوستولاها و آکسیوم‌های **اقلیدس** مراجعه می‌کنیم، چیزی درباره‌ی پیوستگی پیدا نمی‌کنیم. به این ترتیب، در همان نخستین گزاره‌ی **اقلیدس**، به شکافی منطقی برمی‌خوریم: در جریان اثبات، فرض تازه‌ای، به صورت پنهانی در نظر گرفته شده است[1].

مثال دوم. اقلیدس از مفهوم حرکت استفاده می‌کند، بدون این که در آکسیوم‌ها، به بررسی ویژگی‌های حرکت بپردازد.

در گزاره‌ی چهارم کتاب اول «مقدمات» حکم می‌شود: دو مثلث برابرند، وقتی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر، با هم برابر باشند. اقلیدس، این گزاره را درست به همان ترتیبی ثابت می‌کند که در کتاب‌های درسی امروز وجود دارد، یعنی با قرار دادن یکی از مثلث‌ها بر مثلث دیگر. از آن جا که روند قرار دادن یک شکل بر شکل دیگر، به معنای به حرکت در آوردن آن شکل است، بنابراین در این گزاره، **اقلیدس** به ویژگی‌های حرکت تکیه کرده است. در واقع اگر فرض کنیم، پاره‌خط‌های راست ضمن حرکت خمیده می‌شوند و طول‌ها و زاویه‌ها تغییر می‌کند[2]، آن وقت دیگر نمی‌توانیم درستی گزاره‌ی چهارم را با پیروی از اقلیدس و به همان صورت کتاب‌های درسی ثابت کنیم. بنابراین، باید این پیش فرض را بپذیریم که، حرکت ممکن است و ضمن آن، ویژگی‌های خط راست، طول و زاویه تغییر نمی‌کند. ولی اقلیدس، ضمن اصل موضوعی کردن هندسه، هیچ‌گونه پیش فرضی درباره‌ی حرکت نمی‌آورد، در حالی‌که در جریان اثبات گزاره‌ی چهارم، به صورتی پنهانی، از فرضی استفاده می‌کند که از اصل موضوع‌ها نتیجه نمی‌شود.

البته، باید یادآوری کرد که **اقلیدس**، تلاش می‌کند تا آن جا که ممکن است، از حرکت پرهیز کند: او

۱. برای نخستین بار، **لایب نیتس** متوجه این کمبود شد.

۲. در واقع هم، این مطلب درست است. در طبیعت، جسمی که به طور مطلق صُلب و بی‌تغییر باشد، پیدا نمی‌شود که شکل و اندازه‌های آن در رابطه با مکان، زمان و شرایط فیزیکی ثابت بماند. به یاد بیاوریم، کوشش می‌کنند معیار اندازه‌گیری (متر = واحد طول) را تا آن جا که ممکن است، در شرایط فیزیکی ثابتی نگه دارند.

در «مقدمات» خود، تنها در حالت‌هایی از حرکت استفاده می‌کند که ناچار باشد (تنها ضمن اثبات چهار قضیه از حرکت استفاده می‌کند: قضیه‌های چهارم و هشتم از کتاب اول و قضیه‌های چهاردهم و بیست و چهارم از کتاب سوم). در حالت‌هایی که اثبات قضیه، بدون یاری گرفتن از حرکت ممکن باشد، **اقلیدس**، به حرکت متوسل نمی‌شود.

مثال سوم. **اقلیدس** از مفهوم «بین»، تنها با استناد به شکل، استفاده می‌کند، ولی ویژگی‌های اساسی آن را (که در استدلال‌ها، به آن‌ها تکیه می‌شود)، به‌عنوان اصل موضوع نمی‌آورد.

در جریان سده‌های طولانی بعد از پیدایی «مقدمات»، توجه نمی‌کردند که **اقلیدس**، حقیقت‌های مربوط به مفهوم «بین» را که درباره‌ی نقطه‌های واقع بر خط راست به کار می‌برد، بدون اثبات می‌پذیرد، (به‌عنوان نمونه، اگر نقطه‌ی C بین نقطه‌های A و D و نقطه‌ی B بین نقطه‌های A و C باشد، آن وقت نقطه‌ی B بین نقطه‌های A و D است)، ولی **اقلیدس** مطلب را به خودی خود می‌پذیرد، در حالی‌که نیاز به اصل موضوع‌های دقیق و روشنی در این باره داریم. به ظاهر، برای نخستین بار **گوس** ضرورت اصل موضوعی کردن این مفهوم را یادآوری کرد. او در سال ۱۸۳۲ در نامه‌ای به **بابای** نوشت: «برای استفاده از واژه‌هایی مثل «بین»، باید آن‌ها را از همان ابتدا، به صورت روشنی مشخص کرد و این کار، به سادگی ممکن است». تنظیم دقیق اصل موضوع مربوط به مفهوم «بین» را، برای نخستین بار م. **پاش** در سال ۱۸۸۲ در نوشته‌ی خود با عنوان «روش‌هایی درباره‌ی هندسه‌ی جدید» آورد.

دور شدن از نظام دقیق اصل موضوعی را، اغلب در کارهای **اقلیدس** می‌توان دید که در این جا، تنها به برخی از آن‌ها اشاره کردیم ... به این ترتیب، **اقلیدس** موفق نشد به هدفی که پیش روی خود گذاشته بود، برسد. در آن زمان، هنوز روی بسیاری از مفهوم‌های بنیانی هندسه (مثل «پیوستگی»، «حرکت»، «بین» و ...) کار نشده بود. با وجود این، «مقدمات» **اقلیدس** چنان مکتبی را پایه گذاشت که تا به امروز، تمامی ریاضی‌دانان، از مسیر آن گذشته‌اند و استحکام استدلال‌های آن، موجب پرورش اندیشه‌ی ریاضی آن‌ها شده است. از این دیدگاه، ارزش خدمت‌های «مقدمات» بی‌اندازه زیاد است.

اکنون به صورتی کوتاه، درون مایه‌ی «مقدمات» را مرور می‌کنیم.

از ویژگی‌های «مقدمات» **اقلیدس**، فراوانی روش‌های هندسی در طرح و شرح موضوع‌هاست. **اقلیدس**، محاسبه را دور می‌زند، از آن پرهیز می‌کند، به همین دلیل، درباره‌ی او گفته‌اند: «**اقلیدس** هندسه را به صورت هندسی ساخت». روش‌های این طرح «هندسی»، به طور عمده عبارت است از «تجزیه و ترکیب[1]» و «روش برهان خُلف». برخی، روش‌های «تجزیه» و «ترکیب» را متعلق به مکتب‌های **افلاتون** و **اودوکس** و «روش برهان خُلف» را متعلق به خود **اقلیدس** می‌دانند، گرچه برخی روش اخیر را هم به

۱. در کتاب سیزدهم «مقدمات»، روش تجزیه و ترکیب، این‌طور تعریف شده است: «در تجزیه، آن را که باید ثابت شود می‌پذیریم و از این راه خود را به حقیقتی که لازم داریم، می‌رسانیم. در ترکیب، از آن چه ثابت شده است، آغاز می‌کنیم و آن چه را می‌خواهیم ثابت کنیم، از آن نتیجه می‌گیریم».

اودوکس نسبت می‌دهند.

کتاب اول «مقدمات»، از ۴۸ گزاره تشکیل شده و شامل این موضوع‌هاست: مثلث‌ها (قضیه‌های مربوط به برابری مثلث‌ها و قضیه‌های مربوط به ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث)، خط‌های راست عمود برهم و موازی با هم، متوازی‌الاضلاع، «مساحت» شکل‌های مستقیم‌الخط، قضیه‌ی **فیثاغورس** و عکس آن. واژه «مساحت» را به این دلیل داخل گیومه گذاشته‌ایم که برای **اقلیدس**، مفهوم مساحت به معنای عددی آن، وجود ندارد. نظریه‌ی مساحت، از دیدگاه **اقلیدس**، عبارت است از مقایسه‌ی شکل‌ها در رابطه با اصطلاح‌های «بزرگ‌تر است»، «کوچک‌تر است»، «برابر است». او شکل‌های برابر را به معنای شکل‌های هم‌نهشت می‌گیرد، یعنی شکل‌هایی که قابل انطباق بر یکدیگر باشند. **اقلیدس**، قضیه‌ی **فیثاغورس** را هم به همین مفهوم تنظیم می‌کند: «مربعی که روی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی قائمه ساخته شود، برابر است با مربع‌هایی که روی ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه ساخته شده‌اند». روند اثبات همه‌ی قضیه‌های مربوط به مساحت‌ها (به تعبیر امروزی)، منجر به رسم خود شکل می‌شد و به عمل روی عددها کاری نداشت[1].

کتاب دوم، از ۱۴ گزاره تشکیل شده است و شامل به اصطلاح «جبر هندسی» است، یعنی برخی قضیه‌ها درباره‌ی برابری شکل‌ها، هم‌ارزی و اتحادهای مقدماتی جبری.

۱۰ گزاره‌ی اول این کتاب را، با زبان امروزی جبر، می‌توان این‌طور بیان کرد:

۱) $(a+b+c+\cdots)h = ah+bh+ch+\cdots;$

۲) $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2;$

۳) $(a+b)b=ab+b^2;$

۴) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$

۵) $(a-b)b+\left(\frac{a}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2;$

۶) $(a+b)b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2;$

۷) $(a+b)^2+b^2=2(a+b)b+a^2;$

۷′) $a^2+b^2=2ab+(a-b)^2;$

۸) $4(a+b)b+a^2=(a+2b)^2;$

۸′) $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2;$

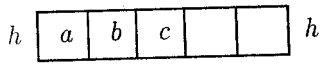
۹) $(a-b)^2+b^2=2\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}-b\right)^2;$

۱۰) $(a+b)^2+b^2=2\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$

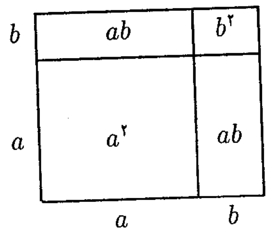
۱. مساله مربوط به «مساحت»، تنها در سده‌ی نوزدهم و به وسیله‌ی **هیلبرت** روشن شد.

برای این که تصور روشنی از برخورد با این قضیه‌ها (در «مقدمات» **اقلیدس**) به‌دست آید، دو نمونه می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱ می‌گوید: «اگر یکی از دو پاره‌خط راست، به چند بخش تقسیم شده باشد، آن وقت مستطیلی که روی این دو پاره خط راست ساخته شده باشد، برابر است با همه‌ی مستطیل‌هایی که از پاره‌خط راست تقسیم نشده و بخش‌های پاره خط راست تقسیم شده، به‌دست می‌آیند» (شکل ۳).



شکل ۳



شکل ۴

قضیه‌ی ۴ می‌گوید: «مربعی که روی مجموع پاره‌خط‌های راست ساخته شده باشد، برابر است با مربع‌هایی که روی هر یک از این پاره‌خط‌های راست ساخته شود، و دو برابر مستطیلی که از این پاره‌خط‌های راست به دست آید» (شکل ۴).

۸ قضیه‌ی دیگر هم، به همین صورت تنظیم شده‌اند.

امروز، در تمرین‌های دبیرستانی، گاهی برای روشن شدن مفهوم، اتحادهای جبری، از این قضیه‌های اقلیدس کمک می‌گیریم، ولی در یونان باستان آن‌ها را تنها به صورت هندسی خود می‌فهمیدند.

در گزاره‌ی ۱۱، مساله‌ای که امروز به نام «تقسیم زرین» (یا «تقسیم پاره‌خط راست به نسبت ذات وسط و طرفین») معروف است، به یاری «جبر هندسی» حل شده است. گزاره‌های ۱۲ و ۱۳، به تعمیم قضیه‌ی **فیثاغورس** اختصاص دارد.

کتاب سوم، (۳۷ گزاره)، درباره‌ی دایره و قضیه‌های مربوط به آن بحث می‌کند. در این جا، به ویژه قضیه‌های مربوط به قوت نقطه نسبت به دایره (و البته به صورت هندسی) وجود دارد. برای نمونه، قضیه‌ی ۳۵، مربوط به قوت نقطه‌ای است که در درون دایره باشد: «اگر خط‌های راست یکدیگر را در درون دایره قطع کنند، آن وقت مستطیلی که روی پاره‌خط‌های راست یکی از آن‌ها ساخته شود، برابر است با مستطیلی که روی پاره‌خط‌های راست دیگری ساخته شده است». قضیه‌ی مربوط به قاطع و مماس (قضیه‌ی مربوط به قوت نقطه‌ی بیرونی نسبت به دایره) هم، به همین ترتیب تنظیم شده است.

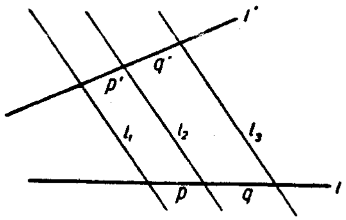
کتاب چهارم، (۱۶ گزاره) درباره‌ی چندضلعی‌های محاطی و محیطی و روش ساختن چندضلعی‌های منتظم (پنج ضلعی، شش ضلعی و ده ضلعی منتظم) بحث می‌کند.

کتاب پنجم، یکی از اساسی‌ترین بخش‌های «مقدمات» است. در این جا، ضمن ۲۵ گزاره، نظریه‌ی نسبت‌های **اقلیدس** مطرح شده است. به ارزش و اهمیت کتاب پنجم وقتی می‌توان پی‌برد که توجه کنیم، نظریه‌ی نسبت‌ها و تشابه شکل‌ها، بدون استفاده از عددهای گنگ (که در زمان **اقلیدس** شناخته نبودند) مطرح شده است. پیش از **اقلیدس** هم، یونانی‌ها از نسبت‌ها استفاده می‌کردند. ولی بنابر روایت **اُودِموس رودسی**، **اقلیدس** درکتاب پنجم «مقدمات»، این نظریه را تکمیل کرده است. اساس این نظریه چنین است:

فرض کنید، دو زوج پاره خط راست p، q و p'، q' (مثل پاره‌خط‌های راستی که روی دو خط راست l و l'، بین سه خط راست موازی l_1، l_2 و l_3 قرار دارند ـ شکل ۵)، این تناسب را تشکیل دهند:

$$p : q = p' : q'$$

$p : q$ و $p' : q'$ را به معنای عددهایی گرفته‌ایم که از راه اندازه‌گیری پاره‌خط‌های راست متناظر، و به یاری پاره‌خط راست واحد، به دست آمده‌اند.



شکل ۵

این تناسب را درکسر گویای $\frac{m}{n}$ ضرب می‌کنیم که در آن، m و n عددهایی درست و دلخواه‌اند. به این برابری می‌رسیم:

$$mp : nq = mp' : nq'$$

از این جا، سه حالتِ ممکن، پیش می‌آید:

۱) اگر $mp > nq$، آن گاه $mp' > nq'$؛

۲) اگر $mp = nq$، آن گاه $mp' = nq'$؛

۳) اگر $mp < nq$، آن گاه $mp' < nq'$.

بنابراین، اگر دو زوج پاره‌خط راست p، q و p'، q'، تناسب $p : q = p' : q'$ را تشکیل دهند (به‌زبان امروزی)، آن وقت هر یک از نسبت‌های $mp \gtreqless nq$، همیشه پاسخ‌گوی نسبت‌های متناظر آن $mp' \gtreqless nq'$ است.

می‌توان ثابت کرد، این ویژگی خاصِ تناسب است و، به همین مناسبت، به وسیله‌ی **اقلیدس** به عنوان تعریف تناسب به کار می‌رود. این تعریف را (به زبان امروزی، ولی بدون تغییر مضمون اقلیدسی

آن) می‌توان به این صورت داد: اگر p و q دو کمیت از یک نوع (پاره‌خط راست، زاویه و غیره)، و p' و q' هم دو کمیت دیگر از یک نوع باشند (لازم نیست، نوع کمیت‌ها در دو حالت یکی باشد)، و اگر به ازای هر انتخاب دلخواهی از دو عدد درست m و n، یکی از سه نسبت $mp \gtreqless nq$، همیشه پاسخ‌گوی نسبت متناظر خود از $mp' \gtreqless nq'$ باشد، آن وقت می‌گوییم: کمیت اول p همان نسبتی را با کمیت دوم q دارد که کمیت سوم p' با کمیت چهارم q' دارد. دو زوج کمیت‌های (p, q) و (p', q') تشکیل یک تناسب می‌دهند که به این صورت نوشته می‌شود:

$$p : q = p' : q'$$

به این ترتیب، به اعتقاد **اقلیدس**، تناسب، همان برابری دو نسبت است، ولی نباید فراموش کنیم که، از دیدگاه **اقلیدس**، نسبت به معنای عدد نیست (زیرا برای او، عدد چیزی جز عدد درست یا کسری ـ یعنی عدد گویا ـ نبود). اقلیدس، سپس برای نسبت‌ها، مفهوم «بزرگ‌تر» را روشن می‌کند: $p : q > p' : q'$، تنها وقتی برقرار است که بتوان دو عدد درست m و n را طوری پیدا کرد که برای آن‌ها داشته باشیم: $mp > nq$ ولی $mp' \leqq nq'$؛ و به همین ترتیب، برای مفهوم «کوچک‌تر» در نسبت‌ها.

برای یونانی‌ها، نظریه‌ی نسبت‌ها جانشین نظریه‌ی عددهای گنگ بود و نسبت کمیت‌های هم جنس، نقش عددهای گنگ را به عهده داشت[1].

کتاب ششم، (۳۳ گزاره) شامل آموزش مربوط به شکل‌های متشابه و برخی مساله‌ها درباره‌ی جست‌وجوی کمیت‌های متناسب است. در آن جا به این قضیه‌ها برمی‌خوریم: درباره‌ی نسبت مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌هایی که ارتفاع مشترک دارند؛ درباره‌ی خط‌های راست موازی در مثلث؛ درباره‌ی نیمساز؛ قضیه‌های اصلی مربوط به تشابه مثلث‌ها؛ تقسیم پاره‌خط راست به بخش‌های برابر و بخش‌های متناسب؛ ساختن واسطه‌ی هندسی؛ قضیه‌های مربوط به نسبت مساحت‌ها در شکل‌های متشابه و . . . قضیه مربوط به نسبت مثلث‌های متشابه، با روش **اقلیدس**، یعنی به صورت هندسی بیان می‌شود:

۱. در تعریف نسبت‌های **اقلیدس** ، اندیشه‌ی اصلی **ددکیند** برای تعریف عددهای گنگ (به‌عنوان برش در عددهای گویا) به صورت جنینی خود وجود دارد. در واقع، با در نظر گرفتن نسبت‌های $mp \gtreqless nq$، متناظر با زوج عددهای مختلف (n و m) می توانیم سه مجموعه از عددهای گویا را جدا کنیم: مجموعه‌ی اول، شامل عددهایی از $\frac{m}{n}$، که برای آن‌ها داشته باشیم: $mp > nq$؛ مجموعه‌ی دوم شامل عددهایی از $\frac{m}{n}$، که برای آن‌ها داشته باشیم: $mp = nq$، و مجموعه‌ی سوم شامل عددهای $\frac{m}{n}$ با شرط $mp < nq$. اگر پاره خط‌های راست p و q اندازه‌ناپذیر باشند، آن وقت مجموعه‌ی دوم شامل هیچ عضوی نیست و مجموعه‌ای تهی است. در حالت اندازه‌پذیر بودن p و q، مجموعه‌ی دوم، تنها یک عضو پیدا می‌کند و نسبت اندازه‌پذیر $p : q$، به معنای عدد $\frac{m}{n}$ تعریف می‌شود. در حالت اندازه‌ناپذیر بودن p و q (با دنبال کردن سخن ددکیند)، نسبت $p : q$، به عنوان عددی گنگ تعریف می‌شود که، با یک بُرش، همه‌ی عددهای گویای مجموعه‌ی اول را از همه‌ی عددهای گویای مجموعه‌ی سوم جدا می‌کند. می‌بینیم، بین نظریه‌ی نسبت‌های **اقلیدس** و نظریه‌ی کنونی عددهای گنگ (بر اساس «بُرش»)، چه رابطه‌ی نزدیکی وجود دارد. تنها کار اساسی **ددکیند** این است که، برای نخستین بار، این بُرش را عدد نامید (عدد گنگ) و به این ترتیب، عدد حقیقی را مبنای عمل‌های حسابی قرار داد.

«مثلث‌های متشابه، به نسبت مضاعف ضلع‌های متناظرند». در این جا، «(نسبت مضاعف)»، به معنای نسبت مربع‌هایی است که روی ضلع‌های متناظر ساخته شود. بنابراین، این قضیه را با حفظ مضمون اقلیدسی آن، می‌توان این‌طور بیان کرد: مثلث‌های متشابه، همان نسبت مربع‌های روی ضلع‌های متناظر را دارند.

کتاب‌های هفتم و هشتم و نهم، مربوط به حساب‌اند و آموزش درباره‌ی عددهای درست را با بیان هندسی می‌دهند. در این جا (باز هم با بیان هندسی)، با الگوریتم **اقلیدس** درباره‌ی روش جست‌وجوی بزرگ‌ترین بخشیاب مشترک، نظریه‌ی نسبت‌های پیوسته با عددهای درست، قضیه‌ی مربوط به بی‌پایان بودن دنباله‌ی عددهای اول و . . . برخورد می‌کنیم.

کتاب دهم، عمل‌های هندسی را که برای جذرگرفتن از عددهای درست لازم است، شرح می‌دهد. در این جا با ساختمان‌های گنگ به صورت $a \pm \sqrt{a^2 - b}$، $\sqrt{a^2 + b} \pm a$، $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$، پیدا کردن ریشه‌ی دوم و ریشه‌ی چهارم آن و غیره برمی‌خوریم.

کتاب یازدهم، (۴۰ گزاره)، عنصرهای هندسه‌ی فضایی را مطرح می‌کند: قضیه‌های مربوط به وضع خط‌های راست و صفحه‌ها نسبت به هم (به همان صورتی که در هندسه‌ی مقدماتی امروز وجود دارد)؛ قضیه‌های مربوط به زاویه‌های مسطحه‌ی کُنج‌ها؛ درباره‌ی متوازی‌السطوح؛ درباره‌ی برابری حجم منشورهایی که ارتفاع برابر دارند و . . . .

کتاب دوازدهم، (۱۸ گزاره)، درباره‌ی نسبت مساحت‌های دایره‌ها و حجم‌های جسم‌های متشابه بحث می‌کند و شامل این قضیه‌هاست: درباره‌ی نسبت مساحت‌های چندضلعی‌های متشابه محاط در دایره، و مساحت دایره، درباره‌ی نسبت حجم هرم‌های با قاعده‌های مشترک؛ هرم‌های متشابه («هرم‌های متشابه به نسبت سه برابر ضلع‌های متناظر است»)، یعنی به نسبت مکعب‌هایی که روی ضلع‌های متناظر ساخته می‌شوند)؛ قضیه‌های مربوط به نسبت حجم مخروط‌ها، استوانه‌ها و کره‌ها. در قضیه‌های مربوط به حجم هرم و مخروط، **اقلیدس** از روش معروف به «روش اِفنا» استفاده می‌کند که، همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، **اُودُوکس** هم با آن آشنا بود.

سرانجام، **کتاب سیزدهم** (۱۹ گزاره)، هندسه‌ی فضایی را به پایان می‌رساند. این کتاب، در اساس شامل گزاره‌هایی است که، در آن‌ها، پنج نوع چندوجهی منتظم شرح داده شده است: چهاروجهی، شش وجهی، هشت وجهی، دوازده وجهی و بیست وجهی. آخرین قضیه (قضیه‌ی نوزدهم) ثابت می‌کند، چندوجهی منتظم دیگری وجود ندارد.

این بود کوتاه شده‌ی درون‌مایه‌ی «مقدمات».

در بررسی کتاب، کشش به سمت استدلال بی‌نقص منطقی احساس می‌شود. این تمایل موجب می‌شود که **اقلیدس**، به عنوان نمونه، از نقطه‌ی وسط پاره‌خط راست، تا زمانی که وجود آن را به یاری روش ساختن آن، ثابت نکرده است، استفاده نکند. در کتاب سوم، با دقت ممکن، ثابت می‌کند: «اگر

روی محیط دایره‌ای، دو نقطه در نظر بگیریم، آن وقت خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، از درون دایره می‌گذرد». با این همه، در «مقدمات» اقلیدس ثابت نمی‌شود که نقطه، خط راست را به دو بخش (دو نیم خط راست)، و خط راست، صفحه را به دو بخش (دو نیم‌صفحه) تقسیم می‌کند. در حالی‌که، اگر اندیشه‌ی اقلیدس را دنبال کنیم، باید اثبات یا اصل موضوعی کردن این موقعیت‌ها را هم طلب کنیم.

در سراسر «مقدمات» هرگز با کاربرد عملیِ موضوع‌های فراوانی که به وسیله‌ی اقلیدس مطرح شده است، برخورد نمی‌کنیم. در آن، از پرگار و خط‌کش هم، که به یاری آن‌ها می‌توان دایره و خط راست را رسم کرد، سخنی دیده نمی‌شود. این ویژگی تنها به «مقدمات» مربوط نمی‌شود: شیوه‌ی آن زمان در حوزه‌ی هندسه، چنین بوده است. مساله‌های کاربردی ریاضیات، و به ویژه روش‌های محاسبه‌ای، در یونان باستان، در مقایسه با زمینه‌های نظری، بسیار فقیر و ناچیز بود. خود یونانی‌ها، به این مناسبت می‌گفتند: «مشغول شدن به کارهای محاسبه‌ای، با اعتبار انسان آزاد نمی‌سازد؛ این کارها را برده‌ها انجام می‌دهند».

اگر از نظر منطقی، استحکام استدلال‌های «مقدمات»، با وجود برخی نارسایی‌ها (که از برخی نمونه‌های آن یاد کردیم)، در زمان ما هم تحسین برانگیز است، از دیدگاه آموزشی و روش شناختی، به هیچ وجه نمی‌تواند نمونه باشد. **فه لیکس کلاین** ریاضی‌دان مشهور، روش اقلیدس را در «مقدمات» خود، «پراکنده»، «تکه‌تکه‌شده» و «کسل کننده از نظر یک نواختی خود» می‌داند و؛ ضمن مقایسه روش بیان **ارشمیدس و اقلیدس** می‌گوید: «بیان **ارشمیدس** همان دقتی را دارد که ما در آموزش امروزی خود به کار می‌بریم، موضوع به همان صورت تکوینی خود و به همان صورتی که پدید آمده، مطرح شده است و از آغاز، مسیر حرکت اندیشه را مشخص می‌کند و هرگز گزاره‌ی استدلالی و اثباتی خود را، به شیوه‌ی تقسیم شده و غیر مستقیمی که در «مقدمات» **اقلیدس** به کار رفته، مطرح نمی‌کند».

آشنایی مختصر خود را با «مقدمات» **اقلیدس**، با چند نتیجه‌گیری به پایان می‌بریم.

ارزش عظیم تاریخی «مقدمات» **اقلیدس**، مربوط به این است که یک سند بزرگ علمی در زمینه‌ی هندسه است، سندی که در آن، ساختمان منطقی هندسه، بر پایه‌ی اصل موضوعی قرار دارد.

اگر این آرمان به طور کامل تحقق نیافت، دست کم مسیر درست حرکت را، به نسل‌های بعدیِ ریاضی‌دانان نشان داد. به ویژه روش اصل موضوعی را، که در زمان ما بر تمامی ریاضیات سایه انداخته است، باید تا اندازه‌ی زیادی مدیون سرچشمه‌ی اصلی آن، یعنی مقدمات اقلیدس دانست.

نارسایی اصلی اصل موضوع‌های **اقلیدس** را باید در ناکافی بودن آن‌ها دانست: در این جا، اصل موضوع‌های پیوستگی، حرکت و ترتیب (البته با اصطلاح‌های «درون» و «بیرون») وجود ندارد؛ به همین مناسبت، اقلیدس اغلب به چشم خود اعتماد می‌کند و به شهود متوسل می‌شود.

تعریف‌های اقلیدس از نقطه، خط راست، سطح و صفحه، در بخش‌های بعدی او به کار نمی‌رود و بنابراین، می‌توان آن‌ها را به عنوان عنصرهای بی‌فایده کنارگذاشت. تنها فایده‌ی این تعریف‌ها در آن است که سرچشمه‌ی طبیعی پیدایش آن‌ها را نشان می‌دهد.

§ ۳. تلاش برای بهتر کردن اصل موضوع‌های اقلیدس

از همان آغاز، بسیاری از ریاضی‌دانان، به نارسایی‌های منطقیِ «مقدمات» **اقلیدس** توجه کردند. به جز این برای ریاضی‌دانان باستان این تردید پدید آمد که پوستولای پنجم **اقلیدس** را می‌توان، به یاری سایر پیش فرض‌ها ثابت کرد و بنابراین، نباید آن را در بین پوستولاها قرار داد، و می‌بینیم که نیروی بسیاری از ریاضی‌دانانِ بعد از **اقلیدس** ـ مفسرانِ «مقدمات» ـ در طول بیش از دو هزار سال، از یک سو در جهت برطرف کردن کمبودهای منطقی «مقدمات» (و در نوبت اول، دستگاه اصل موضوعی آن)، و از سوی دیگر، در جهت اثبات پوستولای پنجم بود.

از مفسران قدیم، می‌توان از **پاپوس** (یونانی، نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم میلادی)، **پروکلوس** (یونانی، سده‌ی چهارم میلادی)، **نیریزی** (ایرانی، سده‌ی یازدهم میلادی)، **نصیرالدین توسی** (ایرانی، سده‌ی سیزدهم میلادی)، **ساکری** (ایتالیایی، ۱۶۶۷-۱۷۳۳)، **بایای** (مجارستانی، ۱۷۷۵-۱۸۵۶) و **لژاندر** (فرانسوی، ۱۷۵۲-۱۸۳۶) نام برد. در زمان‌های مختلف و با عنوان‌های مختلف، مثل «بازسازی **اقلیدس**»، «تجدید ساختمان **اقلیدس**»، «**اقلیدس**، آزاد از هر لکه‌ای» و . . . «مقدمات» را تفسیر می‌کردند و هرکدام از آن‌ها مدعی بودند هر «لکه‌ای[1]» را از **اقلیدس** پاک کرده‌اند. در واقع، نخستین و اساسی‌ترین لکه، پوستولای پنجم بود. ولی همه‌ی این نوشته‌ها، بعد از بررسی دقیق، نارسا از آب در می‌آمدند: همه‌ی اثبات‌هایی که از پوستولای پنجم داده می‌شد، اشتباه بودند. با وجود این، باید از مفسران **اقلیدس** سپاس‌گذار باشیم، چرا که با دیدگاه‌های انتقادی خود، دوره‌هایی را در تاریخ هندسه پدید آوردند که، بدون آن، تنظیم دقیق اصل موضوعی کردن هندسه‌ی اقلیدسی ـ آن‌طور که امروز به آن می‌نگریم ـ ممکن نبود.

دوره‌ی مفسران **اقلیدس** را باید تا پایان سده‌ی هجدهم به شمار آورد، یعنی تا زمانی که در سال ۱۷۹۴ میلادی، کتاب «عنصرهای هندسه» نوشته‌ی لژاندر، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی منتشر شد. و این، نخستین کتابی بود که در آن، هندسه با حال و هوایی غیر از «مقدمات» **اقلیدس** تنظیم شد.

در این بند، به برخی تلاش‌ها در جهت بهترکردن اصل موضوع‌های اقلیدسی می‌پردازیم و مساله‌ی مربوط به اثبات پوستولای پنجم را، به بند بعد موکول می‌کنیم.

ارشمیدس. ارشمیدس، دانشمند بزرگ و بی‌مانند دنیای باستان را (در ریاضیات، مکانیک و فیزیک) باید جزو مفسران **اقلیدس** دانست. او با درک نارسایی اصل موضوع‌های اقلیدسی برای اثبات قضیه‌های هندسی، در نوشته‌ی خود به نام «درباره‌ی کره و استوانه» این پنج اصل موضوع را پیشنهاد می‌کند:

اصل موضوع‌های ارشمیدس

۱) خط راست، کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه است.

۱. بیان ساکری ایتالیایی

۲) از دو خطی که بین دو نقطه‌ی مفروض رسم شوند، به شرطی که فرورفتگی (کاوی = تقعر) آن‌ها در یک جهت باشد، خط بیرونی بزرگ‌تر است.

۳) سطح مستوی (یعنی صفحه) از سطح خمیده‌ای که دارای همان محیط سطح مستوی باشد، کوچک‌تر است.

۴) از دو سطح خمیده که به یک دوره (محیط) از یک سطح روی صفحه محدود باشند، به شرطی که کاوی آن‌ها در یک جهت باشد، سطح بیرونی بزرگ‌تر است.

۵) پاره‌خط راست کوچک‌تر را، همیشه می‌توان به تعداد درست، آن‌قدر تکرار کرد که از پاره‌خط راست بزرگ‌تر تجاوز کند. همین‌طور برای سطح یا جسم کوچک‌تر[1].

پوستولای پنجم را امروز، **پوستولای ارشمیدس** یا **پوستولای اندازه‌گیری** می‌نامند. این پوستولا، به ما امکان می‌دهد، با انتخاب یک پاره‌خط راست به عنوان واحد، هر پاره‌خط راست را با یک عدد (طول آن) بیان کنیم.

برای این که بتوان وارونِ پوستولای پنجم را بیان کرد، یعنی هر عددی متناظر با پاره‌خط راست معینی است، به پوستولای دیگری نیاز داریم (**پوستولای کانتور**، که همراه با **پوستولای ارشمیدس**، **اصل موضوع ددکیند** را تشکیل می‌دهند.) در این باره در بخش دوم کتاب صحبت خواهیم کرد.

اندکی درباره‌ی بقیه‌ی **پوستولاهای ارشمیدس**: پوستولای اول را می‌توان به عنوان تعریف خط راست در نظر گرفت. برخی پژوهش‌گران معتقدند، این پوستولا و پوستولای دوم را می‌توان به‌عنوان تعریف مفهوم طول و پوستولاهای سوم و چهارم را به عنوان تعریف مفهوم مساحت پذیرفت.

بعدها، **لژاندر** هم، در «عنصرهای هندسه» خود، خط راست را به عنوان کوتاه‌ترین مسیر تعریف کرد[2].

پروکلس. به **پروکلس**، یکی از بزرگ‌ترین مفسران **اقلیدس** می‌پردازیم.

پروکلس، ضمن تلاش برای اصلاح **اقلیدس**، این تعریف‌ها را برای خط راست و صفحه پیشنهاد می‌کند:

تعریف‌های خط راست

۱) خط راست خطی است که پاره‌ای از آن، که بین دو نقطه واقع است، بر فاصله‌ی بین این دو نقطه منطبق باشد.

۲) خط راست، خطی است که به طور نامحدود امتداد داشته باشد.

۳) خط راست، خطی است که همه‌ی بخش‌های آن بتوانند روی آن بلغزند.

۱. پوستولای‌پنجم ارشمیدس را در این جا به زبانی ساده‌تر آورده‌ایم. بیان ارشمیدس، اندکی پیچیده‌تر است.

۲. افلاتون هم تعریف جالبی از خط راست دارد: «خط راست آن است که نقطه‌های کناری آن، به وسیله‌ی نقطه‌های دیگر محافظت می‌شوند». می‌بینیم، توجه به ماهیت مفهوم‌های پایه‌ای هندسه، در ژرفای تاریخ هم دیده می‌شود.

۴) خط راست، خطی است که با ثابت کردن دو انتهای آن، بی‌حرکت بماند[1].

تعریف‌های صفحه

۱) به سطحی، صفحه گویند که به طور نامحدود امتداد داشته باشد.

۲) صفحه به سطحی گفته می‌شود که هر بخش آن بتواند روی آن بلغزد.

۳) صفحه، سطحی است که نسبت به همه‌ی خط‌های راست واقع بر آن یکنواخت باشد.

۴) وقتی سطح را صفحه گویند که هر خط راست، به شرطی که دو نقطه‌ی مشترک با آن داشته باشد، بر آن واقع شود[2].

در تعریف‌های **پروکلس** از خط راست و صفحه، مفهوم‌های خط و سطح دانسته فرض شده‌اند و، به جز این، در تعریف اول خط راست، مفهوم طول هم، روشن گرفته شده است.

تعریف‌های **پروکلس** را از جهتی می‌توان بهتر از تعریف‌های **اقلیدس** دانست. ولی به طور کلی نمی‌توانند پایه‌های هندسه را تکمیل کنند: درباره‌ی تعریف‌های **پروکلس** هم، همان انتقادهایی وارد است که بر تعریف‌های **اقلیدس** وارد بود. تنها یادآوری می‌کنیم تعریف سوم صفحه، به کلی مبهم است: واژه‌ی «یکنواخت نسبت به . . . » را می‌توان به صورت‌های مختلف تعبیر کرد.

نیریزی[3]. نیریزی مفسر ایرانی، این تعریف‌ها را برای خط راست و صفحه داده است:

۱) خط راست به خطی گفته می‌شود که، با ثابت نگه داشتن دو نقطه‌ی آن، بی‌حرکت بماند.

۲) صفحه به چنان سطحی گفته می‌شود که در آن از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر بتوان خط راستی رسم کرد.

مفسران سده‌های میانه. بیش‌تر اصل موضوع‌هایی که به وسیله‌ی مفسران سده‌های میانه توضیح داده شده است، به‌ویژگی‌های فضا مربوط می‌شود: بی‌پایان بودن، سه بُعدی بودن، پیوسته بودن (آن‌طور که می‌گفتند: «فضا، شکاف یا رخنه‌ای ندارد»)، نامحدود بودن بخش‌پذیری آن، همگنی و تجانس («هر بخشی از فضا، می‌تواند بر هر بخش دیگری از آن در هر جای دیگری، قرارگیرد») و غیره. درواقع، همه‌ی این ویژگی‌ها، به فضای اقلیدسی مربوط می‌شود؛ با وجود این، تنظیم دقیق آن‌ها، تنها در زمان ما میسر شد؛ به ویژه، ویژگی مهم همگنی، که در درون خود، اندیشه‌ی حرکت را به صورت جنینی، پنهان دارد.

لباچوسکی. تلاش برای بهتر کردن تعریف مفهوم‌های اصلی هندسه، بعد از دوران مفسران هم ادامه داشت و، کم و بیش، تا پایان سده‌ی نوزدهم قطع نشد. لباچوسکی، ریاضی‌دان بزرگ روس، که درباره‌ی او باز هم سخن خواهیم گفت، تعریف جالبی از خط راست و صفحه دارد. او در آغاز کره را به

۱. از این تعریف، بعدها **لایب نیتس** هم استفاده کرده است.

۲. این تعریف را به **هه‌رون** هم که پیش از **پروکلس** می‌زیسته است، نسبت می‌دهند.

۳. فضل فرزند حاتم اهل نیریز فارس که در غرب (مثل بسیاری حالت‌های دیگر) با تحریف اسم او برخورد می‌کنیم. در غرب او را «آناریتوس» و در بعضی حالت‌ها «آناریسوس» می‌گویند. م.

عنوان مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطه‌ی مفروضی به یک فاصله‌اند، تعریف می‌کند، سپس به تعریف صفحه و خط راست می‌پردازد: «صفحه به سطحی گفته می‌شود که سطح همه‌ی دایره‌های حاصل از برخورد دو کره با دو مرکز مختلف، روی آن قرار گیرند» و خط راست را به یاری حرکت تعریف می‌کند: «خط راست به خطی گویند که بین هر دو نقطه‌ی دلخواه آن، خودش را در هر موقعیتی بپوشاند».

بی‌نتیجه بودن تلاش‌هایی که در جهت برقراری و استحکام پایه‌های هندسه انجام گرفت، هم ناشی از دشواری خود موضوع و هم به این دلیل است که « ... هرچه به سرچشمه‌ی آن‌ها در طبیعت نزدیک‌تر شویم، درک آن‌ها دشوارتر می‌شود ... » (لباچوسکی).

این همه تلاش، چه اهمیتی دارد؟ اهمیت تاریخی این تلاش‌ها در این است که زمینه را، برای پدید آمدن روش اصل موضوعی زمان ما، فراهم کرد. از این گذشته، هیچ کدام از این تعریف‌ها (که به مفهوم‌های اصلی هندسه مربوط می‌شوند)، ارزش عملی خود را از دست نداده‌اند و در زمان ما هم می‌توان از آن‌ها، برای آشنایی دانش‌آموزان با شکل‌ها و مفهوم‌های هندسی استفاده کرد.

می‌بینیم، روش اصل موضوعی زمان ما، به صورتی نه چندان اسرارآمیز، از زیر خاکستر تاریخ گذشته‌ی خود، سر برآورده است. امروز به شیوه‌ای که **اقلیدس** و مفسران او گمان می‌کردند، هیچ نیازی به «تعریف» نقطه، خط راست و صفحه نداریم. در روش اصل موضوعی زمان ما، این مفهوم‌ها را به عنوان پایه و اساس می‌پذیرند و بلافاصله، از اصل موضوع‌هایی آغاز می‌کنند که با این مفهوم‌ها سازگارند. اندکی بعد، در این باره بیش‌تر صحبت خواهیم کرد.

§ ۴. تلاش برای اثبات پوستولای پنجم اقلیدس

پوستولای پنجم اقلیدس، نقشی استثنایی در تاریخ هندسه داشته است. مسیر پیدایی هندسه‌ی جدید ـ هندسه‌ی لباچوسکی ـ از طریق همین پوستولا گذشته است، هندسه‌ای که دیدگاه ما را درباره‌ی هندسه‌ی حاکم بر فضای فیزیکی واقعی و هم، دیدگاه ما را درباره‌ی خود هندسه به عنوان یک دانش انتزاعی، از پایه و ریشه دگرگون کرده است.

در طول دو هزار سال پس از اقلیدس، به سختی می‌توان ریاضی‌دان بزرگی را پیدا کرد که بخت خود را برای اثبات پوستولای پنجم نیازموده باشد. **پوسیدونیوس** (سده‌ی اول بیش از میلاد)، **بطلمیوس** (سده‌ی سوم پیش از میلاد)، **پروکلس** (۴۱۰-۴۷۵)، **نصیرالدین توسی** (۱۲۰۱-۱۲۷۴)، **والیس** (۱۶۱۶-۱۷۰۳)، **لامبرت** (۱۷۲۸-۱۷۷۷)، **لژاندر** (۱۶۶۷-۱۷۳۳)، از جمله کسانی بودند که برای اثبات این پوستولا تلاش کردند و بر اساس کارهای این دانشمندان و خلاقیت **گوس** (۱۷۷۷-۱۸۵۵)، **یانوش بابای** (۱۸۰۲-۱۸۶۰) و سرانجام **لباچوسکی** (۱۷۹۳-۱۸۵۶) بود که هندسه‌ی جدید پدید آمد.

چه انگیزه‌هایی موجب این همه تلاش، برای اثبات پوستولای پنجم می‌شد؟ می‌توان به دو دلیل اصلی

اشاره کرد. دلیل اول به بغرنجی و پیچیدگی نسبی این پوستولا، و دلیل دوم به کاربرد آن، در «مقدمات» در جایی کم و بیش دور، مربوط می‌شود. **اقلیدس**، تنها بعد از ۲۶ گزاره، که همه‌ی آن‌ها را بدون استناد به پوستولای پنجم ثابت کرده است، از این پوستولا استفاده می‌کند. در گزاره‌ی بیست و نهم است که در «مقدمات»، برای نخستین بار، از پوستولای پنجم استفاده شده است.

این وضع، به گفته‌ی مفسران قدیمی «مقدمات» به آدم تلقین می‌کند، حقیقتی که در پوستولای پنجم جا داده شده است، نباید بدیهی گرفته شود و در واقع، باید بتوان آن را از دیگر گزاره‌های ساده‌تر نتیجه گرفت. دانشمندان در درستی این پوستولا تردیدی نداشتند و تنها در جست‌وجوی اثبات آن بودند. ولی بررسی دقیق همه‌ی این «اثبات‌ها»، نارسایی آن‌ها را روشن می‌کرد و این وضع، سرانجام به تردید در درستی و اعتراض‌ناپذیری خود پوستولای پنجم منجر شد.

در زمان ما، مساله‌ی مربوط به اثبات ریاضی، به این ترتیب حل شده است: اثبات یک گزاره (قضیه) به این معناست که آن را به صورت منطقی از گزاره‌های دیگری که پیش از آن ثابت شده‌اند، نتیجه بگیریم؛ و یا آن را بدون اثبات (و به عنوان یک اصل موضوع) بپذیریم. قضیه‌های ثابت شده‌ی قبلی هم، باید متکی بر قضیه‌ها یا اصل موضوع‌ها باشند. به این ترتیب هر قضیه‌ای، نتیجه‌ای منطقی از یک دستگاه اصل موضوع‌هاست. بدون طرح مساله به این صورت، هیچ صحبتی درباره‌ی اثبات ریاضی نمی‌توان کرد. **اگر یک دستگاه اصل موضوعی وجود نداشته باشد، آن وقت چیزی درباره‌ی اثبات یک گزاره نمی‌توان گفت**، به ویژه، اثبات‌های «مقدمات» **اقلیدس** را از این دیدگاه، نمی‌توان اثبات‌های دقیق و با ارزشی دانست، زیرا همان‌طور که دیدیم، اصل موضوع‌های **اقلیدس**، برای ساختمان منطقی هندسه کافی نیستند. یعنی برای اثبات پوستولای پنجم به یک مبنا ـ دستگاهی از اصل موضوع‌ها ـ نیاز داریم.

مولفان قدیمی، به چنین مبنایی، به صورتی کامل و نهایی، دسترسی نداشتند و به همین دلیل، نمی‌توانستند مساله را به صورتی کامل و روشن طرح کنند. در بین مولفان قدیمی، روشن‌ترین طرح مساله‌ی مربوط به پوستولای پنجم را در نوشته‌های **ساکری** می‌بینیم. او برای اثبات پوستولای پنجم، ۲۶ گزاره‌ی کتاب اول «مقدمات» **اقلیدس** را ـ که برای رسیدن به آن‌ها نیازی به پوستولای پنجم نیست ـ می‌پذیرد. سپس، بر این اساس و با روش برهان خُلف، تلاش می‌کند پوستولای پنجم را ثابت کند؛ البته، بدون این که از ویژگی بی‌پایان بودن و ویژگی پیوستگی خط راست نام ببرد، بر آن‌ها تکیه می‌کند. بعدها **یانوش بابای**، با بررسی هندسه‌ای که بستگی به پوستولای پنجم ندارد، آن را «هندسه‌ی مطلق»[1] نامید. به این ترتیب، ۲۶ گزاره‌ی کتاب اول **اقلیدس** به هندسه‌ی مطلق تعلق دارد.

این گزاره‌ها به هندسه‌ی مطلق تعلق دارند: قضیه‌های مربوط به زاویه‌های مجانب و قائم؛ برخی قضیه‌های مربوط به ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث؛ قضیه‌ی مربوط به زاویه‌ی بیرونی (زاویه‌ی بیرونی مثلث،

۱. تعریف دقیق هندسه‌ی مطلق، به عنوان دستگاهی از استنتاج‌های منطقی، تنها پس از اصل موضوعی کردن دقیق آن امکان‌پذیر شد (بخش دوم همین کتاب را ببینید).

از هر زاویه‌ی درونی که مجاور آن نباشد، بزرگ‌تر است)؛ قضیه‌های مربوط به برابری مثلث‌ها؛ درباره‌ی ویژگی‌های شکل‌های درون دایره و غیره.

به این ترتیب، می‌توان گفت، تلاش برای اثبات پوستولای پنجم، در اساس به این جا منجر می‌شود که آن را، به عنوان نتیجه‌ای منطقی از هندسه‌ی مطلق به دست آوریم. اندکی بعد خواهیم دید، پوستولای پنجم را نمی‌توان، تنها از هندسه‌ی مطلق نتیجه گرفت. این مطلب از این جا روشن می‌شود که بسیاری از مفسران **اقلیدس** (آشکارا یا پنهان)، فرض‌های تازه‌ای را وارد کرده‌اند و تنها با پذیرفتن این فرض‌ها توانسته‌اند پوستولای پنجم را ثابت کنند. این فرض‌ها را، هم‌ارز پوستولای پنجم می‌نامند.

برای ما این موضوع جالب است، بتوانیم روشن کنیم، همه‌ی این اثبات‌ها به صورتی آشکار یا پنهان، از فرض‌هایی استفاده کرده‌اند که در واقع، با پوستولای پنجم هم‌ارزند؛ یعنی این استدلال‌ها، اثبات پوستولای پنجم را نمی‌دهند، بلکه خیلی ساده، پوستولای دیگری را که هم‌ارز با آن است، به جای پوستولای پنجم می‌نشانند.

البته، به جز این‌گونه اثبات‌ها، به اثبات‌های دیگری هم برمی‌خوریم که در واقع، در استدلال‌های خود دچار اشتباه شده‌اند.

دو نمونه از اثبات‌هایی را می‌آوریم که در آن‌ها، به جای پوستولای پنجم، پوستولای دیگری هم‌ارز با آن در نظر گرفته شده است.

۱. اثبات بر پایه‌ی فرض پروکلس

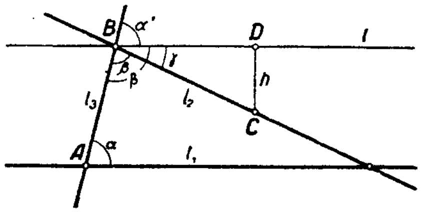
از اثباتی آغاز می‌کنیم که **پروکلس** پیشنهاد کرده است[1].

پیش از همه به «قضیه‌ی مستقیم خط‌های راست موازی» اشاره می‌کنیم: «اگر زاویه‌های متناظر برابر باشند، آن وقت، خط‌های راست موازی‌اند»؛ این، قضیه‌ای از هندسه‌ی مطلق است و می‌توان آن را بدون استفاده از پوستولای پنجم ثابت کرد؛ این اثبات در «مقدمات» **اقلیدس** و در کتاب‌های درسی هندسه آمده است. بنابراین، نباید در درستی این قضیه، ضمن استدلال خود، تردید کرد.

$d = ۹۰^\circ$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم مجموع دو زاویه‌ی α و β که خط راست $l_۳$ در یک طرف خود با دو خط راست $l_۱$ و $l_۲$ می‌سازد، کم‌تر از $۲d$ باشد: $\alpha + \beta < ۲d$ (شکل ۶). در این صورت ثابت می‌کنیم، خط‌های راست $l_۱$ و $l_۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

روی خط راست $l_۱$، نقطه‌ی B را در نظر می‌گیریم و از آن جا خط راست l را طوری رسم می‌کنیم که با خط راست $l_۳$، آن‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، زاویه‌ی α' را برابر زاویه‌ی α بسازد. چون $\alpha' + \beta = \alpha + \beta < ۲d$، پس خط راست $l_۲$ بر خط راست l منطبق نیست و از درون زاویه‌ی $\beta' = ۲d - \alpha'$ می‌گذرد.

۱. اگر خواننده می‌خواهد خود، فرضی را که در استدلال پروکلس وارد شده است، کشف کند، بهتر است ابتدا استدلال را تا آخر بخواند، سپس بدون آن که دنبال مطلب را در کتاب ببیند، تلاش کند فرض هم‌ارز پوستولای پنجم را پیدا کند.



شکل ۶

با توجه به قضیه‌ی مستقیم خط‌های راست موازی، خط راست l با خط راست $l_۱$ موازی است و خط راست $l_۲$، با l زاویه‌ی

$$\gamma = \beta' - \beta = ۲d - (\alpha + \beta)$$

را می‌سازد.

اکنون فرض کنید، نقطه‌ی C از خط راست $l_۲$، به طور نامحدود روی این خط راست، از نقطه‌ی B دور شود. در این صورت، فاصله‌ی $h = CD$ از این نقطه تا خط راست l، به طور نامحدود بزرگ می‌شود؛ بنابراین لحظه‌ای می‌رسد که h برابر فاصله‌ی بین خط‌های راست l و $l_۱$ بشود. در این لحظه، نقطه‌ی C بر خط راست $l_۱$ واقع است؛ از طرف دیگر، این نقطه بر خط راست $l_۲$ قرار دارد، پس خط‌های راست $l_۱$ و $l_۲$ در این نقطه به هم می‌رسند، همان که می‌خواستیم ثابت کنیم.

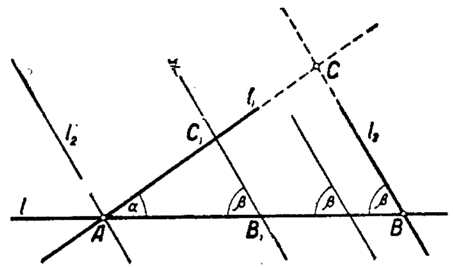
در این استدلال، کدام فرض پنهانی، ما را به پوستولای پنجم می‌رساند؟

در این جا دو فرض وجود دارد: ۱) فاصله‌ی از یک ضلع زاویه تا ضلع دیگر، با دور شدن از راس زاویه، به طور نامحدود بزرگ می‌شود؛ ۲) فاصله‌ی بین دو خط راستی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند، مقدار محدودی است (**پروکلس**، به جز محدود بودن، این فاصله را ثابت فرض می‌کند). فرض اول را به یاری هندسه‌ی مطلق می‌توان ثابت کرد و، بنابراین، هم‌ارز پوستولای پنجم نیست. ولی فرض دوم، چیزی جز بیان دیگری از پوستولای پنجم نیست. این فرض دوم، که به فرض **پروکلس** معروف شده است، با پوستولای پنجم هم‌ارز است.

۲. اثبات بر پایه‌ی فرض والیس

به اثبات دیگری از پوستولای پنجم، که به والیس تعلق دارد، می‌پردازیم.

$l_۱$ و $l_۲$ را خط‌هایی راست و l را قاطعی می‌گیریم که با آن‌ها دو زاویه‌ی متقابل داخلی α و β را ساخته باشد؛ α و β را در سمت‌هایی از l می‌گیریم که برای آن‌ها داشته باشیم: $\alpha + \beta < ۲d$ (شکل ۷). اکنون، خط راست $l_۲$ را، از نقطه‌ی B به طور پیوسته به طرف نقطه‌ی A طوری جابه‌جا می‌کنیم که زاویه‌ی β (زاویه‌ای که با خط راست l ساخته است) ثابت بماند. نقطه‌هایی از خط راست $l_۲$ که در درون زاویه‌ی α قرار دارند، به ناچار در مسیر حرکت نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A، باید از خط راست $l_۱$ بیرون



شکل ۷

روند، زیرا در وضع پایانی خود (l'_2) در بیرون این زاویه واقع می‌شوند. C_1 را نقطه‌ای از خط راست l_2 می‌گیریم که روی l_1 باشد، مثلث AB_1C_1 با زاویه‌های α و β در دو طرف قاعده‌ی AB_1 به دست می‌آید. روی ضلع AB، که شبیه AB_1 است، مثلث ABC را متشابه با مثلث AB_1C_1 می‌سازیم. در این صورت AC در راستای l_1 و BC در راستای l_2 قرار می‌گیرد (با توجه به برابری زاویه‌های شبیه در مثلث‌های متشابه). به این ترتیب خط‌های راست l_1 و l_2 در راس C یکدیگر را قطع می‌کنند، که در نتیجه، پوستولای پنجم ثابت می‌شود.

فرضی که در این جا هم‌ارز پوستولای پنجم است، درکجاست؟

این فرض ـ که به **فرض والیس** معروف است ـ در این جاست که وجود مثلث‌های متشابه با هر اندازه‌ی دلخواه و با هر ضریب تشابه پذیرفته شده است. بر پایه‌ی این پیش فرض است که والیس پوستولای پنجم را ثابت می‌کند. همان‌طورکه درکتاب‌های هندسه‌ی مقدماتی وجود دارد، می‌توان عکس این حکم، یعنی وجود شکل‌های متشابه را از پوستولای پنجم نتیجه گرفت؛ یعنی این دو فرض هم‌ارزند.

تعداد مثال‌ها را می‌توان زیادکرد[1]، ولی در همه‌ی حالت‌ها، وضع به همین‌گونه است. همه‌ی مولفانی که مدعی اثبات پوستولای پنجم بودند، به صورتی آشکار یا نهان، از فرضی استفاده کرده‌اند که در تحلیل آخر به خود پوستولای پنجم منجر می‌شود.

ارزش ریاضی این اثبات‌ها، تنها در این است که نشان می‌دهند چه پیش فرض‌هایی را می‌توان جانشین پوستولای پنجم کرد. با وجود این، در تاریخ هندسه و ضمن پایه‌گذاری هندسه، این تلاش‌ها نقشی بزرگ داشته‌اند؛ ارزش اصلی این تلاش‌ها را باید در پدید آمدن هندسه‌ی نااقلیدسی دانست.

§ ۵. کشف هندسه‌ی نااقلیدسی

ناکامیِ ریاضی‌دانان در نتیجه‌گیری پوستولای پنجم **اقلیدس** از هندسه‌ی مطلق، سرانجام آن‌ها را در

۱. فرض‌های دیگری را که با پوستولای پنجم هم‌ارزند، در §۷ از بخش سوم بررسی خواهیم کرد.

امکان حل مساله، به تردید انداخت. این پرسش‌ها قوت گرفت که: آیا به واقع اثبات پوستولای **اقلیدس** ممکن است؟ آیا این پوستولا، می‌تواند نتیجه‌ای از هندسه‌ی مطلق باشد؟ آیا **اقلیدس**، آگاهانه این پیش فرض را در میان پوستولاهای خود نگذاشته است؟

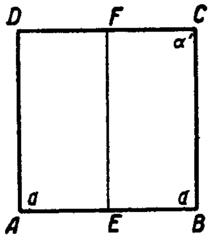
هوشمندترین ریاضی‌دانان، پرسشی ژرف‌تر در برابر خود نهادند: اکنون که پوستولای پنجم نمی‌تواند نتیجه‌ای منطقی از هندسه‌ی مطلق باشد، اگر آن را کنار بگذاریم و پوستولای دیگری را، متناقض با آن، در نظر بگیریم، چه پیش می‌آید؟

نخستین کسانی که مساله را به این گونه در برابر خود گذاشتند، **ساکری، لامبرت، شِوِی کار** و **تاائوری نوس** بودند که آن‌ها را باید پیشگامان هندسه‌ی جدیدی دانست که در برابر هندسه‌ی اقلیدسی، به هندسه‌ی نااقلیدسی شهرت یافته است. ولی آفریننده‌ی اصلی هندسه‌ی نااقلیدسی را، باید **گوس، یانوش بایای** و **لباچوسکی** دانست. این سه ریاضی‌دان خلاق و نابغه، بی‌آن‌که ازکارهای یکدیگر آگاه باشند، هندسه‌ی نااقلیدسی را کشف کردند. در بین این سه نفر هم **نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی** بود که به جز پافشاری بر نظر خود، برای نخستین بار، نتیجه‌ی بررسی‌های خود را چاپ کرد، به همین دلیل است که، این هندسه را گاهی **هندسه‌ی لباچوسکی** می‌نامند.

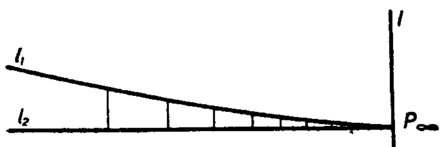
درباره‌ی هر یک از پیشگامان کشف هندسه‌ی نااقلیدسی، اندکی بیش‌تر صحبت می‌کنیم.

پیشگامان هندسه‌ی نااقلیدسی

ساکری. د. **ساکری** ریاضی‌دان ایتالیایی (۱۶۶۷-۱۷۳۳) در سال ۱۷۳۳، کتاب خود را زیر عنوان «**اقلیدس**، آزاد از هر لکه‌ای» چاپ کرد. **ساکری** در نوشته‌ی خود، پوستولای پنجم را نفی نمی‌کند و تلاش برای اثبات آن دارد. همان‌طورکه پیش از این هم گفته‌ایم، **ساکری**، ۲۶ گزاره‌ی اول کتاب اول **اقلیدس** (یعنی گزاره‌های هندسه‌ی مطلق) را به عنوان پایه‌ای برای استدلال‌های خود در نظر می‌گیرد. **ساکری**، یک چهارضلعی را بررسی می‌کند که دو زاویه‌ی قائمه در دو سمت قاعده‌ی AB و دو ضلع روبه‌رو و کناریِ BC و AD دارد (شکل ۸). **ساکری** در آغاز ثابت می‌کند خط EF که وسط دو قاعده‌ی این چهارضلعی را به هم وصل می‌کند بر هر قاعده عمود است و، در ضمن، زاویه‌های α و α' مجاور قاعده‌ی بالا با هم برابرند.



شکل ۸



شکل ۹

ساکری سپس، سه فرضیه را در نظر می‌گیرد ۱) $\alpha > d$، فرضیه‌ی زاویه‌ی منفرجه؛ ۲) $\alpha = d$، فرضیه‌ی زاویه‌ی قائمه و ۳) $\alpha < d$، فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده. فرضیه‌ی زاویه‌ی منفرجه را خیلی زود رد می‌کند و آن را به تناقض می‌کشاند. فرضیه‌ی زاویه‌ی قائمه که درباره‌ی وجود مستطیل صحبت می‌کند، منجر به اثبات پوستولای پنجم می‌شود. بنابراین **ساکری**، برای اثبات پوستولای پنجم، باید فرضیه‌ی سوم، یعنی فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده را رَد کند. **ساکری**، برای پیدا کردن چنین اثباتی، روش برهان خُلف را انتخاب می‌کند: فرضیه‌ی سوم را می‌پذیرد و تلاش می‌کند، با قبول آن، خود را به نتیجه‌ی نادرستی برساند. **ساکری** یک رشته گزاره از فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده به دست آورد که هیچ‌کدام آن‌ها با هندسه‌ی مطلق متناقض نبود. ولی سرانجام، در گزاره‌ی سی‌وسوم خود، به گزاره‌ای نادرست رسید: «اگر فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده درست باشد، آن وقت در صفحه می‌توان دو خط راست l_1 و l_2 را پیدا کرد که از یک سمت به صورتی نامحدود به هم نزدیک و از سمت دیگر به صورت نامحدودی از هم دور می‌شوند» (شکل ۹).

ساکری از این جا نتیجه گرفت، این خط‌های راست در نقطه‌ی بی‌نهایت دور P_∞ دارای عمود مشترک l هستند؛ و چون این وضع ممکن نیست، بنابراین فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده نادرست است.

اشتباه **ساکری** در این بود که بدون هیچ‌گونه پایه‌ی استدلالی، ویژگی‌های شکل‌های محدود را برای شکل‌هایی که در حوزه‌ی بی‌نهایت هستند، تعمیم داد و درست دانست.

به این ترتیب، ساکری که می‌کوشید پوستولای پنجم را با برهان خُلف ثابت کند، توانست به یاری پیش فرض خود یک رشته نتیجه بگیرد که، در واقع، آغازی برای هندسه‌ی جدید بود. خودِ او این اعتقاد را نداشت و گمان می‌کرد، به واقع، به تناقض رسیده است، ولی این، یک تناقض نبود و بعدها بی‌تناقضی آن ثابت شد، همان‌طورکه در هندسه‌ی لباچوسکی چنین است.

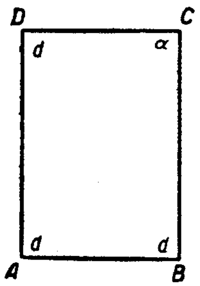
لامبرت. لامبرت، هندسه‌دان سویسی (۱۷۲۸-۱۷۷۷)، درکتاب خود با عنوان «نظریه‌ی خط‌های موازی» (۱۷۶۱)، چهارضلعی $ABCD$ را با سه زاویه‌ی قائمه‌ی A، B و D در نظر گرفت (نیمی از چهارضلعی **ساکری**، شکل ۱۰) و درباره‌ی زاویه‌ی چهارم α، سه فرضیه را بررسی کرد: ۱) $\alpha > d$، ۲) $\alpha = d$ و ۳) $\alpha < d$. او فرضیه‌ی اول را رد کرد، فرضیه‌ی دوم، منجر به پوستولای پنجم اقلیدس می‌شد. **لامبرت** با پیش بردن فرضیه‌ی سوم، دچار اشتباه **ساکری** نشد؛ او این فرضیه را نادرست به حساب نیاورد و پذیرفت که رد کردن یا به تناقض کشاندن این فرضیه از عهده‌ی او ساخته نیست. **لامبرت** هم با نتیجه‌هایی که از فرضیه‌ی سوم به دست آورد، درواقع مثل **ساکری** پایه‌های هندسه‌ی جدید را ریخت. او از جمله ثابت کرد، در این هندسه، مجموع زاویه‌های هر مثلث ABC از دو قائمه کم‌تر است:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<\pi$$

و روشن کرد، مساحت مثلث در این هندسه، با «کاستی زاویه‌ایِ» مثلث، یعنی $\delta = \pi - A - B - C$ متناسب است:

$$S=\rho^2(\pi-A-B-C)$$

که در آن، ρ عددی است ثابت.



شکل ۱۰

در نوشته‌ی لامبرت، به یادداشت جالبی برمی‌خوریم: «من به این نتیجه نزدیک شده‌ام که فرضیه‌ی سوم، در کره‌ی موهومی کاربرد دارد». در بخش پنجم این کتاب خواهیم دید، دستورهای مثلثاتی برای مثلث در هندسه‌ی لباچوسکی، نتیجه‌ای است از دستورهای مثلثاتی برای مثلث کروی، به شرطی که در این دستورها، شعاع ρ را به طور صوری به ρi تبدیل کنیم ($i=\sqrt{-1}$). به ظاهر، با مقایسه‌ی مساحت مثلث با مساحت مثلث ABC در کره‌ی به شعاع r که با دستور

$$S=r^2(A+B+C-\pi)$$

بیان می‌شود، به نتیجه‌گیری خود رسیده است.

ولی به هر حال، **لامبرت** نتوانست به هندسه‌ی جدید دست یابد.

شِوِی‌کار. شِوِی‌کار، استاد حقوق در ماگده بورگ (۱۷۸۰-۱۸۵۹) هم در سال ۱۸۱۸ عنصرهای هندسه‌ی جدید را به دست آورد که آن را «سماوی» نامید. او در این باره، در یادداشتی که در سال ۱۸۱۸ برای **گوس** فرستاده است، صحبت می‌کند. **شِوِی کار** در این یادداشت می‌گوید: «دو گونه‌ی هندسه وجود دارد: هندسه‌ای که باید آن را اقلیدسی نامید، و هندسه‌ی سماوی. در هندسه‌ی سماوی، مثلث‌ها دارای این ویژگی‌اند که مجموع سه زاویه در هر یک از آن‌ها، برابر دو قائمه نیست ... ». شِوِی کار، در دنبال یادداشت خود، حقیقت‌هایی از هندسه‌ی جدید را می‌آورد.

شِوِی کار، بررسی‌های خود را چاپ نکرد. این‌طور به نظر می‌رسد که او در اندیشه‌های هندسی خود، زیر تاثیر **لامبرت و ساکری** بود: در نوشته‌های خود، از سال ۱۸۰۷، بر این مولفان تکیه می‌کند.

تااورینوس. برادرزاده‌ی **شِوِی کار، تااورینوس** (۱۷۹۴-۱۸۷۴)، زیر تاثیر کارهایی که در زمینه‌ی هندسه‌ی سماوی انجام شده بود، خود را به آن مشغول کرد. او در سال ۱۸۲۵، نوشته‌ی خود را با عنوان «نظریه‌ی خط‌های موازی» چاپ کرد که در آن، فرضیه‌ی زاویه‌ی منفرجه» **ساکری** را تایید کرد و در ضمن شامل بررسی‌هایی هم درباره‌ی فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده بود. در سال ۱۸۲۶، در رساله‌ی دیگری، نشان می‌دهد، چگونه می‌توان به صورت صوری ـ تحلیلی، هندسه‌ی ناشی از فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده را ساخت. او در دستورهای هندسه‌ی کروی، شعاع کره یعنی r را برابر ρi می‌گیرد و حقیقت‌های هندسه‌ی لگاریتمی ـ کروی را به دست می‌آورد (**تااورینوس**، هندسه‌ی خود را، «هندسه‌ی لگاریتمی ـ تحلیلی» می‌نامید).

تااورینوس می‌دانست، هندسه‌ی کروی متناظر با فرضیه‌ی زاویه‌ی منفرجه است؛ هندسه‌ی اقلیدسی هم عبارت است از «عبور» از هندسه‌ی کروی به هندسه‌ی لگاریتمی ـ کروی (وقتی که شعاع کره از حوزه‌ی حقیقی، به سمت بی‌پایانی، به حوزه‌ی موهومی می‌رود). با این که **تااورینوس** چنین موفقیت‌هایی به دست آورد، هندسه‌ی لگاریتمی ـ تحلیلی او، منطقی و بی‌تناقض بود، فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده را به عنوان فرضیه‌ای غیرواقعی کنار گذاشت؛ او نتوانست فضایی را مجسم کند که در آن، فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده جا داشته باشد.

آفرینندگان هندسه‌ی نااقلیدسی

گوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) . **گوس**، ریاضی‌دان نام‌آوری که هم عصرانش او را «سلطان ریاضی‌دانان» می‌نامیدند، در دوران زندگی خود، چیزی درباره‌ی مساله‌ی خط‌های موازی چاپ نکرد. تنها پس از مرگ او بود که به بررسی‌های جالب او در یادداشت‌هایی که برای دیگر ریاضی‌دانان نوشته بود و در برخی نوشته‌هایی که بین کاغذهای او پیدا شد، پی‌بردند.

نخستین اندیشه‌های گوس درباره‌ی مساله‌ی خط‌های موازی از سال ۱۷۹۲ آغاز می‌شود؛ او هم مثل **ساکری و لامبرت** در تلاش برای اثبات پوستولای پنجم بود. از نامه‌ای که به **ولفگان بایای** نوشته است، روشن می‌شود که در سال ۱۸۰۴ هم، هنوز دست از جست‌وجو برای اثبات برنداشته بود. ولی **گوس** به تدریج قانع شد که پوستولای پنجم را نمی‌توان ثابت کرد در سال ۱۸۱۶ به **شوماخر** می‌نویسد:

«در ریاضیات بسیار اندک‌اند پرسش‌هایی که درباره‌ی آن‌ها به اندازه‌ی دشواری‌ها و رخنه‌های موجود در مقدمات هندسه نوشته باشند؛ با وجود این باید بی‌پرده اعتراف کنیم، بعد از دو هزار سال، نتوانسته‌ایم از **اقلیدس** جلوتر برویم. این اعتراف بی‌پرده و روشن، برای دانش بسیار با ارزش تر از آن است که در جهت گشودن این راز تلاش کنیم».

در سال ۱۸۱۷، در نامه‌ای که **گوس** به **اولبرس** نوشته است، روشن‌تر صحبت می‌کند:

«من روزبه روز بیش‌تر قانع می‌شوم که، نیاز هندسه‌ی ما دست کم با عقل انسانی و برای عقل انسان ثابت شدنی نیست».

در سال ۱۸۱۹ و در نامه‌ای به **شِوِی کار**، درباره‌ی پیشرفت‌هایی که در هندسه‌ی جدید به دست آورده است، می‌نویسد:

« . . . من هندسه‌ی سماوی را تا آن جا پیش برده‌ام که می‌توانم همه‌ی مساله‌ها را حل کنم، البته تنها با این شرط که مقدار ثابت C داده شده باشد[۱]».

و در نامه‌ی خود به **تااورینوس** در سال ۱۸۲۴ می‌نویسد:

«این فرض که مجموع زاویه‌های مثلث از ۱۸۰ درجه کم‌تر است، به هندسه‌ی خاصی منجر می‌شود که با هندسه‌ی ما به کلی فرق دارد. در ضمن، این هندسه درست و قانع‌کننده است. من می‌توانم هر مساله‌ای را در این هندسه حل کنم، به جز تعیین مقدار ثابتی که آن را نمی‌شود از پیش شناخت؛ هر قدر این مقدار ثابت را بزرگ‌تر بگیریم، به هندسه‌ی اقلیدسی نزدیک‌تر می‌شویم و اگر آن را بی‌نهایت فرض کنیم، دو دستگاه برهم منطبق می‌شوند».

گوس به این دلیل نتیجه‌ی بررسی‌های خود را چاپ نکرد که می‌ترسید برای دیگران قابل فهم نباشد. در نامه‌ای که در سال ۱۸۲۹ به **بِسِل** نوشته است، می‌خوانیم:

۱. درباره‌ی این مقدار ثابت، در بخش پنجم صحبت خواهیم کرد.

«به‌احتمالی، به این زودی‌ها آمادگی آن را پیدا نکنم که پژوهش‌های گسترده‌ی خود را در این زمینه، برای چاپ آماده کنم. چه بسا در تمامی دوران زندگی خود نتوانم در این باره تصمیم بگیرم، زیرا از هیاهوی «بئوسی‌ها[۱]» هراسی دارم که با بیان همه‌ی دیدگاه‌های خود هجوم خود را به سمت من آغاز کنند».

یانوش بایای (۱۸۰۲-۱۸۶۰). **وُلفگان بایای**، دوست دانشگاهی **گوس**، تمامی عمر خود را در راه اثبات پوستولای پنجم گذراند. او که به قول خودش «تا مرز امکان» موضوع را بررسی کرده بود، نتوانست چیز تازه‌ای به دست آورد. ولی آن چه پدر در آرزوی آن بود، پسرش **یانوش** انجام داد که حتا **گوس** محافظه‌کار را واداشت، او را «نابغه‌ای درجه‌ی اول» بخواند. از همان زمانی که در سال‌های ۱۸۱۷ تا ۱۸۲۲ دانشجوی مهندسی بود، به این مساله علاقه‌مند شد. تا سال ۱۸۲۰، شبیه **ساکری** از برهان خُلف استفاده می‌کرد، حتا زمانی به این گمان رسید که توانسته است پوستولای پنجم را ثابت کند. ولی به تدریج قانع شد، باید هندسه‌ای وجود داشته باشد که پوستولای پنجم در آن صدق نمی‌کند. وقتی پدر **یانوش** متوجه شد، پسرش به مساله‌ی خط‌های موازی علاقه‌مند شده است، با اصرار از او خواست، از ادامه‌ی کار منصرف شود و برای او نوشت:

«خواهش می‌کنم در صدد پیروزی بر نظریه‌ی خط‌های موازی نباش، زیرا همه‌ی وقت خود را خراب خواهی کرد، بدون این که بتوانی آن را ثابت کنی. سعی نکن این نظریه را، چه با روشی که برای من شرح داده‌ای و چه با روش دیگری، دنبال کنی. من همه‌ی راه‌ها را آزموده‌ام و هیچ اندیشه‌ای را، بدون بررسی، رها نکرده‌ام. من تمامی این شب سیاه را دَرنَوَردیده‌ام و هر شعله‌ی شادی زندگی را در آن به خاک سپرده‌ام. به خاطر خدا، از تو می‌خواهم، این مساله را کنار بگذاری. از آن به همان اندازه دوری کن که از نیازهای نفسانی خود دوری می‌کنی، زیرا ممکن است همه‌ی زندگی و سلامتی و آرامش، و تمامی شادکامی زندگی را، از تو بگیرد».

ولی **یانوش** به پند پدرگردن نگذاشت و حتا جدی‌تر کار روی تکامل هندسه‌ی جدید را ادامه داد. در سال ۱۸۲۳، جوان بیست و یک ساله، به پدرش نوشت:

«به‌طور جدی تصمیم دارم، نتیجه‌ی کارهای خود را درباره‌ی خط‌های موازی چاپ کنم، تنها منتظر فرصتی هستم تا آن را منظم کنم. در حال حاضر، هنوز به هدف اصلی نرسیده‌ام، ولی چنان نتیجه‌های مهمی به دست آورده‌ام که حیف می‌دانم از بین بروند. اگر شما با این نتیجه‌گیری‌ها آشنا شوید، با من هم‌عقیده خواهید شد؛ تنها می‌توانم بگویم که، توانسته‌ام از هیچ، یک دنیای کامل بسازم».

در سال ۱۸۳۲، کتاب **ولفگان بایای** درباره‌ی هندسه چاپ شد؛ کار **یانوش بایای**، ضمیمه‌ای از همین کتاب بود. این ضمیمه، عنوانی دراز دارد که با این جمله‌ها آغاز می‌شود: «ضمیمه برای آموزش فضایی که هیچ ربطی به درستی یا نادرستی آکسیوم یازدهم **اقلیدس** ندارد . . . »[۲].

۱. «بئوسی‌ها» ساکنان منطقه‌ی «بئوتی» که آتنی‌ها، آن‌ها را نادان می‌دانستند. واژه‌ی «بئوسی» کنایه‌ای از مردم نادان و احمق بود.

۲. در برخی از چاپ‌های «مقدمات» **اقلیدس**، پوستولای پنجم را، آکسیوم یازدهم نامیده‌اند.

نوشته‌ی بایای به زبان لاتینی بود، به همین دلیل نوشته‌ی **یانوش** به نام «افزوده» (Appendix) معروف شده است.

این ضمیمه را **ولفگان بایای**، برای دوست نامدارش گوس فرستاد. پاسخ گوس چنین بود:

«اگر از این جا آغاز می‌کنم که زبانم از تحسین کار **یانوش** عاجز است، ممکن است در ابتدا شگفت‌زده شوی. ولی من چیز دیگری نمی‌توانم. در واقع، تحسین او به معنای تحسین خودم است، زیرا مضمون این نوشته راهی را که پسر تو انتخاب کرده است و نتیجه‌گیری‌های او، به آن چه من می‌اندیشم و از ۳۰-۳۵ سال گذشته به آن مشغول بوده‌ام، بسیار نزدیک و حتا به تقریب بر آن‌ها منطبق است. در واقع، از این بابت شگفت‌زده‌ام».

«آن چه به کار خودم در این زمینه مربوط می‌شود، که به صورت یادداشت‌هایی در چند بخش نه‌چندان بزرگ جمع کرده‌ام، خیال ندارم در زمان زندگی خودم منتشر کنم. بسیاری از مردم، درک درستی از آن چه در این موضوع درباره‌ی آن صحبت می‌شود، ندارند ... همیشه این نگرانی را داشته‌ام که آن چه نوشته‌ام، با من از بین نرود. اکنون دیگر می‌توانم از ادامه‌ی کار صرف‌نظر کنم و بسیار خوشحالم که همه‌ی آن‌ها را در نوشته‌ی پسر دوست قدیمی‌ام می‌بینم».

یادداشت **گوس**، تاثیر ژرفی بر **یانوش** گذاشت. اوگمان نمی‌کرد، کس دیگری هم توانسته باشد، پیش از او به همین نتیجه‌ها برسد و تصور کرد، **گوس** می‌خواهد خود را پیشگام در این کشف قلمداد کند.

زندگی بر **یانوش بایای** سخت گرفت. هم عصرانش ارزش کشف او را نمی‌فهمیدند، حتا پدرش اندیشه‌های او را نمی‌پذیرفت. گرچه **گوس** در نامه‌ی خودش کارهای **یانوش** را بسیار خوب ارزیابی کرده بود، ولی هرگز آشکارا در این باره چیزی نمی‌گفت. **یانوش** که نه کسی حرف او را می‌فهمید، نه کسی با او هم‌دردی و هم‌فکری می‌کرد، تحمل خود را از دست داد، به ناامیدی افتاد، پژوهش‌های ریاضی خود را کنار گذاشت و در بقیه‌ی عمر در تنهایی زندگی کرد.

در درجه‌ی نخست باید **گوس** را در کُشتن استعداد **یانوش بایای** گناه کار دانست؛ گوس با اعتبار بی‌مانند خود، می‌توانست توهم سده‌ها را درباره‌ی نظریه‌ی خط‌های موازی بشکند و در به رسمیت شناختن خلاقیت **بایای** و **لباچوسکی** سهمی جدی داشته باشد. هندسه‌ی جدید، سرانجام پذیرفته شد و گسترش یافت، ولی وقتی که آفرینندگان آن در آرامگاه خود بودند.

لباچوسکی. به‌قول **وُلفگان بایای** «بسیاری از اندیشه‌ها، همین که دوران آن‌ها فرا رسد، به طور هم زمان و یکباره، در مکان‌های مختلف شکفته می‌شوند، درست مثل بنفشه‌ی جاودان که همه جا، هرجا که پرتو آفتاب باشد، می‌شکفد». چنین بود که، بدون ارتباط با **گوس** و **بایای**، **لباچوسکی** هم به سمت همان اندیشه حرکت کرد. ولی او خیلی جلوتر و ژرف‌تر از **گوس** و **بایای** رفت، از «هیاهوی بئوسی‌ها» نهراسید و تا پایان زندگی، برای به رسمیت شناختن اندیشه‌ی خود مبارزه کرد.

نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی

(۱۷۹۳-۱۸۵۶)

نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی (۱۷۹۳-۱۸۵۶) در ۲۲ اکتبر سال ۱۷۹۳ در ناحیه‌ی «نیژه‌گُرُد» در خانواده‌ای کم و بیش فقیر به‌دنیا آمد. پدرش وقتی از دنیا رفت که پسر او ـ «کُپرنیک هندسه» ـ تنها سه سال داشت. مادرش که روحی نیرومند داشت، با خانواده به قازان رفت و سه فرزند او، از جمله **نیکلا**، در همان جا دوران تحصیل خود را گذراندند. در همین شهر بود که **نیکلا** در دانشگاه قازان درس خود را ادامه داد.

لباچوسکی چنان استعدادی از خود نشان داد که در سال ۱۸۱۱ استادیار، در سال ۱۸۱۴ دانشیار و در سال ۱۸۱۶ استاد ریاضیات شد.

شبیه **گوس** و **یانوش بایای**، **لباچوسکی** هم، به بررسی‌های مربوط به هندسه مشغول شد و در فاصله‌ی سال‌های ۱۸۱۵ تا ۱۸۱۷، موضوع درس خود را در این زمینه ارایه کرد؛ امید او این بود که بتواند پوستولای پنجم را ثابت کند. او به خوبی می‌دانست، همه‌ی به اصطلاح اثبات‌های پوستولای پنجم، که از آن‌ها آگاه بود، ناموفق‌اند. برای نمونه، درکتاب درسی هندسه (که در سال ۱۸۲۳ نوشت، ولی چاپ نشد)، درباره‌ی پوستولای پنجم این‌طور می‌نویسد: «اثبات دقیق این حقیقت، تاکنون به دست نیامده است. برخی از آن چه در این باره وجود دارد، می‌تواند تا اندازه‌ای روشن کننده باشد، ولی هیچ‌کدام آن‌ها را نمی‌توان اثبات ریاضی دانست».

یازدهم فوریه‌ی سال ۱۸۲۶ را، «روز تولد هندسه‌ی نااقلیدسی» نامیده‌اند. در این روز، لباچوسکی در نشست دانشکده‌ی فیزیک ـ ریاضی دانشگاه قازان، زیرعنوان «بحثی درباره‌ی بنیان‌های هندسه» سخن‌رانی کرد. در سال ۱۸۲۹ (یعنی سه سال پیش از چاپ مطلب **یانوش بایای**)، مقاله‌ای از لباچوسکی در مجله‌ی «پیک قازان» با عنوان «درباره‌ی بنیان‌های هندسه» منتشر شد. لباچوسکی، در این مقاله، مثل سخن‌رانی خود، درباره‌ی پژوهش‌هایی صحبت می‌کند که در زمینه‌ی هندسه‌ی جدید انجام داده است.

سپس، لباچوسکی کارهای خود را دنبال کرد: «هندسه‌ی تخیلی» (۱۸۳۵)، «بنیان تازه‌ی هندسه با نظریه‌ی کامل موازی‌ها» (۱۸۳۵-۱۸۳۸)، «بررسی‌های هندسی درباره‌ی نظریه‌ی خط‌های موازی» (۱۸۴۰) و نوشته‌های دیگر.

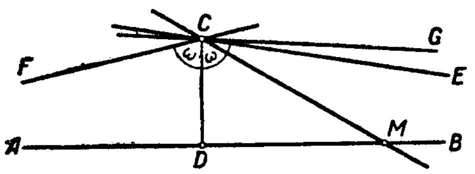
لباچوسکی در سال ۱۸۵۵، یک سال پیش از مرگ که به تقریب نابینا شده بود، آخرین کتاب خود را به نام «موازی‌ها» به زبان‌های روسی و فرانسه منتشر کرد و در آن، طرح تازه‌ای از دستگاه هندسی خود آورد.

خلاقیت علمی لباچوسکی، با برنامه‌ریزی منظمی، در جریان نزدیک به ۲۰ سال کار او در دانشگاه قازان (از سال ۱۸۲۷ تا سال ۱۸۴۶ ریاست دانشگاه را به عهده داشت) دیده می‌شود[1].

۱. درباره‌ی زندگی و کار **نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی**، کتاب پروفسور و. ف. کاگان را، با عنوان «**لباچوسکی**» ببینید. این کتاب، با عنوان «**لباچوسکی** و هندسه‌ی نااقلیدسی» از همین مترجم به فارسی برگردانده شده است.

بعد از بخش‌های چهارم و پنجم این کتاب (یعنی بعد از آن‌که با مساله‌ی اصل موضوعی کردن هندسه در زمان حاضر آشنا شدیم)، هندسه‌ی لباچوسکی را شرح خواهیم داد. ولی برای این که تا اندازه‌ای، به ارزش کار لباچوسکی پی ببریم و روشن کنیم، چرا اندیشه‌های او برای هم عصرانش قابل درک نبود، خیلی کوتاه درباره‌ی هندسه‌ای که خود **لباچوسکی** آن را «تخیلی» می‌نامد، صحبت می‌کنیم.

از پوستولای پنجم اقلیدس، می‌توان بلافاصله، این قضیه را نتیجه گرفت: «از نقطه‌ی C واقع در بیرون خط راست AB، می‌توان خط راستی در صفحه‌ی ABC رسم کرد که AB را قطع نکند؛ این خط راست منحصر به فرد است». پوستولای پنجم لباچوسکی، پوستولای تازه‌ای است که پوستولای پنجم **اقلیدس** را نقض می‌کند: «از نقطه‌ی C واقع در بیرون خط راست AB و در صفحه‌ی ABC، نه یک خط راست، بلکه بی‌نهایت خط راست CG می‌توان رسم کرد که AB را قطع نکنند» (شکل ۱۱). همه‌ی این خط‌های راست با خط‌های راست CM که AB را قطع می‌کنند، فرق دارند و به وسیله‌ی دو خط راست مرزیِ CE و CF که با AB برخوردی ندارند، از آن‌ها جدا می‌شوند. هر دو خط مرزی با عمودِ CD بر AB، زاویه‌هایی برابر مثل w می‌سازند. **لباچوسکی**، این دو خط راست مرزی را موازی با AB می‌نامد: CE در جهت از A به B با AB موازی است و CF در جهت از B به A با BA موازی است. زاویه‌ی $w = \widehat{DCE} = \widehat{DCF}$، زاویه‌ی توازی متناظر با پاره‌خط راست DC است.



شکل۱۱

با پذیرفتن پوستولای **لباچوسکی**، بی‌درنگ می‌توانیم، به چند نتیجه‌ی غیرعادیِ ناشی از آن برخوریم. پیش از همه، پوستولای پنجم **اقلیدس** جایی ندارد: $\widehat{BDC} = 90^\circ$ و $\widehat{DCE} = w < 90^\circ$ که مجموعی کم‌تر از ۱۸۰ درجه دارند. در هندسه‌ی **لباچوسکی** شکل‌های متشابه وجود ندارند، زیرا همان‌طور که پیش از این دیدیم، فرض مربوط به وجود شکل‌های متشابه (فرض **والیس**) منجر به پوستولای پنجم اقلیدس، و فرض نبودن شکل‌های متشابه منجر به پوستولای لباچوسکی می‌شود.

فاصله‌ی بین دو خط راستی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند (یعنی طول پاره‌خط راست عمودی که از نقطه‌ای واقع بر یکی از دو خط راست، بر دیگری فرود می‌آید)، در هندسه‌ی **لباچوسکی** مقداری ثابت نیست و می‌توان آن را به دلخواه بزرگ گرفت. در واقع، اگر فرض کنیم، فاصله‌ی بین دو خط راستی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند، مقداری محدود است (فرض **پروکلس**)، آن وقت باید پوستولای پنجم **اقلیدس**

را بپذیریم. بعد ثابت خواهیم کرد، در صفحه‌ی **لباچوسکی**، حتا یک مستطیل هم وجود ندارد و بنابراین، نمی‌توان خط‌کشی با بُعدهای برابر و موازی، آن‌طور که عادت کرده‌ایم، پیدا کرد.

لباچوسکی، زاویه‌ی توازی w را در رابطه با پاره‌خط راست $x = CD$ و با این معادله به دست می‌آورد:

$$\cot \frac{w}{2} = e^{\frac{x}{\rho}}$$

که در آن، ρ مقدار ثابتی است که شعاع انحنای فضای **لباچوسکی** نامیده می‌شود. از این دستور نتیجه می‌شود، وقتی x از ۰ تا ∞ تغییر کند، مقدار w به طور یکنوا (مُونُوتُون) از ۹۰ درجه تا ۰ نزول می‌کند.

چه خودِ پوستولای **لباچوسکی** و چه نتیجه‌هایی که از آن به دست می‌آید، می‌تواند از دیدگاه تصور عینی، غریب و حتا بی‌معنی باشد. همین وضع بود که هم عصرانِ **لباچوسکی** را به ناباوری و حتا دشمنی با هندسه‌ی او وادارد و طبیعی است که نتوانند ارزش علمی ـ انقلابی اندیشه‌های هندسی او را درک کنند. بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان آن زمانِ روس ـ **اُستروگرادسکی و بونیاکُووسکی** ـ نتوانستند **لباچوسکی** را درک کنند. در مجله‌ی «فرزند میهن» در سال ۱۸۳۴، چیزهایی درباره‌ی «بنیان‌های هندسه‌ی» **لباچوسکی** چاپ شد که در آن‌ها، از هندسه‌ی **لباچوسکی** به عنوان «شوخی»، «مسخره کردن ریاضی‌دانان» و غیره نام بردند. می‌گویند، این نوشته، با شرکت **اوستروگرادسکی** تهیه شده است. **بوتله رُوفِ** شیمی‌دان در سال ۱۸۷۸ در «پیک روسیه» درباره‌ی هم عصران **لباچوسکی** نوشت: «درباره‌ی «هندسه‌ی تخیلی» با لبخند تمسخرآمیز همراه با تاسف، نسبت به دانشمند صحبت می‌شد».

ناسزاهای نارواییی که نثار **لباچوسکی** می‌شد، او را از کار باز نداشت و مثل **یانوش بایای** از میدان در نرفت؛ او هرگز پرچم را زمین نگذاشت، پرچم دانشمند پیشگامی که بدون توجه به رنجش‌های شخصی، اندیشه‌های خود را دنبال کرد، اندیشه‌هایی که سرانجام پیروز شدند و خود **لباچوسکی** را به عنوان نماینده‌ی نامدار دانش روسیه و جهان به همگان شناساند.

هندسه‌ی جدید، بعد از مرگ آفریننده‌ی آن و وقتی به رسمیت شناخته شد که در سال‌های ۶۰ سده‌ی نوزدهم، یادداشت‌های گوس چاپ شد که در آن‌ها دیدگاه‌های خود را درباره‌ی بنیان‌های هندسه آورده و برای کارهای لباچوسکی ارزش و احترامی بی‌اندازه گذاشته بود. از جمله، در سال ۱۸۴۶ به دوست خود **شوماخر** نوشته بود: «نویسنده (یعنی **لباچوسکی**) همچون دانشمند خبره‌ای که حقیقت روح هندسه را شناخته است، با موضوع روبه‌رو می‌شود. ناچارم به شما سفارش کنم به کتاب «بررسی‌های هندسی درباره‌ی نظریه‌ی خط‌های موازی» توجه کنید که خواندن آن، بی‌تردید، برای شما لذت‌بخش و سودمند خواهد بود».

ناباوری نسبت به «هندسه‌ی تخیلی» وقتی به کلی از میان رفت که بلترامی ریاضی‌دان ایتالیایی در رساله‌ی خود با عنوان «تفسیر هندسه‌ی نااقلیدسی» (۱۸۶۸) ثابت کرد، هندسه‌ی **لباچوسکی** در روی صفحه می‌تواند در فضای معمولی (اقلیدسی) روی سطح معینی تحقق یابد: سطحی با انحنای

گوسی منفی و ثابت. به این ترتیب ثابت شد، هندسه‌ی **لباچوسکی** به همان اندازه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی از تناقض دور است. خیلی زود، این موضوع به وسیله‌ی **کلاین** و به یاری تفسیر او، استحکام کامل خود را پیدا کرد (۲§ از بخش چهارم را ببینید). از این زمان بود که کسی «تخیلی بودن هندسه‌ی **لباچوسکی**» را بیش‌تر از «تخیلی بودن هندسه‌ی اقلیدسی» نمی‌دانست. در نتیجه راه‌حل قطعی پوستولای پنجم اقلیدس به دست آمد: پدید آمدن هندسه‌ی بی‌تناقض **لباچوسکی** که اساس آن نفی پوستولای پنجم **اقلیدس** بود؛ ثابت کرد که پوستولای پنجم اقلیدس ثابت نشدنی است. این نتیجه‌گیری، تاثیر عظیمی داشت و سرانجام، هندسه‌ی **لباچوسکی** به طور کامل به رسمیت شناخته شد.

ارزش کشف لباچوسکی

بررسی‌های **لباچوسکی**، از دیدگاه منطقی ـ ریاضی، اهمیت زیادی دارد. ساختن هندسه‌ی بی‌تناقض نااقلیدسی نشان داد، اصل موضوع‌های هندسه، نظام جامد و دگمی نیست که بی‌تزلزل و استوار باشد و می‌توان آن‌ها را تغییر داد. این موضوع، به تدریج، باز هم روشن‌تر شد: با پذیرفتن اصل موضوع‌های مختلف، می‌توان هندسه‌های مختلفی به دست آورد. بنابراین، لباچوسکی توانست یخ دو هزار ساله را بشکند و زمینه را برای هندسه‌های تازه آماده کند. همراه با زمینه‌ای که آماده شده بود، بحث درباره‌ی پایه‌گذاری هندسه و ساختن دستگاهی از اصل موضوع‌ها که بی‌تناقض و بی‌نقص باشد، درگرفت.

در پایان سده‌ی نوزدهم، مساله‌ی بنیان‌گذاری هندسه، که آرزوی ارسطو بود، پایان یافت: در سال ۱۸۹۹، **هیلبرت** در نوشته‌ی خود ـ «بنیان‌گذاری هندسه» ـ مساله‌ی اصل موضوعی کردن هندسه‌ی اقلیدسی را حل کرد؛ دستگاه اصل موضوعیِ او، از هرگونه نقص و رخنه‌ای که در کتاب اقلیدس دیده می‌شود، مبرا است.

پدیدآمدن هندسه‌ی بی‌تناقض **لباچوسکی** پرسشی پیش آورد: هندسه‌ی فضای فیزیکی ما چگونه است؛ کدام ویژگی‌های فضای فیزیکی در دسترس ماست وکدام ویژگی‌ها، پس از صدها و هزاران سال و به یاری نور به ما می‌رسد؟ این مساله، که برای دانش‌های طبیعی اهمیتِ درجه اول داشت، در آغاز سده‌ی بیستم و با پیشرفت نظریه‌ی نسبیت، حادتر شد.

به این ترتیب، هندسه‌ی **لباچوسکی** انگیزه‌ی اساسی برای پدید آمدن دیدگاه امروزی درباره‌ی هندسه به عنوان رشته‌ای انتزاعی از ریاضیات و هم هندسه‌ی واقعی فضای فیزیکی ما به عنوان حقیقتی عینی شد که برای روشن کردن آن، کار و خلاقیت گروهیِ دانشمندان (فیزیک‌دانان، اخترشناسان و ریاضی‌دانان) را می‌طلبید.

در این جا، تنها از مهم‌ترین نتیجه‌های کشف **لباچوسکی** صحبت کردیم. ولی همین اندازه کافی است تا بدانیم، به چه مناسبت **نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی** را باید یکی از بزرگ‌ترین‌ها، در میان دانشمندان دانست.

و. کلیفورد درباره‌ی نقش و مقام **لباچوسکی** در دانش‌ها، به حق می‌گوید: « ... **لباچوسکی** برای **اقلیدس** همان نقشی را دارد که **وازال** برای **گالِن** و **کپرنیک** برای **بطلمیوس** داشت. بین **کپرنیک** و **لباچوسکی** شباهت‌های زیاد و جالبی وجود دارد: هر دوی آن‌ها ریشه‌ای اسلاوی دارند؛ هر کدام از آن‌ها انقلابی در دانش پدید آوردند و هر دوی این انقلاب‌ها، برای درک و شناخت ما از فضای کیهانی، ارزشی عظیم داشت.

بخش دوم

هندسه‌ی مطلق

§ ۱. پیش‌گفتار

از دیدگاه استدلال دقیق ریاضی، نه «مقدمات» **اقلیدس** و نه آن چه به عنوان کتاب درسی هندسه، تا به امروز نوشته شده است، بی‌عیب نیستند. مطلب بر سر این است که در این کتاب‌ها، همان‌طور که در تجزیه و تحلیل «مقدمات» اقلیدس (§۲ از بخش اول) دیدیم، در بسیاری جاها، البته نه به عنوان روشی قابل قبول، بلکه به عنوان ضرورت‌هایی که پیش می‌آید، از معرفت شهودی استفاده شده است، و بنابراین، این استدلال‌ها را نمی‌توان از نظر منطقی، دقیق و درست دانست. منظور از معرفت شهودی، لحظه‌هایی است که، ضمن اثبات، از پدیده‌ای که بر اساس مشاهده‌ی شکلی که رسم و یا در ذهن خود مجسم کرده‌ایم، نتیجه بگیریم، نتیجه‌ای که نتوان آن را با استدلال ذهنی و تنها بر اساس اصل موضوع‌هایی که پذیرفته‌ایم، به دست آورد. برای نمونه، وقتی بدون اثبات و به عنوان چیزی که به خودی خود «روشن» است، می‌پذیریم: اگر خط راست از نقطه‌ای واقع در درون دایره بگذرد، محیط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، به معرفت شهودی متوسل شده‌ایم. و از این نمونه‌ها، هرچه بخواهید می‌توان آورد. پیش از این هم دیدیم که استدلال‌های متکی بر معرفت شهودی، به طور عمده، به مفهوم‌های «پیوستگی»، «حرکت» و «بین» مربوط می‌شوند که در زمان **اقلیدس**، به صورتی منطقی، تعریف نشده بودند. به ویژه، دلیل این که **اقلیدس** نتوانست در زمان خود، آرزوی **ارسطو** را برآورد و هندسه را بر اساس تعدادی مفهوم‌های بنیانی و اصل موضوع‌ها بسازد، ریشه در همین‌جا دارد. ولی اگر ضرورت استفاده از معرفت شهودی به عنوان ابزاری برای اثبات، در زمان **اقلیدس**، مربوط به سطح دانش آن زمان بود، در زمان ما گاهی مربوط به

ملاحظه‌هایی است که جنبه‌ی آموزشی دارد[1]، وگاهی برای صرفه‌جویی وقت است که، برای قانع شدن و اطمینان به درستی نتیجه‌گیری، به «روشنی» مطلب از روی شکل استناد می‌شود. در پایان سده‌ی نوزدهم، در کارهای بسیاری از دانشمندان (**لباچوسکی**، **ریمان**، **بِلترامی**، **هِلم هُولتز**، **دِدِکیند**، **کلاین**، **س.لی**، **پاش**، **وِرُونز**، **پی‌یه‌ری**، **پوانکاره** و دیگران)، به حل دشواری‌هایی که در بنیان‌های هندسه‌ی مقدماتی وجود داشت، پرداخته شده است. برخی از نتیجه‌گیری‌ها در زمینه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی را می‌توان در کتاب مشهور **هیلبرت** به نام «بنیان‌های هندسه» (۱۸۹۹) دید؛ در این کتاب، برای نخستین بار بعد از اقلیدس، به صورت راضی‌کننده‌ای، هندسه‌ی اقلیدسی، اصل موضوعی شده است. به این ترتیب، تنها در پایان سده‌ی نوزدهم بود که سرانجام معلوم شد، هندسه هم مثل نظریه‌ی انتزاعی گروه‌ها، قابل عرضه به صورت دستگاهی صوری و قیاسی است، به نحوی که همه‌ی گزاره‌های آن، به‌صورت خالص منطقی از چند پیش فرض بنیادی ـ اصل موضوع‌ها ـ نتیجه می‌شوند.

در این موضوع‌ها، برخی ویژگی‌ها (رابطه‌های اصلی) آمده است که به اصطلاح موضوع‌های اساسی هندسه، با آن‌ها مشخص می‌شوند.

در اصل موضوعی کردن هندسه، که هم‌اکنون به شرح آن می‌پردازیم، به عنوان موضوع‌های اصلی، «نقطه»، «خط راست» و «صفحه»، و به عنوان رابطه‌های اصلی، «وابسته بودن» (مثل نقطه‌ی وابسته به خط راست)، «بین» (مثلِ از سه نقطه‌ی مختلف خط راست، تنها یکی بین دو تای دیگر است) و «حرکت» پذیرفته می‌شود.

چه موضوع‌های اصلی و چه رابطه‌های اصلی، یعنی مفهوم‌ها، که با اصطلاح‌های «نقطه»، «خط راست»، «صفحه»، «وابستگی»، «بین»، «حرکت» بیان می‌شوند، مفهوم‌های اصلی گویند. مفهوم‌های اساسی را، به هر تعداد دلخواه می‌توان در نظر گرفت، تنها باید با دستگاه اصل موضوع‌ها (که در این جا می‌آوریم)، سازگار باشد. در واقع، هندسه‌ی مطلق، تنها با همین شش مفهوم اساسی سروکار دارد و همه‌ی مفهوم‌های دیگر هندسه، به یاری آن‌ها تعریف می‌شوند (برای نمونه، مفهوم‌های پاره‌خط راست، نیم‌خط راست و زاویه را می‌توان به کمک مفهوم‌های نقطه، خط راست، «وابستگی» و «بین» تعریف کرد)؛ و همه‌ی گزاره‌ها (قضیه‌ها)، به صورتی «صوری ـ منطقی» به عنوان نتیجه‌ای از اصل موضوع‌ها به دست می‌آیند.

مهم‌ترین پرسش‌های مربوط به اصل موضوعی کردن (یعنی بی‌تناقضی اصل موضوع‌ها، وابسته نبودن آن‌ها به یکدیگر و کامل بودن دستگاه اصل موضوعی) را در بخش‌های بعد بررسی می‌کنیم.

اصل موضوعی کردن هندسه‌ی مطلق، از چهارگروه اصل موضوع‌ها تشکیل شده است:

I_{1-10} ـ اصل موضوع‌های ترکیبی (ده اصل موضوع)؛

۱. فه‌لیکس کلاین می‌گوید: «همیشه باید در مدرسه، به درک عینی و زنده تکیه کرد؛ تنها بعد، آن هم به تدریج، نخستین طرح را برای وارد کردن عنصرهای منطقی ریخت».

II_{1-4} ـ اصل موضوع‌های ترتیبی (چهار اصل موضوع)؛

III_{1-10} ـ اصل موضوع‌های حرکت (ده اصل موضوع)؛

IV ـ اصل موضوع‌های پیوستگی دِدِکیند (یک اصل موضوع).

به این ترتیب، منظور از هندسه‌ی مطلق، همه‌ی نتیجه‌های ممکنی است که می‌توان به طور منطقی، از این چهارگروه اصل موضوع به دست آورد.

در این جا، نقطه‌ها را با حرف‌های بزرگ لاتینی (A، B، C، ...) خط‌های راست را با حرف کوچک لاتینی (a، b، c، ...) و صفحه‌ها را با حرف‌های یونانی (α، β، γ، ...) نشان می‌دهیم.

§ ۲. اصل موضوع‌های ترکیبی I_{1-10} و نتیجه‌های آن‌ها

در اصل موضوع‌های این گروه، صحبت بر سر نقطه، خط راست و صفحه است که با واژه‌ی «وابسته» بیان می‌شود. این رابطه، نقطه را با خط راست، یا نقطه را با صفحه مربوط می‌کند (درباره‌ی رابطه‌ی خط راست با صفحه، بعد و در تعریف ۱ سخن خواهد رفت)؛ برای نمونه: «نقطه‌ی A وابسته به خط راست a است»، «نقطه‌ی A وابسته به صفحه‌ی α است». رابطه‌ی «وابستگی» را با نماد $)($ نشان می‌دهیم: $A \,)(\, a$، $A \,)(\, \alpha$. «وابستگی» رابطه‌ای دو سویه است، یعنی اگر $A \,)(\, a$، آن وقت $a \,)(\, A$.

در کنار اصطلاح «وابستگی»، به فراوانی از واژه‌های مترادف آن استفاده می‌شود: «قرار دارد بر»، «می‌گذرد از» و غیره. به عنوان نمونه، در حالت $A \,)(\, a$ می‌توان گفت: «نقطه‌ی A بر خط راست a قرار دارد»، «نقطه‌ی A، نقطه‌ای از خط راست a است»، «خط راست a از نقطه‌ی A می‌گذرد» و غیره. برای این که رابطه‌ی میان موضوع‌های اصلی، زیر پوشش جمله‌های مترادف گُم نشود (و برای این که یک مفهوم مشخص با روش‌های مختلفِ بیان، موجب ابهام نشود و دو موضوع مختلف به حساب نیاید)، در حال حاضر در این جا از واژه‌های مترادف استفاده نمی‌کنیم.

باید به این نکته توجه کنیم، ضمن آشنایی با اصل موضوع‌هایی که در این جا می‌آوریم، نباید خط راست و صفحه را به صورت مجموعه‌های خاصی از نقطه‌ها تصورکنیم (آن‌طورکه در هندسه‌ی معمولی و یا هندسه‌ی تحلیلی می‌فهمیم)؛ برعکس، از همان آغاز باید خط راست و صفحه را به عنوان موضوع‌های مستقلی که به نقطه‌ها تقسیم نشده‌اند، تصور کرد. رابطه‌ی «وابستگی» را هم نباید به مفهوم عادی آن («روی ... قرار دارد»، «از ... می‌گذرد») در نظرگرفت. تکرار می‌کنیم: موضوع‌های «نقطه»، «خط راست»، و «صفحه» و رابطه‌ی «وابستگی»، که در اصل موضوع‌های گروه اول از آن‌ها سخن رفته است، می‌توانند هرگونه عنصر و یا هر رابطه‌ای در نظرگرفته شوند که تنها با این اصل موضوع‌ها سازگار باشند.

اصل موضوع‌های ترکیبی (I_{1-10})

I_1. خط راست a وجود داردکه با هر دو نقطه‌ی مفروض A و B «وابسته» است.

I_2. بیش از یک خط راست وجود ندارد که «وابسته» به هر یک از دو نقطه‌ی A و B باشد.