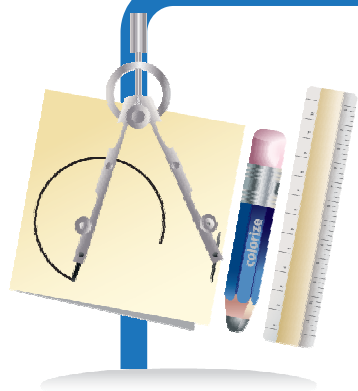
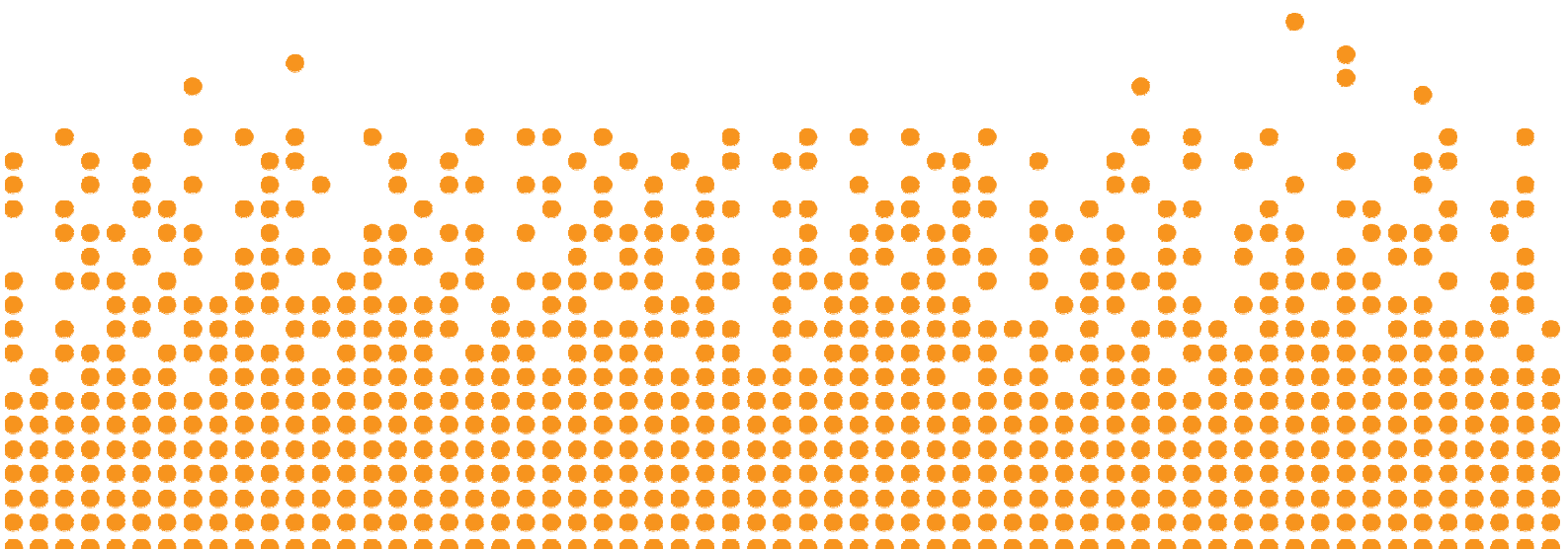




رياضى ۳



فصل اول

احتمال:

تعاریف:

آزمایش یا پدیده‌ای را که قبل از رخداد نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشد، آزمایش تصادفی یا پدیده‌ی تصادفی می‌نامند.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با S نمایش می‌دهیم. برآمد: هر نتیجه‌ی ممکن یعنی هر عضو S را یک برآمد می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

پیشامد: هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. در هر حال وقتی می‌گوییم پیشامدی رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. دو پیشامد که برآمد مشترکی ندارند را ناسازگار می‌گویند. منظور از رخداد یک پیشامد، وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است. **پیشامد ناممکن و مطمئن:** $\emptyset$ را پیشامد ناممکن (نشدنی) و S را پیشامد مطمئن (حتمی) می‌گویند.

انواع فضای نمونه:

تعداد اعضای مجموعه‌ی S ، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است متناهی، شمارا نامتناهی یا ناشمارا باشد. وقتی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای، متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، آن را فضای نمونه‌ای «گسسته» می‌نامند. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا باشد، که در این صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست. (مانند انتخاب عددی در بازه‌ی $(۰ و ۲)$.) (وقتی فضای نمونه‌ای، ناشمارا باشد، آن را فضای نمونه‌ای «پیوسته» می‌نامند.)

فضای نمونه $\left\{ \begin{array}{l} \text{شمارا (گسسته)} \\ \text{نامتناهی} \end{array} \right\}$ متناهی
ناشمارا (پیوسته)

مثال: در کیسه‌ای ۷ توپ متمایز وجود دارد. یک توپ به تصادف از آن خارج کرده و بدون مشاهده آن را کنار می‌گذاریم. سپس توپ دیگری را خارج کرده آن را مشاهده می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

$$\begin{array}{cccc} 6 (۱) & 7 (۲) & 3 \left(\begin{array}{c} ۷ \\ ۲ \end{array} \right) & 12 (۴) \end{array}$$

حل:

چون اطلاعی از خروج مهره اول در دست نیست، پس توقع ما در مورد خروج مهره دوم تغییر نکرده است. یعنی ما همچنان توقع خروج هر ۷ مهره را داریم و نمی‌توانیم بگوییم مهره‌ی معینی شانس خروج ندارد. پس فضای نمونه‌ای ۷ عضوی است.

اصول موضوع کولموگوروف:

وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایش تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم که این تابع براساس ۳ اصل موضوع زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها، یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد.

اصل موضوع ۱: احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است، یعنی: $\forall A \subseteq S : P(A) \geq 0$

اصل موضوع ۲: $P(S) = 1$

اصل موضوع ۳: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

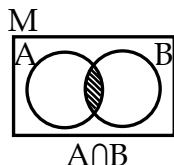
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

تابعی که در این اصول صادق باشد، به تابع احتمال موسوم است. فضای S ، تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را مدل احتمال آزمایش تصادفی می‌نامند.

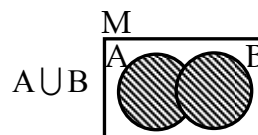
عملیات بر روی پیشامدها:

می‌توان بین پیشامدهای یک آزمایش و عبارات مجموعه‌ای یک تناظر یک‌به‌یک ایجاد کرد. در واقع چون پیشامد خود از جنس مجموعه است، می‌توان پیشامدهای جدیدی با استفاده از تلفیق پیشامدهای قبلی ایجاد کرد:

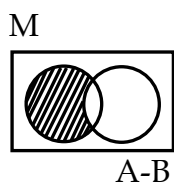
پیشامد وقوع A و B : $(A \cap B)$



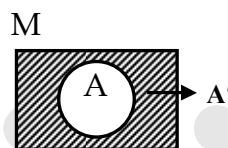
پیشامد وقوع A یا B : $(A \cup B)$



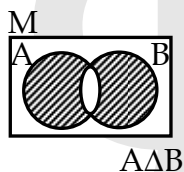
پیشامد وقوع فقط A : A (رخ دهد و B رخ ندهد)



پیشامد عدم وقوع A : A' یا $\bar{A}$

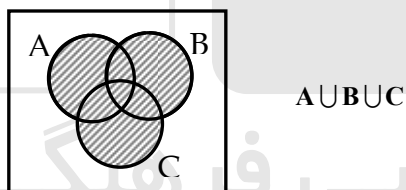


پیشامد وقوع فقط A یا فقط B : $A \Delta B$ (رخ دهد و B رخ ندهد یا A رخ ندهد و B رخ دهد):

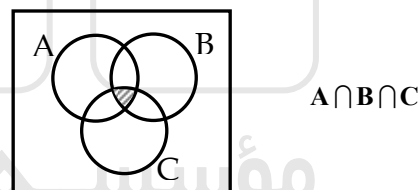


مثال: فرض کنید A , B , C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. نمودار ون پیشامدهای زیر را رسم کنید:

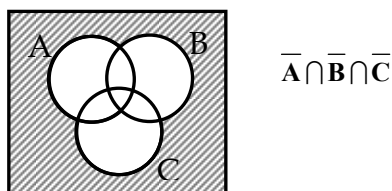
(ب) لااقل یکی از پیشامدها رخ دهد:



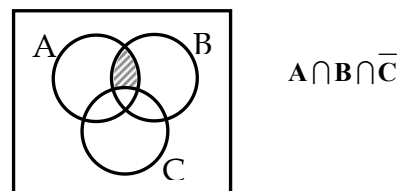
(الف) هر ۳ پیشامد رخ دهد:



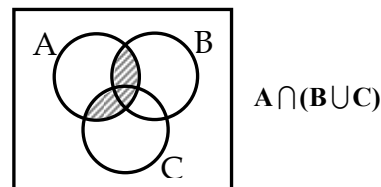
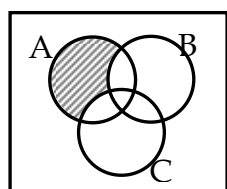
(د) هیچ یک از پیشامدها رخ ندهد:



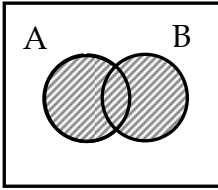
(ج) A , B اتفاق بیفتند و C رخ ندهد:



(ه) A اتفاق بیفتد و لااقل یکی از پیشامدهای B , C نیز رخ دهد: (و) فقط A اتفاق بیفتد:



ز) A اتفاق بیفتد یا در صورتی که A رخ نداد، B رخ دهد:



این عبارت در واقع $A \cup (B - A)$ است که همان $A \cup B$ می‌باشد.

مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم.

مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B به‌طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

د) $A \cap B'$

حل:

الف) $S = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ) \}$

ب) $A = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ) \}$

ج) $B = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ) \}$

د) $B' = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ) \}$

$A \cap B' = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ)، (پ، پ، پ) \}$

مثال: هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۶ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به‌طور

قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت یک رقمی باشد.

ت) پیشامد $A \cap B$

حل:

الف) $S = \{ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ \}$

ب) $A = \{ ۳، ۹، ۱۵ \}$

پ) $B = \{ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ \}$

ت) $A \cap B = \{ ۳، ۹، ۱۵ \} \cap \{ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ \} = \{ ۳، ۹ \}$

مثال: یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم مطلوب‌ست تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

د) $A' \cup B'$

ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

حل:

الف) $S = \{ (۱، پ)، (۲، پ)، (۳، پ)، (۴، پ)، (۵، پ)، (۶، پ)، (۱، ر)، (۲، ر)، (۳، ر)، (۴، ر)، (۵، ر)، (۶، ر) \}$

ب) $A = \{ (۲، ر)، (۴، ر)، (۶، ر)، (۱، پ)، (۳، پ)، (۵، پ)، (۲، ر)، (۴، ر)، (۶، ر) \}$

ج) $B = \{ (۲، ر)، (۴، ر)، (۶، ر) \}$

د) $A' = \{ (۱، پ)، (۳، پ)، (۵، پ) \}$

$B' = \{ (۱، ر)، (۳، ر)، (۵، ر)، (۲، پ)، (۴، پ)، (۶، پ)، (۱، ر)، (۳، ر)، (۵، ر) \}$

$A' \cup B' = \{ (۱، پ)، (۲، پ)، (۳، پ)، (۴، پ)، (۵، پ)، (۶، پ)، (۱، ر)، (۳، ر)، (۵، ر) \}$

مثال: ارقام ۵,۳,۰,۹ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی ساخته شده با این ارقام و بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A، آن که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B، آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A \cap B'$

که حل:

الف)

$$S = \{30, 35, 39, 50, 53, 59, 90, 93, 95\}$$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می‌شوند، مضرب ۵ هستند.

$$A = \{30, 35, 50, 90, 95\}$$

ج)

$$B = \{53, 59, 90, 93, 95\}$$

د) ابتدا B' را مشخص می‌کنیم.

$$B' = \{30, 35, 39, 50\} \quad A \cap B' = \{30, 35, 50\}$$

مثال: در انتخاب سه نفر از بین ۷ نفر پیشامد آن که از بین دو نفر a و b حداقل یکی موجود باشد چند عضو دارد؟

۱۰ (۴)

۱۵ (۳)

۲۰ (۲)

۲۵ (۱)

که حل:

$$\binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 35 - 10 = 25$$

حالتی که هیچ کدام موجود نباشد.

احتمال هم‌شانس (متساوی‌الاحتمال) در فضای گسسته: (احتمال کلاسیک)

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته‌ی S باشد، $P(A)$ برابر با مجموع احتمال برآمدهایی است که در A هستند. اگر S دارای n

برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد، فضای نمونه‌ای حاصل را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در

این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد، آن‌گاه $P(A) = \frac{m}{n}$ (در واقع فراوانی نسبی پیشامد A را احتمال آن تعریف می‌کنیم). لذا

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟

که حل:

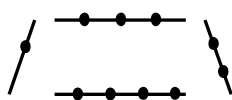
$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$|S| = 6 \times 6 = 36$$

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

مثال: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، چهار نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که با ۴ نقطه‌ی انتخاب شده بتوان یک

چهارضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟



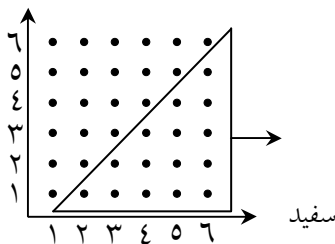
که حل: از هر کدام از خط‌ها یکی از رئوس را انتخاب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{10}{4}}$$

مثال: دو تاس قرمز و سفید پرتاب می‌شوند، احتمال آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر باشد، چقدر است؟

حل:

قرمز



زوج مرتب‌هایی که مؤلفه سفیدشان بزرگ‌تر است، مطلوبند:

$$P(A) = \frac{36-6}{36} = \frac{15}{36}$$

مثال: در اتاقی ۱۰ جفت کفش متمایز وجود دارد، هرگاه از میان آن‌ها دو لنگه کفش انتخاب شود، احتمال این که این دو

لنگه کفش یک جفت کفش تشکیل دهند، کدام است؟

حل: از بین جفت‌ها مطلوب است یک جفت را انتخاب کنیم:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}$$

مثال: در پرتاب ۴ سکه با هم، احتمال آنکه فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

حل:

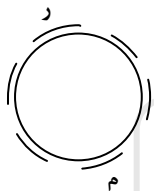
$$A = \{(ر, ر, ر, پ), (ر, ر, پ, پ), (ر, پ, پ, پ), (پ, پ, پ, پ)\}$$

$$P(A) = \frac{4+4}{2^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

جایگشت پ ۴ × جایگشت ر ۴ ×

مثال: رئیس، معاون و ۴ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال رئیس مقابل معاون قرار می‌گیرد؟

حل: رئیس در هر مکانی قرار گیرد، از ۵ مکان باقی‌مانده، مکان روبه‌روی رئیس مطلوبست: $P(A) = \frac{1}{5}$



مثال: دو تاس سفید و یک تاس قرمز متمایز را می‌ریزیم. احتمال آن که عدد تاس قرمز کوچک‌تر از تاس‌های سفید باشد چقدر است؟

حل:

تاس قرمز	تاس‌های سفید	
۱	۵×۵	می‌توانند از ۲ تا ۶ باشند
۲	۴×۴	می‌توانند از ۳ تا ۶ باشند
۳	۳×۳	می‌توانند از ۴ تا ۶ باشند
۴	۲×۲	می‌توانند از ۵ تا ۶ باشند
۵	۱×۱	فقط می‌توانند ۶ باشند

$$P(A) = \frac{25+16+9+4+1}{6^3} = \frac{55}{216}$$

مثال: بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد ۳ رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ای ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ و ۷ را

نوشته و به تصادف کارتی بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو رقم از ارقام عدد خارج شده فرد باشد چقدر است؟

حل: مطلوب است ۲ رقم از بین ارقام فرد و یک رقم از بین ارقام زوج انتخاب کرده و بچینیم.

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} \binom{3}{1} \times 3!}{\binom{5}{3} \times 3!} = \frac{3}{10}$$

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز متمایز، ۳ مهره سفید متمایز و ۷ مهره آبی متمایز قرار دارد.

الف) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{15}{2}}$$

ب) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$p(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{1}}{\binom{15}{2}}$$

ج) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}$$

د) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

چون ترتیب خروج مهم است

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1} \times 2!}{\binom{15}{1} \binom{14}{1}}$$

ه) دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

چون ترتیب خروج مهم است

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1} \times 2!}{\binom{15}{1} \binom{15}{1}}$$

چون مهره خارج شده مجدداً به کیسه بازگشته است →

مثال: ده کارت که بر روی هر کدام از آن‌ها، یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است در درون ظرفی قرار دارند (هیچ دو

کارتی شماره‌ی یکسان ندارند). اگر کارت‌های موجود در ظرف را به تصادف و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم، احتمال آن

که ۴ قبل از ۶ و ۶ قبل از ۲ بیرون آید (نه لزوماً بلافاصله) کدام است؟

حل:

راه حل ۱: این سه رقم در هر جایگاهی که قرار بگیرند، نسبت بهم ۳! حالت جایگشت دارند که حالت ۴۶۲ مطلوب است. لذا همواره

$$P = \frac{1}{6} \text{ یکی از ۶ حالت مطلوب است:}$$

راه حل ۲: ابتدا مکان این سه رقم را تعیین کرده و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم. بقیه ۷ رقم به صورت دلخواه چیده می‌شوند.

$$P(A) = \frac{\binom{10}{3} \times 7!}{10!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{1}{6}$$

مثال: n نفر را در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک روز یکسان از سال ۳۶۵ روزی نباشد، چقدر است؟
 که حل: نفر اول ۳۶۵ روز برای انتخاب دارد، نفر دوم ۳۶۴ روز و ...

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots (365 - n + 1)}{365^n}$$

مثال: از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟

که حل: باید دو نفر ریاضی باشند و حتماً نفر سوم تجربی و در غیر این صورت ممکن است سه نفر ریاضی شوند.

$$P = \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{10 \times 3}{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = \frac{15}{28}$$

مثال: در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ قرار دارند. دو مهره باهم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟

که حل: برای آن‌که مجموع شماره‌ها فرد باشد، باید یکی زوج و دیگری فرد باشد.

$$P = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

مثال: در یک خانواده‌ی ۴ فرزند احتمال آن‌که فرزندان خانواده از دو پسر و دو دختر تشکیل شده باشد چقدر است؟

که حل: فقط کافی است جای پسرها و دخترها را تعیین کنیم:

$$P = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

قوانین احتمال:

برای تمام پیشامدها: $0 \leq P(A) \leq 1$

۱) $P(\phi) = 0$ (پیشامد ناممکن (نشدنی))

$P(S) = 1$ (پیشامد حتمی (مطمئن))

۲) قانون جمع احتمالها: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A \cap B) = 0$ و لذا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$۳) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$۴) P(A') = 1 - P(A)$$

$$۵) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$۶) P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 2P(A \cup B) - P(A) - P(B)$$

$$۷) P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

مثال: احتمال این که شخصی در امتحان ریاضی قبول شود برابر $\frac{2}{3}$ ، احتمال این که در امتحان فیزیک قبول شود برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال این که در هر دو درس قبول شود برابر $\frac{1}{6}$ است. احتمال این که در هیچ یک از دو امتحان قبول نشود، چقدر است؟

حل:

$$P(r' \cap f') = 1 - P(r) - P(f) + P(r \cap f) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

مثال: احتمال این که از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل تولد دو نفرشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد چقدر است؟

حل:

$$P(A) = 1 - P(\text{هیچ ۲ تایی مثل هم نباشند}) = 1 - \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{19}{49}$$

مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لاقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

حل:

$$n(S) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 \\ \hline \end{array} = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

$$n(A') = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 9 & 9 \\ \hline \end{array} = 8 \times 9 \times 9$$



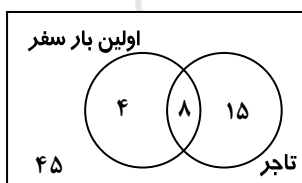
به جز به جز به جز
۲ و ۰ ۲ ۲

$$n(s) = 9 \times 10 \times 10$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{9 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10} = 1 - \frac{8 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10} = 1 - 0.72 = 0.28$$

مثال: تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟

حل:



۸ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند.

۲۳ تاجر

۱۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

۴ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند

۴۹ نفر تاجر نیستند

۴۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

$$P = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}$$

مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره سیاه، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که هر سه مهره دارای یک رنگ نباشند؟ (مثلاً هر سه قرمز نباشند)

حل:

$$1 - \left(\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} \right) = \frac{19}{20}$$

استقلال دو پیشامد:

اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در رخداد پیشامد A مؤثر نباشد، A را مستقل از B می‌گوییم، که در این صورت: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. همچنین اگر تساوی اخیر برقرار باشد، دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. (این قضیه به چند پیشامد نیز قابل تعمیم است).

مثال: پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) اند و $P(B) = 3P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟

حل: در این مسأله با یک توزیع احتمال دو جمله‌ای مواجه‌ایم که در آن $P(b) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ ، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} P(b) + P(B) = 1 \\ P(B) = 3P(b) \end{array} \right\} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$$

حال احتمال آن‌که دقیقاً یکی از فرزندان دارای ژن مغلوب (b) باشد، برابر است با: (فرزندان مستقل از هم هستند).

$$P(X=1) = P\{bBB\} + P\{BbB\} + P\{BBb\} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 3 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

مثال: در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم، چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟

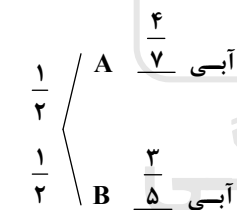
حل: به دلیل استقلال پیشامدها، احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\text{قسمت اول: } \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{243}$$

$$\text{قسمت دوم: } \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

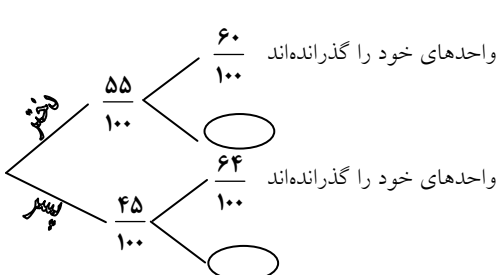
مثال: در جعبه‌ی A، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و در جعبه‌ی B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

حل: با رسم نمودار درختی و حالت‌بندی مسأله به دو حالت داریم:



$$P(\text{آبی بیاید}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{41}{70}$$

مثال: ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟



حل: با رسم نمودار درختی و حالت‌بندی مسأله به دو حالت و با توجه به استقلال جنسیت از واحدهای گذرانده، برای اینکه بدانیم چند درصد دانشجویان واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند باید یک دانشجوی چه پسر چه دختر به تصادف انتخاب کنیم و احتمال اینکه واحد درسی خود را گذرانده محاسبه کنیم:

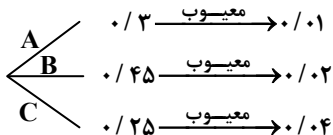
$$P(A) = \frac{55}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{64}{100} = \frac{618}{1000} = 0.618$$

$$0.618 \times 100 = 61.8 \text{ درصد}$$

مثال: در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟

که حل:

نمودار درختی این مسئله به صورت زیر است: (دستگاه و نوع محصول مستقل است).



برای سهولت در محاسبات ابتدا احتمال معیوب را حساب کرده (احتمال متمم) و سپس از یک کم می‌کنیم. داریم:

$$P(\text{معیوب}) = 0.3 \times 0.1 + 0.45 \times 0.2 + 0.25 \times 0.4 = 0.03 + 0.09 + 0.1 = 0.22 \Rightarrow P = 0.22$$

$$\Rightarrow P(\text{سالم}) = 1 - P(\text{معیوب}) = 1 - 0.22 = 0.78$$

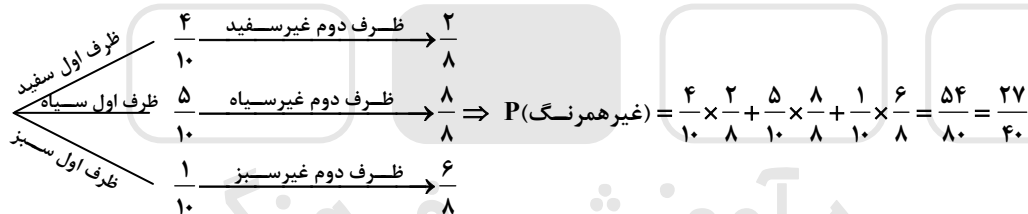
مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره، متفاوت است؟

که حل:

تعداد مهره‌های دو ظرف به صورت زیر است:



نمودار درختی مسئله به صورت مقابل است: (ظرف‌ها مستقل از همدان).



مثال: در یک خانواده‌ی سه فرزندی، با انتخاب یکی از فرزندان، مشاهده شده آن فرزند پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر است؟

که حل:

چون دو فرزند باقی‌مانده مستقل از فرزند انتخاب شده می‌باشند، لذا احتمال آن‌که هر دو فرزند دختر باشند، عبارت است از:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

↑
دومی دختر
↓
اولی دختر