تبدیل انتگرال دکارتی به انتگرال کروی

تبدیل یک انتگرال دکارتی مانند $\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ به یک انتگرال کروی دومرحله دارد.

مرحلهٔ ۱. در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y=\rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z=\rho\cos\phi$$

$$dx\,dy\,dz=\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

مرحلهٔ ۲. حدود ρ، ϕ و θ را چنان تعیین می‌کنیم که تصویر G (ناحیهٔ مشخص شده در دستگاه مختصات کروی) تحت تبدیل

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,\quad y=\rho\sin\phi\sin\theta\,,\quad z=\rho\cos\phi$$

برابر ناحیهٔ D در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در این صورت داریم

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\,\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

که

$$H(\rho,\phi,\theta)=F(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$

انتگرال دوگانه روی بیضی ها (مختصات بیضوی)

برای محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$ که در آن D بیضی $\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱$ است از تغییر متغیر $x-\alpha=ar\cos\theta\,,y-\beta=br\sin\theta$ استفاده می کنیم در نتیجه $dA=ab\,r\,dr\,d\theta$ خواهد بود که خواهیم داشت:

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}F(r,\theta)abr\,dr\,d\theta$$

سوال مقدار انتگرال $\iint_D x^{۲}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ می باشد را حسا ب کنید؟ (ارشد عمران ۸۰ و ۸۲)

$$x-\alpha=ar\cos\theta \quad\rightarrow\quad x=ar\cos\theta \quad\rightarrow\quad x^{۲}=a^{۲}r^{۲}\cos^{۲}\theta$$

$$y-\beta=br\sin\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 x^2 \; abr\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2 r^2 \cos^2\theta \; abr\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^3 r^3 b \cos^2\theta \, dr\, d\theta$$

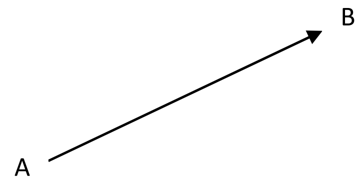
بردار و هندسه تحلیلی

بسیاری از کمیتها دارای اندازه هستند هر یک از این کمیت ها را می توان توسط یک عدد حقیقی مشخص کرد. به عنوان مثال طول ، حجم ، قیمت ، سود ، جرم. این کمیت ها را اسکالر می نامیم.

کمیت های دیگری هستند که با یک عدد حقیقی مشخص نمی شوند این کمیتها علاوه بر اندازه ، جهتشان نیز مورد نیاز است. این پدیده ها را کمیت های برداری می نامند.به عنوان مثال سرعت یک جسم متحرک و نیروی وارد بر یک جسم.

بردار در صفحه

یک بردار به طور هندسی پاره خطی جهت دار است.



این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ نمایش می دهیم.

A مبدا

B انتهای بردار

$|\overrightarrow{AB}|$ اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ (طول پاره خط AB)

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر (همسنگ) می گوئیم و AB=CD اگر اندازه و جهت انها یکی باشد.

شکل

مجموع دو بردار هندسی

بردار $\overrightarrow{AC}$ را مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ می نامیم.

شکل

دو بردار هم مبدا $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

شکل

$\propto$ عدد حقیقی $\overrightarrow{AB}$ یک بردار هندسی

مضرب اسکالر $\alpha\overrightarrow{AB}$ برداری است با اندازه $|\alpha||\overrightarrow{AB}|$

اگر $\propto > \cdot$ جهت ان در جهت $\overrightarrow{AB}$

اگر $\propto < \cdot$ جهت ان در خلاف جهت $\overrightarrow{AB}$

اگر $\propto = \cdot$ جهت ان در جهت $\alpha\overrightarrow{AB}$ بردار صفر یعنی برداری با اندازه صفر است.

شکل

اگر همه بردارهای هندسی در یک صفحه مختصات قرار داشته باشند، انگاه مبدا و انتهای هر بردار توسط مختصاتشان مشخص می شوند. در این صورت احکام هندسی مربوط به بردارها را می توان به احکام جبری تبدیل کرد. از مزیت های روش جبری این است که می توان از ان در فضای سه بعدی و یا بعد بالاتر بهره برد.

قضایای مربوط به مباحث بردار

فرض می کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هر کدام بردار باشند و α و β دواسکالر باشند داریم:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

۳) $\vec{a}+\vec{۰}=\vec{a} \quad , \quad \vec{۰}=(۰,۰)$

۴) $\vec{a}+(-\vec{a})=۰$

۵) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

۶) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

۷) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

۸) $۱\vec{a}=\vec{a}$

۹) $۰\vec{a}=\vec{۰}=\vec{a}۰$

قضیه

اندازه بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$

توضیح:

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=(a_۱,۰)+(۰,a_۲)$$
$$=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)$$
$$=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

عبارت طرف راست ترکیب خطی از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می باشد.

$$\vec{i}=(۱,۰) \quad \rightarrow \quad |\vec{i}|=\sqrt{۱+۰}=۱$$

$$\vec{j}=(۱,۰) \quad \rightarrow \quad |\vec{j}|=۱$$

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ دو بردار واحد هستند و بنابراین هر بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ را می توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نوشت.

قواعد زیر را داریم :

$$(a_۱\vec{i},a_۲\vec{j})+(b_۱\vec{i},b_۲\vec{j})=(a_۱+b_۱)\vec{i}+(a_۲+b_۲)\vec{j}$$

$$(a_۱\vec{i},a_۲\vec{j})-(b_۱\vec{i},b_۲\vec{j})=(a_۱-b_۱)\vec{i}+(a_۲-b_۲)\vec{j}$$

$\alpha(a_1\vec{i}, a_2\vec{j}) = (\alpha a_1)$

$|a_1\vec{i} + a_2\vec{j}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

تعریف: دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را موازی می گوئیم اگر اسکالر α وجود داشته باشد به طوری که $\vec{b} = \alpha\vec{a}$

مثال : نشان دهید دو بردار $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$ موازی هستند؟

قضیه:

نکته ارشدی: اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد آنگاه $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ است.

مثال : بردار واحد هم جهت با بردار $4\vec{i} - \vec{j}$ را پیدا کنید؟

بردار در فضا

در واقع هر سه تایی مرتب (x,y,z) را یک بردار در فضا می نامیم در این صورت بردارهای واحد $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را داریم :

$\vec{i} = (1,0,0) \qquad \vec{j} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$

هر بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را داریم:

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

اندازه بردار$\vec{a}$ در فضا $|\vec{a}| = |a_1, a_2, a_3| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

اندازه بردار در صفحه:

$P(x_1, y_1) \quad , \quad Q(x_2, y_2)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

اندازه بردار در فضا:

$$P(x_1, y_1, z_1) \qquad , \qquad Q(x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ضرب بردارها

ضرب عددی

*ضرب عددی (داخلی ، نقطه ای)

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad , \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

*اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

* دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بر هم هستند اگر و فقط اگر $\qquad \vec{a}.\vec{b} = 0$

ضرب برداری

*ضرب برداری

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad , \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2 \,,\, a_3b_1 - a_1b_3 \,,\, a_1b_2 - a_2b_1)$$

*اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد و $(0 \leq \theta \leq \pi)$ داریم :

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$$

* دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی اند اگر و فقط اگر $\qquad \vec{a} \times \vec{b} = 0$

مثال:

حاصل ضرب عددی دو بردار را محاسبه کنید؟

$$\left(۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}\right).\left(۴\vec{i}+۳\vec{j}-۲\vec{k}\right)=(۲)(۴)+(-۱)(۳)+(۳)(-۲)=۸-۳-۶$$
$$=-۱$$

مثالها:

توابع برداری:

این توابع کاربردهای بسیاری دارند. به عنوان نمونه برای توصیف ویژگیهای ابتدایی حرکت هر جسم، مثلا حرکت یک ماهواره از یک تابع برداری که دامنه اش بازه ای از زمان و نگاره اش در لحظه t بردار موضع آن جسم است.

پس می توان گفت توابعی هستند که دامنه آنها مجموعه ای از اعداد حقیقی است ولی برد آنها به جای اعداد حقیقی مجموعه ای از بردارهاست.

$$\vec{F}:R \rightarrow R^n$$

بحث درسمان روی توابع برداری یک تا سه متغیره می باشد.

$$\vec{F}(p)=F_۱(p)\vec{i}+F_۲(p)\vec{j}+F_۳(p)\vec{k}$$

یا

$$\vec{F}(p)=\left(F_۱(p)\,,F_۲(p)\,,F_۳(p)\right)$$

که $F_۱(p)$، $F_۲(p)$، $F_۳(p)$ هر یک توابع عددی می باشند.

حد توابع برداری

$$\lim_{p\to a}\vec{F}(p)=\left(\lim_{p\to a}F_۱(p)\right)\vec{i}+\left(\lim_{p\to a}F_۲(p)\right)\vec{j}+\left(\lim_{p\to a}F_۳(p)\right)\vec{k}$$

به عبارت دیگر هم میتوان گفت:

$$\lim_{p\to a}\vec{F}(p)=\left(\lim_{p\to a}F_۱(p)\ ,\lim_{p\to a}F_۲(p)\ ,\lim_{p\to a}F_۳(p)\right)$$

مشروط بر اینکه هر سه حد طرف راست رابطه بالا موجود باشند.

مثال: حد تابع زیر را در نقطه (۱،۲) محاسبه کنید؟

$$\vec{F}(x,y) = ۴xy\,\vec{i} + \frac{۳x}{x-y}\,\vec{j} - ۲x^{۲}\,\vec{k}$$

پیوستگی توابع برداری

تابع برداری $\vec{F}$ را در a پیوسته میگوئیم اگر:

۱) $\vec{F}(a)$ معین باشد

۲) $\lim_{p\to a} \vec{F}(p)$ وجود داشته باشد

۳) $\lim_{t\to a} \vec{F}(p) = \vec{F}(a)$.

قضیه: با توجه به تعریف فوق تابع برداری $\vec{F}(p) = \left(F_۱(p)\,, F_۲(p)\,, \dots, F_m(p)\right)$ در نقطه a متعلق به دامنه تابع ، پیوسته است اگر و فقط اگر ، هر یک از توابع اسکالر $\left(F_۱(p)\,, F_۲(p)\,, \dots, F_m(p)\right)$ در a پیوسته باشد.

مثال: تابع $\vec{F}: R \rightarrow R^۳$ زیر را داریم پیوستگی تابع در نقطه t=۰ را بررسی کنید؟

$$\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + e^{t}\,\vec{k}$$

حل: هر یک از توابع e^t و $\sin t$ و t هر سه در t=۰ پیوسته اند ، بنابراین تابع F در t=۰ پیوسته است.

مشتق توابع برداری

اگر $\vec{F}(p) = \left(F_۱(p)\,, F_۲(p)\,, F_۳(p)\right)$ *داشته باشیم داریم:*

$$\vec{F}'(p) = \left(F_۱'(p)\,, F_۲'(p)\,, F_۳'(p)\right)$$

علامت مشتق را به شکل $\frac{d\vec{F}}{dp}$ نیز نمایش می دهند. مشتق مراتب بالاتر را نیز بطریق مشابه می توان محاسبه نمود.

مثال: $\vec{F}(t)'$ و $\vec{F}(t)''$ را محاسبه کنید؟

$$\vec{F}(t) = cos\, t\, \vec{i} + ۲\, e^{۲t}\vec{j} + \ln t\ \vec{k}$$

قضیه: فرض کنید $\vec{F}(t)$ تابعی برداری و مشتق پذیر باشد و برای هر t در دامنه $\vec{F}$، $|\vec{F}| = c$ و c عددی ثابت است، آنگاه $\vec{F}(t)'$ بر $\vec{F}(t)$ عمود است.

خاصیتی از توابع برداری:

اگر F(x) یک تابع برداری با طول ثابت باشد آنگاه $\acute{F}(x).F(x) = ۰$ عکس این حکم نیز صحیح است.

بردارهای سرعت و شتاب

اگر F(t) مسیر حرکت یک متحرک باشد آنگاه بردار های $v = \acute{F}(t)$ بر دار سرعت و $a = F''(t)$ بردار شتاب متحرک نامیده میشود.

اندازه سرعت یا تندی حرکت را داریم:

$$v(t) = \left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{(\acute{x})^۲ + (\acute{y})^۲ + (\acute{z})^۲}$$

در عبارت فوق داریم که $|v| = \frac{ds}{dt}$ یا $ds = |v|\, dt$.

مثال : بردار $\vec{R}(t) = ۴t\,\vec{i} + ۲t^۲\,\vec{j}$ داریم سرعت و شتاب بردار را محاسبه کنید؟

$$\vec{v}(t) =$$

$$\vec{a}(t) =$$

مثال : سرعت متحرکی در هر لحظه برابر $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ است. شتاب آن کدام است؟ (ارشد ۸۲mba)

حل : برای حل شتاب باید مشتق دوم را بگیریم نسبت به t لذا باید از مشتق زنجیره ای استفاده کنیم.

$$a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

بردارهای یکه ، مماس ، قائم اصلی ، قائم دوم

اگر F(x) یک تابع برداری باشد انگاه $T = \frac{v}{|v|}$ بردار یکه (مماسی) می باشد و همچنین $N = \frac{T}{|T|}$ قائم اصلی (نرمال) و $B = T \times N$ قائم دوم می باشند.

مثال : بردارهای مماس و قائم بر دایره زیر را به ازای هر t تعیین کنید؟

$$\vec{R}(t) = a \cos t\, \vec{\imath} + a\, sint\, \vec{\jmath}$$

$$T = \frac{v}{|v|} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = \frac{-a \sin t\, \vec{\imath} + a\, cost\, \vec{\jmath}}{\sqrt{a^{2} sin^{2} t + a^{2} cos^{2} t}} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} =$$

$$N = \frac{T}{|T|} = \frac{T(t)}{|T(t)|} = \frac{-cost\, \vec{\imath} - sint\ \vec{\jmath}}{\sqrt{cos^{2} t + sin^{2} t}} = -cost\, \vec{\imath} - sint\ \vec{\jmath} = -\frac{1}{a}\vec{R}(t)$$

جهت بردار نرمال یا قائم اصلی بر دایره ، عکس جهت شعاع آن و به سمت دایره است.

مولفه های مماسی و قائم شتاب

رجوع شود به کتاب پیام نور ریاضی عمومی ۲ رشته شیمی دکتر ابراهیمی ص ۲۹۱

بردار گرادیان:

مشتق های جزیی یک تابع ، اهنگ تغییر تابع را در جهت خطوط موازی با محورهای مختصات را تعیین می کنند ولی گرادیان یک تابع و یا میدان اسکالر کمیتی برداری است که آهنگ های تغییر را در جهت خطوطی که لزوما موازی با محورهای مختصات نیستند را تعیین می کنند.گرادیان در جهت بیشترین تغییر مسیریک میدان یا تابع اسکالر قرار دارد و اندازه ی گرادیان همان بیشترین مقدار تغییرات می باشد. یکی از کاربردهای گرادیان ، نشان دادن تغییر یک تابع است.

اگر w=f(x,y) آنگاه بردار زیر را گرادیان w می نامیم.

$$\nabla w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

اگر w=f(x,y,z) تابع سه متغیره باشد آنگاه بردار زیر را گرادیان w می نامیم.

$$\nabla w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

****نکته****

در دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین) گرادیان برابر است با:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

و در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla f(p,\theta,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{۱}{p}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

و در دستگاه مختصات کروی عبارت است از:

$$\nabla f(r,\theta,\emptyset) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{۱}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{۱}{r\,sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \emptyset}\right)$$

مثال: اگر $f(x,y,z) = x^{۲}ye^{z}$ در این صورت گرادیان f (∇f) برابر است با؟(ارشد علوم کامپیوتر ۸۰)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

مشتق سویی یا جهتی توابع:

مشتق سویی تابع f در نقطه p و در سوی بردار v برابر است با:

$$D_v f(p) = \nabla f(p).\frac{v}{|v|}$$

زاویه بین دو بردار را نیز از رابطه $|\nabla f(p)|.\cos\theta$ داریم.

از لحاظ تعریف می توان جهت بردار گرادیان را برای یک تابع دو متغیره جهتی در نظر گرفت که تغییر متغیرها در این جهت حداکثر تغییر را در تابع باعث می شود .

نکات

- بیشترین مقدار مشتق سویی در امتداد بردار ∇f بوده و برابر با $|\nabla f|$ در آن نقطه است.

- کمترین مقدار مشتق سویی در امتداد بردار $-\nabla f$ بوده و برابر با $-|\nabla f|$ در آن نقطه است.

- درامتداد عمود بر بردار گرادیان مقدار مشتق سویی صفر است.

مثال: اگر $f(x,y) = xy^۲ + ۳y$ و $\vec{a} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j}$ مشتق سویی (جهتی) f در نقطه (-۳،۱) در جهت $\vec{a}$ برابر است با ؟ (ارشد معدن ۸۳)

حل: $D_v f(p) = \nabla f(p).\frac{v}{|v|} \quad \rightarrow \quad D_a f(-۳,۱) = (y^۲, ۲xy + ۳).\frac{a}{|a|} = (۱,-۳).\frac{(۳,-۴)}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$

مثال: بیشترین مقدار مشتق سویی جهتی رویه $f(x,y) = x^۲e^y$ در نقطه (-۲،۰) کدام است؟ (ارشد علوم کامپیوتر ۸۳)

حل: طبق نکات گفته شده بیشتری مقدار مشتق سویی $|\nabla f|$ می باشد.

$$\nabla f = (۲xe^y, x^۲e^y) \rightarrow \nabla f(-۲,۰) = (-۴,۴) \rightarrow |\nabla f| = \sqrt{۱۶+۱۶} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

صفحه مماس ، خط مماس و صفحه قائم بر خم:

صفحه مماس بر خم: چهار بردار سرعت ، شتاب ، یکه مماسی و قائم اصلی برای هر t در یک صفحه واقع می گردند. این صفحه را صفحه بوسان یا صفحه مماسی خم می نامند بردار B بردار نرمال این صفحه است. برای تعیین نرمال صفحه از مقدار $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}$ استفاده می کنیم.

خط مماس بر خم: اگر F(t) یک نقطه روی خم باشد امتداد خط مماس گذرنده از نقطه p برابر $\acute{F}(t)$ است.

صفحه قائم بر خم: اگر F(t) یک نقطه روی خم باشد نرمال صفحه قائم بر خم برابر $\acute{F}(t)$ است.

صفحه مماس و خط قائم بر رویه:

بردار عمود بر رویه: اگر f(x,y,z)=۰ باشد آنگاه بردار $\nabla f(p)$ در نقطه p روی f بر رویه f عمود است.

امتداد خط عمود بر رویه: امتداد خط عمود بر رویه f(x,y,z)= ۰ در هر نقطه ، برابر $\vec{\nabla} f$ در آن نقطه است.

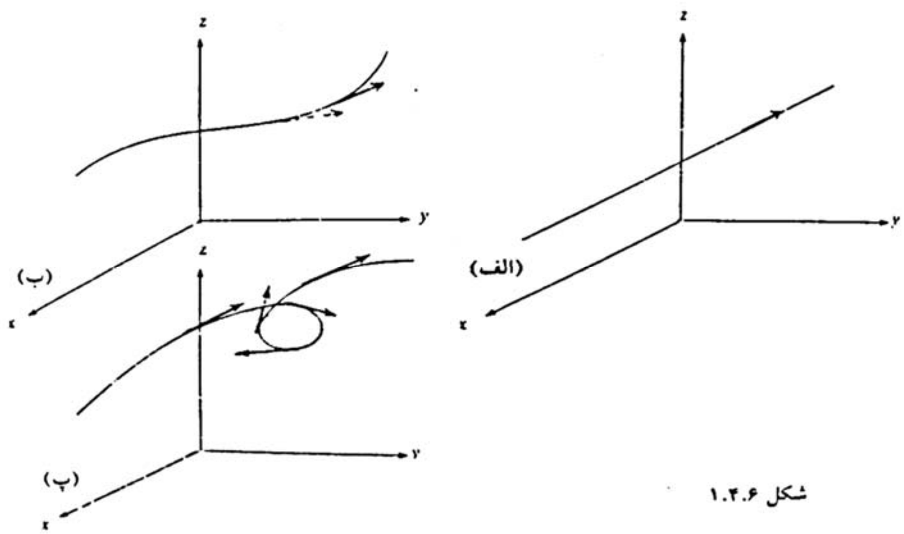
نرمال صفحه مماس بر رویه: بردار قائم صفحه مماس بر رویه f(x,y,z)=۰ در هر نقطه ، برابر $\vec{\nabla} f$ در آن نقطه است.

امتداد خط مماس بر خم محل تقاطع: امتداد خط مماسبر خم محل تقاطع دو رویه f(x,y,z)=۰ و g(x,y,z)=۰ در نقطه p روی خط برابر است با :

$$\text{امتداد خط مماس} = \nabla f(p) \times \nabla g(p)$$

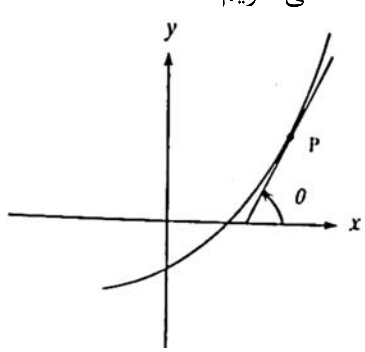
خمیدگی (انحنا) در توابع برداری

(پیام نور ۲۹۵) به این منظور آهنگ تغییر جهت بردار واحد مماس بر منحنی را وقتی نقطه تماس تغییر می کند، تعیین می کنیم. اگر منحنی مورد نظر یک خط راست باشد ، جهت بردار مماس ثابت است (شکل الف) اگر منحنی به آرامی خم شود، جهت بردار مماس نیز به آرامی تغییر میکند (شکل ب) اگر منحنی پیچدار باشد بردار مماس به تندی تغییر جهت می دهد (شکل ج).



شکل ۱.۴.۶

حال می خواهیم این انحنا و خمیدگی را محاسبه کنیم. اگر θ زاویه بین خط مماس بر منحنی در نقطه P با محور x باشد (شکل زیر) در این صورت آهنگ تغییر θ نسبت به x یعنی $\frac{d\theta}{dx}$ همان تعریف خمیدگی منحنی می باشد. لذا به طور جامع تر تعریف زیر را برای محاسبه خمیدگی منحنی داریم.



فرض کنیم منحنی c در یک صفحه باشد. خمیدگی منحنی در نقطه P(s) را با k نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$k = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

انحنا یا خمیدگی:

انحنا یا خمیدگی خم سه بعدی F(t) برابر است با:

$$\text{انحنا}\; k = \frac{|v \times a|}{|v|^{۳}}$$

انحنا خط راست صفر و انحنا دایره عکس شعاع آن است. $R = \frac{۱}{k}$ را شعاع انحنا می نامند.

انحنا در خم های دو بعدی

-انحنا خم y=f(x) برابر است با : $k = \frac{|f''(x)|}{(۱+f'(x)^{۲})^{۳/۲}}$

-انحنا خم x=f(y) برابر است با : $k = \frac{|f''(y)|}{(۱+f'(y)^{۲})^{۳/۲}}$

-برای منحنی پارامتری x = x(t) و y = y(t) انحنا برابر است با : $k = \frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^{۲}+y'^{۲})^{۳/۲}}$

مثال: انحنا منحنی $y = xe^{x}$ در مبدا چقدر است؟ (ارشد ژئوفیزیک ۸۲)

مثال: انحنا منحنی $R(t) = e^{t}\cos t\,\vec{i} + e^{t}\sin t\,\vec{j} + e^{t}\,\vec{k}$ در t=۰ کدام است؟(ارشد مکانیک ۷۸)

مثال : شعاع انحنای منحنی $x^۲ + xy + y^۲ = ۳$ در نقطه (۱،۱) کدام است؟

میدان های برداری

دیورژانس ، لاپلاسین

دیورژانس کلمه ای فرانسوی می باشد . دیورژانس یا واگرایی، حاصلضرب داخلی عملگر مشتق ∇ با یک بردار است. در حالت کلی دیورژانس از دستگاه m بعدی به ۱ بعدی روی یک نگاشت از دستگاه n بعدی به m بعدی عمل میکند.

اگر F=(M,N,P) یک میدان سه بعدی باشند آنگاه:

$$div\ F = \nabla . F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

برای میدان های دو بعدی P=۰ داریم : $div\ F = \nabla . F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}$

اگر هر یک از F های زیر میدان برداری باشند و α یک تابع حقیقی باشد همواره داریم :

$$۱ - \nabla . (F_۱ + F_۲) = \nabla . F_۱ + \nabla . F_۲$$

$$۲ - \nabla . (\alpha F) = (\nabla\alpha) . F + \alpha(\nabla . F)$$

$$۳ - \nabla . (\nabla\alpha) = \nabla^۲\alpha = \frac{\partial^۲\alpha}{\alpha x^۲} + \frac{\partial^۲\alpha}{\alpha y^۲} + \frac{\partial^۲\alpha}{\alpha z^۲}$$

$\nabla^۲\alpha$ لاپلاسین α نامیده می شود.

کرل یا تاو

اگر F=(M,N,P) یک میدان سه بعدی باشند آنگاه:

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(P_y - N_z\ , M_z - P_x\ , N_x - M_y\right)$$

برای میدان های دو بعدی P=۰ که داریم: $curl\ F = \left(\cdot\ , \cdot\ , N_x - M_y\right)$

اگر هر یک از F های زیر میدان برداری باشند و α یک تابع حقیقی باشد همواره داریم :

$۱ - \nabla \times (F_۱ + F_۲) = \nabla \times F_۱ + \nabla \times F_۲$

$۲ - \nabla \times (\alpha F) = (\nabla \alpha) \times F + \alpha(\nabla \times F)$

$۳ - \nabla \times (\nabla \alpha) = \cdot$

$۴ - \nabla . (\nabla \times F) = \cdot$

$۵ - \nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla . F) - \nabla^۲ F$

مثال:

اگر $\emptyset = ۲x^۲y - xz^۳$ باشد ، آنگاه $\nabla^2 \emptyset$ را حساب کنید؟ (ارشد هسته ای ۸۲)

میدان برداری $F = (x, y, z) = (x\ sin\ xz\ , y\ , xz)$ را در نظر بگیرید در این صورت div F در نقطه $(۱,۱,\pi)$ را حساب کنید؟ (ارشد علوم کامپیوتر ۸۰)

ج= $۲ - \pi$

اگر $F = (x^۲ - y^۲)\ i + xz\ j + y^۲z\ k$ مقدار div (curl F) چقدر است؟(ارشد M.B.A۸۳)

ج=۰ ، با توجه به بند ۴ بالا هم می توان جواب ۰ را نتیجه گفت.