

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\frac{\cos 20^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \times \cos 60^\circ} = \frac{\cos(60^\circ - 20^\circ)}{\cos 60^\circ \times \cos 40^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} &= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \tan 60^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \\ &= \frac{\cos 10^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \cos 60^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 \end{aligned}$$

۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \sin 80^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4$$

نکات:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\text{نکته: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\text{نکته: } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \sin \beta = \cos \alpha \end{cases}$$

ابتدا حاصل هر کدام از پرانتزها را به دست می آوریم:

$$\cos 15^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ} = \cos 15^\circ - \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ \sin 15^\circ - 1}{\sin 15^\circ}$$

$$\sin 15^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ} = \sin 15^\circ - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ - 1}{\cos 15^\circ}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin 30^\circ - 1}{\sin 15^\circ} \times \frac{\frac{1}{2} \sin 30^\circ - 1}{\cos 15^\circ} = \frac{(\frac{1}{2} - 1)^2}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\text{نکته: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ و } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \text{ و } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{نکته: } \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \text{ و } \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ (\frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}) = \cos 50^\circ (\frac{\sin 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ})$$

$$= \cos 50^\circ (\frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \times \cos 10^\circ} \quad \frac{\sin 80^\circ = \cos 10^\circ}{\cos 50^\circ = \sin 40^\circ} \quad \frac{\sin 40^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\left(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \sin 20^\circ = \left(\frac{\sin 35^\circ \cos 20^\circ + \cos 35^\circ \sin 20^\circ}{\cos 35^\circ \cos 20^\circ} \right) \sin 20^\circ = \frac{\sin (35^\circ + 20^\circ)}{\cos 35^\circ \cos 20^\circ} \sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sin 55^\circ \sin 20^\circ}{\underbrace{\cos 35^\circ \cos 20^\circ}_{\sin 55^\circ}} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ$$

نکته درسی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۲، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته : $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$

نکته : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

نکته : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

با استفاده از نکات، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = (\sin 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 60^\circ \sin 20^\circ) \times \frac{\sin 10^\circ}{\cos 70^\circ} = \sin(20^\circ + 60^\circ) \times \frac{\sin 10^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ}$$

از طرفی داریم:

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

بنابراین:

$$A = \frac{\cos 10^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{2}$$

۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \sin 75^\circ \sin (90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)] \quad \text{راه دوم:}$$

۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\text{نکته ۱: } \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha \end{cases}$$

$$\text{نکته ۲: } \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases}$$

با استفاده از نکات بالا می توان نوشت:

$$A = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{-\cos(\alpha + \beta)} \quad \begin{matrix} \alpha = 15^\circ \\ \beta = 45^\circ \end{matrix} = \frac{\sin(15^\circ - 45^\circ)}{-\cos(45^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin(-30^\circ)}{-\cos(60^\circ)} = \frac{-\sin 30^\circ}{-\cos 60^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{یاد آوری: } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴، فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\text{نکته: } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\text{نکته: } \sin(90^\circ - x) = \cos x, \quad \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{aligned} A = \tan 20^\circ + \tan 35^\circ &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin(20^\circ + 35^\circ)}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} \\ &= \frac{\cos 35^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{1}{\cos 20^\circ} \end{aligned}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x (-\cos 2x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \stackrel{x=7/8^\circ}{=} -\frac{1}{4} \sin 30^\circ = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\cos(2x - 17\pi) = \cos(2x - 17\pi + 18\pi) = \cos(\pi + 2x) = -\cos 2x = -(2\cos^2 x - 1)$$

$$= -(2 \times \frac{4}{9} - 1) = -(\frac{8}{9} - 1) = -(-\frac{1}{9}) = \frac{1}{9}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \stackrel{x=15^\circ}{=} \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴، فصل ۲، درس ۴)

نکته: $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin \alpha$

نکته: $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

نکته: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{\cos 75^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ + 15^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 40^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 40^\circ} &= \frac{\cos 40^\circ - \sqrt{3} \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2} \cos 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{2(\sin 30^\circ \cos 40^\circ - \cos 30^\circ \sin 40^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(90^\circ - 10^\circ)} \\ &= \frac{2 \sin(30^\circ - 40^\circ)}{\frac{1}{2} \cos 10^\circ} = \frac{-2 \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \cos 10^\circ} = -4 \tan 10^\circ \end{aligned}$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

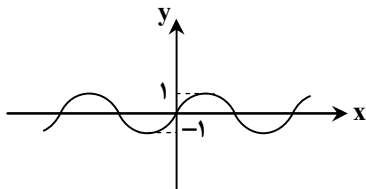
$$\begin{aligned} \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x &= \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \\ &= \frac{1}{4} \times \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4} \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۳، فصل ۴ ◀ درس ۴)

۱ نکته) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

نکته ۲) نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت مقابل است:



مطابق نکته ۱ می توان نوشت:

$$y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \Rightarrow y = \sin x$$

بنابراین مطابق نکته ۲، نمودار تابع داده شده گزینه ۲ می باشد.

۱۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۳ ◀ درس ۳، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته : $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

نکته : $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

با توجه به نکات می توان نوشت:

$$\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = \log_2 \frac{\sin 2x}{2}$$

با جای گذاری $x = \frac{\pi}{12}$ داریم:

$$x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \log_2 \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x - \cos x &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{روش اول: از روابط} \\ \text{استفاده می‌کنیم. داریم:} \end{array}$$

$$\frac{\sin 53^\circ + \cos 53^\circ}{\sin 53^\circ - \cos 53^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos(53^\circ - 45^\circ)}{\sqrt{2} \sin(53^\circ - 45^\circ)} = \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot 8^\circ$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر را بر $\sin 53^\circ$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1 + \cot 53^\circ}{1 - \cot 53^\circ} = \frac{\cot 45^\circ + \cot 53^\circ}{1 - \cot 45^\circ \cot 53^\circ} = \cot(53^\circ - 45^\circ) = \cot 8^\circ$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin 2}{1 + \cos 2} = \frac{2 \sin 1 \times \cos 1}{2 \cos^2 1} = \frac{\sin 1}{\cos 1} = \tan 1$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

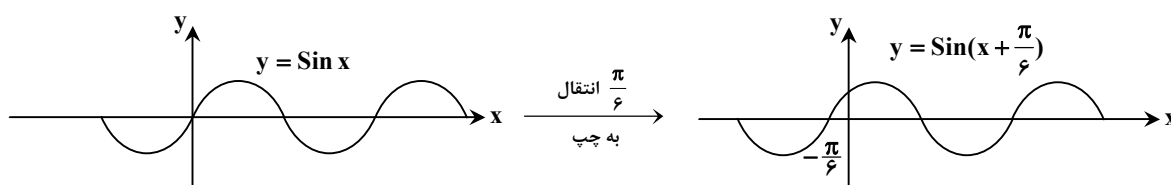
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۳، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x + a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را واحد به سمت چپ (راست) منتقل کنیم. ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می کنیم:

$$y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x \Rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

بنابراین کافی است نمودار $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.



بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 = -\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5} \Rightarrow -\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

۲۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ و $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

عبارت را ساده می‌کنیم و با استفاده از نکته داریم:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ} = \frac{\sin 15^\circ \cos 5^\circ - \cos 15^\circ \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin(15^\circ - 5^\circ)}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin(5^\circ + 5^\circ)}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ}$$

$$= \frac{\sin 5^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = 2$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

با توجه به دایره مثلثاتی داده شده، از نقطه P می‌توان فهمید $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ و $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

از نقطه Q می‌توان فهمید $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ و $\sin \beta = \frac{4}{5}$. بنابراین داریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$