مقدمه:

با شروع از هزاره اول میلادی و با افول تمدن بزرگ مصر و بابل، کم کم تمدنهای جدیدی مانند تمدن یونانی، فنیقی و آشوری پا به عرصه وجود گذاشتند .با تکامل ذهنی بشر، انسان با کلمه «چرا» مانوس تر شد.

- چرا زوایای متقابل به راس با هم برابرند؟
- چرا در مثلث متساوی الساقین دو زاویه روبه رو به دو ساق برابرند؟
- ...

به این ترتیب، ریاضیات برهانی متولد شد و یونانیان در این امر پیشتاز بودند. در این قسمت به طور بسیار خلاصه، به نام و کارهای ریاضیدانان یونانی به ترتیب زمانی خواهیم پرداخت .

✓ **تالس** یکی ریاضیدانانی است که برای اولین بار به وسیله استدلال منطقی و بدون استفاده از شهود، چند قضیه مهم هندسه را ثابت کرد .

✓ **فیثاغورس** (یا به عبارت درست تر فیثاغورسیان که پیروان و شاگردان او بودند) نیز سهم بسزایی در تکامل ریاضیات برهانی داشت.

- ❖ قدمها را در رشد نظریه اعداد برداشتند، مانند معرفی اعداد متحابه، تام، ناقص و زاید و نیز معرفی اعداد مصور مثلثی، مربعی، مخمسی .
- ❖ اولین برهان منطقی و درست از قضیه فیثاغورس که بابلیان قدیم بدون برهان از آن استفاده می کردند.
- ❖ کشف عدد گنگ
- ❖ ابداع جبر هندسی برای بیان اتحادهای جبری در قالب اصطلاحات هندسی
- ❖ معرفی بعضی از اجسام پنجگانه افلاطونی یا اجسام منتظم پنجگانه
- ❖ بسط روش اصل موضوعی که اثبات یک ادعاست به وسیله سلسله استنتاجهای دقیق از چند فرض آغازین که کاملاً مشخص هستند.

افلاطون و شاگردان او: تقریباً تمام کارهای مهم ریاضی قرن چهارم قبل از میلاد به وسیله شاگردان افلاطون انجام شده است و آنها حلقه ارتباط بین فیثاغورسیان و ریاضیدانان مکتب اسکندریه بودند.

- کشف مقاطع مخروطی (مقاطع مخروطی معمولا شامل دایره، سهمی، هذلولی و بیضی میشود)
- تربیع دایره
- تضعیف مکعب
- تثلیث زاویه

؟؟ آیا می توان مربعی هم مساحت با یک دایره دلخواه رسم کرد؟

--> **تربیع دایره**

؟؟ آیا می توان برای هر مکعب دلخواه مکعبی رسم کرد که حجم آن دو برابر مکعب مفروض باشد؟

--> **تضعیف مکعب**

؟؟ آیا می توان به کمک خط کش و پرگار هر زاویه را به سه قسمت تقسیم کرد؟

--> **تثلیث زاویه**

ثابت شده است که هیچ یک از این احکام در حالت کلی درست نیستند.

تربیعِ دایره، یکی از مسائل دیرین هندسی ست.

در نظر ریاضی‌دانان یونانی که مساحت هر شکل را معمولاً بر حسب مساحت شکلِ داده‌شده‌ای بیان می‌کردند، تربیع دایره عبارت بود از:

یافتن مربعی که مساحت آن مساوی با مساحت دایرهٔ مفروضی باشد.

گذشته از این، ریاضی‌دانان یونانی، دست کم تا قرن 4ق‌م می‌خواستند این مسئله را تنها با استفاده از ستاره و پرگار حل کنند.

به این اعتبار، تربیع دایره، در کنار تثلیث زاویه و تضعیف مکعب از مسائل لاینحل ریاضیات قدیم محسوب می‌شد. اما برخلاف آن دو:

1. تربیع دایره تنها موضوع بحث ریاضی‌دانان نبوده، بلکه فلاسفه نیز از آن سخن گفته‌اند.
2. گذشته از این، مسئلهٔ تربیع دایره با یافتنِ نسبتِ محیط دایره به قطر آن یعنی عدد پی نیز ارتباط دارد.

ریاضی‌دانان یونانیِ قرنهای 5 و4 قم، از 3 راه برای تربیع دایره کوشیده‌اند:

یکی از این 3 راه به بروسون فرزند هِرُدُروسِ هِراکْلِئایی منسوب است که تاریخ زندگی‌اش معلوم نیست، اما احتمالاً معاصرِ افلاطون بوده است.

دیگری راه حلِ بقراط خیوسی ریاضی‌دانِ قرن 5قم است.

راه حل سوم از آنتیفون سوفسطایی (همان‌قرن) است که دربارهٔ او نیز اطلاع اندکی داریم.

استدلال بروسون:

دایره را می‌توان به مثلثهایی تجزیه کرد و می‌توان مربعی مساوی با هریک از این مثلثها پیدا کرد .بنابراین، مربعی می‌توان یافت که مساوی مجموع این مثلثها باشد، و این مربع مساوی با دایره خواهد بود.

ضلع مربعی که، بنا بر استدلال بروسون، معادل دایره است، قابل اشارهٔ بالفعل نیست، بلکه وجود بالقوه دارد .ابن سینا با این استدلالِ بدیع نتیجه می‌گیرد که استدلال بروسون هندسی نیست، بلکه جدلی یا منطقی است و از این‌رو ست که «خارجی» به‌شمار می‌آید.

استدلال بقراط :

1. دایره مساوی مجموعه‌ای از شکل های مستقیم‌الخط است؛
2. هرچه مساوی شکلهایی مستقیم‌الخط باشد، قابل تربیع است؛ پس دایره قابل تربیع است.

اما این دو مقدمه بدیهی‌اند، زیرا می‌توان دایره را به شکلهای هلالی تقسیم کرد و هریک از این شکلهای هلالی مساوی مربعی است، پس دایره مساوی مربعی است.

دایره به تمامی به شکلهای هلالی تجزیه نمی‌شود و شکلی غیر هلالی از آن باقی می‌ماند.
استقرا روی جزئیاتی که تحت یک کلی قرار می‌گیرندانجام می‌پذیرد؛ درحالی که نسبت هلال‌واره‌ها به دایره مثل نسبت جزء به کل است، نه نسبت جزئی به کلی؛ یعنی هلال‌واره‌ها اجزاء دایره‌اند، نه دایره‌هایی که تحت نوع کلیِ دایره قرار بگیرند .

استدلال آنتیفون:

اگر مربعی را در دایره محاط کنیم و سپس وسطهای کمان متناظر به هر ضلع مربع را به دو سر آن کمان وصل کنیم و این کار را به اندازهٔ کافی ادامه دهیم، به جایی می‌رسیم که میان دایره و چندضلعی منتظم تفاوتی باقی نمی‌ماند و چون هر چندضلعی منتظم تربیع‌پذیر است، پس دایره نیز تربیع‌پذیر است.

گویا وی در این اعتقاد متأثر از پروتاگوراس سوفسطایی بوده که معتقد بوده است خطِ مماس بر دایره آن را در یک نقطه قطع نمی‌کند بلکه، همان‌طور که به‌چشم می‌بینیم، دایره و خط مماس چندین نقطهٔ مشترک دارند.

ارشمیدس:

او با در نظر گرفتن چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی نشان داد که نسبت محیط دایره به قطر آن ـ که اکنون با حرف یونانی پی نشان داده می شود ـ بتقریب زیر است:

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$$

تربيع دايره در دوران اسلامي

رياضيدانان دورة اسلامی نیز برای حل مسئلة تربیع دایره ، آن را از جنبة نظری و عملی یعنی بسط تقریبی **π** و تکمیل روش دوم ارشمیدس ، بررسی کردند. دانشمندان دوره اسلامی نخستین بار از طریق رساله تربیع الدائرة ارشمیدس که ثابت بن قُرّه آن را از یونانی به عربی ترجمه کرد، با مسئلة تربیع دایره آشنا شدند. این رساله در دوره اسلامی به نامهای تکسیر دایره ، مساحة الدایرة ، و کتاب مساحة الدائرة و تکسیرها نیز شناخته می شد.

از دانشمندان دوره اسلامی ، تنها ابن هیثم رسالة مستقلی در بارة تربیع دایره به نام مقالة فی تربیع الدایرة تألیف ، و در آن از رساله مساحة الدایرة ارشمیدس یاد کرده است . از رساله ابن هیثم نسخه های متعددی باقی مانده است.

ابن هیثم در این رساله بیش از آنکه در جستجوی راه حل هندسی تربیع دایره باشد، به دنبال تبیین فلسفی این مسئله بوده و توضیح داده است که در اینگونه مسائل ، عرضه برهان برای امکان حل مسئله کافی است و اعتبار این برهان بستگی به امکان تحقق یافتن آن ندارد. او در انتهای این رساله نوشته است که بعدها در این باره رساله ای تألیف خواهد کرد، اما از آن اطلاعی در دست نیست. سوتر،این مقاله را به آلمانی ترجمه کرد و متن عربی را به همراه ترجمة آلمانی در 1899 در برلین به چاپ رساند. این رساله به فرانسوی نیز ترجمه شده است .

روش حل با خط کش و پرگار

يونانيان باستان حل اين سه مسئله را با خط کش و پرگار مشکل مي پنداشتند. اين در حالي است که ساخت آنها غير ممکن بود و يونانيان باستان، نه روشي براي ساخت آنها و نه اثباتي براي غير ممکن بودن آنها داشتند.
با خروج از قيدهاي افلاطوني، هر سه مسئله را مي توان حل کرد.
با وسايلي که اينك در اختيار داريم، ارائه يك جواب کامل به اين سه مسئله ساده است. از هندسه تحليلي استفاده مي کنيم تا آنها را به زبان جبري بيان کنيم و تئوري توسيع هاي ميدان خود را براي مسائل جبري که به وجود مي آيند به کار مي بريم.

تکلیف مسئلهٔ تربیع دایره را سرانجام فردیناند لیندمان ، ریاضیدان آلمانی ، در 1882 با اثبات غیرجبری بودن عدد پی روشن کرد. معنای حکم او این است که:

پی نمی تواند ریشهٔ معادله ای جبری با ضریبهای صحیح باشد و بنابراین ، مسئلهٔ هندسیِ یافتنِ مربعی هم مساحت با دایرهٔ مفروض نه با خط کش و پرگار حل شدنی است نه با سایر منحنیهای جبری مثل مقاطع مخروطی که در تثلیث زاویه و تضعیف مکعب به کار می روند.

اثبات لیندمان بسیار پیچیده است ، ولی بعدها نیون ، ریاضیدان انگلیسی ، اثباتهای ساده تری یافت که برای هر دانشجوی ریاضی درک شدنی است .

یانوش بویویی ، ریاضیدان مجار در رساله اش در بارهٔ هندسهٔ اقلیدسی نشان داده است که تربیع دایره برای برخی دایره ها در هندسهٔ نااقلیدسی ممکن است ، زیرا مساحت این دایره ها برابر با 2 پی است که در آن پی عدد متغیری وابسته به شعاع دایره است .

تضعیف مکعب

- به عقيده افلاطون ، تنها شكلهاي كامل هندسي عبارتند از: خط مستقيم و دايره.
در هندسه قديم يونان باستان اين اعتقاد باعث شد كه ابزار موجود براي تشكيل ساختهاي هندسي به دو آلت محدود شود : خط کش و پرگار ، منظور از خط کش یک لبه مستقیم غيرمدرج بود. با اين ابزار ، فقط مي توان خطوط را به قطعه هاي مساوي تقسيم كرد ، زوايا را نصف كرد ، خطوط موازي رسم كرد اما مفاهيم هندسي بسياري وجود دارد كه ابزار خط كش و پرگار براي ساخت آنها كافي نيست.

3 ساخت مشهور وجود دارد كه يونانيان باستان نتوانستند آنها را بسازند. تضعيف مكعب (يک مكعب با حجمي دو برابر حجم يک مكعب داده شده) ، تثليث زاويه (زاويه اي به اندازه يک سوم زاويه داده شده) و تربيع دايره (يک مربع با مساحتي برابر يک دايره داده شده). سرچشمه مساله دو برابر كردن (تضعيف) مكعب را بايد ظاهرا در تمايل دانشجويان باستاني به تعميم مساله ساده دو برابر كردن مربع دانست.

ثابت شده است که هیچ یک از این احکام در حالت کلی درست نیستند. مثلا" تثلیث زاویه ۶۰ درجه" و "تربیع دایره ای به شعاع یک" و "تضعیف مکعبی به ابعاد یک "ممکن نیست.

تاریخچه این مسئله:

۱)

پسر پادشاه مرده است...

– ...؟ پسر پادشاه؟...

– آری پسر پادشاه مرده است! پادشاه می خواهد برای پسرش آرامگاه بزرگی بسازد...

مهندسان و معماران جمع شده بودند تا برای پسر پادشاه بزرگ عهد یونان باستان آرامگاهی مجلل بسازند. شاه از دور می آمد. غمگین و ناراحت گام بر می داشت. عاقبت آرامگاه مکعبی شکل را از دور دید. پا به درونش گذاشت. چرخی زد و سپس رو به مهندسان کرد و گفت: این آرامگاه در شان و منزلت فرزند ما نیست. ما آرامگاهی به بزرگی دو برابر این آرامگاه می خواهیم... دوبرابر!

– مهندسان به فکر فرو رفتند. اگر قرار باشد مکعبی بسازیم که حجمش دوبرابر حجم مکعب کنونی باشد، آنگاه طول ضلع این مکعب باید چند برابر طول ضلع مکعب فعلی باشد؟! یک مسئله ((هندسی)) مطرح شده بود.

۲)

بر اساس افسانه هایی این مسئله منشأ دینی دارد: ساختن محرابی با حجم دو برابر محراب مفروضِ دیگر چنانکه

شکل هر دو محراب یکسان (مثلاً هر دو مکعب) باشد.

3)

بنابر داستانی که پلوتارک (قرن ۱م) نقل کرده است، خدایان از زبان غیب‌گویی به مردم دِلُس۲ پیام فرستادند که اگر می‌خواهند از بلا برهند، باید قربانگاهی مکعب شکل را دو برابر کنند.

صورت این مسئله :

تضعیف مکعب و چند ضلعیهای محاط در دایره از مسائل سه گانه عهد باستان است که طی قرن ها حل نشده باقی مانده بود . با وجود اثبات امکان ناپذیری حل این مسئله و مسئله های مشابه با استفاده از پرگار و خط کش غیر مدرج عده ای تلاش می کنند این مسائل را حل کنند .تضعیف مکعب از مسائل باستانی ریاضیات است . یونانیان و قبل از آنها هندیان این مسئله را می شناختند . صورت مسئله این است :
فقط با به کار بردن خط کش غیر مدرج(ستاره) و پرگار ، مکعبی بسازید که حجم آن دو برابر مکعب داده شده باشد .
ثابت شده که این مسئله جوابی ندارد (حل هندسی)

برای حل این مسئله به روش جبری ۱۱ راه حل پیشنهاد شده است.

اولین پیشرفت واقعی در مسئله تضعیف ، بدون شک تحویل مسئله بوسیله بقراط (حوالی ۴۴۰ ق.م.) به ترسیم دو واسطه هندسی بین دو پاره خط مفروض بود.

بعد از ابداع این تحویل توسط بقراط ، تلاشهای بعدی در تضعیف مکعب ، به صورت ترسیم دو واسطه هندسی بین دو پاره خط مفروض، به افلاطون نسبت داده شده. ولی چون این راه حل از طریق وسایل مکانیکی است و چون می دانیم که افلاطون با چنین روشهایی مخالف بوده احساس می شود که اسناد آن به افلاطون اشتباه باشد.

آیا حل این مسائل امکان پذیر است؟

عدد **a** رو رسم پذیر گوییم اگر بتوان تنها با استفاده از خط کش و پرگار پاره خطی به طول **a** رسم کرد. و البته فرض ما بر این است که یک واحد طول داده شده باشد. رسم پذیری بعضی عددها بسیار واضح است. مثلا ۱ و ۲ و ... چون اینها ضریبهایی از واحد طول هستند. اما بعضی دیگر احتیاج به بررسی دارند مثل "رادیکال ۲". آیا این عدد رسم پذیر است؟

.

می دانیم که : از هر نقطه خارج یک خط مفروض می توان خطی عمود بر آن رسم کرد.
اگر محل تلاقی این دو خط را مبدا در نظر بگیریم به این محور محور رسم پذیر می گوییم.
در این محور:
۱) (۰,a) یا (a,۰) را رسم پذیر گوییم اگر a رسم پذیر باشد.
۲) (a,b) را رسم پذیر گوییم اگر a و b رسم پذیر باشند.
هر شکلی را که روی این محور بتوان رسم کرد، اعم از پاره خط، دایره و... یک شکل رسم پذیر گوییم.
اگر یک پاره خط در این محورها رسم کنیم، طول پاره خط عددی رسم پذیر است.
حال می توانیم به راحتی بگوییم که "رادیکال۲" رسم پذیر است.
چون اگر (۰.۱) و (۰و۱) رو روی محور به هم وصل کنیم بنابر قضیه فیثاغورث پاره خطی به طول "رادیکال"۲ داریم.

مسایل سه گانه

حال سوالی که مطرح می شود این است که آیا همه اعداد رسم پذیرند؟ و اگر نه چه عددهایی رسم پذیرند و کدام ها رسم پذیر نیستند.

چند حکم کلی درباره رسم پذیری :

۱) اگر **a** و **b** رسم پذیر باشند آنگاه **a+b , a-b , a.b , a/b** نیز رسم پذیرند.

۲) اگر **a** رسم پذیر باشد آنگاه "رادیکال **a**" نیز رسم پذیر است.

۳) موارد زیر معادلند (یعنی اگر یکی از آنها در مورد یک عدد درست باشد دو تای دیگر نیز درستند):

الف) **x** رسم پذیر است.

ب) **Cos(x)** رسم پذیر است.

ج) **Sin(x)** رسم پذیر است.

د) همه اعداد گویا (**Q**) رسم پذیر هستند.

اکنون کار قضاوت در مورد رسم پذیری عددها خیلی ساده تر شد. تنها عددی ممکن است رسم پذیر نباشد که گنگ باشد. (مثلا رادیکال ۲ با فرجه ۳)اما تعیین اینکه عدد گنگی رسم پذیر است یا نه دارای تکنیکهای ویژه ایست.

طبق قضیه گالوا نتیجه زیر به دست آمده است:

مسائل تربیع دایره ، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه تنها با استفاده از ستاره و پرگار حل شدنی نیست.

تثليث زاويه

تثليث زاويه در واقع مسئلة تقسيم زاويه ای به سه بخش مساوی فقط با خط کش و پرگار است که یکی دیگر از سه مسئلة مشهور هندسة یونان باستان است .

مسائل ترسيمي از ديرباز نقش مهمي در هندسه و رياضيات داشته اند .يونانيان باستان وقت خود را صرف حل مسائل ترسيمي هندسه با استفاده از پرگار فروريختني و خطكش غير مدرج مي كردند.

ستاره (خط کش غير مدرج)

وسيله اي است که تنها ميتواند خط راست بکشد .يعني اگر دو نقطه داشته باشيد مي توانيد خطي بکشيد که از آن دو نقطه بگذرد .اما نمي توانيد مثلاً پاره خطي به طول 1 سانتيمتر بکشيد.

پرگار فروريختني

اين وسيله با پرگارهاي امروزي کمي تفاوت دارد .وقتي نوك پرگار فرو ريختني را از زمين بلند کنيم، فرو ميريزد و از بين مي رود.

بزرگان ریاضی در طی دوران براحتی می‌توانستند با کشیدن نیمساز، هر زاویه دلخواه را به دو بخش برابر قسمت کنند، ولی در سه قسمت کردن کمان عاجز بودند. بنابراین تثلیث یا سه بخش کردن زاویه یکی از مسایل عهد باستان گردید .

تقسیم یک پاره خط به چند قسمت مساوی با ابزارهای اقلیدسی کار ساده ای است و ممکن است چنین باشد که یونانیان باستان در تلاش برای حل مسئله مشابه تقسیم زاویه به چند قسمت ، به مسئله تثلیث رسیده باشند. یا شاید به طور محتملتر ، مسئله در تلاشهایی برای ساختن یک نه ضلعی منتظم ، که در آن تثلیث یک زاویه 60 درجه لزوم پیدا می کرد ، مطرح شده باشد.

با آشنایی در حد مثلثات دبیرستانی می‌شود ثابت کرد این مسئله که جزء مسئله‌های طرح شده در شاخه ساختمان‌های هندسی است با کمک پرگار و ستاره (خطکش غیر مدرج) قابل حل نیست.
با حل یک معادله درجه ۳ ساده می‌توانیم دریابیم که بی‌نهایت زاویه وجود دارد که با کمک ستاره و پرگار قابل تثلیث است، از جمله زاویه‌های ۹۰ درجه یا ۴۵ درجه؛ و بی‌نهایت زاویه وجود دارد که با کمک ستاره و پرگار قابل تثلیث نیست، از جمله زاویهٔ ۶۰ درجه.
بنابراین، زاویهٔ ۶۰ درجه را نمی‌توان، به کمک پرگار و خطکش، به سه بخش برابر تقسیم کرد .

اقلیدس در حدود 300 ق م ، در قضیة 10 ، مقالة اول ، اصول نحوة تقسیم زاویة مفروضی را به دو بخش مساوی با خط کش و پرگار نشان داد.

پیر ل وانتسل ریاضیدان اروپایی ، در 1837 با استفاده از نظریة معادله های جبری ثابت کرد که تثلیث زاویه با خط کش و پرگار در حالت کلی ناممکن است . اما بعضی زاویه های خاص ، مثلاً زاویة °90، را می توان با خط کش و پرگار تثلیث کرد .

در قرن دوم یا سوم ق م ، هندسه دانان یونان روشهایی برای تثلیث زاویه از راههای دیگر یافتند .

یکی از راههای تثلیث ابداعی یونانیان را می توان از روی کتاب مأخوذات منسوب به ارشمیدس ، که تنها ، ترجمهٔ عربی دورهٔ اسلامی آن به جا مانده است ، بازیافت .

سایر هندسه دانان یونان کاربرد مقطعهای مخروطی را ترجیح می دادند . دو روش تثلیث زاویه با دایره و هذلولی در مجموعه پاپوس اسکندرانی به جا مانده است .

ترجمهٔ عربی یکی از این روشها در نوشته های بنوموسی و ثابت بن قرّه آمده است .

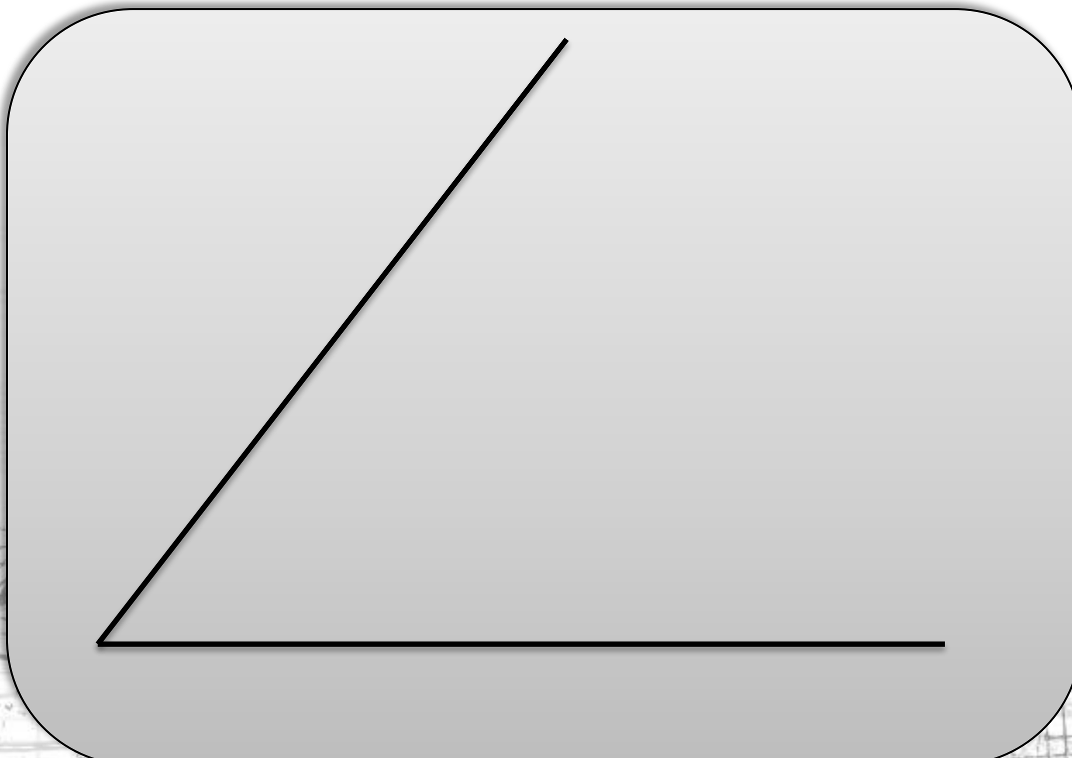
ابوسهل کوهی در قرن چهارم روش بسیار ساده ای برای تثلیث زاویه ابداع کرد. این روش را احمدبن محمدبن عبدالجلیل سِجزی بنادرست از آنِ خود خوانده است.

غیاث الدین جمشید کاشانی در رسالة وَتَر و جَیْب که باقی نمانده ولی به صورت شرحهایی که بعداً بر آن نوشته اند در دست است ، نشان داده است که تثلیث هر زاویة مفروض را می توان به مسئلة حل معادلة درجة سوم $px = q + x^3$ که در آن p و q کمّیتهای مثبت معلومی هستند تحویل کرد . او روشی مبتنی بر تکرار برای یافتن x (ریشة معادله) ابداع کرد.

در ریاضیات اروپا، تثلیث بار دیگر در آثار فرانسوا ویت دیده می شود. او از تثلیث برای حل معادلة درجة سوم $px = q + x^3$ استفاده کرده است . روش جبری منجر به اعداد مختلط می شود که ویت از آن پرهیز داشت

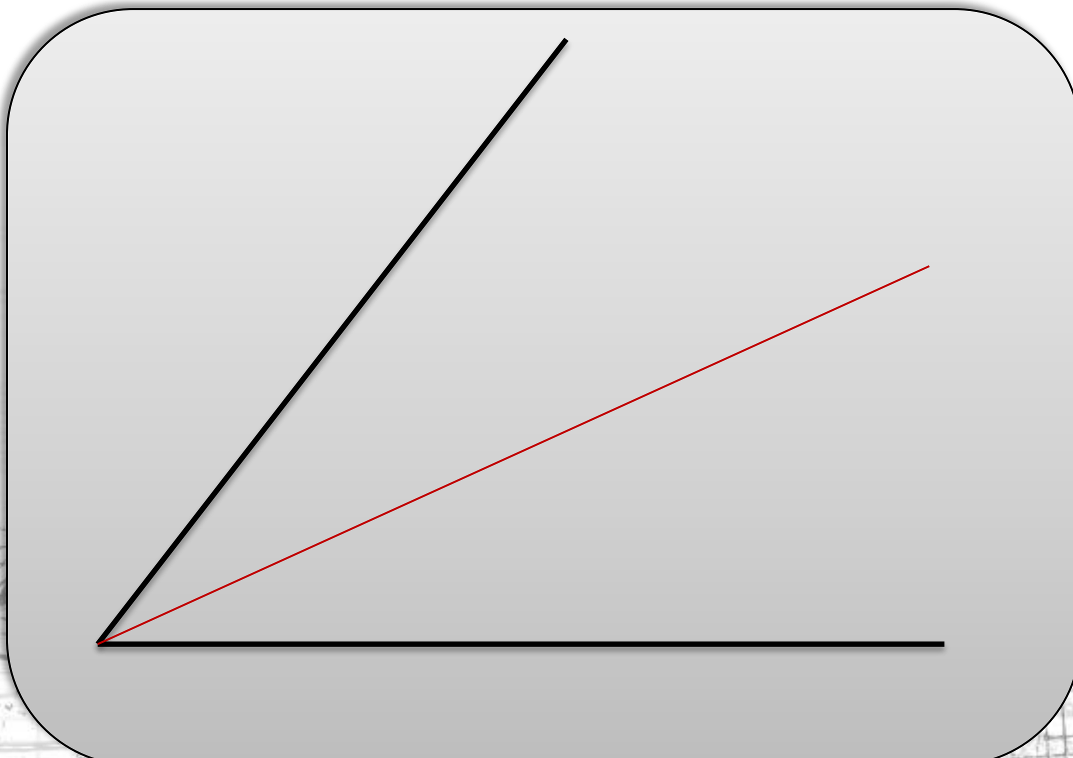
گالوا ثابت کرد زاویه Π/3 با کمک پرگار و خطکش نمی توان تثلیث کرد .

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



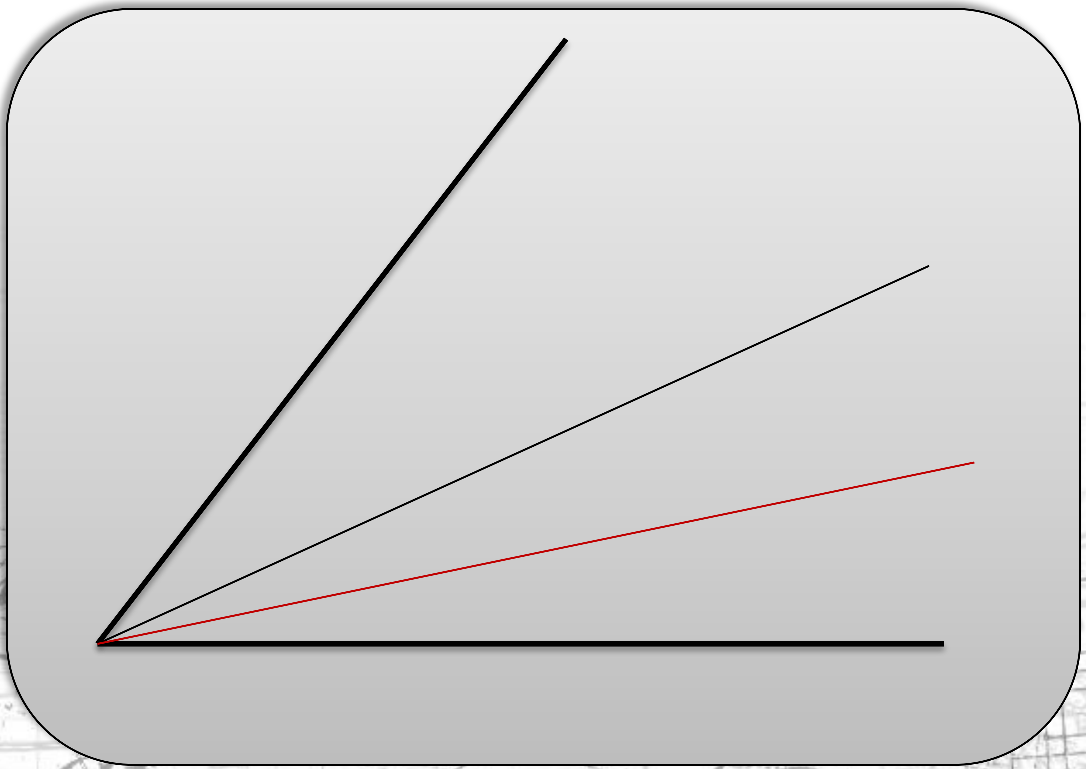
1

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



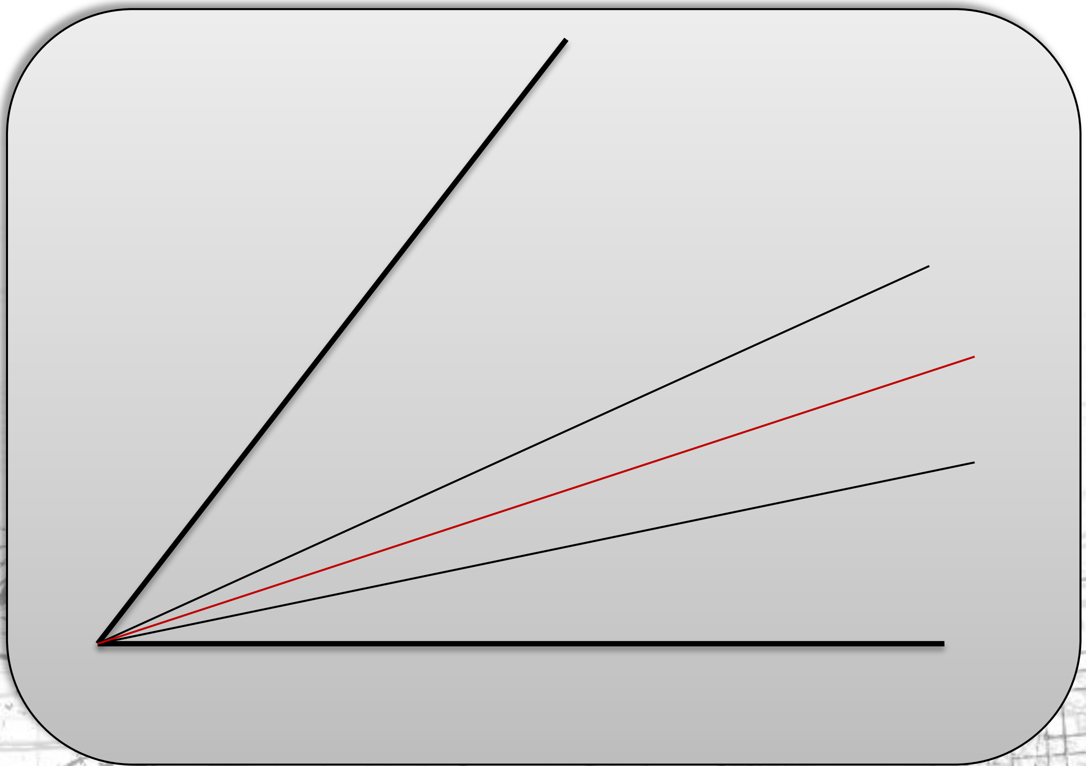
1/2

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



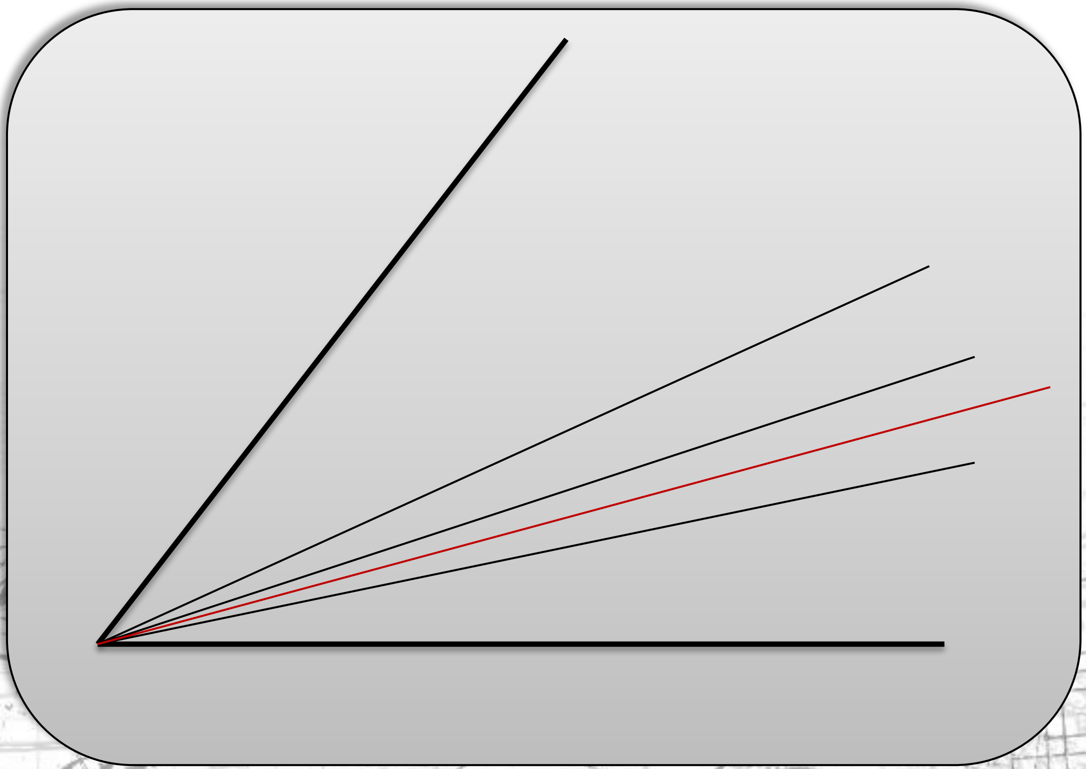
1/2 – 1/4

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



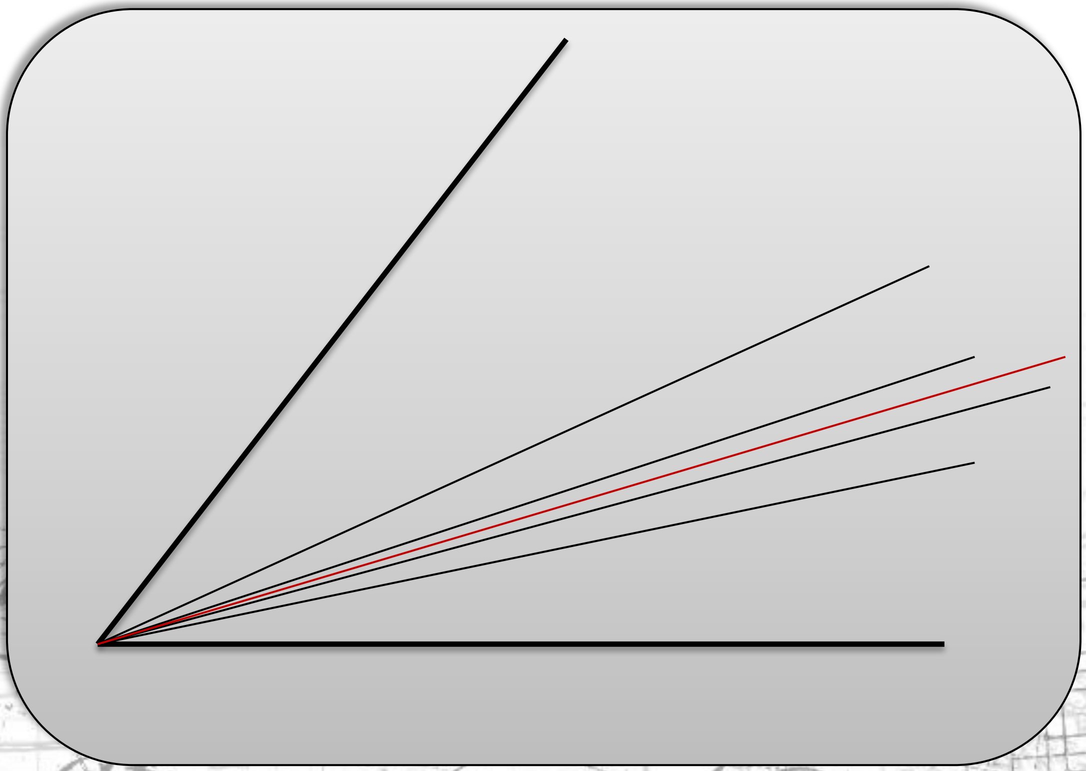
1/2 – 1/4 + 1/8

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



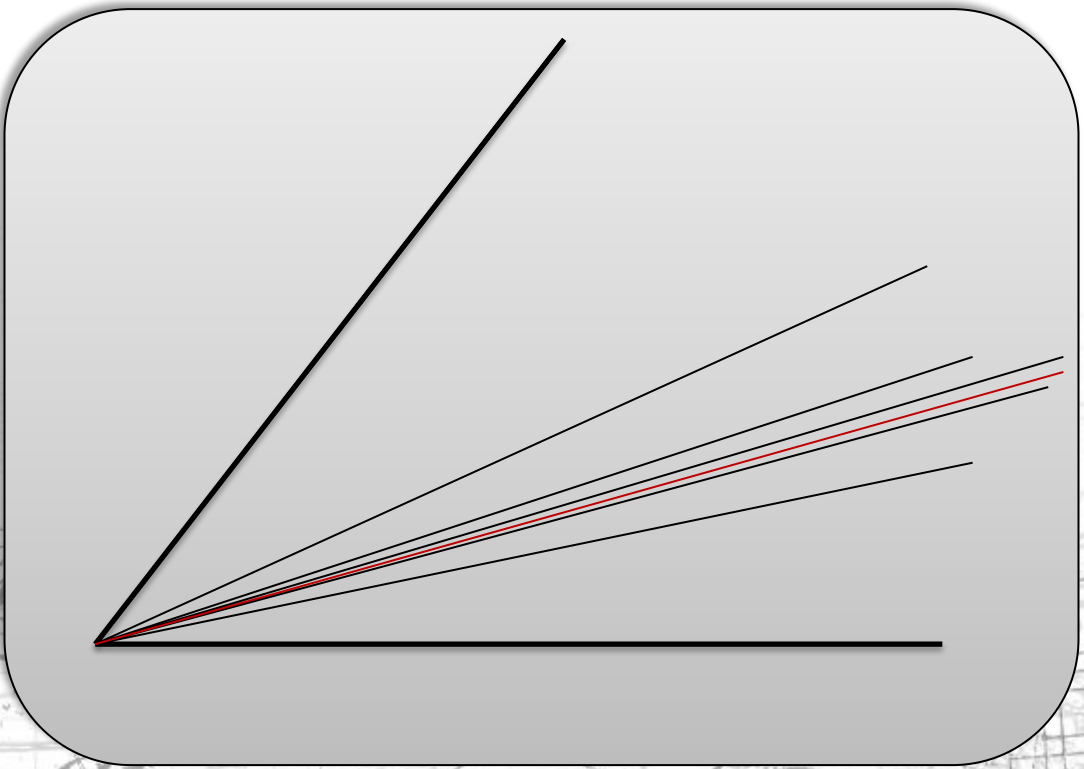
1/2 – 1/4 + 1/8 - 1/16

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



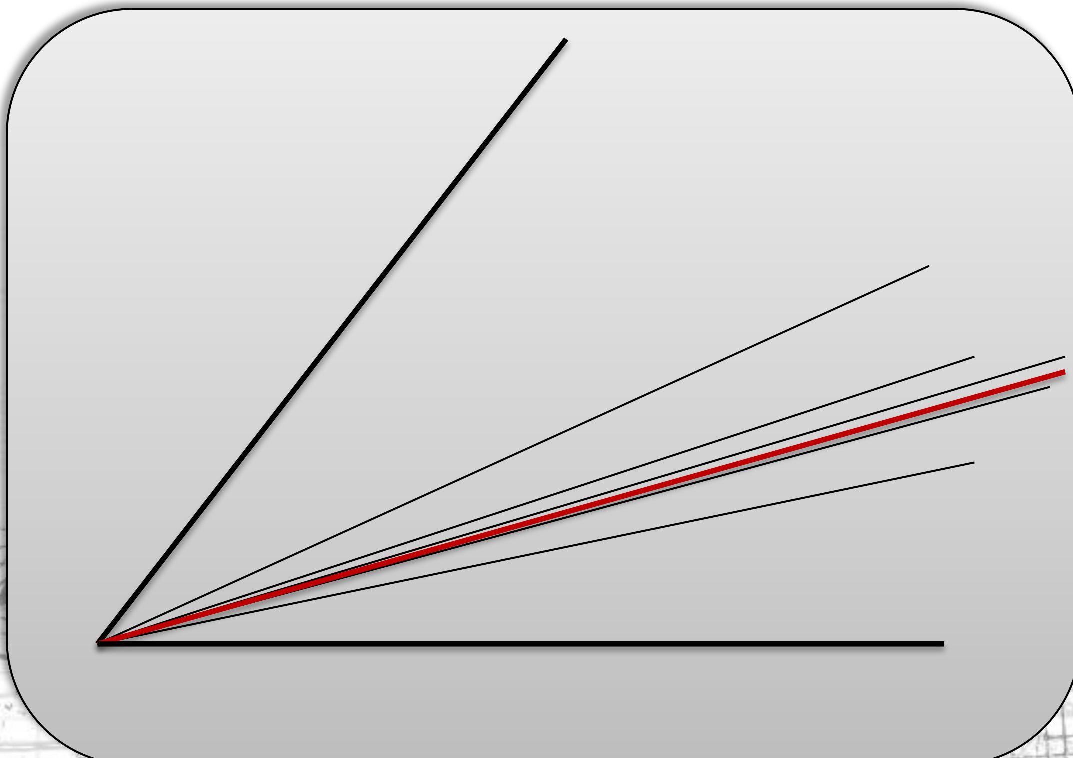
1/2 – 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



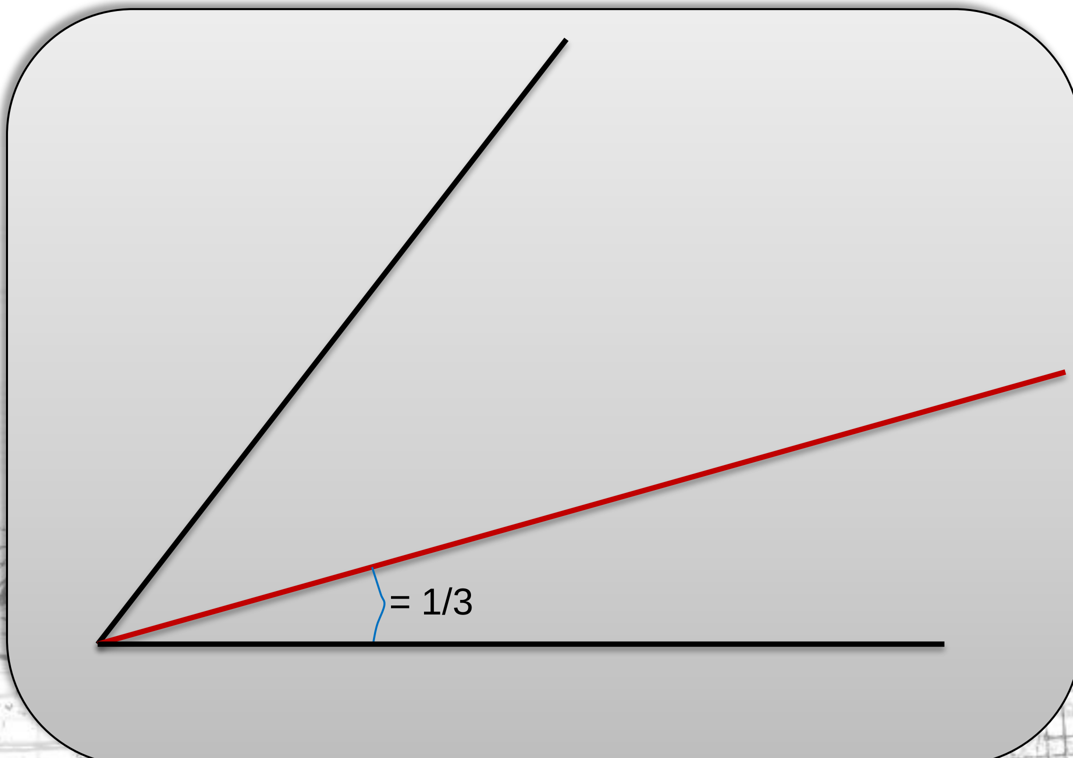
1/2 – 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 – 1/64

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



1/2 – 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 – 1/64 + ...

اگر يك خطكش، يك پرگار و تا ابد وقت داشته باشيد مي‌توانيد زاويه‌اي را به 3 قسمت مساوي تقسيم كنيد؟!



1/2 – 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 – 1/64 + ... =

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{3}$$

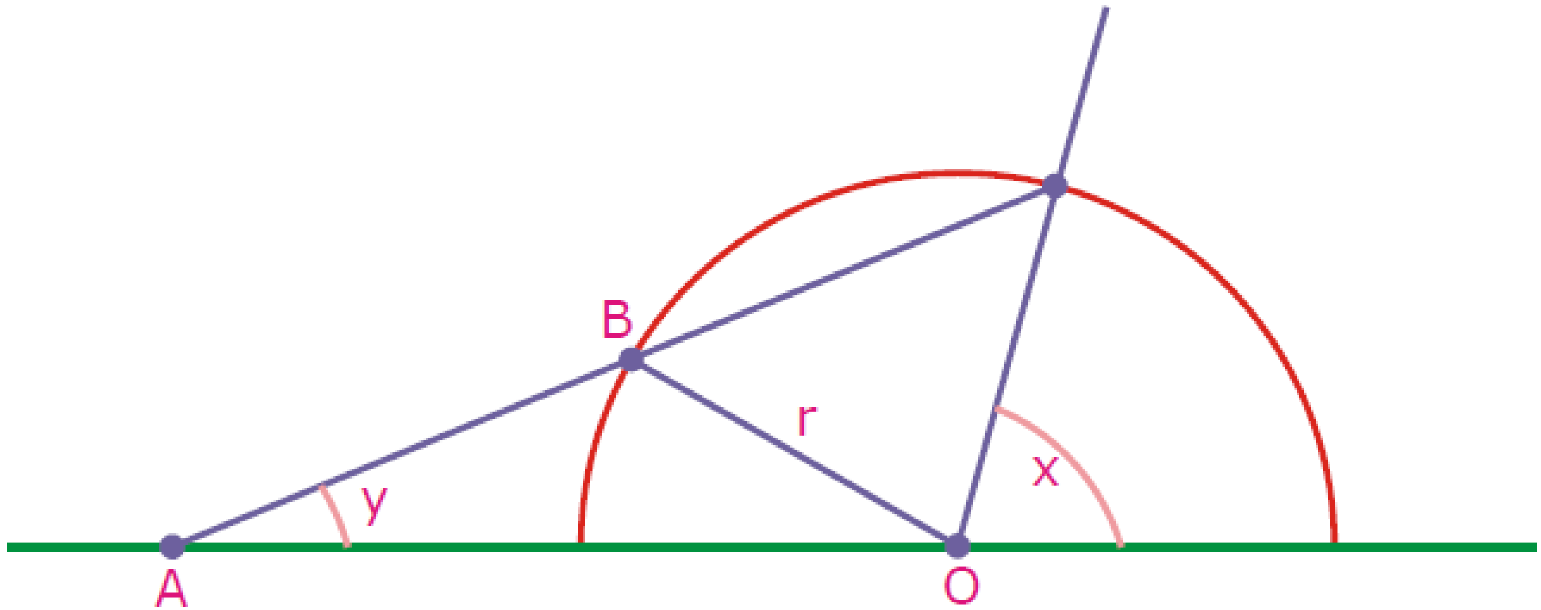
این قضیه که زاویه را در حالت كلي نمي توان فقط با خط كش و پرگار تثليث كرد فقط وقتي صادق است كه خط كش را ابزاري براي گذراندن يك خط راست از دو نقطه دلخواه در نظر بگيريم و نه بيشتر . در توصيف كلي ما از عددهاي ترسيم پذير، استفاده از خط كش همواره محدود به همين يك عمل بود . اگر استفاده هاي ديگري از خط كش مجاز باشد، مجموعه ترسيمهاي ممكن بسيار گسترده تر مي شود.

اگر چه زاویه دلخواه را نمی توان با ابزارهای اقلیدسی دقیقا تثلیث نمود ولی ترسیمهایی با این ابزار وجود دارند که تثلیثهای بسیار خوبی را بدست می دهند مانند ترسیم حکاک و نقاش معروف آلبرشت دورر

روش ارشميدس براي تثليث زاويه

روش زير براي تثليث زاويه، كه در آثار ارشميدس پيدا شده است، مثال خوبي در اين زمينه است.

فرض كنيم زاويه دلخواه x ، مانند شكل زير، داده شده است.



ضلع پاييني زاويه را به سمت چپ امتداد مي دهيم و نيمدايره اي به مركز O و به شعاع اختياري r رسم مي كنيم .

دو نقطه A و B را با علامت گذاري روي خط كش مشخص مي كنيم به قسمي كه $AB = r$. حال خط كش را طوري قرار مي دهيم كه نقطه B روي نيم دايره قرار گيرد و سپس آن را مي لغزانيم به نحوي كه B روي دايره بماند و A روي امتداد ضلع پاييني زاويه قرار گيرد و امتداد خط كش از محل برخورد ضلع بالايي زاويه با نيمدايره بگذرد . در اين حالت خط راستي در كنار لبه خط كش رسم مي كنيم كه زاويه y را با ضلع امتداد يافته زاويه xمي سازد.

زاويه y ثلث *زاويه* x است .

مسايل سه گانه

پایان