بسمه تعالی

پاسخ تشریحی سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۴ بر مبنای دفترچه E

۶۷) گزینه ۲ صحیح است.

مشخص است که سیستم $y(t)=\begin{cases} x(t-1) \ , \ x(t-1)\le 1 \\ x(t-2) \ , \ x(t-1)>1 \end{cases}$، علی و غیرخطی است.

۶۸) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح هستند.

سیستم $y[n]=x(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor)$ حافظه‌دار است، زیرا مثلاً $y[1]=x(\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor)=x(0)$ می‌باشد. همچنین پاسخ به ورودی $x[n]=\delta(n)$ برابر می‌شود با:

$$x[n]=\delta(n) \longrightarrow y[n]=\delta(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor)=\begin{cases} \delta(0) \ , \ n=0,1,2 \\ 0 \quad , \quad o.w \end{cases}=\begin{cases} 1 \ , \ n=0,1,2 \\ 0 \ , \quad o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y[n]=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

۶۹) گزینه ۴ صحیح است.

برای رسم سیگنال $x[1-2n]$، ابتدا $x[n]=\delta[n+1]+\delta[n]-\delta[n-1]$ را ۱ واحد به چپ انتقال داده و سپس با ضریب ۲ فشرده کرده و در نهایت قرینه می‌نماییم که برابر $x[1-2n]=-\delta[n]+\delta[n-1]$ می‌باشد. حال برای محاسبه کانولوشن این سیگنال با سیگنال $x[n]$، شکل $x[1-2n]=-\delta[n]+\delta[n-1]$ را قرینه کرده و ۱ واحد به راست انتقال داده و در $x[n]$ ضرب کرده و سپس مجموع می‌گیریم که برابر ۲ می‌شود.

۷۰) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اطلاعات «الف»، تبدیل فوریه تابعی موهومی است. از طرف دیگر گزینه‌های ۱ و ۴ سیگنال‌هایی حقیقی و فرد هستند، پس تبدیل فوریه آن‌ها موهومی و فرد است. اما گزینه‌های ۲ و ۳ حقیقی و زوج هستند، پس تبدیل فوریه آن‌ها حقیقی و زوج است. پس گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند. اطلاعات «ب» نتیجه می‌دهد که مشتق سیگنال در لحظه $t=0$ برابر صفر است که از بین گزینه‌های ۱ و ۴، فقط گزینه ۱ این‌چنین است. یعنی پاسخ برابر $x(t)=t^3e^{-|t|}$ می‌باشد.

۷۱) گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا رابطه داده شده را ساده می‌کنیم:

$$X(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1+j(\frac{\omega}{3})}\right\}=j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{-j\sin 2\omega-\cos 2\omega}{1+j(\frac{\omega}{3})}\right\}=j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{-3e^{j2\omega}}{3+j\omega}\right\}$$

حال با استفاده از خاصیت انتقال زمـانی، عکـس تبـدیل فوریـه $\frac{-3e^{j2\omega}}{3+j\omega}$ برابـر $-3e^{-3(t+2)}u(t+2)$، و سپس با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در فرکـانس، عکـس تبـدیل فوریـه $X(\omega)=j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{-3e^{j2\omega}}{3+j\omega}\right\}$ برابر $x(t)=-3te^{-3(t+2)}u(t+2)$ می‌باشد..

۷۲) گزینه ۴ صحیح است.

توجه کنید که برای محاسبه ضرایب فوریه $y(t)=x'(1-t)$ ابتدا بایـد خاصـیت مشـتق‌گیـری را اعمـال نمایید. ضرایب فوریه $x'(t)$ برابر $jk\omega_0 a_k$، و ضرایب فوریه $y(t)=x'(t+1)$ طبق خاصیت انتقال زمـانی برابر $jk\omega_0 a_k e^{jk\omega_0(1)}$ و ضـرایب فوریـه $y(t)=x'(-t+1)=x'(1-t)$ طبـق خاصـیت وارونگـی برابـر $b_k=-jk\omega_0 a_{-k}e^{-jk\omega_0(1)}$ می‌باشد. حال با توجه به اینکه دوره تنـاوب $x(t)$ برابـر $T=4$ و $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد، $b_3=-j3\frac{\pi}{2}a_{-3}e^{-j\frac{3\pi}{2}}$ می‌باشد. اما برای محاسبه a_{-3} داریم:

$$x(t)=\sin(\frac{2\pi}{4}\times 3t)+\sin(\frac{2\pi}{4}\times t)=\frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{2}t}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{3\pi}{2}t}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{2}t}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{2}t}$$

a_k ضریب $e^{jk\omega_0 t}=e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ می‌باشد. پس a_{-3} برابر ضریب $e^{-j\frac{3\pi}{2}t}$ یعنی $-\frac{1}{2j}$ است. در نتیجه داریم:

$$b_3=-j3\frac{\pi}{2}a_{-3}e^{-j\frac{3\pi}{2}}=-j3\frac{\pi}{2}(-\frac{1}{2j})e^{-j\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}e^{-j\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}j$$

۷۳) گزینه ۳ صحیح است.

روش‌های مختلفی برای حل این تست وجود دارد، اما شاید ساده‌ترین روش به‌صورت زیر باشد. با توجه به اینکــه دوره تنـــاوب $x[k]$ برابـــر $N=6$ مـــی‌باشـــد، دوره تنـــاوب $s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta(t-2k)$ برابر $T=2\times N=12$ خواهد بود. حال برای محاسبه ضرایب فوریه سیگنال $s(t)$، ابتدا آن را در یک دوره تناوب مثلاً بازه $-1<t<11$ در نظر گرفته و $z(t)$ می‌نامیم و سپس از نکته ۹۱ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$z(t)=x[0]\delta(t)+x[1]\delta(t-2)+x[2]\delta(t-4)+x[3]\delta(t-6)+x[4]\delta(t-8)+x[5]\delta(t-10)$$

$$\Rightarrow\quad Z(\omega)=x[0]+x[1]e^{-j2\omega}+x[2]e^{-j4\omega}+x[3]e^{-j6\omega}+x[4]e^{-j8\omega}+x[5]e^{-j10\omega}$$

$$a_k=\frac{1}{T}Z(k\omega_0)=\frac{1}{12}Z(k\frac{2\pi}{12})=\frac{1}{12}Z(k\frac{\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{12}\left(x[0]+x[1]e^{-jk\frac{\pi}{3}}+x[2]e^{-jk\frac{2\pi}{3}}+x[3]e^{-jk\frac{4\pi}{3}}+x[4]e^{-jk\frac{6\pi}{3}}+x[5]e^{-jk\frac{8\pi}{3}}\right)\qquad(1)$$

از طرف دیگر ضرایب فوریه سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب $N=6$ و فرکانس اصلی $\frac{\pi}{3}$ نیز برابر است با:

$$\alpha_k = \frac{۱}{۶}\sum_{n=۰}^{۵} x[n]e^{-jk\frac{۲\pi}{۳}n}$$
$$= \frac{۱}{۶}\left(x[۰] + x[۱]e^{-jk\frac{\pi}{۳}} + x[۲]e^{-jk\frac{۲\pi}{۳}} + x[۳]e^{-jk\frac{۴\pi}{۳}} + x[۴]e^{-jk\frac{۶\pi}{۳}} + x[۵]e^{-jk\frac{۸\pi}{۳}}\right)$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه (۱)، $a_k = \frac{۱}{۲}\alpha_k$ می‌باشد.

۷۴) گزینه ۳ صحیح است.

$$H(s) = \frac{s}{s+۳} \ , \ \mathrm{Re}[s] > -۳$$

پاسخ به ورودی $e^{-۲t}$ برابر $H(-۲)e^{-۲t} = -۲e^{-۲t}$ و پاسخ به ورودی $u(t)$ نیز با استفاده از تبدیل لاپلاس برابر $e^{-۳t}u(t)$ می‌باشد. پس پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = e^{-۲t} + u(t)$ برابر $-۲e^{-۲t} + e^{-۳t}u(t)$ خواهد بود.

۷۵) گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سیستم $H(s) = \frac{۱}{s+۱}$ به ورودی $\cos(۲t+۱)$ با استفاده از فازور برابر می‌شود با:

$$y(t) = |H(۲j)|\cos\left(۲t+۱+\measuredangle H(۲j)\right) = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\cos\left(۲t+۱-\tan^{-۱}(۲)\right)$$

با ساده کردن گزینه ۴ یعنی $y(t) = \frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱) + \frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$ با استفاده از فرمول $A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^۲+B^۲}\cos(\theta - \tan^{-۱}\frac{B}{A})$ به پاسخ فوق خواهیم رسید.

روش دیگر این است که ابتدا معادله دیفرانسیل سیستم را به‌دست آورید:

$$H(s) = \frac{۱}{s+۱} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad sY(s) + Y(s) = X(s) \quad \Rightarrow \quad y'(t) + y(t) = x(t)$$

حال با جایگذاری $x(t) = \cos(۲t+۱)$ و $y(t) = A\cos(۲t+۱) + B\sin(۲t+۱)$ در معادله دیفرانسیل فوق داریم:

$$\left[-۲A\sin(۲t+۱) + ۲B\cos(۲t+۱)\right] + \left[A\cos(۲t+۱) + B\sin(۲t+۱)\right] = \cos(۲t+۱)$$

$$-۲A + B = ۰ \ , \ ۲B + A = ۱ \quad \Rightarrow \quad A = \frac{۱}{۵} \ , \ B = \frac{۲}{۵} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱) + \frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$$

۷۶) گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا با استفاده از نکته ۱۴۰، تابع تبدیل سیستم برابر می‌شود با:

$$H(z) = \frac{z - \frac{۱}{۴}}{z + \frac{۱}{۳}} \ , \ |z| > \frac{۱}{۳}$$

حال پاسخ به ورودی $x[n]=(\frac{۲}{۳})^n$ برابر می‌شود با:

$$x[n]=(\frac{۲}{۳})^n \xrightarrow{H(z)} y[n]=H(\frac{۲}{۳})(\frac{۲}{۳})^n=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n$$

۷۷) گزینه ۴ صحیح است.

عکس تبدیل $\mathcal{Z}$ تابع $G(z^۲)$ برابـر $g_{(۲)}[n]$ و درنتیجـه پاسـخ فرکانسـی سیسـتم اول برابـر $G(e^{j۲\omega})$ می‌باشد. از آنجا $G(e^{j\omega})$ یک فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{۲}$ است، $G(e^{j۲\omega})$ یک فیلتـر میـان‌گـذر با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌باشد (تست ۱۰۲ صفحه ۵۸۴ را ببینیـد). از طـرف دیگـر سیسـتم دوم دارای پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ می‌باشد که یک فیلتـر بالاگـذر بـا فرکـانس قطـع $\frac{\pi}{۲}$ اسـت. حـال پاسـخ فرکانسی سیستم کل برابر $G(e^{j۲\omega})H(e^{j\omega})$ خواهد بود که یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع $\frac{۳\pi}{۴}$ است.

به عبارت دیگر سیستم کل، فرکانس‌های بین $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۵\pi}{۴}$ را عبور می‌دهد.

۷۸) گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا عکس تبدیل $\mathcal{Z}$ عبارت $\frac{-\frac{۱}{۲}z^{-۱}}{(۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱})^۲}$ با استفاده از جدول برابـر $n(-\frac{۱}{۲})^n u[n]$ مـی‌باشـد. پـس بـا استفاده از خاصیت خطی بودن وانتقال زمانی، عکس تبدیل $\mathcal{Z}$ عبارت $\frac{۱}{(۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱})^۲}$ برابر می‌شود با:

$$y[n]=-۲(n+۱)(-\frac{۱}{۲})^{n+۱}u[n+۱]=(n+۱)(-\frac{۱}{۲})^n u[n+۱]$$

حال با استفاده از خاصیت گستردگی داریم:

$$X(z)=\frac{۱}{(۱+\frac{۱}{۲}z^{-۳})^۲} \xrightarrow{Z^{-۱}} x[n]=y_{(۳)}[n]=\begin{cases}(\frac{n}{۳}+۱)(-\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۳}}u[\frac{n}{۳}+۱] & , \text{n مضرب ۳} \\ ۰ & , \text{o.w}\end{cases}$$