۱. مرتبهٔ هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید و معلوم کنید که کدامیك خطی است.

الف) $$x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+x\frac{dy}{dx}+۲y=\sin x$$

ب) $$(۱+y^{۲})\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+x\frac{dy}{dx}+y=e^{x}$$

ج) $$\frac{d^{۴}y}{dx^{۴}}+\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}+\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+\frac{dy}{dx}+y=۱$$

د) $$\frac{dy}{dx}+xy^{۲}=۰$$

هـ) $$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+\sin(x+y)=\sin x$$

(و)

$$\frac{d^3 y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}+(\cos^2 x)y=x^3$$

۲. درهریك از حالتهای زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است.

(الف)

$$y''-y=0\ ;\ y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=\cosh x$$

(ب)

$$y''+2y'-3y=0;\ y_1(x)=e^{-3x},\ y_2(x)=e^x$$

(ج)

$$y''''+4y'''+3y=x;\ y_1(x)=\frac{x}{3},\ y_2(x)=e^{-x}+\frac{x}{3}$$

(د)

$$2x^2y''+3xy'-y=0,\ x>0;\ y_1(x)=x^{1/2},\ y_2(x)=x^{-1}$$

(ه)

$$x^2y''+5xy'+4y=0,\ x>0;\ y_1(x)=x^{-2},\ y_2(x)=x^{-2}\ln x$$

(و)

$$y''+y=\sec x,\ 0<x<\frac{\pi}{2};\ y=\phi(x)=(\cos x)\ln\cos x+x\sin x$$

(ز)

$$y'-2xy=1;\ y=\phi(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}$$

۳. تعیین کنید برای چه مقادیری از r، هریك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی بهصورت $y=e^{rx}$ است.

(الف) $y'+2y=0$ (ب) $y''-y=0$

(ج) $y''+y'-6y=0$ (د) $y'''-3y''+2y'=0$

۴. تعیین کنید برای چه مقادیری از r، هر یك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی بهصورت $y=x^r$ بهازای $x>0$ است.

(الف) $x^2y''+4xy'+2y=0$ (ب) $x^2y''-4xy'+4y=0$

مسائل مربوط به معادلات خطی مرتبه اول

درهریك ازمسائل ۱ تا ۶ معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

۱. $y'+3y=x+e^{-2x}$

۲. $y'-2y=x^2e^{2x}$

۳. $y'+y=xe^{-x}+1$

۴. $y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=3\cos 2x, \quad x>0$

۵. $y'-y=2e^{x}$

۶. $xy'+2y=\sin x, \quad x>0$

درهریك از مسائل ۷ تا ۱۲ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را بیابید.

۷. $y'-y=2xe^{2x}, \quad y(0)=1$

۸. $y'+2y=xe^{-2x}, \quad y(1)=0$

$$y'+y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y(0)=0$$ ۹.

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi)=0, \quad x>0$$ ۱۰.

$$y'-2y=e^{2x}, \quad y(0)=2$$ ۱۱.

$$xy'+2y=\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$ ۱۲.

۱۳. جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-x}$$

راهنمایی: x را به‌جای y به‌عنوان تابع درنظر بگیرید.

۱۴. (الف) نشان دهید که $\phi(x)=e^{2x}$ یك جواب معادلهٔ

$$y'-2y=0$$

است، و $y=c\phi(x)$ نیز به‌ازای هرمقدار ثابت c جواب این معادله می‌باشد.

(ب) نشان دهید که $\phi(x)=1/x$ به‌ازای $x>0$ یك جواب معادلهٔ

$$y'+y^2=0$$

است، اما $y=c\phi(x)$ جواب این‌معادله نیست. توجه شود که درقسمت (ب) معادله، خطی نیست، درصورتی که درقسمت (الف) معادله خطی است.

در هریک ازمسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را بیابید.

.۱

$$y'+(۱/x)y=\sin x\,,\quad x>۰$$

.۲

$$x^{۲}y'+۳xy=(\sin x)/x\,,\quad x<۰$$

.۳

$$y'+(\operatorname{tg} x)\, y = x \sin 2x\,, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

.۴

$$xy'+2y=e^{x}, \quad x>0$$

در هر یك از مسائل ۵ تا ۸ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را بیابید. فاصله‌ای را که در آن جواب معتبر است معین کنید.

.۵

$$xy'+2y=x^{2}-x+1\,, \quad y(1)=\frac{1}{2}$$

.۶

$$xy'+y=e^{x}\,, \quad y(1)=1$$

.۷

$$y'+(\operatorname{cotg} x)y=2\csc x\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

.۸

$$xy'+2y=\sin x\,, \quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}$$

در هر یك از معادلات مسائل ۹ تا ۱۲ حداقل یك ضریب در $x=0$ ناپیوسته است. هر معادله را به ازای $x>0$ حل کنید و وضعیت جواب را هنگامی که $x \to 0$ به ازای مقادیر مختلف ثابت انتگرال گیری بررسی کنید. چند عضو از خانوادهٔ خمهای انتگرال را رسم کنید.

.۹ $\quad y'+\left(\frac{2}{x}\right)y=\frac{1}{x^{2}}$

.۱۰ $\quad y'-\left(\frac{1}{x}\right)y=x$

.۱۱ $\quad y'-\left(\frac{1}{x}\right)y=x^{1/2}$

.۱۲ $\quad y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=\frac{(\cos x)}{x}$

***معادلات برنولی.** گاهی می‌توان معادلهٔ غیرخطی را با تعویض تابع به معادلهٔ خطی برگرداند. مهمترین طبقهٔ این گونه معادلات به صورت

$$y'+p(x)\,y=q(x)\,y^n$$

است، این معادلات را معادلات برنولی می‌نامند (منسوب به یاکوب برنولی ۱۶۵۴–۱۷۰۵). درمسائل ۱۶ و ۱۷ این نوع معادلات بررسی می‌شود.

۱۶. (الف) معادلهٔ برنولی را به ازای $n=0$ و $n=1$ حل کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $n\neq 0,1$، آنگاه با گرفتن $v=y^{1-n}$ معادلهٔ برنولی به معادلهٔ خطی بدل می‌شود. این روش حل را لایبنیتز در ۱۶۹۶ یافته است.

۱۷. با استفاده از روش مسئلهٔ ۱۶، قسمت (ب) هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $x^2y'+2xy-y^3=0$

(ب) $y'=\epsilon y-\sigma y^2;\qquad \epsilon>0,\quad \sigma>0$

(ج) $y'=\epsilon y-\sigma y^3;\qquad \epsilon>0,\quad \sigma>0$

مسائل مربوط به معادلات جدایی پذیر

هریک از معادلات مسائل ۱ تا ۸ را حل کنید. نواحی صفحهٔ xy را که در آنها شرایط قضیهٔ اساسی وجود و یکتایی برقرارند بیابید.

۱. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{۲}}{y}$

۲. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{۲}}{y(۱+x^{۳})}$

۳. $y'+y^{۲}\sin x=۰$

۴. $y'=۱+x+y^{۲}+xy^{۲}$

۵. $y'=(\cos^{۲}x)(\cos^{۲}۲y)$

۶. $xy'=(۱-y^{۲})^{۱/۲}$

۷. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

۸. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{۲}}{۱+y^{۲}}$

جواب هریک از مسائل مقدار اولیهٔ ۹ تا ۱۴ را به صورت صریح بیابید، وفاصلهٔ تعریف جواب را (حداقل به طور تقریب) تعیین کنید.

۹. $\sin ۲x\,dx+\cos ۳y\,dy=۰, \quad y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{۳}$

۱۰. $x\,dx+ye^{-x}\,dy=۰, \quad y(۰)=۱$

۱۱. $\frac{dr}{d\theta}=r, \quad r(۰)=۲$

۱۲. $\frac{dy}{dx}=\frac{۲x}{y+x^{۲}y}, \quad y(۰)=-۲$

۱۳. $\frac{dy}{dx}=xy^{۳}(۱+x^{۲})^{-۱/۲}, \quad y(۰)=۱$

۱۴. $\frac{dy}{dx}=\frac{۲x}{۱+۲y}, \quad y(۲)=۰$

۱۵. معادلهٔ زیر را در فاصلهٔ $-۱<x<۱$ حل کنید

$$y^{۲}(۱-x^{۲})^{۱/۲}\,dy=\sin^{-۱}x\,dx$$

۱۶. معادلهٔ زیر را که در آن a، b، c و d مقادیر ثابت‌اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+b}{cy+d}$$

مسائل

تعیین کنید که آیا هریک از معادلات مسائل ۱ تا ۱۲ کامل است یا نه. اگر کامل باشد، جواب آن را بیابید.

۱. $(2x+3)+(2y-2)y'=0$

۲. $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$

۳. $(9x^2+y-1)-(4y-x)y'=0$

۴. $(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y'=0$

۵. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax+by}{bx+cy}$

۶.
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax-by}{bx-cy}$$

۷.
$$(e^x \sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$$

۸.
$$(e^x \sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy=0$$

۹.
$$(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$$

۱۰.
$$\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)dy=0,\quad x>0$$

۱۱.
$$(x\ln y+xy)dx+(y\ln x+xy)dy=0;\quad x>0,\quad y>0$$

۱۲.
$$\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

۱۳. درهریك ازمعادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنید که معادله کامل باشد، و سپس بهازای این مقدار b معادله را حل کنید.

(الف) $(xy^2+bx^2y)\,dx+(x+y)x^2\,dy=0$

(ب) $(ye^{2xy}+x)\,dx+bxe^{2xy}\,dy=0$

۱۴. معادلهٔ دیفرانسیل کامل زیر را درنظر می‌گیریم

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

به جای انتگرال گیری از $\psi_x=M$ که درمتن آمده است، نخست ازمعادلهٔ $\psi_y=N$ انتگرال بگیرید ویك فرمول ضمنی $\psi(x,y)=c$ نظیر رابطهٔ (۱۲) برای جواب بیابید.

۱۵. نشان دهید که هرمعادلهٔ جدایی‌پذیر، یعنی معادله‌ای به صورت

$$M(x)+N(y)y'=0$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل کامل است.

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۳ کامل نیستند، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز داده شده کامل می‌شوند. آنگاه معادلات را حل کنید.

۱. $x^{۲}y^{۳}+x(۱+y^{۲})y'=۰;\quad \mu(x,y)=۱/xy^{۳}$

۲. $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0\,;$

$\mu(x,y)=ye^{x}$

۳. $y\,dx+(2x-ye^{y})\,dy=0\,;\quad \mu(x,y)=y$

درهریك از مسائل ۴ تا ۹ یك عامل انتگرال‌ساز بیابید، و معادله را حل کنید.

۴. $(3x^2y+2xy+y^3)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$

۵. $y'=e^{2x}+y-1$

۶. $dx+\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$

۷. $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$

۸. $e^{x}\,dx+(e^{x}\operatorname{cotg} y+2y\csc y)\,dy=0$

۹. $\left(3x+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$

۱۰. نشان دهید که اگر $(N_x-M_y)/M=Q$ و Q فقط تابع y باشد، آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$M+Ny'=0$$

دارای یك عامل انتگرال‌ساز به‌صورت زیر است

$$\mu(y)=\exp\int^{y}Q(t)\,dt$$

۱۱*. نشان دهید که اگر $(N_x-M_y)/(xM-yN)=R$ و R فقط به‌مقدار xy بستگی داشته باشد، آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$M+Ny'=0$$

دارای یك عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(xy)$ است. یك فرمول کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

۱۲*. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$$

را با استفاده از عامل انتگرال ساز

$$\mu(x,y)=[xy(2x+y)]^{-1}$$

مسائل مربوط به معادلات همگن

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۸ همگن‌اند، و جواب آنها را بیابید.

۱. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$

۲. $2y\,dx-x\,dy=0$

۳. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

۴. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$

۵. $\frac{dy}{dx}=\frac{4y-3x}{2x-y}$

۶. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+3y}{2x+y}$

۷. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{x-y}$

۸. $(x^2+3xy+y^2)\,dx-x^2\,dy=0$

۹. (الف) جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$$

(ب) جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$$

راهنمایی: برای تبدیل معادلهٔ قسمت (ب) به‌معادلهٔ قسمت (الف)، جایگزینی مقدماتی به‌صورت $x=X-h$، $y=Y-k$ را درنظر می‌گیریم. ثابتهای h و k را طوری انتخاب می‌کنیم که معادله برحسب متغیرهای X و Y همگن شود.

۱۰. معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+3y+15}{2x+y+7}$ را حل کنید. راهنمایی مسئلهٔ ۹ قسمت (ب) را ببینید.

۱۱. معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y-5}{x-y-1}$ را حل کنید. راهنمایی مسئلهٔ ۹ قسمت (ب) را ببینید.

۸.۲ مسائل گوناگون

این بند شامل مجموعه‌ای از مسائل است. ۳۲ مسئلهٔ اول را می‌توان بـا روشهای بندهای پیش حل کرد. این مسائل را به‌منظور کسب مهارت خواننده در تشخیص روش یا روشهای قابل اجرا در مورد معادلهٔ داده شده‌ای آورده‌ایم.

۱. $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{۳}-۲y}{x}$$

۲. $$(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=۰$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3+3y^2-x}, \quad y(0)=0$$

۳. $(x+e^y)\,dy-dx=0$

۴. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$$

۵. $$x\frac{dy}{dx}+xy=1-y, \quad y(1)=0$$

۶. $$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$$ راهنمایی: فرض کنید $u=x^2$.

۷. $$x\frac{dy}{dx}+2y=\frac{\sin x}{x}, \quad y(2)=1$$

۸. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+1}{x^2+2y}$$

۹. $(3y^2+2xy)\,dx-(2xy+x^2)\,dy=0$

۱۰. $(x^2+y)\,dx+(x+e^y)\,dy=0$

۱۱. $$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^x}$$

۱۲. $x\,dy-y\,dx=(xy)^{1/2}\,dx$

۱۳. $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0, \quad y(2)=3$

۱۴. $$(e^x+1)\frac{dy}{dx}=y-ye^x$$

۱۵. $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$$

۱۶. $$\frac{dy}{dx}=e^{2x}+3y$$

۱۷. $(2y+3x)\,dx=-x\,dy$

۱۸. $x\,dy-y\,dx=2x^2y^2\,dy, \quad y(1)=-2$

۱۹. $y'=e^{x+y}$

۲۱.
$$xy' = y + xe^{y/x}$$

۲۲.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$$

۲۳.
$$xy' + y - y^2 e^{2x} = 0$$

۲۴.
$$2 \sin y \cos x \, dx + \cos y \sin x \, dy = 0$$

۲۵.
$$\left(2\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$$

۲۶.
$$(2y + 1)\, dx + \left(\frac{x^2 - y}{x}\right) dy = 0$$

۲۷.
$$(\cos 2y - \sin x)\, dx - 2 \operatorname{tg} x \sin 2y \, dy = 0$$

۲۸.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$$

۲۹.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$$

۳۰.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$$

۳۱.
$$(x^2 y + xy - y)\, dx + (x^2 y - 2x^2)\, dy = 0$$

۳۲.
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$$