به نام خدا

آزمون شماره 1

پاسخ:

ریاضی:

1) گزینه «۴» صحیح است.

$z=0$ برای $e^{\frac{1}{z}}$ تکین اساسی و برای $\dfrac{1}{2+\cos\frac{1}{z}}$ یک تکین انباشته بوده و لذا برای $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{2+\cos\frac{1}{z}}$ یک تکین انباشته خواهد بود.

$z=0$ برای $e^{2z}+e^{-z}-z-2$ یک صفر مرتبه دوم است چرا که

$$e^{2z}+e^{-z}-z-2\big|_{z=0}=0$$
$$2e^{2z}-e^{-z}-1\big|_{z=0}=0$$
$$4e^{2z}+e^{-z}\big|_{z=0}=5\neq 0$$

لذا $z=0$ برای $\dfrac{e^{2z}+e^{-z}-z-2}{z^2}$ یک تکین برداشتی (قطب مرتبه صفر) خواهد بود.

$z=0$ برای $\sin\frac{1}{z}$ یک تکین اساسی و برای $\mathrm{Ln}z$ یک تکین غیرتنهای واقع بر بریدگی شاخه‌ای است، لذا برای $\mathrm{Ln}z\,.\sin\frac{1}{z}$ یک تکین غیرتنها خواهد بود.

۲- گزینه ۴ صحیح است.

معادله مفسر:

$$D^4+4D^3+6D^2+4D+1=0\Rightarrow (D+1)^4=0$$
$$\Rightarrow y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)e^{-x}$$

از روش اپراتور معکوس برای بدست آوردن جواب خصوصی می دانیم که:

$$\frac{1}{(D-p)^k F(D)}Ae^{px}=\frac{Ax^k e^{px}}{k!F(p)}$$

در مساله ما $p=-1, F=1, A=1, k=4$ است، بنابراین:

$$y_p=\frac{x^4e^{-x}}{4!}$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به شکل تابع برای بررسی بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

بررسی پیوستگی در $z=0$

$$\lim_{z\to 0}f(Z)=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^3}{z^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\mathrm{cis}(-3\theta)}{r^2\mathrm{cis}(2\theta)}=\lim_{r\to 0}r\,\mathrm{cis}(-5\theta)=0$$

$\lim_{z\to 0}f(Z)=f(0)$ درنتیجه تابع در $z=0$ پیوسته است.

- بررسی مشتق پذیری در $z=0$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{(\bar{z})^3}{z^2}-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3=\lim_{r\to 0}\left(\frac{r\mathrm{cis}(-\theta)}{r\mathrm{cis}(\theta)}\right)^3=\mathrm{cis}(-6\theta)$$

حاصل حد به θ بستگی دارد و در نتیجه حد وجود ندارد و در نتیجه تابع در $z=0$ مشتق ندارد.

-بررسی شرایط کوشی ریمان در $z=0$

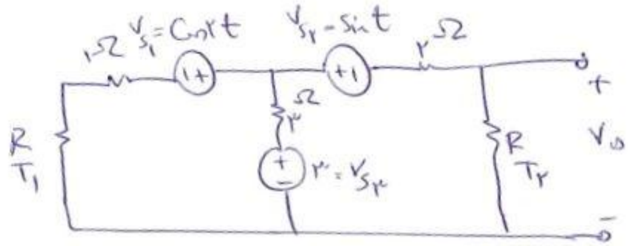
$$f(z)=u(x,y)+\upsilon(x,y)=\frac{(x-iy)^3}{(x+iy)^2}=\begin{cases}-iy & x=0\\ x & y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=1\\ u_y=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\upsilon_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\upsilon(x,0)-\upsilon(0,0)}{x-0}=0\\ \upsilon_y=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\upsilon(0,y)-\upsilon(0,0)}{y-0}=-1\end{cases}$$

شرایط کوشی ریمان در صفر برقرار نیست پس گزینه ۳ صحیح است.

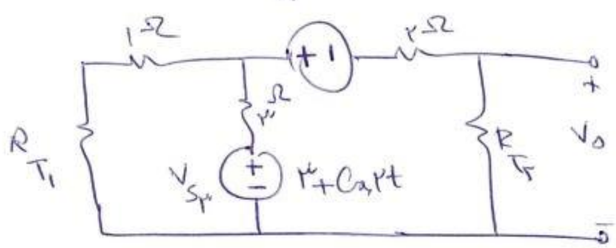
مدار:

1) گزینه «۴» صحیح است.



$$V_o = aV_{S_1} + bV_{S_2} + cV_{S_3} \Rightarrow b = ۰/۲$$

$V_{S_3} = \sin t + \cos ۲t$



منبع V_{S_1} را به دو شاخه دیگر انتقال می‌دهیم.

$$V_o = bV_{S_2} + cV_{S_3} = ۰/۲\sin t + ۰/۲\cos ۲t - ۰/۳ - ۰/۱\cos ۲t \Rightarrow \alpha = ۰/۱$$

2) گزینه «۲» صحیح است.

$$Z = j۵ + \frac{(۵+j۵)(۵-j۵)}{(۵+j۵)+(۵-j۵)} = ۵ + j۵$$

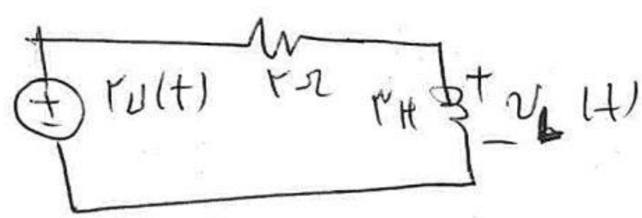
$\cos\varphi = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷$ **ضریب توان**

$tg\ \varphi = ۱$ **ضریب کیفیت**

3) گزینه «۱» صحیح است.

$$V_C(\infty) = V_{th} = ۲$$
$$\tau = R_{th}C \Rightarrow ۲ = R_{th} \times ۱ \Rightarrow R_{th} = ۲$$
$$V_L(s) = \frac{۳S}{۳S+۲} \times \frac{۲}{S} = \frac{۲}{S+\frac{۲}{۳}}$$

$$V_L(t) = ۲e^{-\frac{۲}{۳}t}\ u(t)$$



کنترل:

1) گزینه «۲» صحیح است.

درسنامه: نوع سیستم $(type)$ به ورودی اغتشاش برابر است با : قطبهای موجود در مبدأ در مسیر غیر پیشرو و صفرهای موجود در مبدأ در مسیر پیشرو

2) گزینه «۴» صحیح است.

$$k_v = \lim_{s\to ۰} sG(s) = \frac{k}{۲}$$

$$e_{ss} = \frac{۱}{k_v} = \frac{۲}{k} = ۰/۱ \Rightarrow k = ۲۰$$

$$\Delta(s) = s^۳ + ۳s^۲ + ۲s + ۲۰$$

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & ۱ & ۲ \\ s^۲ & ۳ & ۲۰ \\ s^۱ & \frac{-۱۴}{۳} & \\ s^۰ & ۲۰ & \end{array}$$

سیستم ناپایدار است

3 - گزینه (۱) صحیح است .

برای بررسی پایداری باید تابع تبدیل $\frac{y(s)}{R(s)}$ را محاسبه کرد وبا استفاده از قطبها پایداری را بررسی کرد .با استفاده از فرمول بهره میسون داریم :

$$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=۱}^{m} \Delta_i P_i}{\Delta}$$

که در آن Δ دترمینان گراف ، P_i بهره مسیر iام از ورودی به خروجی ، Δ_i دترمینان گراف بعد از حذف مسیر i ام و m تعداد مسیرها است .قطبهای تابع تبدیل ریشه های Δ هستند و $\Delta = ۱ - \sum L_i + \sum L_i L_j - ....$

که L_i بهره حلقه i ام و $L_i L_j$ حاصلضرب بهره های دو به دو مجزا است .

$$L_۱ = -\frac{۱}{s} \qquad L_۲ = -\frac{۱}{s^۲}$$

$$L_۳ = -\frac{k}{s} \qquad L_۴ = -\frac{۱}{s^۳}$$

که $L_۱$, $L_۲$ مجزا هستند . پس

$$\Delta = ۱ + (\frac{۱}{s} + \frac{k}{s} + \frac{۱}{s^۲} + \frac{۱}{s^۳}) + \frac{k}{s^۲} = ۱ + \frac{۱+k}{s} + \frac{۱+k}{s^۲} + \frac{۱}{s^۳} = \frac{s^۳ + (۱+k)s^۲ + (۱+k)s + ۱}{s^۳}$$

با استفاده از جدول روث – هرویتس داریم :

$$\begin{cases} S^۳ & ۱ & (۱+k) & \rightarrow & ۱+k > ۰ & \Rightarrow & k > -۱ & \text{I} \\ S^۲ & (۱+k) & ۱ & & ۱+k > ۰ & \Rightarrow & k > -۱ & \text{II} \\ S^۱ & \frac{-۱+(۱+k)^۲}{۱+k} & & & -۱+(۱+k)^۲ > ۰ & \Rightarrow & \begin{cases} k > ۰ \\ k < -۲ \end{cases} & \text{III} \\ S^۰ & ۱ & & & & & & \end{cases}$$

اشتراک شروط I , II , III بصورت $k > ۰$ است .

سیگنال:

1 -گزینه ۴ صحیح است.

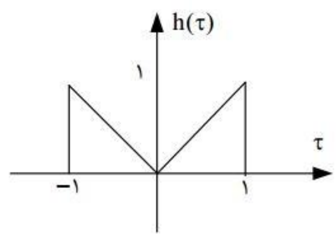
سیستم پایدار است. $\text{if}\ |x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < B \Rightarrow$

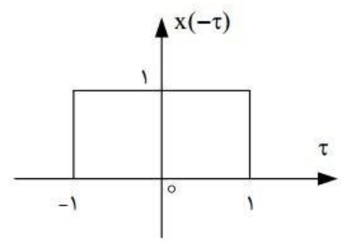
سیستم غیر علّی و حافظه دار است. $t = \frac{-3\pi}{2} \Rightarrow y(\frac{-3\pi}{2}) = x(1) \Rightarrow$

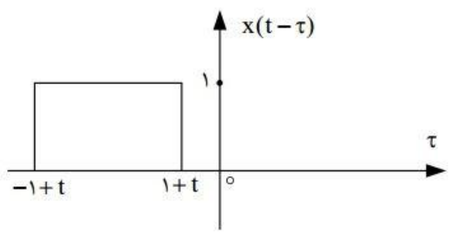
۲- گزینه ۲ صحیح است.

راه اول (روش معمول):

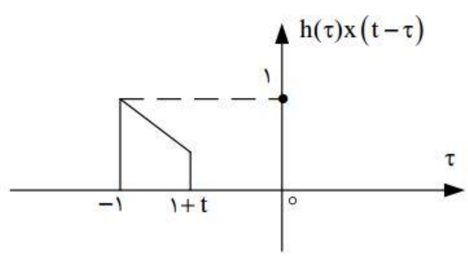
برای محاسبه کانولوشن دو سیگنال در بازه زمانی $-2 < t < -1$ ، ابتدا $x(\tau)$ را قرینه می‌کنیم. سپس $x(-\tau)$ را به اندازه t واحد $(-2 < t < -1)$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم:







$x(t-\tau)$ همان $x(-\tau)$ می‌باشد که به اندازه t واحد $(-2 < t < -1)$ به سمت چپ انتقال یافته است. با ضرب $x(t-\tau)$ در $h(\tau)$ داریم:



برای محاسبه $h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ در $-2 < t < -1$ کافیست که مساحت شکل فوق را محاسبه کنیم:

$$\int_{-1}^{1+t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{1+t}(-\tau)d\tau = \frac{-\tau^2}{2}\bigg|_{-1}^{1+t} = \frac{-(1+t)^2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-t^2}{2}-t \quad , \quad -2<t<-1$$

شکل فوق در $-2<t<-1$ یک سهمی با تقارن رو به پایین است که فقط مطابق شکل گزینه ۲ در $-2<t<-1$ می‌باشد. پس دیگر نیازی به محاسبه کانولوشن در بقیه زمان‌ها نیست و گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

راه دوم (روش تحلیلی):

چون $h(t)$ و $x(t)$ برای بازه زمانی $[-1,1]$ مقدار دارند، پس کانولوشن آنها برای بازه $[-2,2]$ مقدار خواهد داشت.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$x(t)$ مقدار ثابتی دارد و $h(t)$ نیز از توابع خطی تشکیل شده است. پس ضرب $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ شامل توابع خطی می‌باشد. در نتیجه انتگرال آن بصورت منحنی‌های درجه دو خواهد بود. پس گزینه های ۳ و ۴ نادرست می‌باشند. برای محاسبه کانولوشن از $t=-2$، باید $x(\tau)$ را قرینه کنیم و سپس آن را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را روی $h(\tau)$ به سمت راست بلغزانیم. با حرکت آن به سمت راست و روی $h(\tau)$ مقدار همپوشانی زیاد می‌شود، پس منحنی در اوایل شکل $y(t)$ $(-2<t<-1)$، باید صعودی باشد ولی چون خط $h(\tau)$ در زمانهای منفی به سمت پایین است، شتاب آن (سرعت زیاد شدن همپوشانی) منفی می‌شود. پس تقارن منحنی در اوایل شکل $y(t)$ $(-2<t<-1)$، باید به سمت پایین باشد که فقط گزینه ۲ اینچنین است.

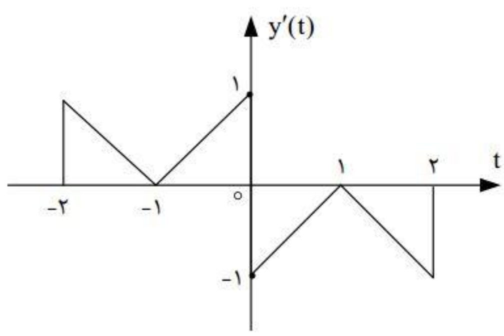
راه سوم: (روش سریع و ابتکاری مخصوص این تست و تست‌های مشابه):

طبق مطالب بیان شده در فصل دوم، برای محاسبه کانولوشن $y(t)=x(t)*h(t)$ می‌توانیم $y'(t)=x'(t)*h(t)$ را محاسبه و سپس از رابطه $y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau + y(-\infty)$ ، $y(t)$ را بدست آوریم. $y(-\infty)$ برابر کانولوشن $x(t)\,,h(t)$ در $t=-\infty$ می‌باشد که در اینجا برابر ۰ می‌شود. پس رابطه $y(t)$ و $y'(t)$ به صورت $y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$ خواهد بود.

مشتق $x(t)$ برابر است با:

$$x'(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1) \quad \Rightarrow \quad y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t+1)-h(t-1)$$

با رسم $y'(t)=h(t+1)-h(t-1)$ داریم:



حال با محاسبه انتگرال شکل فوق (به صورت حسی و تقریبی) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$ مطابق گزینه ۲ خواهیم شد.

۳ - گزینه ۴ صحیح است.

خروجی در هر لحظه t به ورودی در همان لحظه t یا لحظه $t-۲$ بستگی دارد، پس سیستم علّی و حافظه‌دار است.

بدیهی است که اگر ورودی محدود باشد، خروجی نیز محدود می‌شود، پس سیستم پایدار است.

چون در شرطها ورودی داریم، پس با α برابر شدن ورودی، خروجی α برابر نمی‌شود، پس سیستم غیرخطی است.

بررسی TI بودن:

$$t \longrightarrow t-t_۰ : \quad y(t-t_۰)=\begin{cases} ۰ & , \quad x(t-t_۰)<۰ \\ x(t-t_۰)+x(t-t_۰-۲) & , \quad x(t-t_۰)\geq ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

$$x(\bullet) \longrightarrow x(\bullet-t_۰) : \qquad \begin{cases} ۰ & , \quad x(t-t_۰)<۰ \\ x(t-t_۰)+x(t-۲-t_۰) & , \quad x(t-t_۰)\geq ۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

چون عبارات (۱) و (۲) با هم برابر هستند، پس سیستم TI است.

بررسی معکوس‌پذیری:

روش ۱: با توجه به رابطه سیستم همه مقادیر ورودی به خروجی منتقل نمی‌شود، زیرا در ضابطه اول که مخصوص ورودی‌های منفی است، خروجی به ورودی وابسته نیست. بنابراین سیستم معکوس‌ناپذیر است.

روش ۲: سعی می‌کنیم ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم:

$$\begin{cases} y(t)=۰ & , \quad x(t)<۰ \quad \longrightarrow \quad \text{———} \\ y(t)=x(t)+x(t-۲) & , \quad x(t)\geq ۰ \quad \longrightarrow \quad x(t)\overset{?}{=}T[y(t)] \;,\; x(t)\geq ۰ \end{cases}$$

در ضابطه اول، ورودی را نمی‌توانیم بر حسب خروجی بنویسیم. در ضابطه دوم نیز حتّی اگر بتوانیم ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم، از آنجا که شرطها روی ورودی است، پس برای معکوس‌پذیری لازم است که همه ورودی‌ها در شرطها پوشش داده شوند که اینطور نیست، زیرا فقط ورودی‌های مثبت $(x(t)\geq ۰)$ در ضابطه دوم پوشش داده شده‌اند. در واقع ورودی‌های منفی را نمی‌توانیم از روی خروجی بدست آوریم. در نتیجه سیستم معکوس‌ناپذیر است.