

درس اول:

تعریف توان

برای خلاصه کردن عمل ضرب از توان استفاده می کنیم.

توان: تکرار عمل ضرب یک عدد در خودش را توان می گوئیم.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

(a^n را میخوانیم: a به توان n) (a را پایه و n را توان می نامیم)

شش به توان پنج یعنی عدد ۶، پنج بار در خودش ضرب شده است.
در نتیجه داریم؛

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

نکته:

(۱) هر عددی که توانی بر روی آن نباشد، توانش برابر یک است. $a^1 = a$ و $2^1 = 2$

(۲) عدد یک به هر توانی برسد، حاصلش برابر یک است. $1^{12} = 1$ و $1^5 = 1$

(۳) صفر به توان هر عددی غیر از صفر برسد، همان صفر است. $0^{25} = 0$ و $0^4 = 0$

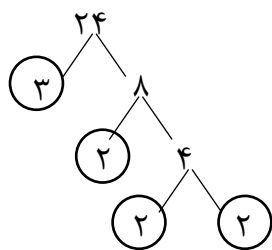
(۴) هر عددی به توان صفر برسد برابر یک است. $12^0 = 1$ و $8^0 = 1$

(۵) در عبارت های توان دار، توان برای عدد یا عبارتی است که روی آن قرار دارد. $\frac{2^7}{3} \neq \left(\frac{2}{3}\right)^7$

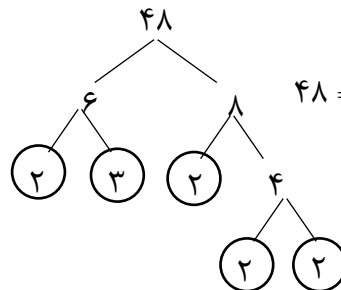
* تجزیه به صورت اعداد توان دار:

در فصل ۵ آموختیم که به کمک نمودار درختی اعداد را می توان تجزیه کرد. حال اگر بخواهیم در تجزیه، از عبارت های توان دار استفاده کنیم، کافی است شمارنده های اولی را که تکرار می شوند، به صورت توان بیان کنیم.

برای مثال در تجزیه اعداد زیر داریم؛



$$24 = 2^3 \times 3$$



$$48 = 2^4 \times 3$$

* مربع (مجذور) یک عدد: هر عدد به توان ۲ را مربع یا مجذور آن عدد می گوییم.

$$2 \xrightarrow{\text{مربع}} 2^2 = 4$$

$$a \xrightarrow{\text{مربع}} a^2$$

نکته: برای تشخیص مربع بودن یک عدد کافیست، آن را به شمارنده های اول تجزیه کنیم. اگر تمامی توان ها زوج باشند، آن عدد مربع کامل می باشد.

مثال: آیا عدد ۱۴۴ مربع کامل است؟ چرا؟

$$\Rightarrow 144 = 2^4 \times 3^2$$

پاسخ: ابتدا عدد ۱۴۴ را تجزیه می کنیم.

چون توان شمارنده های اول، ۲ و ۳ زوج هستند، پس ۱۴۴ را مربع کامل می گوییم.

* مکعب یک عدد: هر عدد به توان ۳ برسد، آن را مکعب آن عدد می گوییم.

برای تشخیص مکعب بودن یک عدد کافیست، آن را به شمارنده های اول تجزیه کنیم. اگر تمامی توان ها مضرب ۳ باشند، آن عدد را مکعب کامل می گویند.

مثال: آیا عدد ۳۴۳ مکعب کامل است؟

$$343 = 7^3$$

چون توان شمارنده ی اول ۷، مضرب ۳ است، پس عدد ۳۴۳ مکعب کامل است.

* به توان رساندن اعداد منفی:

- اگر عددی منفی به توان فرد برسد، حاصل همواره عددی منفی است.

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

- اگر عددی منفی به توان زوج برسد، حاصل همواره عددی مثبت است.

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = +81$$

نکته: اعداد $(-a)^n$ و $-a^n$ با هم فرق دارند. در حالت اول $(-a)$ را باید n بار در خودش ضرب کرد، اما در حالت دوم فقط a را باید n بار در خودش ضرب کرد.
برای مثال:

الف) $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$

ب) $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$

- : تمرینات درس اول :

۱- حاصل جمع های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $\underbrace{15 + 15 + 15 + \dots + 15}_{15 \text{ بار}} =$

ب) $3 + 3 + 3 =$

پ) $4 + 4 + 4 + 4 =$

۲- هر یک از ضرب های زیر را خلاصه کنید.

$a \times a \times a \times a \times a =$

$\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_n \text{ بار} =$

۳- حاصل عبارت ها را در هر قسمت حساب کرده و با هم مقایسه کنید.

الف) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ و $\frac{2^3}{5}$

ب) $5 + 3^2$ و $(5 + 3)^2$

۴- هر یک از عدد های زیر را تجزیه و به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

الف) $75 =$

ب) $250 =$

پ) $42 =$

ت) $425 =$

۵- حاصل را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید.

الف) 5^{a+1} ($a = 2$)

ب) 2^{5a} ($a = 1$)

پ) x^{a+3} ($x = 3$ و $a = 2$)

ت) m^{n+1} ($m = 7$ و $n = 2$)

۶- عدد 20^{11} به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟

۷- هر دسته از اعداد توان دار زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $5^2, 2^5, 4^3, 3^4$

ب) $6^2, 5^4, 2^4, 3^5$

۸- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید.

الف) $2^3 = 6$

ب) $2^6 = 36$

پ) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{3}{125}$

ت) $\frac{2^2}{5} = \frac{4}{25}$

۹- مربعی به ضلع a را در نظر بگیرید؛

الف) اگر هر ضلع مربع را دو برابر کنیم، مساحت مربع چقدر می شود؟

ب) اگر هر ضلع مربع را نصف کنیم، مساحت مربع چقدر می شود؟

درس دوم:

محاسبه عبارت توان دار

* جمع و تفریق عبارت توان دار: در جمع و تفریق اعداد توان دار کافی است اعداد را به توان ها رسانده و سپس حاصل جمع و تفریق را محاسبه می کنیم.
مثال: حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $3^2 - 4^2 = (3 \times 3) - (4 \times 4) = 9 - 16 = -7$

ب) $(-4)^2 + (-3)^2 = (-4) \times (-4) + (-3) \times (-3) = 16 + 9 = 25$

پ) $(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{3})^3 = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$

ج) $6^0 - 6^2 + (-6)^2 = 1 - (6 \times 6) + ((-6) \times (-6)) = 1 - 36 + 36 = 1$

* محاسبه عبارت های توان دار؛

در محاسبات عبارات توان دار باید ترتیب عملیات را به صورت زیر رعایت کنیم.

(۱) پرانتز (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(5 + 4)^0 = (9)^0 = 1$

ب) $(-2^2 \times 3) + 3^2 - 2 \times (-3)^2 =$
 $= (-2 \times 2 \times 3) + 3 \times 3 - 2 \times (-3) \times (-3) =$
 $-12 + 9 - 18 = -21$

پ) $\frac{-(-2)^3}{-3^2} - \frac{(-4)^2}{(-3)^2} = \frac{-(-2) \times (-2) \times (-2)}{-(3 \times 3)} - \frac{(-4) \times (-4)}{(-3) \times (-3)} = \frac{8}{9} - \frac{16}{9} = \frac{8-16}{9} = \frac{-8}{9} = -\frac{8}{9}$

*مقایسه اعداد توان دار:

نکات زیر را در مقایسه اعداد توان دار استفاده می کنیم:

(۱) در عدد توان دار a^n اگر $a > 1$ باشد، هر چقدر n بزرگتر شود، مقدار عددی a^n نیز بزرگ تر می شود.

(۲) در عدد توان دار a^n اگر a بین صفر و یک باشد، هر چقدر n بزرگتر شود، مقدار عددی a^n کوچکتر می شود.

(۳) در اعداد منفی با توان فرد اگر $a < -1$ باشد هر چه توان افزایش پیدا کند، مقدار عددی a^n نیز کوچکتر می شود.

(۴) در اعداد منفی با توان فرد اگر a بین صفر و یک باشد هر چه n افزایش پیدا کند، مقدار عددی a^n نیز بزرگتر می شود.

مثال: در مقایسه اعداد زیر داریم:

$$۱۰۱ > ۱۰۱۰$$

$$۱۰^۵ > ۵۰$$

$$۱۰۰ > ۰/۱۰۰$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(0/8)^7 > (0/8)^8$$

$$(-3)^5 > (-3)^7$$

$$-2^{20} < (-2)^{20}$$

$$(-0/5)^4 > (-0/5)^7$$

- : تمرینات درس دوم :-

۱- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $2^4 + 3^4 =$

ب) $2^3 \times 3^2 =$

پ) $2^5 - 3^3 =$

ت) $2^5 \div 2^3 =$

ث) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

ج) $\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 =$

ح) $\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} =$

۲- کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است؟

الف) $(38 \div 4) = 4 + 38$

ب) $\left(3 \frac{1}{4}\right)^0 > \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

پ) $\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^0 > 1$

ت) $4 + 3^0 = 7$

ث) $2^0 + 3^0 + 5^0 = 10$

ج) $24 < (-2)^3$

چ) $(3 \times 2)^2 = 3^2 \times 2^2$

ح) $\left(\frac{13}{21}\right)^2 = \frac{26}{441}$

۳- هر یک از عبارت های زیر را با هم مقایسه کنید.

الف) $-2^3 \square (-2)^3$

ت) $(-1)^{40} \square (-1)^{55}$

ب) $(-3)^4 \square (-3)^5$

ث) $(0/5)^3 \square (0/5)^7$

پ) $(\frac{1}{6})^{14} \square (\frac{1}{6})^{15}$

ج) $-2^{20} \square (-2)^{10}$

۴- کدام یک از اعداد زیر مربع کامل می باشد؟

الف) ۱۲۵

ب) ۱۴۴

پ) ۱۹۶

ت) ۴۸۴

ث) ۱۲۲۵

ج) ۶۷۵

۵- با توجه به ترتیب عملیات، محاسبات زیر را انجام دهید.

الف) $2 \times 3^2 - (2^2 + 2) =$

ب) $4^2 \times 2^3 \div 2^4 - 2^3 =$

پ) $\frac{2^3 \cdot 10 + 4 \times}{9^2 - 5^2} =$

ت) $\frac{4 \times 9 + 6 - 8 (\div 10)}{2^5 + 3^5} =$

۶- هر یک از اعداد زیر را به صورت گسترده و سپس به صورت توانی نمایش دهید.

الف) ۸۹۵

ب) ۱۲۳۵

پ) ۴۲۰۵۷

۷- حاصل عبارت ها را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

الف) $a^2 + 2ab + b^2$

$a = 3, b = 6$

ب) $a^5 - 2b^3 + a^2 b$

$a = -3, b = 6$

ساده کردن عبارت های توان دار

درس سوم:

* ضرب اعداد توان دار: سه حالت زیر را در ضرب اعداد توان دار بررسی می کنیم:

(۱) پایه ها با هم برابر باشند:

در ضرب اعداد توان دار با پایه های برابر، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_m \times \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^{m+n}$$

برای مثال داریم:

$$\rightarrow 5^7 \times 5^9 = 5^{9+7} = 5^{16}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+5+6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$$

$$\rightarrow a^b \times a^c \times a^{b+c} = a^{b+c+b+c} = a^{2b+2c}$$

$$\rightarrow (a+b)(a+b)^9 = (a+b)^{10}$$

(۲) توان ها با هم برابر باشند: در ضرب اعداد توان دار با توان های برابر، پایه ها را در هم ضرب و یکی از توان ها را در حاصل قرار می دهیم.

$$a^m \times b^m = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_m \times \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_m = \underbrace{(ab) \times (ab) \times \dots \times (ab)}_m = (ab)^m$$

برای مثال داریم:

$$\rightarrow 6^5 \times 3^5 = (6 \times 3)^5 = 18^5$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^9 \times \left(\frac{6}{5}\right)^9 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{6}{5}\right)^9 = \left(\frac{1}{5}\right)^9$$

$$\rightarrow a^b \times b^b \times c^b = (a \times b \times c)^b = (abc)^b$$

$$\rightarrow 2^{14} \times a^{14} \times (3b)^{14} = (2 \times a \times 3b)^{14} = (6ab)^{14}$$

$$\rightarrow \left(\frac{0}{2}\right)^9 \times (-2)^9 \times 3^9 = \left(\frac{0}{2} \times (-2) \times 3\right)^9 = (-1/2)^9$$

(۳) پایه ها و توان ها با هم برابر باشند:

در ضرب اعداد توان دار با پایه ها و توان های برابر، از یکی از دو حالت (۱) و (۲) که قبل به آن اشاره شد استفاده می کنیم. برای مثال:

$$\rightarrow 2^8 \times 2^8 = 2^{16} \text{ یا } 4^8$$

$$\rightarrow 5^4 \times 5^4 = 5^8 \text{ یا } 25^4$$

نکته: توان رساندن اعداد توان دار: اگر عددی توان دار درون پرانتز باشد و به توانی دیگر برسد، کافی است پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب کنیم.

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

برای مثال:

$$\rightarrow (2^3)^5 = 2^{15}$$

$$\rightarrow (4^3)^7 = 4^{21}$$

$$\rightarrow (2^8)^6 \times (2^0)^{25} = 2^{48} \times 2^0 = 2^{48}$$

$$\rightarrow 9^4 \times 27^3 = (3^2)^4 \times (3^3)^3 = 3^8 \times 3^9 = 3^{17}$$

$$\rightarrow 25^3 \times 125^4 \times (5^5)^2 = (5^2)^3 \times (5^3)^4 \times (5^5)^2 = 5^6 \times 5^{12} \times 5^{10} = 5^{28}$$

* تقسیم اعداد توان دار: سه حالت زیر را در تقسیم اعداد توان دار بررسی می کنیم:

(۱) پایه ها با هم برابر باشند.

در این حالت یکی از پایه ها را نوشته و توان اولی را از توان دومی کم می نمائیم.

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

برای مثال داریم:

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^9 \div \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{9-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\rightarrow 7^4 \div 7^2 = 7^{4-2} = 7^2$$

(۲) توان ها مساوی باشند:

در این حالت یکی از توان ها را نوشته و پایه اول را بر پایه دومی تقسیم کرده و به عنوان پایه جواب می

نویسیم.

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

برای مثال داریم:

$$\rightarrow 5^4 \left(\frac{5}{3}\right)^4 \div 3^4 =$$

$$\rightarrow 5^4 = 4^5 \left(\frac{5}{3}\right)^4 \div 1 \cdot 5 =$$

(۳) پایه ها و توان ها با هم برابر باشند:

در این حالت که هم پایه و هم توان ها با هم برابر می باشند می توان از یکی از دو حالت (۱) و (۲) که در

قبل به اشاره شده است استفاده کرد.

برای مثال:

$$3^5 \div 3^5 = \left(\frac{3}{3}\right)^5 = 1^5 = 1$$

روش اول:

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 = 1$$

روش دوم:

*** برخی از کاربردهای تجزیه در توان:**

(۱) تعیین «ب.م.م.» و «ک.م.م.» دو عدد به کمک تجزیه.
مثال: «ب.م.م.» و «ک.م.م.» اعداد ۳۶۰ و ۸۴ را به دست آورید.
پاسخ: ابتدا دو عدد را تجزیه می کنیم:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

← برای بدست آوردن ب.م.م.، حاصل ضرب عامل های اول مشترک با کمترین توان موجود را محاسبه می کنیم:

$$(360 \text{ و } 84) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

← برای به دست آوردن ک.م.م.، حاصل ضرب عامل های اول مشترک با بیشترین توان موجود در همه عامل های اول غیر مشترک را به دست می آوریم.

$$[360, 84] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520$$

(۲) تعیین تعداد شمارنده های یک عدد

ابتدا عدد را تجزیه می کنیم

$$A = a^m \times b^n \times c^t \times \dots$$

سپس به توان های عامل های اول یک واحد اضافه نموده و در هم ضرب می نماییم:

$$A \text{ تعداد شمارنده های عدد } = P = (m+1) \times (n+1) \times (t+1) \times \dots$$

مثال: تعداد شمارنده های عدد ۸۰۰ را به دست آورید:

$$800 = 2^5 \times 5^3 \rightarrow P = (5+1)(3+1) = 6 \times 4 = 24$$

-: تمرینات درس سوم :-

۱- حاصل عبارت $2^{10} + 2^{10}$ را بدست آورید؟

۲- حاصل عبارت $5^2 \times 5^2$ را بدست آورید؟

۳- سه برابر عدد $5^4 \times 3^3$ را بدست آورید؟

۴- در هر قسمت به جای a چه عددی می توان قرار داد؟

الف) $2^8 + 2^8 = 2^a$
ب) $3^a + 3^a + 3^a = 3^{10}$
پ) $3^8 \times 3^a = 3^{13}$
ت) $2/0 \cdot (1/5)^3 = a^{10}$

۵- با توجه به خاصیت ضرب عددهای توان دار جاهای خالی را پر کنید.
الف) ۵ برابر 5^{38} می شود
ب) ۴ برابر 4^{28} می شود

۶- حاصل را به صورت توان دار بنویسید.
الف) $a^y \times a^x \times a =$
ب) $y^3 \times a^y \times y^y \times a^3 =$
پ) $z^{12} \times z^{18} =$
ت) $a^{12} \times b^{11} \times a \times b^2 =$

۷- حاصل را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $5^3 \times 5^4 \times 2^y =$
ب) $7^3 \times 7^2 \times 9^5 =$
پ) $2^2 \times 6^y \times 3^5 =$
ت) $2^4 \times 6^4 \times 3^5 \times 4^5 =$
ث) $(2^5 \times 3^2) \times (3^4 \times 2) =$
ج) $3^a + 3^a + 3^a =$

۸- حاصل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $3^a \times 3^b =$
ب) $3^a \times 2^a =$
پ) $(\frac{y}{x})^{a+b} \times (\frac{x}{y})^{a+b} =$
ت) $a^m \times a^n =$
ث) $a^m \times b^m =$
ج) $2^{a+b} \times 2^{a-b} =$

۹- عددهای توان دار را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$8^2, 2^6, 12^0, 2^4, 4^5$

۱۰- مقدار مجهول را در هر یک از تساوی های زیر به دست آورید .

الف) $2^x = 128$

ب) $3^{2x} = 729$

پ) $2^{x+3} = 64$

ت) $5^{a+1} = 5^2 \times 5^6$

۱۱- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $2^3 \times 5^7 \times 2^6 \times 5^2 =$

ب) $5^4 \times 2^3 \times 5^7 \times 2^8 =$

پ) $2^7 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 5^3 =$

ت) $10^7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 =$

ج) $6^7 \times 4^{11} \times 6^4 =$

چ) $3^2 \times 3^4 \times 15^6 =$

ح) $5 \times 3^2 \times 2^5 \times 5^6 \times 3^5 \times 2^2 =$

خ) $28 \times 7^6 \times 2^5 =$

د) $24 \times 36 \times 2 \times 27 =$

ذ) $4^7 \times 5^7 \times 2^3 \times 10^3 =$

موفق باشید عزیزانم - باقریان

