به نام او

پاسخ آزمون شبه مرحله دویی نخست شازززز

۱۲ بهمن ۱۳۹۵

شام آخر .... ۲۵ امتیاز

قضیه ۱: هر گراف جهت‌دار که درجه ورودی هر راس برابر با درجه خروجی آن باشد و گراف زمینه همبند باشد، گذر بسته‌ای شامل همه یال ها دارد.

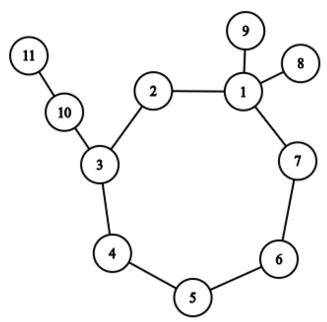
اگر یک گراف جهت‌دار ۲۲ راسی بسازیم که درجه خروجی و ورودی هر راس آن دقیقا ۱۷ باشد و حداکثر یک یال جهت دار بین دو راس داشته باشیم (یال تکراری نداشته باشیم)، طبق قضیه ۱ اگر گذر را در نظر بگیریم و اندیس راس ها را به ترتیب گذر دور دایره بنویسیم، ترتیب افراد دور میز را مشخص می‌کند چون هر نفر به نفر بعدی اش یال دارد و یال تکراری نداریم و هر راس دقیقا ۱۷ بار دیده می‌شود.

برای ساختن گراف جهت دار گفته شده، ابتدا گراف ساده ۲۲ راسی می‌سازیم که درجه هر راس آن دقیقا ۸ باشد.کافی است ۲۲ راس دور دایره بچینیم و همسایه های هر راس اولین ۴ راس در جهت ساعت گرد و پاد ساعتگرد باشند. گراف جهت داری از روی این گراف به این صورت می‌سازیم که به جای هر یال (u-v)، دو یال (u->v) و (v->u) قرار می‌دهیم و همچنین برای هر راس یک طوقه (u->u) می‌گذاریم. گراف زمینه این گراف همبند است و درجه خروجی و ورودی هر راس دقیقا ۱۷ است. پس شرایط برقرار است و حکم مسئله ثابت می‌شود.

اصلاحات دولاند .... ۲۵ امتیاز

مدل مسئله در نظریه گراف: ثابت کنید راس‌های یک گراف زوج راسی همبند را می‌توان به تعدادی دسته حداقل دو راسی افراز کرد که زیر گراف القایی هر دسته درخت باشد.

یک درخت فراگیر از گراف را در نظر می‌گیریم (چون گراف همبند است وجود دارد). یال‌های گراف را به جز آن پاک می‌کنیم و یال‌هایی که پاک کردیم را یکی یکی اضافه می‌کنیم و دسته‌بندی ها را بروز می‌کنیم به طوری که هر دسته یک درخت زوج راسی باقی بماند. در ابتدا گراف درخت زوج راسی است پس کل آن را به عنوان یک مولفه می‌گیریم. هر یال که اضافه می‌شود دو حالت داریم:



- دو سر آن از مولفه های مختلف باشند که مولفه بندی که داشتیم درست باقی می‌ماند. چون یال دو درخت را به هم وصل می‌کند و درخت جدید زوج راسی می‌شود.
- دو سر یال برای یک مولفه باشند. در این حالت باید مسئله را برای گرافی که یک درخت است با یک یال اضافه حل کنیم.

  در این حالت درخت را در نظر می‌گیریم یال جدید یک دور ایجاد می‌کند. از هر کدام از این راس های دور زیر درختی آویزان است. اگر اندازه یکی از آنها زوج بود افراز به شکل **زیر درخت زوج** و **بقیه گراف** خواهد بود. اگر اندازه همه زیردرخت ها فرد است و افراز به شکل **دو زیر درخت مجاور در دور** و **بقیه گراف** خواهد بود. مشخص است که پس از این کار هر مولفه درخت زوج راسی خواهد بود (دور دو تکه شده است).

تیفانی .... ۲۵ امتیاز

صورت قوی‌تری از مسئله (فرض استقرا) : اگر تعداد دل‌خواهی ماشین داشته باشیم که در باک آن‌ها اندازه n کیلومتر بنزین وجود داشته‌باشد؛ بیش‌ترین فاصله‌ای که می‌توان به آن رسید $\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ خواهدبود.

اثبات به استقرای ریاضی روی n:

پایه: به ازای $n = ۱$ اگر همه بنزین‌ها را در یک کامیون بریزیم و جلو برویم می‌توانیم $\frac{۱}{۱}$ برویم. و با بنزین مناسب برای یک کیلومتر، بیشتر از یک کیلومتر نمی‌توان رفت. پس فرض استقرا برقرار است.

گام: فرض می‌کنیم فرض استقرا به ازای $n = k - ۱$ برقرار باشد؛ به ازای $n = k$:

- اندازه k کیلومتر بنزین داریم، پس حداقل k ماشین داریم (اگر کمتر باشد این مقدار بنزین در باک‌ها جا نمی‌شود). این k کیلومتر بنزین را در k ماشین می‌ریزیم سپس این k ماشین را اندازه $\frac{۱}{k}$ کیلومتر جلو می‌بریم. در این نقطه $k \times \frac{۱}{k}$ کیلومتر بنزین سوزانده ایم پس $k - ۱$ کیلومتر بنزین باقی مانده‌است که طبق فرض استقرای ریاضی می‌توان $\frac{۱}{k-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ کیلومتر دیگر جلو رفت؛ پس می‌توان به فاصله $\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ رسید.

- اگر فاصله $\frac{۱}{k}$ ام را در نظر بگیریم. از این نقطه بیشتر از $k - ۱$ کیلومتر بنزین رد نمی‌شود. دو حالت وجود دارد:

  - اگر بیشتر یا مساوی k ماشین رد شود، هر یک $\frac{۱}{k}$ بنزین سوزانده اند پس حداقل یک کیلومتر بنزین سوخته است و حداکثر $k - ۱$ کیلومتر بنزین باقی می‌ماند.
  - اگر کمتر از k ماشین نیز رد شود حداکثر $k - ۱$ ماشین رد شده است که در باک آن‌ها بیش‌تر از $k - ۱$ کیلومتر بنزین جا نمی‌شود.

و با حداکثر این مقدار بنزین طبق فرض استقرا نمی‌توان بیش‌تر از $\frac{۱}{k-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ دیگر جلو رفت پس در مجموع نمی‌توان بیش‌تر از $\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ جلو رفت.

یک روش ارائه شد که به نقطه $\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k-۱} + ... + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱}$ می‌رسید و ثابت شد که از این میزان جلوتر نیز نمی‌توان رفت پس فرض استقرا برای $n = k$ برقرار است.

بازی کارِسَری .... ۲۵ امتیاز

نمی‌توان به جدول همه سفید رسید.

برهان خلف: فرض کنیم بتوان به جدول همه سفید رسید.

دو خانه مجاور را در نظر بگیرید. در ابتدا در یکی از آن‌دو مهره گذاشته می‌شود سپس خانه دیگر مهره خانه اول را برعکس می‌کند یعنی دقیقا به تعداد زوج خانه های مجاور مهره ها برعکس می‌شوند پس در کل ۲۱۰ بار مهره ها برعکس می‌شوند. یعنی باید جدولی با ۶۳ خانه سفید و یک خانه سیاه با زوج بار تغییر رنگ یک خانه، همه خانه ها سفید شوند که غیر ممکن است. پس فرض خلف باطل است و نمی‌توان به جدول همه سفید رسید.

نه دامیست

نه زنجیر

همه بسته چراییم؟

موفق باشید