معادلات دیفرانسیل – آزمون حل تمرین

سه شنبه ۹۵/۸/۲۵

۱)معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید . (۸ نمره)

$A)\quad y(1 - y\,Lnx)dx - xdy = 0$

$B)\quad y\acute{y}\,cosx = sinx(cosx - y^2)$

$C)\quad x\acute{y} = e^{xy} - y$

۲)مسیرهای قائم بر دسته منحنی زیر را بیابید . (۲ نمره)

$$y = \frac{c}{1 + cx}$$

سه‌شنبه ۲۵، ۸، ۹۵ — پاسخ آزمون TA

1/A)

این معادله با ۳ روش قابل حل بود:
۱) برنولی
۲) عامل (تابع برحسب y به عنوان عامل)
۳) عامل ($x^\alpha y^\beta$ به عنوان عامل)

برنولی — روش اول:

$$y' = \frac{y - y^2 \ln x}{x} \rightarrow y' - \frac{1}{x} y = -\frac{\ln x}{x} y^2 \quad \text{مزاحم}$$

$$\begin{cases} u = y^{-1} \\ u' = -y' y^{-2} \end{cases} \xrightarrow{\times -y^{-2}} -y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$$u' + \frac{1}{x} u = \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\text{خطی}} \text{عامل} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\xrightarrow{\times x} x u' + u = \ln x \;\; \rightarrow (xu)' = \ln x \xrightarrow{\int} \boxed{xu = x\ln x - x + c}$$

$$\xrightarrow{u = y^{-1}} \boxed{\frac{x}{y} = x \ln x - x + c}$$

عامل برحسب y — روش دوم:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2y \ln x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 - 2y \ln x$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \times \frac{-1}{M} = \frac{2(\cancel{1 - y\ln x})}{-y(\cancel{1 - 2y \ln x})} = \frac{-2}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{عامل}} e^{\int -\frac{2}{y}} = e^{-2 \ln y} = \boxed{y^{-2}} \;\text{عامل}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب عامل}} y^{-1}(1 - y \ln x) - x y^{-2} dy = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -y^{-2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -y^{-2} \end{cases} \;\; \text{کامل}$$

$$C = \int M dx + \int^{*} N dy \rightarrow C = \int y^{-1}(1 - y \ln x)$$

$$\boxed{C = \frac{x}{y} - (x \ln x - x)}$$

$x^\alpha y^\beta$ عامل $\xrightarrow[\text{روش سوم}]{}$ $x^{\alpha}y^{1+\beta}(1-y\ln x)\,dx - x^{1+\alpha}y^{\beta}\,dy=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=(1+\beta)x^{\alpha}y^{\beta}-(2+\beta)x^{\alpha}\ln x\, y^{\beta+1}\\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x}=-(1+\alpha)x^{\alpha}y^{\beta}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\beta=-2\\ \alpha=0\end{cases}$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}=x^{0}y^{-2}=\boxed{y^{-2}}=\text{عامل}$$

با ضرب عامل مشتق روش قبل حل می شود ✓

$\frac{1}{13}$) این معادله هم به ۲ روش قابل حل بود
۱) برنولی
۲) عامل (تابع y)

$\xrightarrow[\text{روش اول}]{\text{برنولی}}$ $y'=\dfrac{\sin x}{y\cos x}(\cos x-y^2)=\dfrac{\sin x}{y}-\operatorname{tg}x\, y$

$\rightarrow y'+\operatorname{tg}x\, y=\sin x\, y^{-1}$ فرض $\begin{cases}u=y^2\\ u'=2yy'\end{cases}$

$\xrightarrow{\times 2y}$ $2yy'+2\operatorname{tg}x\, y^2=2\sin x$

$u'+2\operatorname{tg}x\, u=2\sin x \xrightarrow[\text{عامل}]{\text{فقط}} e^{\int 2\operatorname{tg}x}=e^{-2\ln\cos x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\xrightarrow{\times\frac{1}{\cos^2 x}}$ $\dfrac{u'}{\cos^2 x}+\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}\rightarrow\left(\dfrac{u}{\cos^2 x}\right)'=\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}\xrightarrow{\int}$

$\dfrac{u}{\cos^2 x}=\dfrac{2}{\cos x}+C \xrightarrow{u=y^2} \boxed{\dfrac{y^2}{\cos^2 x}=\dfrac{2}{\cos x}+C}$

$$\underbrace{\sin x\,(y^2-\cos x)}_{M}\,dx+\underbrace{y\cos x}_{N}\,dy=0$$

$\xrightarrow{\text{ناقص}}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y\sin x\\[2mm] \dfrac{\partial N}{\partial x}=-y\sin x\end{cases}$

روش دوم

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3y\sin x \rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\times\frac{1}{N}=\frac{3y\sin x}{y\cos x}=3\,\mathrm{tg}\,x$$

$$\xrightarrow{\text{عامل}} e^{\int 3\,\mathrm{tg}\,x}=e^{-3\ln\cos x}=\frac{1}{\cos^3 x}$$

$$\xrightarrow{\times\text{عامل}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}(y^2-\cos x)\,dx+\frac{y}{\cos^2 x}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2y\,\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x}=2y\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ کامل

$$\rightarrow C=\int M\,dx+\int^{*} N\,dy \rightarrow C=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}(y^2-\cos x)$$

$$\boxed{C=\frac{y^2}{2\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}}$$

$\frac{1}{c}$) $xy' + y = e^{xy}$ $\quad \begin{cases} xy = u \\ y + xy' = u' \end{cases}$

$$u' = e^{u} \longrightarrow e^{-u}du = dx \xrightarrow{\int} -e^{-u} = x + c$$

$$\boxed{-e^{-xy} = x + c}$$

---

۲) $y + ycx = c \xrightarrow{\text{مشتق}} y' + cxy' + cy = 0$

$$y'(1+cx) = -cy \rightarrow (1+cx) = -\frac{cy}{y'} \ *$$

$\rightarrow y(1+cx) = c$

$$\xrightarrow{*} y\left(-\frac{\cancel{c}y}{y'}\right) = \cancel{c} \longrightarrow -\frac{y^2}{y'} = 1$$

$\xrightarrow{\text{مسیر قائم}}$ $\quad y'y^2 = 1 \longrightarrow y^2dy = dx \longrightarrow \boxed{\frac{y^3}{3} = x + c}$

$y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$