

به نام خدا



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد نجف آباد

جزوه درس پردازش سیگنال‌های دیجیتال (DSP)

مدرس: دکتر سعید نصری

نیمسال دوم سال تحصیلی 1394-1395

پردازش سیگنال دیجیتال (DSP):

مرجع اصلی:

- A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, 3rd ed., 2010.

ترجمه شده:

پردازش سیگنال گسسته در زمان، نویسنده: آلن وی. اپنهایم و رانلد دبلیو. شیفتر، ویرایش سوم، مترجم: محمود دیانی، دو جلد، انتشارات مؤسسه علمی و فرهنگی نص.

سایر مراجع :

- [1] V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital signal processing using MATLAB*, CENGAGE Learning, 3rd ed. 2012.
- [2] S. K. Mitra, *Digital signal processing, a computer-based approach*, McGraw-Hill, 2001.
- [3] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *An introduction to digital signal processing*, Macmillan publishing, 1988.

فهرست مطالب:

مقدمه

فصل 1: سیگنالها و سیستمهای گسسته در زمان

فصل 2: تبدیل فوریه زمان گسسته DTFT

فصل 3: تبدیل Z و خواص آن

فصل 4: نمونه برداری از سیگنالهای پیوسته در زمان (با استفاده از قضیه نایکوئیست)

فصل 5: تحلیل تبدیلی سیستمهای LTI

فصل 6: ساختارهای سیستمهای گسسته در زمان

فصل 7: طراحی فیلترهای دیجیتال (فیلترهای FIR – IIR)

فصل 8: سری فوریه گسسته DFS، تبدیل فوریه گسسته DFT

فصل 9: محاسبه تبدیل فوریه گسسته، الگوریتمهای FFT

مقدمه:

این درس در ادامه‌ی درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها یا تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها می‌باشد. اما تفاوت این است که در این جا، تأکید بر سیگنال‌های دیجیتال است. ولی در درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، تأکید بر سیگنال‌های آنالوگ می‌باشد. این درس در کلیه‌ی گرایش‌های رشته‌ی برق و کامپیوتر، به ویژه گرایش مخابرات، دارای کاربردهای بسیار زیادی است.

تئوری پردازش سیگنال‌های دیجیتال توسط علوم دیگر از قبیل علوم و مهندسی کامپیوتر و نیز تراشه‌های VLSI تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در زندگی امروزی، رد پای DSP در صنایع پیشرفته‌ی نظامی، مخابراتی، پزشکی و حتی منازل افراد عادی دیده می‌شود. این طیف وسیع شامل تلویزیون، رادیو ضبط‌های مدرن، هواپیماهای نظامی و غیر نظامی، سیستم‌های پدافند مهم و غیره می‌شود. بدون شک امروزه، هر فرد عادی به تلفن‌های همراه دسترسی دارد که در آن‌ها از DSP استفاده شده است. برای دریافت یا ارسال سیگنال و تصویر در کنار اطلاعات از طریق اینترنت، بایستی از DSP بهره برد. دستگاه‌های مدرن پزشکی هم چون CT scan، رادیولوژی و MRI نیز از این علم استفاده می‌کنند. در بخش صنعت هم کارخانه‌های امروزی از استفاده از DSP بی بهره نمانده‌اند. در پردازش سیگنال‌های دیجیتال، بایستی بتوان سیگنال‌های ناخواسته را که در طول زمان فراگیری بر روی سیگنال مطلوب اضافه شده‌اند، حذف کرد. برای کار بایستی با مفهوم فیلتر نمودن سیگنال‌ها نیز آشنا شد. لذا، در این درس، با یک مرور سریع از درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها، با استفاده از تکنیک‌های مرسوم برای پردازش سیگنال‌های آنالوگ، نحوه‌ی تبدیل آن‌ها به دیجیتال مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین، طراحی فیلترهای دیجیتال نیز، به طور کامل ارائه خواهد گردید.

فصل 1:

سیگنالها و سیستمهای گسسته در زمان

تعریف سیگنال: تابعی که حاوی اطلاعات باشد را سیگنال می نامند و اطلاعات، چیزی است که گیرنده علاقمند به دریافت آن می باشد. سیگنال می تواند تابعی از یک یا چند متغیر مستقل باشد که با تغییر هر کدام، اطلاعات عوض می شود. زمان یکی از متغیرها است. مثلاً چون درجه حرارت محیط با زمان تغییر می کند، پس متغیر مستقل، زمان می باشد. البته متغیر مستقل می تواند مکان نیز باشد. برای مثال در تصویر، متغیر مستقل، مکان است. از این به بعد ممکن است به جای لفظ متغیر مستقل، از اصطلاح زمان استفاده کنیم که ضرورتاً ممکن است زمان نباشد. همچنین، متغیرهای مستقل می توانند یک بعدی مانند سیگنال گفتار که متغیر مستقل آن زمان می باشد و یا دو بعدی مثل تصویر که متغیر مستقل آن مکان می باشد و به صورت یک ماتریس که سطر و ستون دارد، نمایش داده شود. ولی تأکید ما در این درس بر روی متغیرهای یک بعدی است. زمان یا متغیر مستقل، می تواند هم به صورت زمان پیوسته¹ و هم به صورت زمان گسسته² تغییر کند که در این درس، تأکید بر حالت زمان گسسته می باشد. البته گسستگی زمان به معنای آن نیست که حتماً عدد صحیحی باشد؛ مثلاً می تواند به جای یک واحد اضافه شدن، 0.1 اضافه شود تا دقت آن بالاتر باشد. مثلاً 1.7 ثانیه و 1.8 ثانیه نیز گسسته اند ولی برای سادگی، اعداد کسری را به اعداد صحیح نگاشت می کنیم. قرارداد می کنیم که این زمانها را با عدد صحیح نمایش دهیم. مثلاً زمان 1 یا زمان 2:

$$t_n \triangleq n \quad x[t_n] \rightarrow x[n]$$

$$x[1.7 \text{ ثانیه}] = x[1], \quad x[1.8 \text{ ثانیه}] = x[2]$$

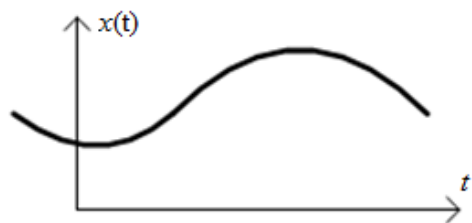
¹ Continuous time² Discontinuous time

در این درس، از علامت پرانتز برای سیگنالهای زمان پیوسته و از علامت کروشه برای سیگنالهای زمان گسسته استفاده می‌کنیم.

دنباله‌ها یا سیگنالهای زمان گسسته چگونه به وجود می‌آیند؟ معمولاً از لفظ دنباله یا رشته^۳ برای این گونه از سیگنالها استفاده می‌شود. یکی از راههای به دست آوردن دنباله‌ها یا سیگنالهای زمان گسسته، نمونه برداری می‌باشد. در واقع نمونه برداری با پریود ثابت $t_n = nT_0$ می‌باشد که به ازای n های صحیح، هر T_0 ثانیه، یک نمونه به دست می‌آید و این نمونه‌ها به دنبال هم، $x[n]$ را تشکیل می‌دهند.

دامنه یک سیگنال می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. بنابراین چهار حالت به وجود می‌آید که دو مورد از آنها، از اهمیت بیشتری برخوردار است. در ادامه، این چهار حالت را معرفی می‌نماییم:

1- سیگنال زمان پیوسته (آنالوگ): سیگنالی است که دامنه و زمان، هر دو پیوسته می‌باشد.



2- سیگنال زمان گسسته: سیگنالی است با دامنه‌ی پیوسته و زمان گسسته که در ادامه، آن را به دو دسته افراز خواهیم نمود.

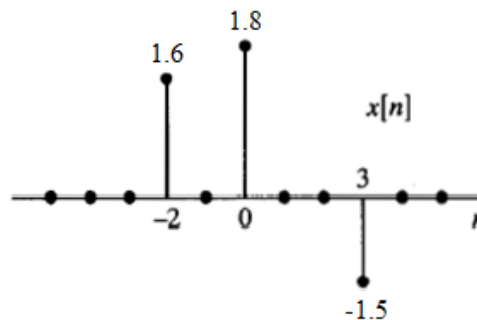
$$x[-2] = 1.6$$

$$x[0] = 1.8$$

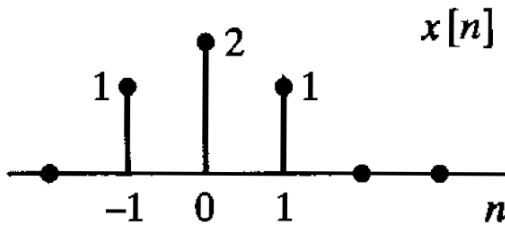
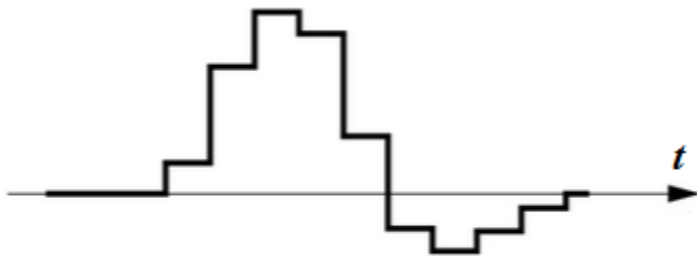
$$x[1.7] = \text{نشده تعریف}$$

$$x[3] = -1.5$$

$$x[n] = 0 \quad n \geq 3, \quad x[n] = 0 \quad n \leq -2$$



³ Sequence

3- سیگنال دیجیتال: سیگنالی که دامنه و زمان، هر دو گسسته می‌باشند.**4- سیگنالی که زمان پیوسته و دامنه گسسته است؛ مثل موج پله‌ای که دامنه‌ی آن گسسته ولی در زمان پیوسته است.**

در حال حاضر، بر روی سیگنال‌های زمان گسسته یعنی نوع دوم بحث می‌کنیم که در نهایت منجر به سیگنال‌های دیجیتال می‌شود.

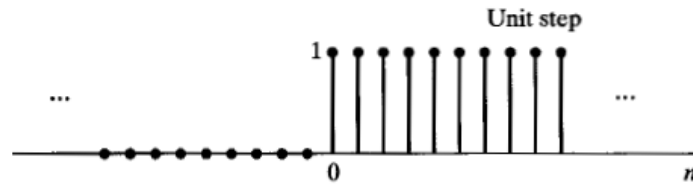
پردازش سیگنال (Signal Processing):

عملیاتی مانند مدولاسیون، تقویت کردن، فیلترهای پیش تأکید و جبران تأکید و غیره، همگی مثال‌هایی از پردازش سیگنال می‌باشند که در سیستم‌های مخابراتی، امری اجتناب ناپذیر است. به عبارت دیگر، پردازش سیگنال، عملیاتی است که در آن بتوان سیگنال را به صورت مفید یا قابل ردیابی کردن و قابل استفاده نمودن برای یک کاربرد خاص در آورد. مثلاً در سیستم‌های مخابراتی، کاربرد آن برای ارسال و دریافت پیام‌ها می‌باشد. گروه مهمی از سیگنال‌های گسسته، سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان یا LTI می‌باشد.

معرفی دنباله‌های مهم:**1- دنباله پله واحد⁴:**

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

⁴ Unit Step Sequence



2- دنباله نمونه واحد یا ضربه واحد^۵:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$



ارتباط پله واحد و ضربه واحد:

در زمان پیوسته قبلاً دیده ایم که این ارتباط بصورت زیر است:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

تفاوت با حالت آنالوگ در این است که قبلاً مشتق و یا انتگرال می گرفتیم اما در اینجا، از تفاضل و جمع استفاده می‌نمائیم:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad \Leftrightarrow \quad \text{با تغییر متغیر} \quad u[n] = \sum_{k'=-\infty}^0 \delta[n - k']$$

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$$

در این جا n وارد آرگومان شده است.

⁵ Until Sample Sequence

3- دنباله نمایی حقیقی:

$$x[n] = a^n$$

a یک عدد حقیقی است.

4- دنباله سینوسی⁶:

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

در اینجا دیگر مثل سیگنالهای پیوسته، یک سیگنال سینوسی، همواره متناوب نخواهد بود. در سیگنال سینوسی پیوسته دیدیم که سیگنال، همواره متناوب با دوره تناوب $\frac{2\pi}{\omega_0}$ می باشد. اما در این جا، ضرورتاً همیشه متناوب نخواهد بود:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 n + \phi), \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

دنباله متناوب: دنباله $x[n]$ را متناوب با دوره تناوب N می نامیم هرگاه:

$$x[n] = x[n + N] \quad \forall N$$

حداقل N را دوره تناوب اصلی گوئیم و N باید یک عدد صحیح باشد. زیرا آرگومانها باید عدد صحیح باشند. به همین دلیل، بعضی از سیگنالهای گسسته متناوب نیستند زیرا $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ بوده و معلوم نیست که N عدد صحیحی باشد:

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0(n + N) + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

$$\omega_0 N = k_0 2\pi, \quad \rightarrow N = \frac{2k_0 \pi}{\omega_0} \quad \text{دوره تناوب اصلی} \rightarrow k = 1, \quad N = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

بنابراین باید k طوری تعیین شود که N عددی صحیح گردد که در بعضی از روابط ممکن است این طور نشود. مثلاً وقتی که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ یک عدد گویا نباشد (اصم یا گنگ باشد).

مثال:

$$\omega_0 = 1, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} \leftarrow \text{عدد گنگ}$$

⁶ Sinusoid Sequence

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{7} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7 \leftarrow \text{عدد صحیح}$$

پس شرط لازم و کافی برای آن که یک دنباله سینوسی متناوب باشد آن است که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ، یک عدد صحیح یا کسری گویا باشد.

نکته: اولین تفاوت دنباله‌های سینوسی پیوسته و گسسته، متناوب بودن است. دومین تفاوت این است که در سیگنالهای پیوسته مانند $\cos \omega_0$ ، با افزایش ω_0 ، T کاهش می‌یابد. یعنی اگر دوره تناوب کم شود فرکانس افزایش می‌یابد. اما در گسسته چنین نیست. اگر دنباله‌ای گسسته‌ای متناوب باشد، دوره تناوب آن 2π است و اگر ω_0 به اندازه 2π افزایش یابد، دوباره به همان سیگنال قبلی می‌رسیم. در حالت پیوسته، با افزایش ω_0 ، سیگنال فشرده می‌شود اما در این جا به علت این که N یک عدد صحیح است، سیگنال تکرار می‌شود. اما در اینجا تا مقدار π سیگنال افزایش می‌یابد اما از π به بعد، دوباره کاهش می‌یابد. در پیوسته دیدیم که مثلاً در سیگنال $x(t) = \cos \omega_0 t$ اگر ω_0 افزایش یابد، آنگاه T کاهش می‌یابد. بنابراین، تفاوتی بین نوسان و پریود نمی‌باشد. ولی آیا در زمان گسسته نیز همین طور است؟ جواب خیر است. زیرا در آنجا T یک عدد صحیح نبود ولی در اینجا n عددی صحیح است.

مثال:

$$x[n] = \cos \omega_0 n \quad \text{اگر } \omega_0 \rightarrow \omega_0 + 2\pi$$

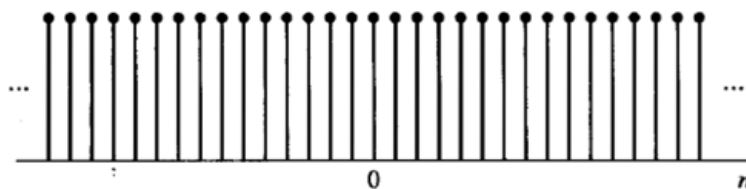
$$\cos(\omega_0 + 2\pi)n = \cos(\omega_0 n + 2\pi n) = \cos \omega_0 n$$

پس با افزایش ω_0 نوسانات افزایش نمی‌یابند. بنابراین، دنباله‌هایی با فرکانسهای متفاوت، می‌توانند نشان دهنده یک سیگنال یا دنباله باشند. پس کافی است آن‌ها را در یک دوره یا فاصله 2π بیان نمود.

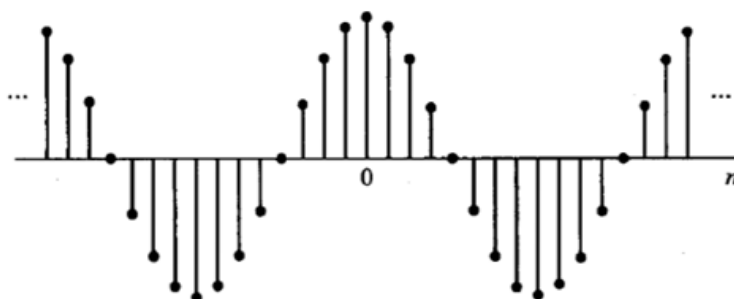
نکته: در حالت پیوسته، $0 < \omega_0 < \infty$ تغییر می‌کند اما در گسسته، $-\pi < \omega_0 < \pi$ می‌تواند تغییر می‌کند. در سیگنالهای متناوب گسسته، با افزایش ω_0 از 0 تا π ، فرکانس افزایش می‌یابد و فرکانس از π تا 2π کاهش می‌یابد تا دوباره به همان سیگنال برسد.

مثال: دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

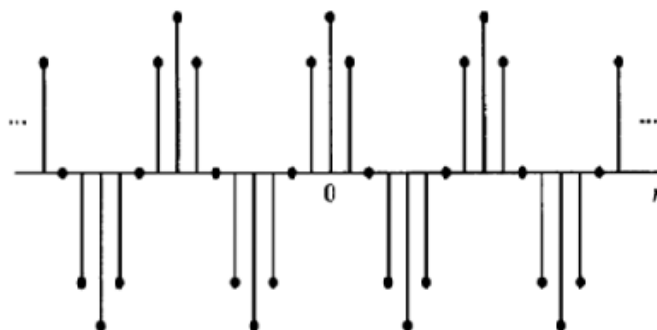
الف) $\omega_0 = 0$ یا $\omega_0 = 2\pi$



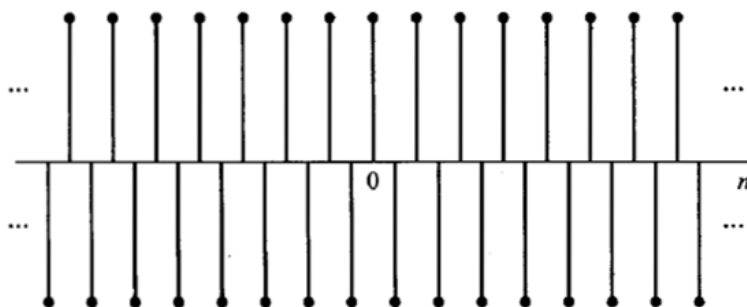
ب) $\omega_0 = \frac{11\pi}{8}$ یا $\omega_0 = 15\frac{\pi}{8}$



ج) $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ یا $\omega_0 = 7\frac{\pi}{4}$



د) $\omega_0 = \pi$



توضیح: این شکلها، بیان سیگنال $\cos \omega_0 n$ به ازای چند مقدار ω_0 است. از صفر تا π در بخش های الف تا د، نوسانات رشته یا سیگنال تندتر می شود. با افزایش N_0 از π تا 2π شکل د تا الف نوسانات کندتر می شود. در این مثال ملاحظه می شود که با افزایش ω_0 ، فرکانس تا مقدار $\omega_0 = \pi$ افزایش می یابد و از π تا 2π دوباره شروع به کاهش می نماید. در اینجا $\omega_0 = 3\frac{\pi}{8}$ رسم شده است که بعد از مقدار π است.

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 2\pi = 1 \end{cases} \quad \omega_0 = 0 \text{ یا } \omega_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{8} \text{ یا } \cos \frac{\pi}{8} \quad \omega_0 = \frac{15\pi}{8} \text{ یا } \cos \frac{15\pi}{8}$$

مثال: سینوسی های گسسته در زمان:

$$x[n] = \cos(\pi n/4)$$

دوره تناوب این سیگنال $N = 8$ است:

$$\omega_0 N = 2k\pi, \quad N\pi/4 = 2\pi k$$

به ازای $k = 1$ دوره تناوب اصلی حاصل می شود که در اینجا 8 است: $k = 1, \quad N = 8$

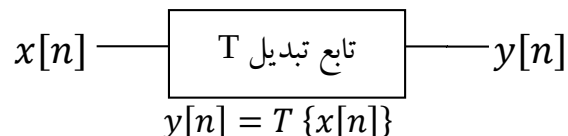
اگر $x[n + 8]$ را پیدا کنیم خواهیم داشت:

$$x[n + 8] = \cos(\pi(n + 8)/4) = \cos(11\pi/4 + 2\pi) = \cos(n\pi/4) = x[n]$$

یک تفاوت عمده سینوسی های گسسته زمان این بود که با افزایش دوره تناوب، تا یک جایی افزایش فرکانس داشتیم و از آنجا به بعد، فرکانس کاهش پیدا می کرد.

سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان⁷ (LTI):

اگر یک سیستم داشته باشیم که ورودی گسسته باشد و دارای یک تابع تبدیل باشد، خروجی آن یعنی $y[n]$ چگونه محاسبه می گردد؟



⁷ Linear Time Invariant: (LTI)

یک دسته از تبدیلات، خطی هستند که در سیستمهای خطی، این نوع تبدیلات بایستی بررسی شوند.

سیستمهای با تبدیل خطی^۸:

سیستمی را با تبدیل خطی میگوییم که دارای دو شرط زیر باشد:

1- ویژگی جمع پذیری (Summable):

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

2- ویژگی همگنی:

$$T\{\alpha x[n]\} = \alpha T\{x[n]\}, \quad \alpha = \text{عدد اسکالر}$$

بیان مفهوم مقیاس پذیری: اگر ورودی در یک اسکالر ضرب شود، پاسخ هم در آن ضرب می شود.

این دو شرط را می توان در یک شرط خلاصه کرد. با ترکیب دو شرط فوق می توان گفت شرط لازم و کافی برای خطی بودن یک سیستم آن است که پاسخ به ترکیب خطی از ورودیها، ترکیب خطی از پاسخها با همان ضرایب باشد. یعنی:

$$T\{a x_1[n] + b x_2[n]\} = a T\{x_1[n]\} + b T\{x_2[n]\}$$

به طور خلاصه شده:

$$x_1 \rightarrow y_1, \quad x_2 \rightarrow y_2 \quad \Rightarrow \quad a x_1 + b x_2 \rightarrow a y_1 + b y_2$$

$y[0]$ باید صفر باشد یعنی از مبدأ بگذرد.

مثال: سیستم انباره

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

این سیستم، ورودیها را می گیرد و با هم جمع می کند. تابع پله هم همین کار را می کرد که مقادیر قبلی ضربه را با هم جمع می کرد (در رابطه فوق، ورودیها از $-\infty$ تا حال جمع می شوند). مثل خازن که بارهای الکتریکی آن از قبل جمع شده و در نهایت، خازن شارژ شده است؛ این به معنای حافظه دار بودن است. حال اگر بخواهیم ببینیم

⁸ Linear Transformation

خطی است یا خیر داریم:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] \quad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_2[k]$$

با فرض ورودی جدید:

$$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$\begin{aligned} y_3[n] &= y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^n (a x_1[k] + b x_2[k]) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] = a y_1[n] + b y_2[n] \end{aligned}$$

سیستم خطی است. بنابراین سیستم انباره، یک سیستم خطی است.

مثال: یک سیستم غیر خطی:

$$w[n] = \log_{10}(|x(n)|)$$

برای اثبات غیرخطی بودن کافی است که یک مثال نقض بیاوریم:

$$x_1[n] = 1, \quad x_2[n] = 10$$

$$x_1[n] + x_2[n] = 11,$$

$$\log_{10}(1 + 10) = \log_{10}^{11}$$

$$\log_{10}^1 + \log_{10}^{10} = 1$$

که این دو با هم مخالف هستند.

خواص سیستم های مستقل از زمان⁹ (TI):

اگر در یک سیستم، ورودی را به اندازه زمان T انتقال یا شیفت دهیم، خروجی هم باید به اندازه T شیفت یابد. بنابراین سیستمی مستقل از زمان است که مستقل از جابه جایی یا شیفت باشد (SI).

سیستم در صورتی مستقل از زمان است که به ازای هر مقدار دلخواه شیفت مانند n_0 در ورودی:

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

⁹ Time Invariant System (TI)

خروجی $y_1[n] = y[n - n_0]$ را ایجاد کند.

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x_1[n] = x[n - n_0] \rightarrow y_1[n] = y[n - n_0]$$

مثال: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$. در اینجا n حدود سیگما است.

$$x[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$x_1[n] = x[n - n_0] \rightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

بنابراین، این سیستم مستقل از زمان و تغییر ناپذیر با زمان است:

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

راه حل دیگر:

$$x_1[n] = x[n - n_0], \quad y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k - n_0]$$

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] \quad k_1 \triangleq k - n_0 \text{ تغییر متغیر}$$

از طرفی:

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \Leftrightarrow y_1[n] = y[n - n_0]$$

در نتیجه سیستم LTI است:

مثال: سیستم فشرده ساز یا کمپرسور

$$y[n] = x[Mn]$$

در این سیستم در ورودی، مضاربی از M را داریم. مضاربی از 2 یا 3 یا ... که: $-\infty < n < \infty$.

آیا این سیستم تغییر ناپذیر با زمان است؟

ثابت می شود که این سیستم تغییر ناپذیر با زمان می باشد. در این سیستم، از هر M تا نمونه، $M-1$ نمونه را دور می ریزد. مثلاً اگر $M=2$ باشد نمونه های فرد را دور می ریزد و نمونه های زوج را نگه می دارد. در نتیجه، حجم کمتری را اشغال می کند (چون حافظه کامپیوتر را کمتر اشغال می کند، به آن کمپرسور می گویند).

$$x[n] = y[n] = x[Mn]$$

$$x_1[n] = x[n - n_0] \rightarrow y_1[n] = x[Mn - n_0] \neq y[n - n_0] = x[M(n - n_0)]$$

بنابراین سیستم، تغییر ناپذیر با زمان نیست.

علی بودن یا علیت^{۱۰}:

یک سیستم علی، از زمان حال و گذشته تبعیت می کند و خروجی به آینده بستگی ندارد یعنی قدرت پیش بینی ندارد. سیستمی علی است که به ازای هر مقدار n_0 ، رشته خروجی در $n = n_0$ ، تنها به مقادیر ورودی در $n \leq n_0$ بستگی داشته باشد. یعنی اگر به ازای $n \leq n_0$ داشته باشیم $x_1[n] = x_2[n]$ ، آنگاه در $n < n_0$ داریم $y_1[n] = y_2[n]$ به معنای آن است که به ازای دو ورودی که مقادیرشان تا $n < n_0$ برابر است، خروجی ها نیز باید تا آن زمان برابر باشند.

تعبیر مطالب فوق آن است که سیستم، پیش بینی کننده نمی باشد؛ یعنی خروجی وابسته به گذشته ورودی بوده و به آینده ورودی، بستگی ندارد.

مثال: سیستم تأخیر دهنده ایده آل:

یک سیستم تأخیر دهنده ایده آل به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{n_d} \longrightarrow y[n] = x[n - n_d]$$

اگر n_d مثبت یا صفر باشد، خروجی وابسته به گذشته و حال است؛ پس سیستم علی است. اگر n_d منفی باشد، وابسته به آینده است و خروجی به آینده ورودی بستگی دارد؛ پس سیستم علی نمی باشد.

مثال: سیستم میانگین متحرک

این سیستم برای هر بازه دلخواه می تواند میانگین بگیرد. سیستم میانگین متحرک، با رابطه زیر بیان می شود:

¹⁰ Causality

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

در این سیستم، علی بودن بستگی به علامت M_1 و M_2 دارد. برای مثال به ازای $M_1 > 0$ ، $M_2 > 0$ سیستم علی می باشد. در غیر این صورت، غیر علی است.

مثال: سیستم تفاضل پیشرو^{۱۱} و تفاضل پسرو^{۱۲}

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = x[n+1] - x[n]$$

این سیستم تفاضلی پیشرو است. غیر علی است چون به آینده بستگی دارد:

اگر $y[n]$ به صورت زیر باشد، آنگاه تفاضل پسرو است؛

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

چون به زمان گذشته و حال بستگی دارد و به آینده بستگی ندارد. بنابراین سیستم علی می باشد.

نکته: هر وقت خواستیم یک سیستم غیر علی را به علی تبدیل کنیم، باید به یک تأخیر دهنده وصل شود. ملاحظه می شود که اگر یک سیستم غیر علی باشد، می توان با یک تأخیر دهنده ایده آل مناسب، آنرا علی نمود.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{پیشرو}} \longrightarrow y[n] \longrightarrow \boxed{n_d=1} \longrightarrow z[n] = y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

پایداری^{۱۳}:

یک سیستم را پایدار گویند که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود حاصل گرداند. سیستم را از لحاظ ورودی محدود - خروجی محدود یا کراندار^{۱۴} (BIBO) پایدار می نامیم اگر و تنها اگر هر دنباله ی ورودی محدود، یک دنباله ی خروجی محدود ایجاد کند.

$$|x[n]| \leq B_x \leq \infty \quad \forall n \quad \Leftrightarrow \quad |y[n]| \leq B_y \leq \infty \quad \forall n$$

^{۱۱}Forward Difference

^{۱۲}Backward Difference

^{۱۳}Stability

^{۱۴}Bounded Input - Bounded Output (BIBO)

مثال: سیستم مربع کننده^{۱۵}:

$$y[n] = (x[n])^2$$

آیا سیستم مربع کننده پایدار است؟

$$x_1[n] \leq B_x < \infty$$

$$y_1[n] = (x_1[n])^2 = B_x^2 = B_y < \infty$$

پس سیستم پایدار است.

مثال: آیا سیستم زیر پایدار است؟

$$\omega[n] = \log_{10}(|x[n]|)$$

کافی است یک مثال نقض بیاوریم:

$$x[n] = 0 < \infty, \quad w[n] = \log_{10}(0) = -\infty$$

بنابراین سیستم ناپایدار است.

مثال: آیا سیستم انباره پایدار است؟

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

کافی است یک مثال نقض بیاوریم:

$$x[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n+1 & n \geq 0 \end{cases}, \quad n+1 = B_y, \text{ if } n \Rightarrow \infty \quad \text{آنگاه } y[n] \Rightarrow \infty$$

برای تمامی n ها، رابطه بالا برقرار نمی باشد. پس سیستم ناپایدار است.**سیستمهای بی حافظه:**¹⁵ Squarer

سیستم بی حافظه سیستمی است که خروجی در هر لحظه، وابسته به ورودی در همان لحظه است. به عبارت دیگر، به گذشته و آینده بستگی نداشته باشد.

مثال:

سیستم انباره، یک سیستم حافظه دار است.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

سیستم مربع کننده بی حافظه است:

$$y[n] = (x[n])^2$$

سیستم تأخیر دهنده حافظه دار است:

$$y[n] = x[n - nd]$$

سیستم میانگین گیر متحرک حافظه دار است:

$$y[n] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + 1} \sum_{k=\mu_1}^{\mu_2} x[n - k]$$

پاسخ ضربه سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI):

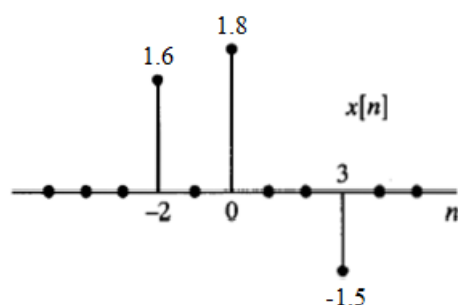
اگر به ورودی یک سیستم LTI، ضربه واحد وارد نمائیم، خروجی سیستم، پاسخ ضربه نامیده می شود و با $h[n]$ نمایش داده می شود.



هر سیگنال زمان گسسته مانند $x[n]$ دلخواه را می توان بصورت مجموعی از ضربه ها نمایش داد:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \delta[n - k]$$

مثال:



$$x[n] = 1.6 \delta[n + 2] + 1.8 \delta[n] - 1.5 \delta[n - 3]$$

کانولوشن:

می توان طبق روابط زیر ثابت نمود که با داشتن پاسخ ضربه یک سیستم LTI می توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز داشته باشیم.

اثبات:

$$\delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

با توجه به تغییرناپذیری با زمان سیستم:

$$\delta[n-k] \Rightarrow y[n] = h_k[n] = h[n-k]$$

با عنایت به خطی بودن سیستم:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \delta[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

پس هر سیگنالی را می توان به صورت ترکیبی از پاسخ ضربه های شیفته یافته بنویسیم. حال اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی ضربه را داشته باشیم، طبق روابط فوق می توانیم پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز داشته باشیم. کافی است ورودی را با پاسخ ضربه کانولوشن نماییم.

مثال: سیستمی با پاسخ ضربه $h[n] = u[n] - u[n-N]$ را در نظر بگیرید و پاسخ آن را به ورودی $x[n] = a^n u[n]$ را به دست آورید.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

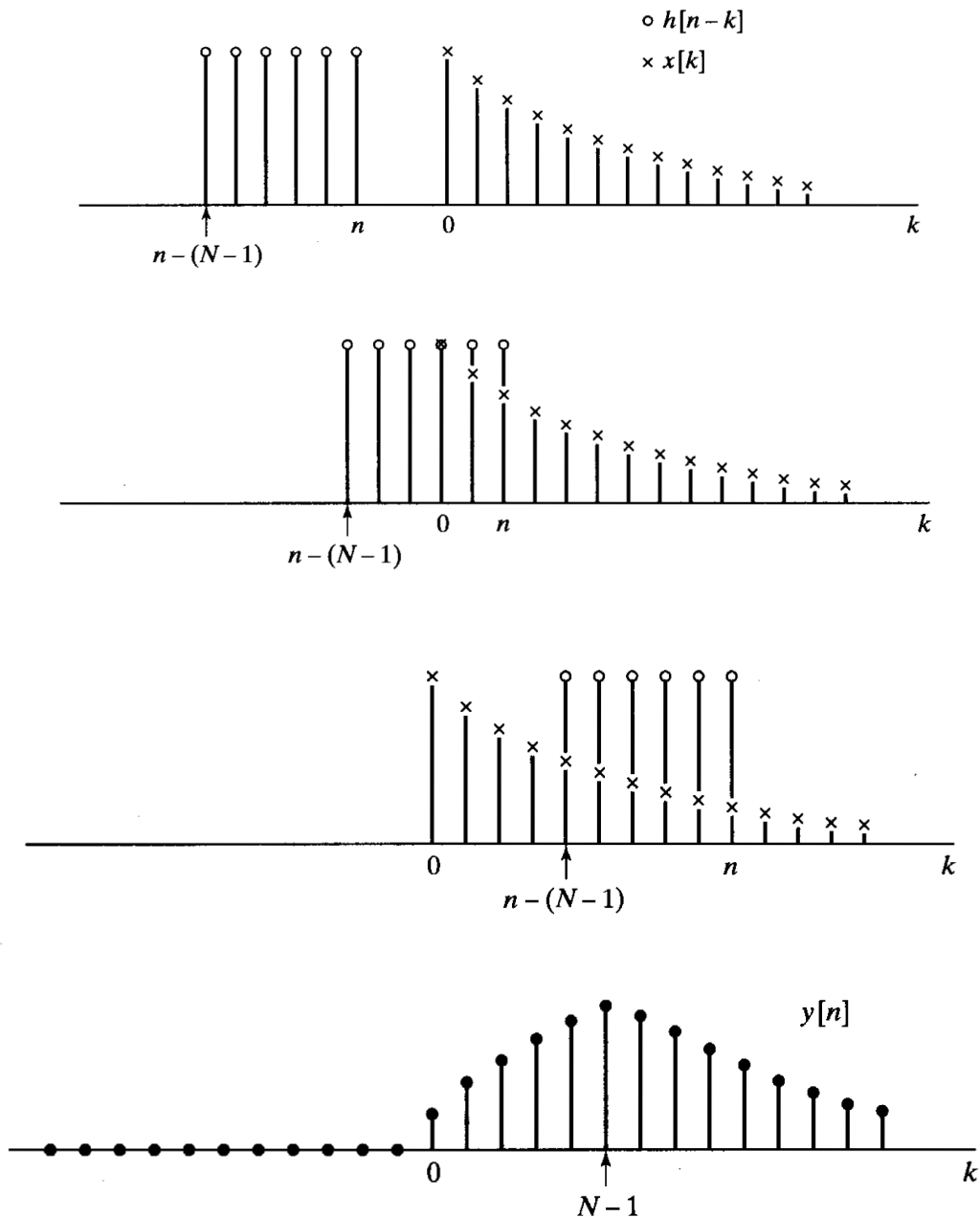
$$x[n] = a^n u[n]$$

پاسخ:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k]$$

ابتدا $h[-k]$ را به دست آورده و سپس با افزایش n و ناحیه بندی برای نقاط مشابه n حاصلضرب $x[k]h[n-k]$ را به دست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم که با ترسیم، این کار راحت‌تر است.

ابتدا $x[n]$ را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم $0 < a < 1$ باشد که در این صورت، نمودار حالت نمایی دارد. در ادامه، نمودار $h[n] = h[k]$ را رسم می‌نمائیم. حال نمودار $h[-k]$ را رسم کرده و سپس، نمودار $h[-k]$ را به اندازه n شیفت می‌دهیم.



ناحیه اول: اگر n منفی باشد.

$$y[n] = \sum x[k]h[+n - k] = 0$$

ناحیه دوم: n را چقدر جلو ببریم تا یک ناحیه مشترک با $x[n]$ داشته باشیم.

$$n - (N - 1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < n \leq N - 1$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k u[k] \times h[n - k] = \sum_{k=0}^n a^k = 1 * \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \rightarrow y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

جواب بالا با استفاده از تصاعد هندسی حاصل شده است (با فرض k کوچکتر از یک).

یادآوری (تصاعد هندسی):

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \quad |q| < 1$$

$$S_n = t_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad S_\infty = \frac{t_1}{1 - q}$$

ناحیه سوم: $n \geq N - 1$

$$y[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^n a^k = a^{n-(N-1)} \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

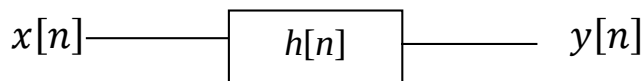
درنهایت داریم:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} & 0 \leq n \leq N - 1 \\ a^{n-(N-1)} \left[\frac{1 - a^N}{1 - a} \right] & N - 1 < n \end{cases}$$

ویژگیهای سیستمهای خطی بر اساس پاسخ ضربه $h[n]$:

بایستی ابتدا خواص کانولوشن را بدانیم؛ چون خواص سیستمهای LTI براساس خواص کانولوشن مطرح می شوند.

1- خاصیت جابجایی:



$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

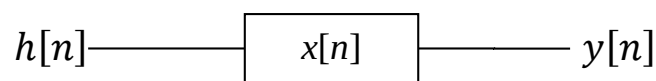
اثبات:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^N x[k]h[n-k]$$

با تغییر متغیر: $n - k = k'$

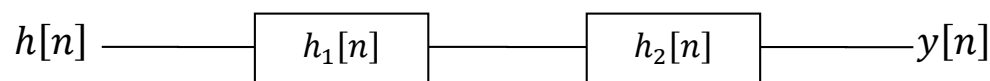
$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h[k']x[n-k'] = h[n] * x[n]$$

تعبیر سیستمی:



اگر جای پاسخ ضربه و ورودی عوض شود، تفاوتی نمی کند چون این دو شکل، معادل یکدیگر هستند.

2- خاصیت شرکت پذیری: اگر دو سیستم به شکل زیر داشته باشیم، آنگاه:



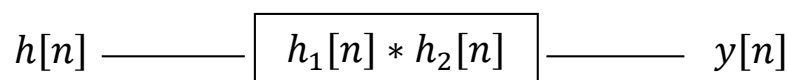
$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

اثبات: بعهد خواننده

تعبیر سیستمی:

در اتصال سری سیستم های LTI ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست.

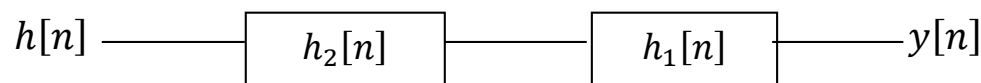
اثبات: در سیستم زیر:



اگر h_1 و h_2 از خاصیت جابه جایی استفاده کنیم هیچ فرقی نمی کند.

حال خروجی سیستم جدید عبارت است از:

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$



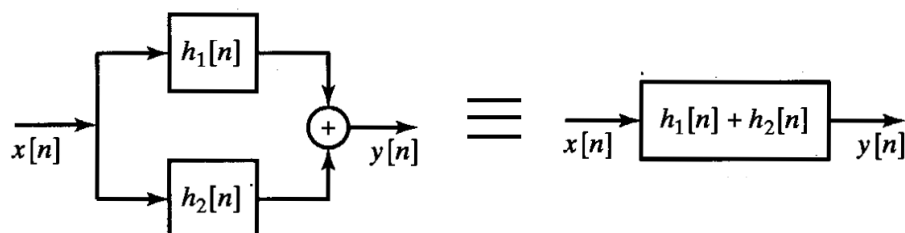
3- خاصیت توزیع پذیری کانولوشن روی جمع:

$$y[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$$

اثبات: بعهد خواننده

تعبیر سیستمی:

در دو سیستم موازی، ورودی مشترک است و خروجیها با هم جمع می شوند. پاسخ ضربه دو سیستم موازی، برابر است با حاصل جمع پاسخ ضربه های آنها.



چند مثال در مورد پاسخ های ضربه سیستمهای معروف LTI:

1- تاخیر دهنده ایده آل، خطی و تغییر ناپذیر با زمان:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{n_d} \longrightarrow y[n] = x[n - n_d]$$

$$\delta[n] \longrightarrow h[n] = \delta[n - n_d]$$

2- میانگین متحرک:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - n_d]$$

$$\delta[n] \longrightarrow h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0 & \text{و.} \end{cases}$$

3- سیستم انباره:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$\delta[n] \rightarrow h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k],$$

با تغییر متغیر: $n - k = k'$

$$h[n] = \sum_{k'=0}^{\infty} \delta[n-k'] \Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \Rightarrow h[n] = u[n]$$

4- تفاضل پیشرو:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

$$\delta[n] \rightarrow h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

5- تفاضل پسرو:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\delta[n] \rightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

خواص سیستمهای LTI بر اساس پاسخ ضربه:

پایداری یک سیستم LTI بر اساس $h[n]$:

اگر یک سیستم LTI داشته باشیم و پاسخ ضربه آن را به ما بدهند، چطور بفهمیم پایدار است یا خیر؟ قبلاً دیدیم سیستمی پایدار است که به ازای هر ورودی محدود، خروجی محدود تولید کند:

$$|x[n]| < B_x < \infty \quad \rightarrow \quad |y[n]| \leq B_y < \infty$$

شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI آن است که:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq B_h < \infty$$

سیستمهای با پاسخ ضربه محدود یا FIR پایدار هستند. سیستمهای با پاسخ ضربه نامحدود یا IIR ناپایدار هستند.

اثبات: شرط لازم و شرط کافی را باید جداگانه اثبات کنیم: شرط کافی $q \leftrightarrow p$ شرط لازم

اثبات کفایت شرط:

اگر ورودی محدود باشد و S کوچکتر از بی نهایت باشد، آنگاه سیستم پایدار است:

$$\begin{aligned} |x[n]| < B_x < \infty \\ S \leq B_h < \infty \end{aligned} \quad \rightarrow \quad |y[n]| \leq B_y < \infty$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum |x[k]| |h[n-k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| < \infty$$

اثبات لزوم شرط: نشان می دهیم اگر سیستم پایدار باشد، آنگاه ورودی کراندار است. از طرفی نشان می دهیم که اگر $S = \infty$ باشد و حتی ورودی محدود باشد، خروجی ممکن است نامحدود باشد.

$$\begin{aligned} S = \infty \\ |x[n]| \leq B_x < \infty \end{aligned} \quad \rightarrow \quad |y[n]| = \infty$$

با فرض:

$$x[n] \triangleq \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|} & h[n] \neq 0 \\ 0 & h[n] = 0 \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[0-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[k]}{h[k]} \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

علیت (Causality) بر حسب $h[n]$:

همانطور که قبلاً گفته شد، یک سیستم را علی می‌گوییم هرگاه خروجی در هر لحظه از زمان فقط و فقط تابعی از ورودی در همان لحظه و لحظات گذشته باشد. یعنی خروجی مستقل از آینده ورودی باشد. شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI آن است که:

$$h[n] = 0 \quad n \leq 0$$

اثبات کفایت شرط:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[n-k] h[k] + \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k] h[k]$$

برای علی بودن با هر x یا ورودی دلخواه باید:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} x[n-k] h[k] = 0 \Rightarrow h[k] = 0 \quad k < 0 \quad \forall x$$

بنابراین باید برای علی بودن:

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

برای اثبات لزوم شرط نیز می‌توان گفت که اگر شرط زیر برقرار باشد آنگاه سیستم، وابسته به آینده ورودی نیست؛ پس علی است. یعنی:

$$\forall x[n] \rightarrow h[k] = 0, \quad k < 0$$

مثال: آیا سیستم تأخیر دهنده ایده آل، علی و پایدار است؟

$$h[n] = \delta[n - n_d]$$

این سیستم پایدار است چون:

$$\sum |h[n]| < B_h < \infty$$

ثانیاً اگر $n_d \geq 0$ باشد، علی است.

مثال: سیستم میانگین متحرک، علی است یا خیر؟

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} & -M_1 < n < M_2 \\ 0 & \text{و.ا.} \end{cases}$$

چون عرض سیستم محدود است و یک فیلتر FIR است و پاسخ ضربه آن محدود است، چون تعداد نقاط آن محدود است، بنابراین $S < \infty$.

علی بودن: به ازای $-M_1 > 0$ و $M_2 \geq 0$ سیستم علی است زیرا $h[n]$ برای $n < 0$ ، صفر می شود.

مثال: سیستم انباره، علی و پایدار است؟

$$h[n] = u[n]$$

برای n های مثبت جواب دارد اما پایدار نیست؛ چون $S = \infty$ است. اما علی است، زیرا:

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

مثال: آیا سیستم تفاضل پیشرو، علی و پایدار است؟

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

پایدار است. چون تنها دو نقطه دارد:

اما علی نیست چون وابسته به آینده ورودی سیستم است:

$$h[-1] = \delta[0] - \delta[-1] \neq 0$$

مثال: آیا سیستم تفاضل پسرو، علی و پایدار است؟

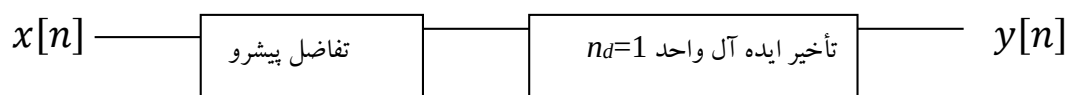
این سیستم نیز پایدار است. اما برخلاف سیستم پیشرو، سیستم پسرو علی است چون وابسته به آینده سیستم نیست:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

نکته: در حالت کلی هر سیستم FIR غیرعلی را می توان با متوالی کردن با تأخیرهای به حد کافی طولانی، به سیستم علی تبدیل کرد:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = \delta[n-1]} \longrightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \delta[n - nd] = x[n - nd]$$



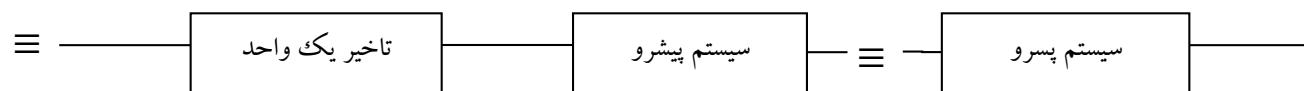
$$h_1[n] = \delta[n + 1] - \delta[n]$$

$$h_2[n] = \delta[n - 1]$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n + 1] - \delta[n]) * \delta[n - 1]$$

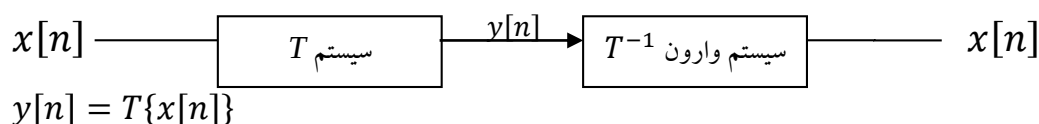
$$= \delta[n - 1] * (\delta[n + 1] - \delta[n]) = \delta[n - 1 + 1] - \delta[n - 1]$$

$$= \delta[n] - \delta[n - 1]$$



سیستم وارون و وارون پذیر: (Inverse System)

اگر یک سیستم اصلی داشته باشیم که $x[n]$ را به آن اعمال کنیم و بعد، وارد سیستم وارون شود، باز هم $x[n]$ را به ما می دهد:



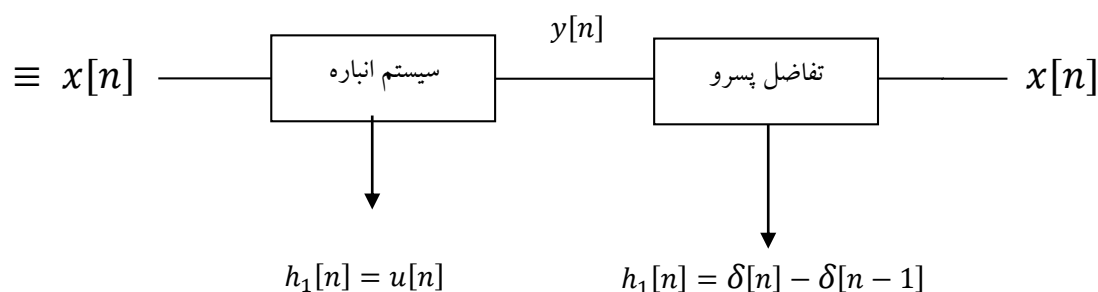
$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$x[n] = T^{-1}\{y[n]\} = T^{-1}\{T\{x[n]\}\} = x[n]$$

مثال: پاسخ ضربه چنین سیستمهایی اگر $h[n]$ باشد و سیستم وارون پاسخ ضربه اش $h_i[n]$ باشد:

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]$$

مثال: دو سیستم سری انباره و تفاضل پسرو:



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$= u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

نکته: بنابراین سیستم تفاضل پسرو وارون سیستم انباره می شود.

همیشه سیستمها وارون ندارند بعضی وقتها پیدا کردن سیستم وارون امکان پذیر نیست. البته سیستم وارون وقتی وجود دارد که سیستم اصلی وارون پذیر باشد.

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت LCCD (Linear Constant Coefficient Difference)

سیستمهایی که ورودی و خروجی آنها، معادلاتی با ضرایب ثابت را ارضا می کنند، دسته مهمی از سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان را ارضا می کنند:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{\mu} b_m x[n-m]$$

دسته مهمی از سیستمهای LIT سیستمهایی هستند که ورودی و خروجی آنها در یک معادله خطی با ضرایب ثابت، به شکل فوق صدق می کنند. در سیستمهای گسسته، مشتق تبدیل به تفاضل می شود.

نمایش معادله تفاضلی انباره:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + y[n-1] \rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$N = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad m = 0, \quad b_0 = 1$$

برای سیستمهای علی می توان گفت در یک سیستم علی، خروجی وابسته به آینده ورودی نخواهد بود:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

شرط علی بودن سیستم، آرامش اولیه است؛ یعنی مادامی که ورودی سیستم صفر است، خروجی صفر خواهد بود (صفر باقی خواهد ماند):

$$y[n] = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x[n-m] \quad N=0 \text{ اگر سیستم مرتبه صفر باشد}$$

$$h[m] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{Oth.} \end{cases} \quad \text{یعنی در } M+1 \text{ تا غیرنقطه صفر است}$$