فصل پنجم

توابع (میدان‌های) برداری

تعریف توابع (میدان‌های) برداری
ترکیب توابع برداری
بردارهای سرعت و شتاب
المان طول قوس یک منحنی
بردار یکانی مماس، بردار یکانی قائم اصلی و بردار یکانی قائم دوم
انحناء
دایره انحناء (دایره بوسان)
مؤلفه‌های مماس و قائم بردار شتاب
تاب منحنی
مجموعه تست توابع (میدان‌های) برداری

یادداشت:

تعریف توابع (میدان های) برداری

یک تابع برداری، تابعی است که از فضای $R^{(n)}$ به فضای $R^{(m)}$ تعریف می‌گردد؛ به طوری‌که، به هر n تایی مرتب یک m تایی مرتب را نسبت می‌دهد.

مثال ساده‌ای، از توابع برداری را در درس ریاضیات مهندسی و در بحث نگاشت‌ها می‌توان ملاحظه نمود. آنجا که تابع $w=f(z)$ به ازاء هر عدد مختلط z که بیانگر یک دو تایی مرتب (x,y) می‌باشد، یک عدد مختلط w را که نشان‌دهنده زوج مرتب (u,v) است، نسبت می‌دهد.

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید، تابع برداری $\vec{F}:R^{(n)} \to R^{(3)}$ به‌صورت زیر تعریف گردد:

$$\vec{F}(P) = F_1(P)\,\vec{i} + F_2(P)\,\vec{j} + F_3(P)\,\vec{k}$$

که در آن $P \in R^{(n)}$ می‌باشد، به بیان دیگر P یک n تایی مرتب است.

در حقیقت عملکرد تابع فوق، آن است که n متغیر را از فضای $R^{(n)}$ در نظر گرفته و به آن یک سه‌تایی مرتب (F_1, F_2, F_3) نسبت می‌دهد.

در مثال فوق، حد تابع $\vec{F}(P)$ وقتی $P \to P_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{P\to P_0} \vec{F}(P) = \left(\lim_{P\to P_0} F_1(P)\right)\vec{i} + \left(\lim_{P\to P_0} F_2(P)\right)\vec{j} + \left(\lim_{P\to P_0} F_3(P)\right)\vec{k}$$

مشروط به آن که هر سه حد طرف راست تساوی فوق موجود باشند.

تابع برداری مزبور را در نقطه P_0 پیوسته می‌گوییم، هرگاه:

$$\lim_{P\to P_0} \vec{F}(P) = \vec{F}(P_0)$$

ترکیب توابع برداری

توابع $f: R^2 \to R^3$ و $g: R^3 \to R^2$ را در نظر بگیرید. ترکیب این دو تابع به‌صورت‌های زیر قابل تعریف است:

$$(fog)(u,v,w) = f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w))$$

که در آن $g_1(u,v,w)$ و $g_2(u,v,w)$ به ترتیب مؤلفه‌های اول و دوم تابع g می‌باشند.

$$(gof)(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$$

که در آن $f_i(x,y)$ مؤلفه iام تابع f است.

تذکر: بدیهی است تابع fog زمانی قابل تعریف است که تعداد مؤلفه‌های خروجی g و تعداد مؤلفه‌های ورودی f برابر باشند.

چند نکته

به نکات زیر توجه کنید و سعی کنید دلیل آنها را نشان دهید:

۱ـ شرط لازم و کافی برای آن که تابع برداری $\vec{F}(t)$ دارای جهت و طول ثابت باشد، آن است که:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=0$$

۲ـ شرط لازم و کافی برای آن که $\vec{F}(t)$ دارای جهت ثابت باشد، آن است که: $\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\vec{0}$

۳ـ شرط لازم و کافی برای آن که $\vec{F}(t)$ دارای طول ثابت باشد، آن است که $\vec{F}(t).\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=0$؛ یعنی، شرط لازم و کافی برای آنکه توابع برداری $\vec{F}(t)$ و $\vec{F}'(t)$ بر هم عمود باشند، آن است که $\left|\vec{F}(t)\right|$ ثابت باشد.

۴ـ اگر $\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)$ دو تابع برداری باشند و $\alpha(t)$ یک تابع حقیقی باشد، داریم:

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{G})=\vec{F}.\frac{d\vec{G}}{dt}+\frac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{F}\times\frac{d\vec{G}}{dt}+\frac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{F}\right)=\alpha\frac{d\vec{F}}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}\vec{F}$$

بردارهای سرعت و شتاب

فرض کنید، ذره‌ای در فضا روی منحنی C با معادله $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ حرکت کند. ($\vec{R}(t)$ را اصطلاحاً بردار موضعی هر نقطه از مسیر حرکت ذره می‌گوییم).

چنانچه ذره در زمان‌های t_1 و t_2 به ترتیب دارای بردارهای موضعی $\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ باشد، بردار جابجایی ذره در بازه $[t_1,t_2]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta\vec{R}=\vec{R}_2-\vec{R}_1=\vec{R}(t_2)-\vec{R}(t_1)$$

بردار سرعت متوسط از رابطه زیر قابل تعیین است:

$$\bar{\vec{V}}=\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}=\frac{\vec{R}_2-\vec{R}_1}{t_2-t_1}$$

و لذا، سرعت متوسط (اندازه بردار سرعت متوسط) چنین می‌باشد:

$$\bar{V}=|\vec{\bar{V}}|=\frac{|\vec{R}_2-\vec{R}_1|}{t_2-t_1}$$

سرعت لحظه‌ای نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}=\vec{R}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$$

با داشتن بردار سرعت لحظه‌ای، بردار شتاب متوسط از رابطه زیر قابل تعیین است:

$$\vec{\bar{a}}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{\vec{V}(t_2)-\vec{V}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\vec{V}_2-\vec{V}_1}{t_2-t_1}$$

و لذا، اندازه بردار شتاب متوسط چنین می‌باشد:

$$\bar{a}=|\vec{\bar{a}}|=\frac{|\vec{V}_2-\vec{V}_1|}{t_2-t_1}$$

شتاب لحظه‌ای، نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\vec{V}'(t)=x''(t)\vec{i}+y''(t)\vec{j}+z''(t)\vec{k}$$

طبیعی است مقدار سرعت و شتاب لحظه‌ای برابر اندازه بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای بوده و به فرم زیر قابل بیان می‌باشند:

$$|\vec{V}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}$$

المان طول قوس یک منحنی

هرگاه منحنی C به‌صورت $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ تعریف شده باشد؛ المان طول قوس اندازه دیفرانسیل بردار $\vec{R}(t)$ است؛ یعنی:

$$ds=|d\vec{R}|=\left|dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

به تعبیری، می توان دید:

$$ds=\left|\frac{dR}{dt}\cdot dt\right|=|R'(t)|dt=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

و لذا، طول منحنی مورد نظر در بازه $[t_1,t_2]$ که همان مسافت طی شده در فاصله زمانی t_1 تا t_2 توسط متحرکی است که روی منحنی C در حال حرکت می‌باشد، از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$L=\int_{t_1}^{t_2}ds$$

بردار یکانی مماس، بردار قائم یکانی اصلی و بردار قائم یکانی دوم

فرض کنید، منحنی C به‌صورت $\vec{R}(t)$ بیان شده باشد و P نقطه‌ای روی آن باشد که به زمان خاص t مربوط می‌شود؛ در این صورت، بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطه P به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$$

بردار یکانی مماس

ملاحظه می‌کنید که، مطابق آنچه در مکانیک دیده‌ایم بردار سرعت در هر لحظه، مماس بر مسیر حرکت است.

بردار قائم یکانی اصلی یا بردار قائم یکانی اول را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

بردار قائم اول

و نیز بردار قائم یکانی دوم را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

بردار قائم دوم

سه بردار $\vec{B},\vec{N},\vec{T}$ تشکیل یک کنج سه قائمه را می‌دهند که به کنج فرنه موسوم است.

سه تعریف دیگر

صفحه بوسان، صفحه‌ای است که از نقطه مفروض P_0 گذشته و نرمال آن، بردار قائم یکانی دوم می‌باشد.

صفحه قائم، صفحه‌ای است که از نقطه مفروض P_0 گذشته و نرمال آن، بردار یکانی مماس می‌باشد.

صفحه اصلاحی، صفحه‌ای است که از نقطه مفروض P_0 گذشته و نرمال آن، بردار قائم یکانی اول می‌باشد.

انحناء

فرض کنید بردار $\vec{T}(t)$ بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطه متناظر با t روی منحنی مزبور باشد، و s طول قوس از نقطه ثابت دلخواه تا نقطه متناظر با t بوده و بدانیم s با افزایش t زیاد می‌شود، در این صورت بردار انحنای C در این نقطه عبارت است از:

$$\vec{\kappa}(t)=\frac{d\vec{T}}{ds}$$

اندازه این بردار را انحناء منحنی در این نقطه و عکس انحنای منحنی را شعاع انحناء می‌نامیم.

همان‌طوری که ملاحظه می‌شود، محاسبه انحناء منحنی با استفاده از تعریف فوق، کاری دشوار است؛ لذا، برای محاسبهٔ آن، از روابط زیر استفاده می کنیم:

۱) هرگاه منحنی C با رابطه $\vec{R}(t)$ تعریف شده باشد، انحناء منحنی را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\vec{k}(t) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{\left|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)\right|}{\left|\vec{R}'(t)\right|^3}$$

۲) اگر منحنی C با رابطه $y = f(x)$ مشخص شده باشد، خواهیم داشت:

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۳) هرگاه منحنی C با معادله $\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j$ مشخص شده باشد، داریم:

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۴) هرگاه منحنی C به فرم قطبی $r = f(\theta)$ تعریف گردد، داریم:

$$\kappa(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

دایره انحناء (دایره بوسان)

دایره بوسان یک منحنی در هر نقطه؛ مانند P، دایره‌ای است که:

۱ـ بر منحنی C در نقطه P مماس است.

۲ـ انحناء منحنی C در نقطه P با انحناء دایره مذکور برابر است.

۳ـ مرکز دایره مذکور در طرف مقعر منحنی قرار دارد.

در نقطه نظیر t_0 از منحنی C که با بردار موضعی $\vec{R}(t)$ تعریف شده، داریم:

۱ـ شعاع دایره بوسان: $R = \frac{1}{\kappa}$

۲ـ مختصات مرکز دایره بوسان:

$$\vec{c}(t_0) = \vec{R}(t_0) + R\Big|_{t=t_0} \vec{N}(t_0)$$

که در آن $\vec{N}(t_0)$ بردار قائم یکانی اصلی منحنی C در $t = t_0$ است.

نکته: می‌توان نشان داد اگر C یک منحنی در داخل صفحه xy باشد که با رابطه $y = f(x)$ تعریف شده است، در نقطه P_0 مرکز دایره بوسان از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$x_c = \left\{x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right\}\Bigg|_{P_0} \qquad y_c = \left\{y + \frac{1+y'^2}{y''}\right\}\Bigg|_{P_0}$$

مؤلفه‌های مماس و قائم بردار شتاب

اگر $\vec{a}(t)$ معرف بردار شتاب منحنی C باشد، می‌توان آن را به دو مؤلفه $\vec{a}_T$ و $\vec{a}_N$ تجزیه کرد؛ به طوری‌که $\vec{a}_T$ در امتداد بردار $\vec{T}(t)$ و $\vec{a}_N$ در امتداد $\vec{N}(t)$ باشد، در این شرایط $\vec{a}_T$ و $\vec{a}_N$ را به ترتیب مؤلفه مماس و مؤلفه قائم بردار شتاب می گویند. می توان نشان داد:

$$\vec{a}_{(t)} = a_T \vec{T}_{(t)} + a_N \vec{N}_{(t)}$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\vec{V}|$$

$$a_N = \kappa |\vec{V}|^2$$

که در آن $|\vec{V}|$ اندازه بردار سرعت لحظه ای و κ انحناء منحنی در لحظه t می‌باشد.

طبیعی است:

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

تاب منحنی

فرض کنید بردارهای $\vec{N}$ و $\vec{B}$ به ترتیب بیانگر بردار قائم یکانی اول و بردار قائم یکانی دوم منحنی مفروض C باشند و s طول قوس منحنی از نقطه‌ای ثابت و دلخواه تا نقطه متناظر با t باشد.

می‌توان نشان داد که بردار $\frac{d\vec{B}}{ds}$ بر صفحه شامل بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{T}$ عمود بوده و لذا، با بردار $\vec{N}$ موازی است و عددی؛ مانند، τ یافت می‌شود، به طوری که:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}$$

مقدار τ را در رابطه فوق تاب منحنی و عکس آن را $\rho = \frac{1}{\tau}$ شعاع تاب در نقطه پیچش منحنی می‌نامیم.

می‌توان نشان داد هرگاه منحنی C به‌صورت $\vec{R}(t)$ مشخص شده باشد، داریم:

$$\tau = \frac{\vec{R}'(t).(\vec{R}''(t) \times R^{(3)}(t))}{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|^2}$$

بدیهی است تاب منحنی‌ای که در یک صفحه واقع باشد، صفر خواهد بود.

مجموعه تست توابع (میدان‌های) برداری

۱ ـ اگر داشته باشیم $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 4\cos t \\ z = 2t \end{cases}$ **حداکثر سرعت متحرک چقدر است؟**

۱) $\sqrt{29}$ ۲) $\sqrt{13}$ ۳) $\sqrt{20}$ ۴) $\sqrt{21}$

حل :

بردار سرعت چنین به‌دست می‌آید:

$$\vec{V} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = (3\cos t)\vec{i} + (-4\sin t)\vec{j} + (2)\vec{k}$$

و لذا، مقدار سرعت در هر لحظه چنین است:

$$|\vec{V}| = \sqrt{9\cos^2 t + 16\sin^2 t + 4} = \sqrt{9\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + 7\sin^2 t + 4} = \sqrt{13 + 7\sin^2 t}$$

چون حداکثر $\sin^2 t$ برابر 1 است:

$$|\vec{V}|_{max} = \sqrt{20}$$

۲ ـ منحنی پارامتری $C: \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = 2 + \sin\theta \\ z = 4\theta \end{cases}$ **در نقطه** $\theta = \frac{\pi}{2}$ **روی آن دارای خط مماسی است با معادله:**

۱) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2\pi}{4}$ ۲) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2\pi}{4}$

۳) $\begin{cases} 4x + z - 4 - 2\pi = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} 4x - z - 4 + 2\pi = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

حل :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \rightarrow x' = -\sin\theta \\ y = 2 + \sin\theta \rightarrow y' = \cos\theta \\ z = 4\theta \rightarrow z' = 4 \end{cases}$$

پس، بردار مماس بر منحنی C در نقطه $\theta = \frac{\pi}{2}$ (بردار هادی خط) چنین است:

$$\vec{u}: \begin{cases} -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \\ \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ 4 \end{cases}$$

در $\theta=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\begin{cases} x=1+\cos\frac{\pi}{2}=1 \\ y=2+\sin\frac{\pi}{2}=3 \\ z=4\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi \end{cases}$$

پس، معادله خط مماس چنین است:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2\pi}{4} \quad\to\quad \begin{cases} \frac{x-1}{-1}=\frac{z-2\pi}{4} \quad\to\quad 4x+z-4-2\pi=0 \\ y-3=0 \quad\to\quad y=3 \end{cases}$$

تذکر: دقت کنید که وقتی مؤلفه دوم بردار هادی خط صفر است، خط در صفحه‌ای موازی صفحه xoz قرار دارد و لذا، مؤلفه دوم آن تغییر نمی‌کند؛ از طرفی، این خط از نقطه $(1,3,2\pi)$ عبور کرده؛ پس، در صفحه $y=3$ قرار دارد.

۳ـ راستای بردار یکه قائم نوع دوم برای منحنی $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=e^{t} \\ z=\sqrt{2}\,t \end{cases}$ **در** t=0 **کدام است؟**

۱) (-2 و $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$)
۲) ($\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$)
۳) ($\sqrt{2}$ و 2 و $-\sqrt{2}$)
۴) (2 و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$)

حل :

$$\vec{R}(t)=e^{-t}i+e^{t}j+\sqrt{2}\,tk \quad\to\quad \vec{R}'(t)=-e^{-t}i+e^{t}j+\sqrt{2}\,k$$

$$\to\quad \vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}=\frac{-e^{-t}i+e^{t}j+\sqrt{2}\,k}{\sqrt{e^{-2t}+e^{2t}+2}}=\frac{-e^{-t}i+e^{t}j+\sqrt{2}\,k}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)} \quad\to\quad \vec{T}(0)=\frac{-i+j+\sqrt{2}\,k}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{T}'(t)=\frac{\left(e^{-t}i+e^{t}j\right)\left(e^{t}+e^{-t}\right)-\left(e^{t}-e^{-t}\right)\left(-e^{-t}i+e^{t}j+\sqrt{2}\,k\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}$$

$$\vec{T}'(0)=\frac{(i+j)(2)-(0)\left(-i+j+\sqrt{2}\,k\right)}{(2)^{2}}=\frac{i+j}{2}$$

بنابراین، بردار یکه مماس و بردار قائم یکه اصلی در این نقطه عبارتند از:

$$\vec{T}(0)=\frac{-i+j+\sqrt{2}\,k}{2} \quad\Rightarrow\quad \vec{N}(0)=\frac{T'(0)}{|T'(0)|}=\frac{\frac{i+j}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{i+j}{\sqrt{2}}$$

پس بردار قائم یکه دوم عبارت است از:

$$\vec{B}(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,j-2k\right)$$

بنابراین، گزینه اول صحیح است.

۴ـ انحناء بیضی $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ در نقطه $(1,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل:

با نوشتن معادله بیضی مذکور در فرم پارامتری داریم:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'=-\sin t\,,\ x''=-\cos t \\ y'=2\cos t\,,\ y''=-2\sin t \end{cases}$$

در نقطه $x=1\,,\,y=0$ داریم $t=0$؛ لذا:

$$\begin{cases} x'=0\ ,\ x''=-1 \\ y'=2\,,\ y''=0 \end{cases}$$

و به‌دست می‌آید:

$$\kappa(0)=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

۵ـ انحناء منحنی $\vec{R}(t)=t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}+t^2\,\vec{k}$ در $t=0$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) 4

حل:

$$\vec{R}(t)=t\cos t\,i+t\sin t\,j+t^2k \ \rightarrow\ \vec{R}'(t)=(\cos t-t\sin t)i+(\sin t+t\cos t)j+2tk$$

$$\rightarrow\ \vec{R}''(t)=(-\sin t-\sin t-t\cos t)i+(\cos t+\cos t-t\sin t)j+2k$$

در $t=0$ داریم:

$$\vec{R}'=i\ ,\ \vec{R}''=2j+2k\ \ \rightarrow\ \ \vec{R}'\times\vec{R}''=2k-2j$$

و به‌دست می‌آید:

$$\kappa(0)=\frac{\left|\vec{R}'\times\vec{R}''\right|}{\left|\vec{R}'\right|^3}=\frac{|2k-2j|}{|i|^3}=\frac{\sqrt{4+4}}{1}=2\sqrt{2}$$

۶ـ اگر $xy+y^3=1$، انحناء منحنی در نقطه $x=0\ ,\ y=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$ ۴) $\frac{2}{\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}$

حل :

با دو بار مشتق‌گیری از رابطه داده شده، خواهیم داشت:

$$xy+y^3=1\ \rightarrow\ y+xy'+3y^2y'=0\ \rightarrow\ y'+y'+xy''+3\left(2yy'y'+y^2y''\right)=0$$

با جایگذاری $x=0\ ,\ y=1$ در دو معادله اخیر داریم:

$$\begin{cases}(1)+(0)y'+3(1)^2y'=0\ \rightarrow\ y'=-\frac{1}{3}\\ \left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+(0)y''+3\left(2(1)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+(1)^2y''\right)=0\ \rightarrow\ y''=0\end{cases}$$

لذا، در نقطه مذکور داریم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

۷ـ انحناء منحنی $r=1+\cos\theta$ در چه نقطه‌ای $\frac{3}{2}$ می‌شود؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

حل :

$$r=1+\cos\theta\ \rightarrow\ r'=-\sin\theta\ \rightarrow\ r''=-\cos\theta$$

$$\kappa(\theta)=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|1+\cos^2\theta+2\cos\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta\right|}{\left(1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{|3(1+\cos\theta)|}{\left(2(1+\cos\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

پس باید:

$$\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2} \rightarrow \sqrt{2}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=1 \rightarrow (1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 1+\cos\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

۸ـ انحناء منحنی $y=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{\alpha}$ ۴) $\frac{2\pi}{\alpha}$

حل :

$$y'=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right)d\alpha=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\alpha}\alpha\cos\alpha x\,d\alpha=\int_{\pi}^{2\pi}\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{x}(\sin\alpha x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{x}(\sin 2\pi x-\sin\pi x) \rightarrow y''=-\frac{1}{x^2}(\sin 2\pi x-\sin\pi x)+\frac{1}{x}(2\pi\cos 2\pi x-\pi\cos\pi x)$$

در $x=1$ داریم $y''=3\pi$ و $y'=0$ و به‌دست می‌آید:

$$\kappa(1)=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\pi}{\left(1+0^2\right)^{\frac{3}{2}}}=3\pi$$

۹ـ تاب منحنی حلزونی $\vec{r}(t)=a\cos t\,i+a\sin t\,j+amt\,k$ عبارت است از:

۱) $\frac{m}{a\left(1+m^2\right)}$ ۲) $\frac{1}{a\left(1+m^2\right)}$ ۳) $\frac{m^2}{a\left(1+m^2\right)}$ ۴) به $\frac{2m^2}{a\left(1+m^2\right)}$

حل :

داریم:

$$\vec{r}'=a(-\sin t\,i+\cos t\,j+mk)\ ,\ \vec{r}''=a(-\cos t\,i-\sin t\,j)\ ,\ \vec{r}^{(3)}=a(\sin t\,i-\cos t\,j)$$

$$\vec{r}'.\left(\vec{r}''\times\vec{r}^{(3)}\right)=a^3\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t & m\\ -\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & -\cos t & 0\end{vmatrix}=a^3m$$

$$\vec{r}'\times\vec{r}''=a^2\begin{vmatrix}i & j & k\\ -\sin t & \cos t & m\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=a^2(m\sin t\,i-m\cos t\,j+k)$$

بنابراین داریم:

$$\tau=\frac{r'\cdot r''\times r^{(3)}}{|r'\times r''|^2}=\frac{a^3m}{a^4\left(m^2\sin^2 t+m^2\cos^2 t+1\right)}=\frac{m}{a\left(m^2+1\right)}$$

یادداشت:

فصل ششم

انتگرال‌های دوگانه

محاسبه انتگرال‌های دوگانه
روش نوشتن حدود انتگرال‌های دوگانه
وقتی میدان انتگرال‌گیری مشخص باشد.
برخی کاربردهای انتگرال دوگانه
تغییر متغیر در انتگرال های دوگانه
محاسبه یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
مجموعه تست انتگرال‌های دوگانه

یادداشت:

محاسبه انتگرال‌های دوگانه

یک انتگرال دوگانه به فرم‌های زیر بیان می‌شود :

$$I=\int_a^b\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy\,dx \qquad J=\int_c^d\int_{m(y)}^{n(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

روال کلی محاسبه این انتگرال‌ها، مانند انتگرال‌های معین یگانه می‌باشد؛ بدین ترتیب که، در محاسبه I نخست تابع اولیه $f(x,y)$ را نسبت به متغیر y و با این فرض که x ثابت می‌باشد به‌دست می‌آوریم و سپس در این تابع اولیه، مطابق قضیه اساسی حساب، حدود y را (که همان توابع $q(x)$ و $p(x)$ می‌باشند) قرار می‌دهیم. حال به تابعی می‌رسیم که تنها شامل متغیر x است. با محاسبه تابع اولیه این تابع و اعمال حدود x (که همان اعداد a , b می‌باشند)، جواب نهایی به‌دست می‌آید.

در محاسبه J نخست تابع اولیه $f(x,y)$ را نسبت به متغیر x و با این فرض که y ثابت می‌باشد به‌دست می‌آوریم و سپس در این تابع اولیه، مطابق قضیه اساسی حساب، حدود y را (که همان توابع $n(y)$ و $m(y)$ می‌باشند) قرار می‌دهیم. حال به تابعی می‌رسیم که تنها شامل متغیر y است. با محاسبه تابع اولیه این تابع و اعمال حدود y (که همان اعداد c , d می‌باشند)، جواب نهایی به‌دست می‌آید.

توجه مهم

۱ـ ترتیب نوشتن dy و dx در صورت مساله، ممکن است به طور مناسب بیان نشده باشد؛ لذا، قبل از شروع اولین انتگرال‌گیری، باید ببینیم حدود انتگرال داخلی بر حسب کدام متغیر است، اگر این حدود برحسب x بودند؛ حدود متغیرِ y را نشان می‌دهند و لذا، اول باید انتگرال‌گیری نسبت به متغیر y انجام شود؛ بنابراین، ترتیب صحیح، dy dx می‌باشد و اگر این حدود برحسب y بودند؛ حدود متغیرِ x را نشان می‌دهند و لذا، اول باید انتگرال‌گیری نسبت به متغیر x انجام شود؛ بنابراین، ترتیب صحیح dx dy خواهد بود.

البته، اگر حدود انتگرال داخلی اعداد ثابت باشند (دقت کنید که، حدود انتگرال خارجی همیشه اعداد ثابت هستند)، باید به همان ترتیب نوشته شده برای dy و dx اطمینان نمود و به حل مساله پرداخت.

۲ـ بحث انجام شده، دربارهٔ محاسبه یک انتگرال دوگانه برای انتگرال‌های سه‌گانه (و بیشتر) نیز قابل تعمیم است؛ مثلا، در انتگرال سه‌گانه‌ای؛ مانند:

$$I=\int_a^b\int_{m(x)}^{n(x)}\int_{p(y,x)}^{q(y,x)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

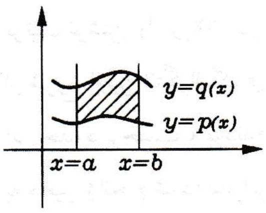
طبیعی است نخست باید تابع اولیه $f(x,y,z)$ را نسبت به متغیر z و با فرض ثابت بودن x , y به‌دست آورده و پس از اعمال حدود $q(y,x)$ و $p(y,x)$ در این تابع اولیه، مساله دقیقا به یک انتگرال دوگانه تبدیل می‌شود که می‌توان به حل آن پرداخت.

روش نوشتن حدود انتگرال‌ها وقتی میدان انتگرال‌گیری مشخص باشد

یک انتگرال دوگانه (با هر معنایی که داشته باشد) در یک ناحیه (میدان) محاسبه می‌شود. برای محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$ که در آن D یک ناحیه مشخص در صفحه است و $dA=dx\,dy=dy\,dx$ المان مساحت این ناحیه می‌باشد، نخست باید حدود انتگرال‌ها را با توجه به وضعیت تعریف D مشخص نموده و سپس با روش گفته شده به یافتن جواب بپردازیم.

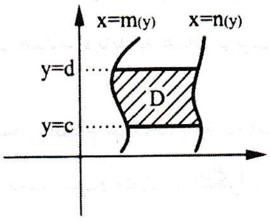
استفاده از دو بحث زیر معمولا در این رابطه مفید خواهد بود:

الف) اگر ناحیه D به منحنی‌های $y=p(x)$, $y=q(x)$ و خطوط $x=a, x=b$ محدود شده باشد (مطابق شکل)، می‌نویسیم: (میدان منظم نسبت به محور y)



$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

ب) اگر ناحیه D به منحنی‌های $x=n(y)$ و $x=m(y)$ و خطوط $y=c$, $y=d$ محدود شده باشد (مطابق شکل)، می‌نویسیم: (میدان منظم نسبت به محور x)



$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{m(y)}^{n(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

تغییر ترتیب انتگرال‌گیری

ممکن است یک انتگرال دوگانه با حدود مشخص، داده شود و ملاحظه کنیم، محاسبه انتگرال تابع مورد نظر نسبت به متغیری که قرار است انتگرال‌گیری نسبت به آن شروع شود، امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این شرایط با توجه به حدود انتگرال اصلی، میدان انتگرال‌گیری را رسم نموده و سپس حدود انتگرال‌ها را طوری تغییر می‌دهیم که ترتیب انتگرال‌گیری عوض شود. حال محاسبه انتگرال نسبت به متغیر دیگر ساده خواهد بود.

انتگرال‌های دوگانه در فرم ناسره

ممکن است یک انتگرال دوگانه فرم ناسره داشته باشد؛ بدین معنا که، حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری نامتناهی و یا تابع زیر علامت انتگرال در بعضی از نقاط داخل ناحیه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد.

تحلیل چنین مسایلی مشابه انتگرال‌های ناسره یگانه بوده و البته حاصل کار ممکن است همگرا یا واگرا باشند.

خاصیت جمع‌پذیری دامنه (شکست ناحیه انتگرال‌گیری)

گاهی ممکن است؛

الف) به علت نامنظم بودن میدان انتگرال‌گیری نسبت به هر دو متغیر

ب) به علت آنکه تابع زیر علامت انتگرال در کل میدان انتگرال‌گیری با یک ضابطهٔ مشخص و منحصر به فرد قابل بیان نمی‌باشد؛

لازم شود ناحیه انتگرال‌گیری را به زیر نواحی کوچک‌تر (که اجتماعشان ناحیه اصلی را می‌دهد و اشتراک دو به دوی آنها تهی است) تقسیم‌بندی کرده و سپس در هر قسمت تابع مناسب و حدود مقتضی را مشخص کنیم.

طبیعی است در مورد الف تقسیم بندی میدان باید به گونه‌ای انجام شود که، هر یک از قسمت‌ها نسبت به یک محور منظم باشند و در مورد ب تقسیم‌بندی میدان باید به نحوی صورت گیرد، که در هر ناحیه تابع زیر انتگرال دارای ضابطه منحصر به فردی گردد.

برخی کاربردهای انتگرال دوگانه

۱) محاسبه مساحت یک ناحیه

اگر D ناحیه‌ای مشخص در صفحه باشد، مساحت آن را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$S = \iint_D dx\,dy \quad \text{یا} \quad S = \iint_D dy\,dx$$

۲) محاسبه مرکز سطح یک ناحیه

اگر D ناحیه‌ای مشخص در صفحه باشد، مختصات مرکز سطح آن را می‌توان به فرم زیر به‌دست آورد:

$$x_c = \frac{\iint x\, dx\, dy}{\iint dx\, dy} = \frac{\iint x\, dx\, dy}{S} \qquad y_c = \frac{\iint y\, dx\, dy}{\iint dx\, dy} = \frac{\iint y\, dx\, dy}{S}$$

۳) ممان اینرسی یک ناحیه نسبت به محورهای مختصات

ممان اینرسی ناحیه D نسبت به محورهای مختصات به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$I_x = \iint_D y^2\, dx\, dy \qquad I_y = \iint_D x^2\, dx\, dy$$

و ممان اینرسی نسبت به مبدا مختصات به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$I_0 = I_x + I_y$$

۴) مقدار متوسط یک تابع دو متغیره در یک ناحیه

مقدار متوسط تابع $z=f(x,y)$ در ناحیه D را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\overline{f} = \frac{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy}$$

۵) حجم محدود شده به دو رویه

فرض کنید D ناحیه‌ای مشخص در صفحه xy باشد، که به ازای همه نقاط واقع در آن برای دو رویه $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ داریم $f(x,y)>g(x,y)$. در این شرایط حاصل انتگرال $\iint_D (f(x,y)-g(x,y))\,dxdy$ حجم ناحیه بین دو رویه $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ را که از اطراف به استوانه‌ای با مقطع D محدود شده را نشان می‌دهد.

تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

در مواردی که انتگرال‌گیری از تابع زیر علامت انتگرال نسبت به هر دو متغیر پیچیده (غیرممکن) بوده و یا میدان انتگرال‌گیری پیچیده (نسبت به هر دو متغیر نامنظم) باشد، ممکن است اعمال یک تغییر متغیر مناسب بتواند حل مساله را ساده کند.

چنانچه در محاسبه $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ بخواهیم از تغییر متغیرهای $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ و یا $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ استفاده کنیم، لازم است نخست ژاکوپین تغییر دستگاه مختصات را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad J=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

(در حقیقت $dx\,dy=|J|\,du\,dv$ می‌باشد).

اینک، تبدیل یافته ناحیه D تعریف شده در صفحه xy را در صفحه uv که ناحیه‌ای؛ مانند، D' می‌باشد، مشخص می‌کنیم. حال، اگر بیان تابع $f(x,y)$ بر حسب متغیرهای v و u به‌صورت $f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)=h(u,v)$ نوشته شود، داریم:

$$I=\iint_D h(u,v)|J|\,du\,dv$$

محاسبه یک انتگرال دوگانه درمختصات قطبی

همان‌طوری که می‌دانیم ارتباط بین متغیرهای دستگاه مختصات دکارتی (x,y) ومختصات قطبی (r,θ) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r^2=x^2+y^2 \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \rightarrow \theta=\operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{x} \end{cases}$$

برخی مواقع یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی مطرح می‌شود (و یا در مختصات دکارتی بیان شده و مناسب است آن را در مختصات قطبی تحلیل نماییم):

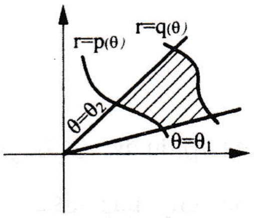
الف) اگر اصل مساله در مختصات دکارتی تعریف شده باشد و بخواهیم مساله را در دستگاه مختصات قطبی تحلیل کنیم (این اتفاق به خصوص زمانی که برخی مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری دایره شکل می‌باشند، انجام می‌گیرد)، باید اولا؛ تابع $f(x,y)$ را برحسب r , θ بازنویسی کنیم، ثانیا؛

منحنی‌های مرزی ناحیه D را در فرم قطبی، برحسب r , θ بیان کنیم و ثالثا؛ به جای $dx\,dy$ عبارت $r\,dr\,d\theta$ را قرار دهیم. حال فقط لازم است حدود انتگرال‌ها را بنویسیم. این مطلب را در ادامه توضیح می‌دهیم.

ب) اگر اصل مساله در مختصات قطبی تعریف شده باشد، تنها مشکل، نوشتن حدود متغیرها می‌باشد و ادامه حل دقیقا مانند حل انتگرال در دستگاه مختصات دکارتی خواهد بود.

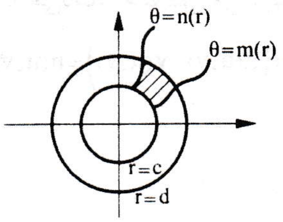
روش نوشتن حدود انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

الف) اگر میدان انتگرال گیری نسبت به r منظم باشد:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=p(\theta)}^{q(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

ب) اگر میدان انتگرال گیری نسبت به θ منظم باشد:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r=c}^{d}\int_{\theta=m(r)}^{n(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

نکته: در صورت وجود مرزهای بیضی شکل و به‌خصوص، جمله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در معادله مرزهای یک ناحیه انتگرال دوگانه، استفاده از تغییر متغیرهای شبه قطبی $\begin{cases} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\sin\theta \end{cases}$ ممکن است مناسب باشد.

در این شرایط می‌توان نشان داد:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2 \quad \rightarrow \quad r=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

$$\tan\theta=\frac{a}{b}\frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \theta=\text{Arc}\tan\left(\frac{a}{b}\frac{y}{x}\right)$$

$$dx\,dy=a\,b\,r\,dr\,d\theta$$

و البته نحوه قرار دادن حدود انتگرال‌ها کاملاً مشابه وضعیت استفاده از مختصات قطبی معمولی است.

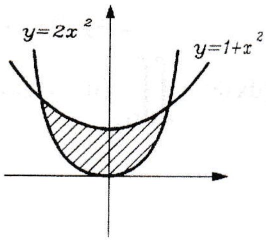
مجموعه تست انتگرال‌های دوگانه

۱ ـ حاصل $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ **با فرض** $f(x,y)=x+2y$ **و** $D: y\ge 2x^2\ ,\ y\le 1+x^2$ **کدام است؟**

۱) $\frac{32}{15}$ ۲) $\frac{17}{15}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{11}{15}$

حل :

محل تلاقی منحنی‌های مرزی را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=1+x^2 \end{cases} \rightarrow\ 2x^2=1+x^2\ \rightarrow\ x=\pm 1$$

لذا، داریم:

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(xy+y^2\right)\Big|_{2x^2}^{1+x^2}dx$$

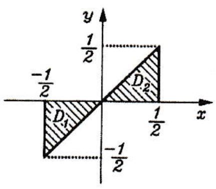
$$=\int_{-1}^{1}\left\{\left(x\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)^2\right)-\left(x\left(2x^2\right)+\left(2x^2\right)^2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x+x^3+1+x^4+2x^2-2x^3-4x^4\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-x^3+x\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(-3x^4+2x^2+1\right)dx=0+2\left(-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1$$

$$=2\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{32}{15}$$

۲ ـ حاصل $I=\iint_D\left(\left[2x\right]+\left[y^2\right]\right)dx\,dy$ **که در آن D ناحیه نشان داده شده در شکل می‌باشد، کدام است؟**



۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$

۳) 0 ۴) $\frac{1}{8}$

حل :

در کل ناحیه D داریم:

$$-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 0\le y^2\le\frac{1}{4}\ \rightarrow\ \left[y^2\right]=0$$

در ناحیه D_1 داریم:

$$\frac{-1}{2}\le x<0\ \rightarrow\ -1\le 2x<0\ \rightarrow\ [2x]=-1$$

در ناحیه D_2 داریم:

$$0\le x<\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 0\le 2x<1\ \rightarrow\ [2x]=0$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D f\,dA=\iint_{D_1} f\,dA+\iint_{D_2} f\,dA=\iint_{D_1}\left((-1)+0\right)dx\,dy+\iint_{D_2}(0+0)\,dx\,dy$$

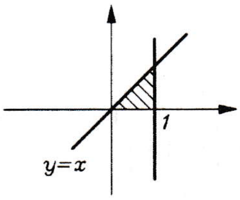
$$=-\,(\text{مساحت ناحیه } D_1)=-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{8}$$

۳ ـ مقدار متوسط تابع $f(x,y)=x+y$ **در ناحیه** $D=\{(x,y)|0<y<x<1\}$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

ناحیه D مطابق شکل زیر است:



$$\bar{f}=\frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

اما ملاحظه می‌شود:

$$\iint_D dx\,dy=\text{مساحت ناحیه } D=\frac{1}{2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_y^1(x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_y^1 dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}-y^2\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y-\frac{3y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

پس:

$$\bar{f} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

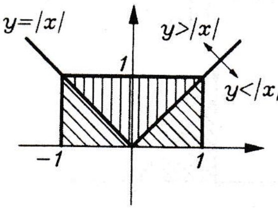
۴ـ حاصل $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ **که در آن** $f(x,y) = \begin{cases} -1 & y > |x| \\ 2 & y < |x| \end{cases}$ **و D ناحیهٔ زیر**

است، کدام می‌باشد؟ $D: -1 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 1$

۱) 1 ۲) 0 ۳) 2 ۴) 3

حل :

اگر قسمت هاشورخورده‌ای را که بالای نمودار $y > |x|$ قرار دارد D_1 و ناحیه دیگر را D_2 بنامیم، داریم:



$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_{D_1} (-1)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (2)\,dx\,dy$$

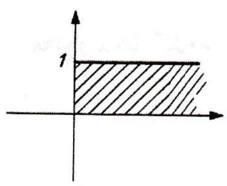
$$= -1(D_1 \text{ مساحت }) + 2(D_2 \text{ مساحت}) = -1(1) + 2(1) = 1$$

۵ـ حاصل $I = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) واگرا است. ۴) π

حل :

داریم:



$$I = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{y} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{x=\infty} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \operatorname{Arc tan}\left(\frac{\infty}{y}\right) - \operatorname{Arc tan}\left(\frac{0}{y}\right) \right\} dy = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) dy = \frac{\pi}{2}$$

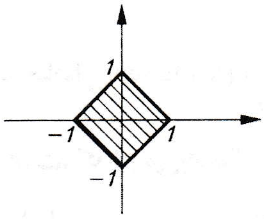
۶ـ حاصل انتگرال $\iint_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)\,dx\,dy$ **کدام است؟**

۱) 2 ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل :

ناحیه $|x|+|y|\le 1$ داخل مربع $|x|+|y|=1$ می‌باشد، که در شکل زیر رسم شده است:

مرزهای ناحیه مورد بحث، عبارتند از:

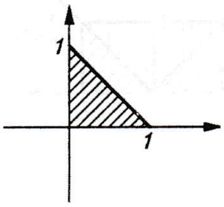


$$x>0\,,y>0 \Rightarrow x+y=1$$
$$x>0,y<0 \Rightarrow x-y=1$$
$$x<0,y<0 \Rightarrow -x-y=1$$
$$x<0,y>0 \Rightarrow -x+y=1$$

از آنجا که ناحیه D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع زیر علامت انتگرال؛ یعنی، $|x|+|y|$ با تبدیل $x\to -x$ و $y\to -y$ تغییری نمی‌کند؛ می‌توان نوشت:

$$I=4\iint_{D'}\left(|x|+|y|\right)dx\,dy$$

که ناحیه D' مطابق شکل می‌باشد:



بنابراین داریم:

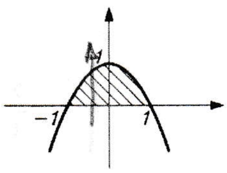
$$I=4\int_0^1\int_0^{1-y}(x+y)\,dx\,dy=4\int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_0^{1-y}=4\int_0^1\left(\frac{(1-y)^2}{2}+y(1-y)\right)dy$$
$$=4\left(\frac{(y-1)^3}{6}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}$$

۷- عرض مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y=1-x^2$ و محور xها کدام است؟

۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

حل :

$$y_c=\frac{\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}y\,dy\,dx}{\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}dy\,dx}=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x^2}dx}{\int_{-1}^{1}y\Big|_0^{1-x^2}dx}$$



$$=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2dx}{\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx}=\frac{2\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\left(1+x^4-2x^2\right)dx}{2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)dx}=\frac{\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^{+1}}{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{8}{15}\right)}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$$

۸ـ انتگرال $\int_0^1\int_0^{x^2}f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^3\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)\,dy\,dx$ **با کدام انتگرال برابر است؟**

۱) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\,dx\,dy$

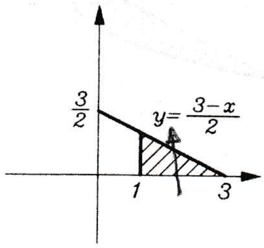
۲) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{3+2y}f(x,y)\,dx\,dy$

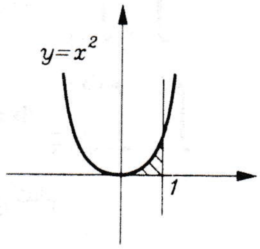
۳) $\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\,dx\,dy$

۴) هیچ‌کدام

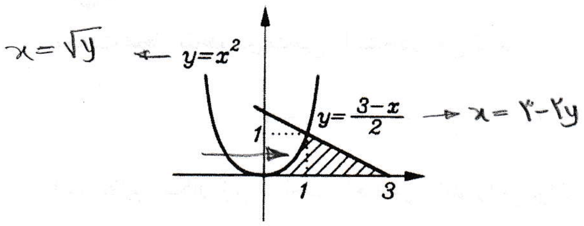
حل :

میدان انتگرال‌گیری مجموع دو ناحیه زیر است:





پس در کل ناحیه انتگرال‌گیری چنین است:



و می‌توان نوشت:

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\,dx\,dy$$

۹ـ سطح محصور شده به منحنی‌های $y = 4x^2 \ , y = \frac{1}{9}x^2 , y = 2$ که در ربع اول دستگاه مختصات واقع است را به‌دست آورید.

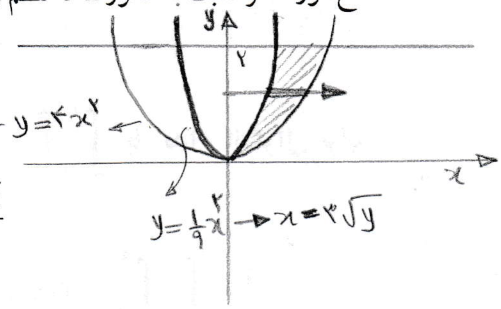
۱) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ۲) $10\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ۴) $5\sqrt{2}$

حل :

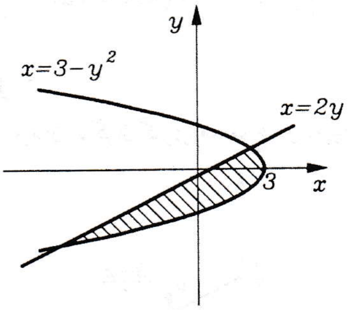
سطح مورد نظر نسبت به محور x ها منظم ونسبت به محور y ها نا منظم است لذا، می‌نویسیم:

$$S = -\int_0^2 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{3\sqrt{y}} dx\,dy = \int_0^2 \left(3\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy$$

$$= \int_0^2 \frac{5y^{\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{5}{2}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{5}{3}\left\{2\sqrt{2} - 0\right\} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$



۱۰ـ مساحت ناحیه نشان داده شده در شکل زیر از طریق کدام انتگرال دوگانه زیر قابل محاسبه است؟



۱) $\int_{-6}^{2}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\frac{x}{2}} dy\,dx + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} dy\,dx$

۲) $\int_{-3}^{1}\int_{1-y^2}^{2y} dx\,dy$

۳) $\int_{-6}^{3}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} dx\,dy$

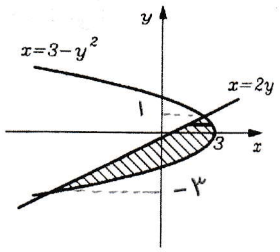
۴) هیچ کدام

حل :

نخست محل تقاطع دو منحنی را مشخص می‌کنیم:

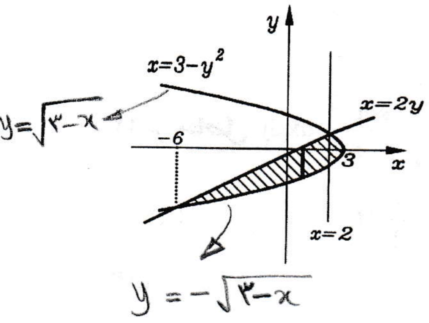
$$\begin{cases} x = 2y \\ x = 3 - y^2 \end{cases} \rightarrow \ 3 - y^2 = 2y \ \rightarrow \ y^2 + 2y - 3 = 0 \ \rightarrow \ y = 1\,,\,-3$$

لذا، مطابق اشکال زیر مساحت ناحیه موردنظر را می‌توان به یکی از دو فرم زیر به‌دست آورد:



$$S=\int_{-3}^{1}\int_{2y}^{3-y^2}dx\,dy$$

$x = ۳ - y^۲ \to x - ۳ = -y^۲$
$\to y^۲ = ۳ - x \to y = \pm\sqrt{۳-x}$



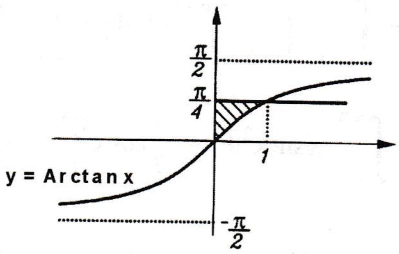
$$S=\int_{-6}^{2}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\frac{x}{2}}dy\,dx+\int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}}dy\,dx$$

۱۱ ـ حاصل $I=\int_{0}^{1}\int_{\operatorname{Arctan}x}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos y)\,dy\,dx$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{2}\ln^2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۳) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\ln^2 2$

حل :

با تغییر ترتیب انتگرال گیری داریم:



$$I=\int_{y=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{x=0}^{\tan y}\ln(\cos y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos y).\,x\Big|_{0}^{\tan y}dy$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos y).\tan y\,dy$$

با تغییر متغیر $\ln\cos y=u$ داریم:

$$\frac{-\sin y}{\cos y}dy=du \to -\tan y\,dy=du\ ,\quad \begin{cases} y=0 \to u=\ln\cos 0=\ln(1)=0\\ y=\frac{\pi}{4} \to u=\ln\cos\frac{\pi}{4}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

و به‌دست می‌آید:

$$I=\int_0^{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} -u\,du=-\frac{1}{2}u^2\Big|_0^{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

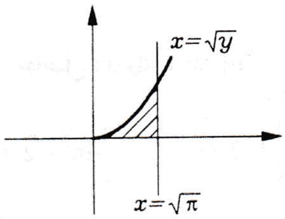
$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}=-\frac{1}{2}\left(-\ln\sqrt{2}\right)^2=-\frac{1}{2}\ln^2\sqrt{2}$$

۱۲ـ حاصل $I=\int_0^{\pi}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\pi}}\frac{\sin x^2}{x}\,dx\,dy$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -4 ۴) $\frac{-1}{2}$

حل:

چون محاسبه تابع اولیه $\frac{\sin x^2}{x}$ نسبت به متغیر x امکان‌پذیر نمی‌باشد؛ با ترسیم میدان انتگرال گیری و تغییر در ترتیب انتگرال گیری می‌نویسیم:



$$I=\int_{x=0}^{\sqrt{\pi}}\int_{y=0}^{x^2}\frac{\sin x^2}{x}\,dy\,dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{\sin x^2}{x}\cdot y\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x}\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{2}(-1-1)=1$$

۱۳ـ اگر D ناحیه محدود به خطوط $y=5x$, $y=2x$, $x+y=2$, $x+y=1$ **باشد، حاصل** $I=\iint_D\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx\,dy$ **کدام است؟**

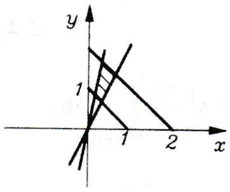
۱) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ ۲) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ۳) $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ ۴) $\frac{5}{2}$

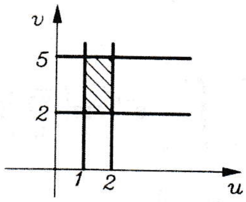
حل:

با تغییر متغیرهای $\begin{cases}u=x+y\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}}=\frac{x^2}{x+y}$$

تبدیل یافته ناحیه D؛ یعنی، D' دارای مرزهای $\begin{cases} u=1 \\ u=2 \\ v=2 \\ v=5 \end{cases}$ بوده و چنین است:





از طرفی داریم:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx\,dy=\iint_{D'}\frac{y+x}{xy}\left|\frac{x^2}{x+y}\right|du\,dv=\iint_{D'}\frac{x}{y}\,du\,dv$$

$$=\iint_{D'}\frac{1}{v}du\,dv=\int_{v=2}^{5}\int_{u=1}^{2}\frac{1}{v}du\,dv=u\Big|_1^2\times\ln|v|\Big|_2^5=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

تذکر: توجه داریم که در ناحیه مشخص شده، $x+y>0$ است؛ لذا:

$$\left|\frac{x^2}{x+y}\right|=\frac{x^2}{x+y}$$

۱۴ ـ **حاصل** $I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x+y)}\sin\left(\frac{\pi y}{x+y}\right)dx\,dy$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) صفر ۴) 1

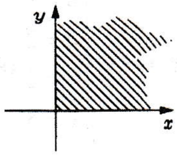
حل :

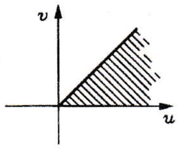
با تغییر متغیرهای $\begin{cases} x+y=u \\ y=v \end{cases}$ داریم $\begin{cases} x=u-v \\ y=v \end{cases}$ و لذا:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}=1$$

میدان انتگرال‌گیری به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$x\ge 0 \;\rightarrow\; u-v\ge 0 \;\rightarrow\; u\ge v$$
$$y\ge 0 \;\rightarrow\; v\ge 0$$





لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\int_{u=0}^{+\infty}\int_{v=0}^{u} e^{-u}\sin\left(\frac{\pi v}{u}\right)dv\,du=\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\,\frac{-u}{\pi}\cos\left(\frac{\pi v}{u}\right)\Bigg|_{v=0}^{u} du$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\,\frac{-u}{\pi}\left\{\cos(\pi)-\cos(0)\right\}du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} ue^{-u}\,du=\frac{2}{\pi}\left\{-ue^{-u}-e^{-u}\right\}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=-\frac{2}{\pi}(u+1)\,e^{-u}\Big|_{0}^{+\infty}=-\frac{2}{\pi}(0-1)=\frac{2}{\pi}$$

مهم **۱۵ ـ مساحت محدود به منحنی‌های** $xy=4$ ، $xy=8$ ، $xy^3=5$ ، $xy^3=15$ **کدام است؟**

۱) $2\ln 3$ ۲) $4\ln 3$ ۳) $3\ln 2$ ۴) $6\ln 2$

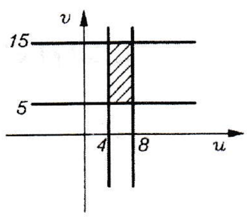
حل:

با استفاده از تغییر متغیرهای $\begin{cases}xy=u\\ xy^3=v\end{cases}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ y^3 & 3xy^2\end{vmatrix}}=\frac{1}{2xy^3}=\frac{1}{2v}$$

و تبدیل یافته ناحیه موردنظر چنین خواهد شد:

$$\begin{cases}xy=4 \;\rightarrow\; u=4\\ xy=8 \;\rightarrow\; u=8\\ xy^3=5 \;\rightarrow\; v=5\\ xy^3=15 \;\rightarrow\; v=15\end{cases}$$



لذا، می‌توان گفت:

$$S=\iint_D dx\,dy=\iint_{D'}\left|\frac{1}{2v}\right|du\,dv=\int_5^{15}\int_4^8\frac{1}{2v}\,du\,dv=\frac{1}{2}\ln|v|\Big|_5^{15}\times u\Big|_4^8$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 15-\ln 5)\,(8-4)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{15}{5}\right)(4)=2\ln 3$$

اما، دقت کنید که منحنی‌های داده شده، نسبت به مبدأ مختصات متقارنند؛ بنابراین، ناحیه‌ای که از تلاقی این منحنی‌ها ایجاد می‌شود، دو قسمت مجزا و متقارن نسبت به مبدأ می‌باشند که تبدیل یافته هر یک، ناحیه نشان داده شده در شکل است؛ به بیان دیگر، ناحیه‌ای که در شکل مشاهده می‌شود، دو ناحیهٔ منطبق بر هم است؛ لذا، مساحت کل عبارت است از:

$$S=2(2\ln 3)=4\ln 3$$

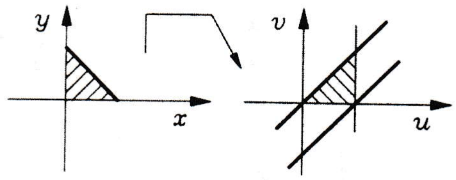
بسیار

۱۶ـ حاصل $\int_0^1\int_0^{1-x}\cos\left(\frac{y}{x+y}\right)dy\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}\sin 1$ ۲) $\sin 1$ ۳) $2\sin 1$ ۴) 0

حل :

با تغییر متغیرهای $\begin{cases}x+y=u\\y=v\end{cases}$ داریم $\begin{cases}x=u-v\\y=v\end{cases}$ و میدان انتگرال‌گیری به فرم زیر تبدیل می‌شود:



$y=0 \rightarrow v=0$

$y=1-x \rightarrow u=1$

$x=0 \rightarrow u=v$

$x=1 \rightarrow u-v=1$

ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات نیز چنین است:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}=1$$

حال می‌توان نوشت:

$$I=\iint_{D'}\cos\left(\frac{v}{u}\right)du\,dv=\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{u}\cos\left(\frac{v}{u}\right)dv\,du=\int_0^1 u\sin\left(\frac{v}{u}\right)\Big|_0^u\,du$$

$$=\int_0^1 u(\sin 1-\sin 0)\,du=\frac{1}{2}\sin 1$$

۱۷ـ مساحت ناحیه $D: 9(2x+5y-6)^2+\frac{1}{4}(3x+2y+5)^2 \le 9$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{11}$ ۲) $\frac{3\pi}{11}$ ۳) $\frac{6\pi}{11}$ ۴) $\frac{9\pi}{11}$

حل:

با تغییر متغیرهای $\begin{cases} 2x+5y-6=u \\ 3x+2y+5=v \end{cases}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{-11}$$

و تبدیل یافته ناحیه موردنظر، داخل بیضی $9u^2+\frac{v^2}{4}\le 9$ خواهد بود، پس:

$$S=\iint_D dx\,dy=\int\int_{u^2+\frac{v^2}{36}\le 1}\frac{1}{11}du\,dv$$

$$=\frac{1}{11}(u^2+\frac{v^2}{36}=1 \text{ مساحت بیضی})=\frac{1}{11}(\pi(1)(6))=\frac{6\pi}{11}$$

معادله بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

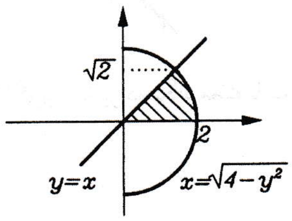
$\Rightarrow$ $\boxed{S_{\text{بیضی}}=\pi ab}$

۱۸ـ حاصل $\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy$ **کدام است؟**

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

حل:

میدان انتگرال‌گیری مطابق شکل مقابل است و با استفاده از مختصات قطبی داریم:



$$I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{2}(r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3dr\right)$$

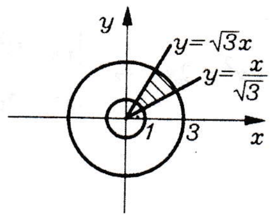
$$=\left(\frac{-1}{4}\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2=\left(\frac{1}{4}\right)(4)=1$$

۱۹ ـ حاصل انتگرال دوگانه $I=\iint_D \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}\,dx\,dy$ **که در آن** D **قسمتی از حلقه به معادله** $x^2+y^2\geq 1$ ، $x^2+y^2\leq 9$ ، $y\geq \frac{x}{\sqrt{3}}$ **و** $y\leq x\sqrt{3}$ **می‌باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{16}$

حل :

با استفاده از دستگاه مختصات قطبی داریم:



$$I=\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=1}^{3}\theta\ r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\theta^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\quad \frac{1}{2}r^2\Big|_1^3$$

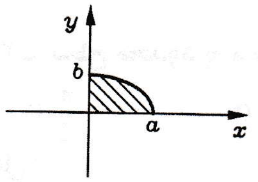
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right\}(9-1)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{12}\right)(8)=\frac{\pi^2}{6}$$

۲۰ ـ حاصل $\iint_D xy\,dx\,dy$ **در ناحیه** $D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\,,\,x\geq 0\,,\,y\geq 0\right\}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{a^2b^2}{8}$ ۲) $\frac{a^2b^2}{4}$ ۳) $\frac{a^2b^2}{16}$ ۴) $\frac{a^2b^2}{2}$

حل :

با استفاده از تغییر متغیرهای شبه قطبی داریم:



$$\boxed{\begin{cases}x=a\,r\cos\theta\\ y=b\,r\sin\theta\end{cases}\rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2}$$

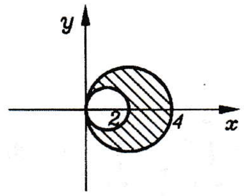
$$I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}(a\,r\cos\theta)(b\,r\sin\theta)(ab\,r\,dr\,d\theta)=a^2b^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\ d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3dr\right)$$

$$=\frac{a^2b^2}{2}\ \frac{-1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\ \frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=-\frac{a^2b^2}{4}(-1-1)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a^2b^2}{8}$$

۲۱ـ اگر D ناحیه محدود به دوایر $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ باشد، حاصل $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ کدام است؟

۱) $\frac{224}{9}$ ۲) $\frac{224}{5}$ ۳) $\frac{112}{9}$ ۴) $\frac{112}{5}$

حل :



$$x^2+y^2=4x \rightarrow \begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ r^2=4r\cos\theta \rightarrow r=4\cos\theta\end{cases}$$

$$x^2+y^2=2x \rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ r^2=2r\cos\theta \rightarrow r=2\cos\theta\end{cases}$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,r\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^3\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}d\theta$$

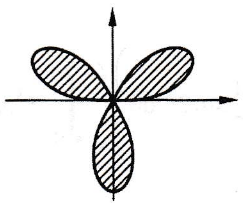
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\left(64\cos^3\theta-8\cos^3\theta\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{56}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{56}{3}2\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{112}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{224}{9}$$

۲۲ـ سطح محدود به منحنی $r=\sin3\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل :



$r=\sin3\theta$ گل سه پر بوده و با توجه به تقارن و اینکه $\begin{cases}\theta=0 \rightarrow r=0\\ \theta=\frac{\pi}{3} \rightarrow r=0\end{cases}$ یکی از گلبرگ‌ها

در فاصله $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ تشکیل می‌شود و داریم:

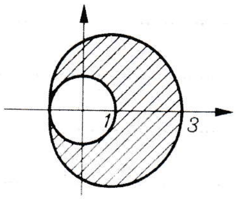
$$S=3\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{\sin 3\theta} r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sin 3\theta} d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta\, d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{3}{4}\left(\theta - \frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$$

۲۳ ـ سطح محدود به خارج دایره $r=1$ و داخل حلزونی $r=2+\cos\theta$ کدام است؟

۱) 7π ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 3π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

حل :



$$S=2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=1}^{2+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{2+\cos\theta} d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left((2+\cos\theta)^2-1\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(3+\cos^2\theta+4\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(3+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4\cos\theta\right)d\theta = \left(\frac{7}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+4\sin\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{7\pi}{2}$$

یادداشت: