



هندسه مسطحه

از مقدمات تا المپیاد



مؤلفان: سیامک احمدپور
مصطفی مسگری مشهدی

تقدیم به بزرگترین داشته های زندگیمان

دستان پرتلاش پدران

و قلب پر مهر مادرانمان

و ای کاش چیزی با ارزش تر از این داشتیم...

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه
۳	سخنی با خواننده
	فصل اول : هندسه مقدماتی ۱
۵	۱-۱. همنهشتی مثلث‌ها
۱۴	۲-۱. تشابه مثلث‌ها
۲۵	تمرینات تکمیلی
	فصل دوم : هندسه مقدماتی ۲
۲۶	۱-۲. دایره و زوایا
۳۶	۲-۲. قوت نقطه نسبت به دایره
۴۲	۳-۲. چهارضلعی‌های محاطی
۵۲	۴-۲. مکان هندسی
۵۷	تمرینات تکمیلی
	فصل سوم : خواص مثلث
۵۹	۱-۳. ارتفاع
۶۴	۲-۳. میانه
۶۹	۳-۳. نیمساز و دوایر محاطی
۷۶	۴-۳. دایره نه نقطه
۸۰	تمرینات تکمیلی
	فصل چهارم : هم‌رسی و هم‌خطی
۸۱	۱-۴. سواء، منلائوس، دزارگ
۹۱	۲-۴. قضیه کارنو
۹۶	۳-۴. خط سیمسون
۱۰۰	۴-۴. قضیه پاسکال
۱۰۷	تمرینات تکمیلی

فصل پنجم : دایره‌ها

- ۱-۵. محور اصلی ----- ۱۰۹
- ۲-۵. دایره‌های متعامد ----- ۱۱۴
- ۳-۵. دایره‌های هم‌محور ----- ۱۱۷
- تمرینات تکمیلی ----- ۱۲۱

فصل ششم : هندسه برداری

- ۱-۶. خواص و کاربردهای بردارها ----- ۱۲۲
- ۲-۶. بردار دوران ----- ۱۳۲
- تمرینات تکمیلی ----- ۱۳۶

فصل هفتم : تبدیلات هندسی

- ۱-۷. تجانس ----- ۱۳۸
- ۲-۷. دوران و تجانس مارپیچی ----- ۱۴۶
- ۳-۷. تقسیم همساز یا توافقی ----- ۱۵۸
- ۴-۷. قطب و قطبی ----- ۱۶۳
- ۵-۷. انعکاس ----- ۱۷۱
- تمرینات تکمیلی ----- ۱۷۷
- فهرست منابع ----- ۱۷۹

هندسه
مفاهیم تا المپیاد
سطح



هندسه یکی از قدیمی‌ترین علوم امروزی است که تاریخ آن به حدود ۴۰۰۰ سال پیش بازمی‌گردد و همواره در طول اعصار مختلف بزرگترین فیلسوفان و دانشمندان و متفکران از افلاطون و دکارت و اقلیدس گرفته تا خیام و نظام الملک و خواجه نصیرالدین طوسی و علامه طباطبایی را مسحور و مجذوب زیبایی‌های خود کرده است. اما متأسفانه آنچه امروزه به عنوان هندسه در دبیرستان‌ها و سیستم آموزشی ما تدریس می‌شود به شدت با آنچه باید باشد فاصله دارد و هرگز نتوانسته‌ایم مفاهیم و زیبایی‌های مباحث هندسه را به درستی برای دانش‌آموزان و علاقمندان به تصویر بکشیم. در این کتاب برای اولین بار سعی شده تا با بکارگیری نرم افزار *Geometer's sketchpad* در نسخه الکترونیکی آن، مفاهیم و مباحث هندسه مسطحه با روشی جدید و البته کاملاً جذاب برای دانش‌آموزان و علاقمندان بیان شود تا شاید بتوانیم قسمتی از ضعف‌ها و کاستی‌های سیستم آموزشی را بپوشانیم. امید است این روش جدید آموزشی در هندسه مسطحه مورد اقبال و استفاده دانش‌آموزان، معلمان و اساتید محترم قرار گیرد. همچنین این کتاب تمام مباحث هندسه از مقدماتی‌ترین مطالب تا سطح المپیادهای ریاضی را پوشش می‌دهد و می‌تواند منبع مناسبی برای علاقمندان به شرکت در مسابقات المپیادهای ریاضی باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از زحمات بی‌دریغ خانم مینا نورهاشمی و آقای بهزاد مهرداد که مسئولیت ویراستاری این اثر را بر عهده داشتند تشکر کنیم. همچنین از خانم عطیه عسگری و آقایان حامد احمدی و شمس الدین آخوندزاده و آرمان فاضلی و محمدجواد مقدمزاده به خاطر کمک‌های ایشان در نمونه خوانی و ویراست این اثر و خانم خدیجه احمدپور که در آماده‌سازی شکل‌ها زحمات زیادی را متحمل شدند و همچنین آقای مهندس غلامرضا نجف‌پور و آقای مهندس پوریا آرمون به خاطر کمک‌های نرم افزاری ایشان کمال تشکر را داریم و در پایان از خانم فریده مرادزاده و همکاران ایشان که با صبر و حوصله حروف‌چینی این اثر را به نحو احسن انجام داده‌اند و مسئول محترم انتشارات خوشخوان جناب آقای رسول حاجی زاده که برای چاپ و ارائه هرچه بهتر این مجموعه تلاش زیادی داشتند قدردانی و تشکر می‌کنیم.

سیامک احمدپور

مصطفی مسگری مشهدی

سخنی با خواننده

خدا می‌داند

خدا می‌داند

و فقط خدا می‌داند، چه شب‌ها که تا صبح دانسته‌های هندسی‌مان را روی کاغذ آوردیم و چه روزها که تا شب سر از کاغذ و کتاب‌های مختلف برداشتیم و چه ساعت‌های طولانی که بر سر مباحث و مسایل مختلف کتاب بحث و حتی جدل کردیم. اما همه اینها نبود جز به عشق اینکه حاصل سال‌ها تلاش و مطالعه‌مان در سینه مدفون نشود و این دانسته‌های محدودمان و البته مهم تر از همه، درک و فهم‌مان از حقایق و زیبایی‌های عمیق هندسه را نه به یک یا چند کلاس ۲۰ نفره، که به هزاران تن از دوستان عزیز و علاقمندان در سراسر ایران تقدیم کنیم.

و همین برای ما بس ...

این کتاب با رویکردی جامعیت‌گرا نگاشته شده است بطوری که تمام مباحث لازم برای علاقمندان به هندسه و داوطلبان شرکت در المپیادهای ریاضی را از مقدماتی‌ترین تا پیشرفته‌ترین مباحث پوشش می‌دهد. این کتاب شامل ۷ فصل است که فصول ۱ و ۲ آن به ترتیب حاوی مباحثی از هندسه ۱ سال دوم دبیرستان و هندسه ۲ سال سوم دبیرستان که در المپیاد ریاضی کاربرد فراگیری دارند می‌باشد. مطالب و مباحث سه فصل اول این کتاب برای شرکت در مرحله اول المپیادهای ریاضی ایران لازم و البته کافی نیز می‌باشد. برای تسلط بالاتر بر این مباحث و حل مسایل بیشتر می‌توانید به منابع [۲۲]، [۲۳] و [۲۴] از همین کتاب مراجعه کنید.

مباحث فصول ۴، ۵، ۶ و بخش ۷-۱ نیز برای آمادگی برای شرکت در مرحله دوم المپیاد ریاضی لازم و کافی است. بقیه مطالب فصل ۷ نیز هرچند به دلیل سطح بالای مطالب بیشتر در مرحله سوم المپیاد ریاضی کاربرد دارند اما گاه برای حل مسایلی در سطح مرحله دوم نیز کاربرد دارند و تسلط بر آن‌ها برای مرحله دوم خالی از فایده نخواهد بود.

به دلیل ماهیت مبتکرانه و خلاق مباحث و مسایل هندسه مسطحه، مؤثرترین روش آموزشی برای تفهیم و انتقال این مباحث، روش آموزش از طریق حل مسأله است، یعنی روشی که دانش‌آموز پس از دانستن اصول اولیه بحث، با تفکر و تعمق بر روی مسایل مربوط به آن بحث و دیدن و بکارگیری ایده‌های مختلف در حل مسایل، قوه ابتکار و خلاقیت خود را پرورش داده و یاد می‌گیرد که چطور آن را در حل مسایل مختلف بکار گیرد. بنابراین مهمترین قسمت فرآیند آموزشی این کتاب مسایل داخل و انتهای هر بخش و به دنبال آن تمرینات تکمیلی مربوط به هر فصل است که طی آن یاد می‌گیرید که مباحث مختلف را در کنار هم برای حل یک مسأله بکار گیرید.

به دلیل همین اهمیت است که برای اولین بار در ارائه این مجموعه، از نرم افزار *Geometer's sketchpad* که یک نرم افزار تخصصی هندسه است و در بسیاری از کشورها برای آموزش هندسه بکار گرفته می‌شود، استفاده شده است. این نرم افزار که نسخه اصلی آن در ایران نبوده و قیمت فوق العاده‌ای نیز دارد، ابزاری فوق العاده برای فهم و درک مباحث و حل مسایل هندسی بدست می‌دهد. در نسخه الکترونیکی این کتاب که روی لوح فشرده همراه این کتاب عرضه می‌شود، مباحث و مسایل کتاب با استفاده از نرم افزار *Geometer's sketchpad* بیان شده‌اند و برای هر قضیه یا مسأله یک *sketch* آمده که در آن مفهوم و شکل آن قضیه یا مسأله بطور ملموسی بیان و رسم شده است و شما را با یک یا چند راهنمایی در حل آن یاری می‌رساند، درست مثل معلمی که قدم به قدم شما را در حل یک مسأله راهنمایی می‌کند. راه حل کامل این مسایل نیز در کتاب آمده است.

برای استفاده بهتر از این مجموعه رعایت نکات زیر در مطالعه آن توصیه می‌شود:

- ۱- ترتیب فصول و بخش‌ها و حتی مسایل را در مطالعه آن رعایت کنید.
 - ۲- بعد از بیان هر قضیه، بلافاصله مسأله‌ای نیز بیان شده که شما را با کاربرد آن قضیه آشنا می‌کند. پس آن‌ها را در همان مقطع حل کنید.
 - ۳- یکی از نکات مثبت کتاب حل تمام مسایل آن است که اگر به آن تکیه کنید اثر منفی خواهد داشت. پس سعی کنید مباحث و قضایا را از روی نسخه الکترونیکی کتاب مطالعه و با توجه به راهنمایی که در *sketch*ها آمده‌اند خودتان مسایل و قضایا را حل و اثبات کنید و در آخر برای مشاهده راه حل نهایی به کتاب مراجعه کنید.
 - ۴- هرگز کیفیت مطالعه را فدای کمیت آن نکنید و به خاطر مطالعه حجم بیشتری از کتاب از روی مسایل آن به سرعت عبور نکنید. پس برای حل هر مسأله زمان مناسبی اختصاص دهید و قدم به قدم از راهنمایی‌های آن استفاده کنید تا خودتان به جواب مسأله برسید.
 - ۵- فرآیند یادگیری شما طی همین تفکر بر روی مسایل اتفاق می‌افتد. پس حتی اگر بعد از ساعت‌ها مسأله‌ای حل نشود، وقت شما تلف نشده و قدرت حل مسأله شما تقویت شده است.
- در پایان از تمامی دوستان علاقمند، دانش‌آموزان و اساتید محترم صمیمانه خواهشمندیم که ما را از نظرات انتقادی، پیشنهادی و یا تأییدی خود محروم نکنید و از طریق پست الکترونیکی geobook@gmail.com با ما در ارتباط باشید. همچنین می‌توانید *sketch*های خود برای مسایل حل نشده انتهای کتاب یا سایر مسایل و مباحث هندسه را برای ما ارسال کنید تا در چاپ‌های بعدی کتاب در نسخه الکترونیکی آن با نام خودتان آورده شود.

با آرزوی موفقیت برای تمام دوستان

سیامک احمدپور

مصطفی مسگری مشهدی

فصل اول

هندسه‌ی مقدماتی ۱

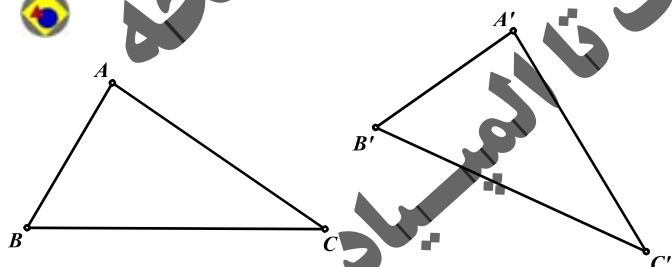
۱-۱ هم‌نهشتی مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش با مثلث‌های هم‌نهشت و خواص آن‌ها آشنا شده و سعی می‌شود با همین مفهوم ساده هندسی مسائلی در سطوح بالا طرح و بررسی شود.

تعریف: دو مثلث هم‌نهشت دو مثلی هستند که بتوان کاملاً بریکدیگر منطبق کرد. بدیهی است که در دو مثلث هم‌نهشت با قابل انطباق اضلاع دو به دو بایکدیگر و زوایا نیز دو به دو بایکدیگر برابرند، که به این زوایا و اضلاع برابر، زوایا و اضلاع متناظر می‌گوییم.

به عنوان مثال اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت باشند ($\triangle ABC = \triangle A'B'C'$) بطوری که $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ و $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ نیز به ترتیب برابر اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ خواهند بود. دو مثلث، بنا بر هریک از سه حالت زیر بایکدیگر هم‌نهشت خواهند بود:

الف) قضیه ۱-۱: هر گاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند،



آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

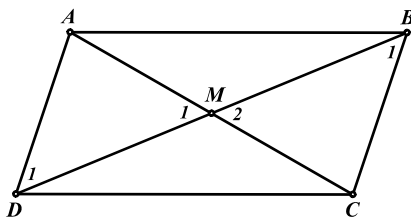
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

برای اثبات کافی است دو مثلث را بر روی زوایای مساوی A و A' بریکدیگر منطبق کنیم، از آنجا که $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ هستند، رؤوس B, B' و همچنین C, C' نیز بریکدیگر منطبق خواهند شد.



مسئله ۱-۱: ثابت کنید هر چهار ضلعی که اقطار آن یکدیگر را نصف کنند، یک متوازی‌الاضلاع است.

(متوازی‌الاضلاع چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو بایکدیگر موازی‌اند.)



در چهار ضلعی $ABCD$ ، محل تقاطع دو قطر AC و BD را M می‌نامیم.

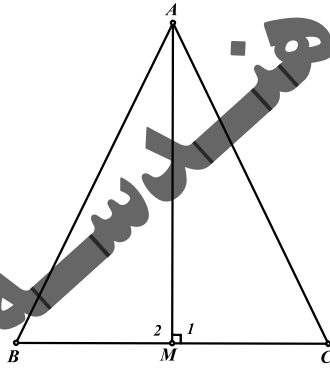
$$\left. \begin{array}{l} AM = MC \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ MD = MB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD = \triangle MCB \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow BC \parallel AD$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد: $AB \parallel CD$

در نتیجه $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.



مسأله ۱-۲: ثابت کنید هر مثلثی که میانه و ارتفاع آن بر یکدیگر منطبق باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین است.



در مثلث ABC ، AM هم میانه و هم ارتفاع است.

$$\left. \begin{array}{l} BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \\ AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC \Rightarrow AB = AC$$

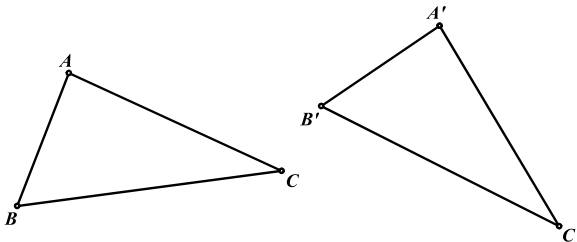
در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن به یک فاصله است.

(ب) قضیه ۱-۲: هر گاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن



دو مثلث همنهشت هستند.



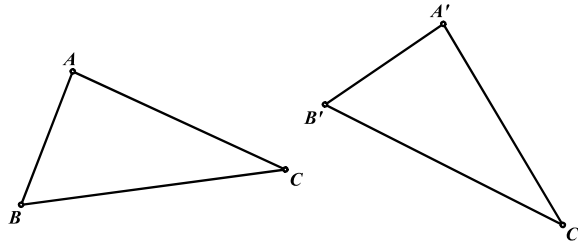
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

اثبات این حالت نیز مانند حالت قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۳-۱: اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، $BC = B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ باشد ثابت کنید:



$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$



می‌دانیم که در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر 180° است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}' = 180^\circ - \hat{A}' - \hat{B}'$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}' - \hat{B}'$$

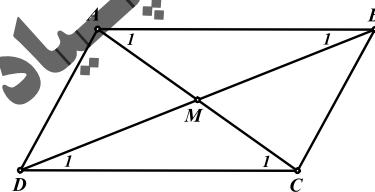
با توجه به روابط بالا نتیجه می‌گیریم که زوایای C و C' نیز با هم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

مسأله ۴-۱: ثابت کنید هر چهار ضلعی که دو ضلع روبروی آن بایکدیگر مساوی و موازی باشد، یک متوازی‌الاضلاع



است.

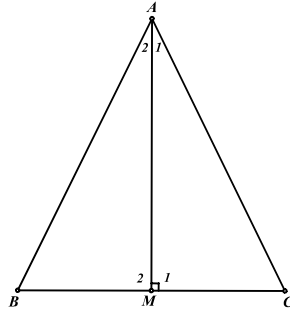


در چهار ضلعی $ABCD$ ، اضلاع AB و CD بایکدیگر مساوی و موازی‌اند. محل برخورد اقطار AC و BD را M می‌نامیم.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAB = \triangle MCD \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AM = CM \\ BM = DM \end{array} \right.$$

در چهار ضلعی $ABCD$ ، اقطار AC و BD یکدیگر را نصف می‌کنند. پس طبق مسأله ۱-۱ $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۵: ثابت کنید هر مثلثی که نیمساز و ارتفاع آن بریکدیگر منطبق باشند، یک مثلث متساوی الساقین است.

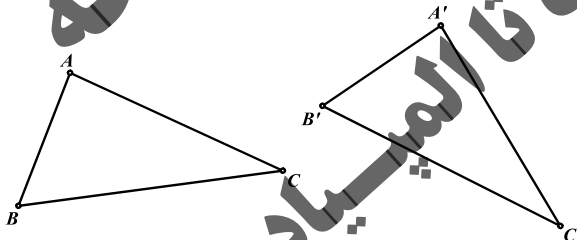


در مثلث ABC ، AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. بنابراین دو مثلث ABM و ACM به حالت دو زاویه و ضلع بین بایکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی الساقین است.

ج) قضیه ۱-۳: هر گاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث بایکدیگر همنهشت

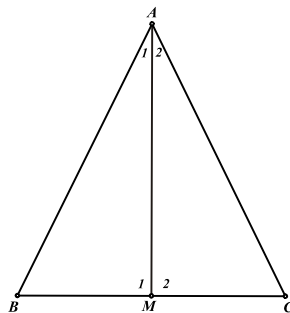


$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

هستند.



مسأله ۱-۶: ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین، میانه وارد بر قاعده، ارتفاع و نیمساز نیز می‌باشد.



در مثلث متساوی الساقین ABC ، AM میانه‌ی وارد بر قاعده است.

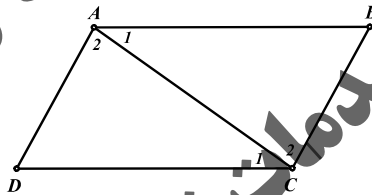
$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ BM = CM \\ AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_r \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_r \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_r \\ \hat{M}_1 + \hat{M}_r = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_r = 90^\circ$$

در نتیجه، AM ، نیمساز و ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.

نتیجه: از همنهستی دو مثلث ABM و ACM می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه مجاور به قاعده بایکدیگر برابرند ($\hat{B} = \hat{C}$) و بالعکس.

مسئله ۷-۱: ثابت کنید هر چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو به دو بایکدیگر برابر باشند، یک متوازی الاضلاع است.



$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ \hat{A}_r = \hat{C}_r \Rightarrow AD \parallel BC \end{array} \right.$$

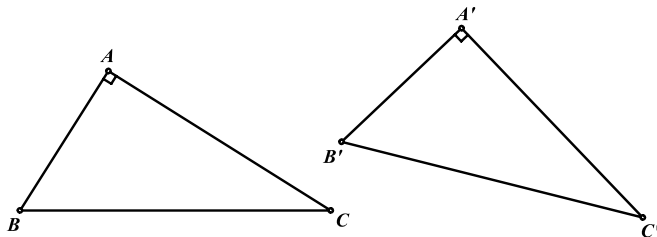
در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ ، یک متوازی الاضلاع است.

در مثلث قائم الزاویه علاوه بر سه حالت گذشته، بنابر هریک از دو حالت زیر نیز همنهست خواهند بود:

الف) قضیه ۱-۴: هر گاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه



دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهست خواهند بود.



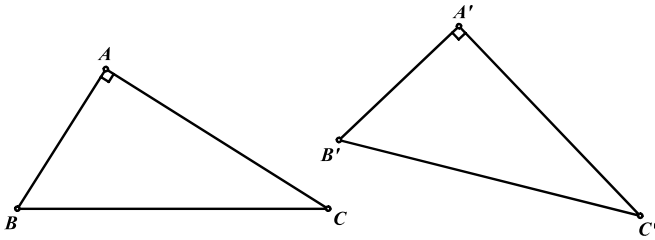
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

اثبات این قضیه مشابه مسئله ۳-۱ می‌باشد.

ب) قضیه ۱-۵: هر گاه وتر یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ی دیگری برابر



باشند، آن دو مثلث بایکدیگر همنهست خواهند بود.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

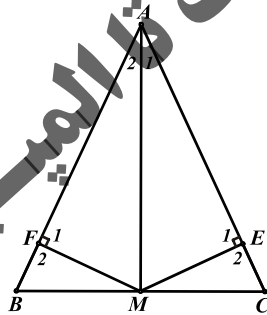
طبق قضیه فیثاغورث در هر مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB^r + AC^r = BC^r \Rightarrow AC^r = BC^r - AB^r \\ A'B'^r + A'C'^r = B'C'^r \Rightarrow A'C'^r = B'C'^r - A'B'^r \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow BC^r - AB^r = B'C'^r - A'B'^r$$

$$\Rightarrow AC^r = A'C'^r \Rightarrow AC = A'C'$$

بنابراین دو مثلث به حالت سه ضلع با هم همنهست می شوند.

مسأله ۱-۸: ثابت کنید هر مثلثی که میان و نیمساز آن بریکدیگر منطبق باشند، یک مثلث مساوی الساقین است.



میانه AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمودهای وارد از M بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E}_l = \hat{F}_l = 90^\circ \\ AM = AM \\ \hat{A}_l = \hat{A}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AME = \triangle AMF \Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ ME = MF \end{cases} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E}_r = \hat{F}_r = 90^\circ \\ MC = BM \\ ME = MF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MCE = \triangle MBF \Rightarrow CE = BF \quad (2)$$

با جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AE + CE = AF + BF \Rightarrow AC = AB$$

مسائل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

- (۱) خط d و دو نقطه A و B روی آن و نقطه‌ی O خارج از آن مفروض‌اند. از O به A و B وصل کرده و هر کدام را به اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط C و D حاصل شوند. ثابت کنید نقاط C و D از خط d هم فاصله‌اند.
- (۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اوساط اضلاع AD و BC را به ترتیب E و F می‌نامیم.
- (۳) اگر CE و AF قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، نشان دهید: $DM = BN$
- (۴) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج از آن دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE را می‌سازیم بطوری که $AB = AD$ و $AC = AE$. اگر داشته باشیم $\hat{DAE} = \hat{B} + \hat{C}$ و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $DE = 2AM$
- (۵) نقطه دلخواه D را بر روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC انتخاب می‌کنیم. اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر اضلاع AB و AC و BH ارتفاع وارد بر AC باشد، ثابت کنید:
- $DE + DF = BH$
- (۶) مربع $ABCD$ و نقطه E بر ضلع CD مفروض‌اند. نیمساز زاویه‌ی EAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در F قطع کند. ثابت کنید: $BF + DE = AE$
- (۷) در مثلث ABC ، از M وسط ضلع BC عمودی بر نیمساز داخلی زاویه‌ی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC و یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $BE = CF$
- (۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقاط E و F را به ترتیب روی AC و امتداد AB طوری انتخاب می‌کنیم که $BE = CF$ باشد، نشان دهید BC ، پاره خط EF را نصف می‌کند
- (۹) چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. از نقاط B, C, D عمودهای BB', CC', DD' و DD' را بر خط d که از نقطه‌ی A می‌گذرد، فرود می‌آوریم. نشان دهید: $CC' = BB' + DD'$
- (۱۰) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC', BCA', CBA' را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA' = BB' = CC'$

(۱۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه



الف) میانه وارد بر وتر نصف وتر است.



ب) اگر یکی از زوایا برابر 30° باشد، ضلع روبروی زاویه 30° برابر نصف وتر است.

(۱۲) در مثلث ABC ، $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ است. اگر نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث باشد، ثابت کنید که



دو مثلث ABC و HBC همنهشت هستند.

هندسه مسطحه
از مقدمات تا المپیاد

۲-۱ تشابه مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش برآنیم تا ضمن شناخت خواص مثلث‌های متشابه، با کاربردهای وسیع و گوناگون تشابه در انواع مسایل هندسی آشنا شویم.

پیش از آنکه به قضیه‌ی تالس و تشابه مثلث‌ها بپردازیم، بدلیل کاربرد برخی خواص نسبت‌های تناسب در تشابه، مروری بر بعضی از مهمترین این خواص خواهیم داشت.

قضیه ۶-۱: اگر تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برقرار باشد نسبت‌های زیر برقرار خواهند بود:

(الف) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ به این خاصیت ترکیب در صورت (+) یا تفصیل در صورت (-) می‌گویند.

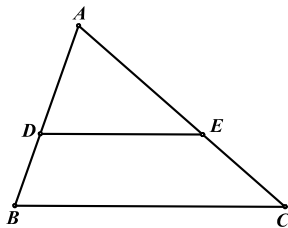
(ب) $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$ به این خاصیت ترکیب در مخرج (+) یا تفصیل در مخرج (-) می‌گویند.

(ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$

اثبات تمامی قسمت‌های بالا مشابه یکدیگر است و کافی است هر نسبت را طرفین - وسطین کرده و ساده کنید،

تا به عبارت $ad = bc$ که همان فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ است، برسید.

قضیه تالس ۷-۱: هر خط موازی بایکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را به نسبت‌های یکسان تقسیم می‌کند.



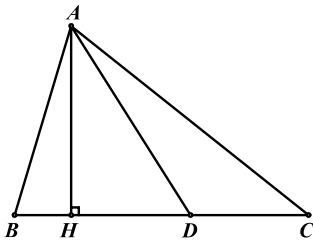
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

برای اثبات قضیه تالس ابتدا لم مهم و کاربردی زیر را مطرح می‌کنیم.

لم: برای هر خط دلخواه AD که ضلع BC از مثلث ABC را قطع می‌کند نسبت پاره خط‌های بوجود آمده بر



روی BC با نسبت مساحت مثلث‌های متناظر برابر است.



$$\text{حکم: } \frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$$

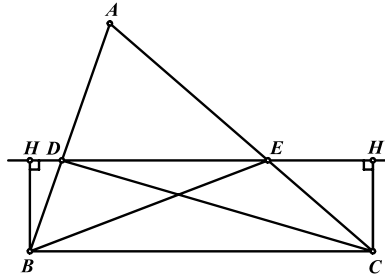
H را پای ارتفاع نظیر رأس A می‌نامیم.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BD}{\frac{1}{2}AH \cdot DC} = \frac{BD}{DC}$$

برای اثبات قضیه تالس هر کدام از نسبت‌های $\frac{AE}{EC}$ و $\frac{AD}{DB}$ را با استفاده از لم فوق به نسبت مساحت‌ها



تبدیل می‌کنیم تا حکم جدید حاصل گردد.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{DB} = \frac{S_{EDA}}{S_{EDB}} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{S_{DEA}}{S_{DEC}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{EDA}}{S_{EDB}} = \frac{S_{DEA}}{S_{DEC}} \Rightarrow S_{EDB} = S_{DEC}$$

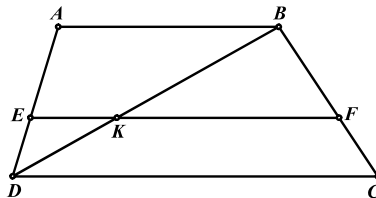
حکم جدید:

$$\left. \begin{array}{l} S_{EDB} = \frac{1}{2}DE \cdot BH \\ S_{DEC} = \frac{1}{2}DE \cdot CH' \\ BC \parallel DE \Rightarrow BH = CH' \end{array} \right\} \Rightarrow S_{EDB} = S_{DEC}$$

پس حکم جدید برقرار است که از آن حکم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ نتیجه می‌شود.



مسئله ۹-۱: ثابت کنید هر خط موازی قاعده‌های دوزنقه، ساق‌های آن را به طور متناسب قطع می‌کند.

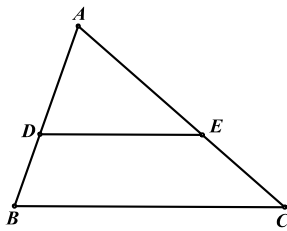


محل برخورد BD و EF را K می‌نامیم. با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ABD و BCD خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} EK \parallel AB \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BK}{KD} \\ FK \parallel CD \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{BK}{KD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



عکس قضیه تالس: هر خطی که دو ضلع از مثلث را به طور متناسب قطع کند با ضلع سوم موازی خواهد بود.



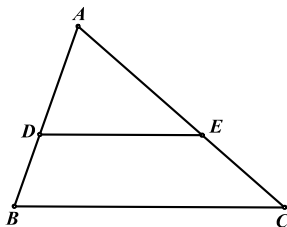
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات عکس قضیه تالس را به خود شما واگذار می‌کنیم.

راهنمایی: برای اثبات عکس قضیه تالس از نقطه D خطی موازی BC رسم کنید تا AC را در نقطه‌ی E' قطع کند. با استفاده از قضیه تالس ثابت کنید که نقطه E' بر نقطه‌ی E منطبق است.

نکته: طبق قضیه تالس $DE \parallel BC$ است، اگر و فقط اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ باشد. اما طبق خواص نسبت‌های

تناسب شرط $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ را می‌توان با استفاده از ترکیب در مخرج یا صورت به نسبت‌های زیر تبدیل کرد.



$$\frac{AD}{DB + AD} = \frac{AE}{EC + AE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \quad \text{(ب)}$$

به عبارت دیگر طبق قضیه‌ی تالس $DE \parallel BC$ است اگر و فقط اگر هر کدام از نسبت‌های فوق برقرار باشد.

تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بایکدیگر متشابه هستند ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) اگر و فقط اگر:

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'} \quad \text{۱- زوایای دو مثلث دو بدو بایکدیگر برابر باشند.}$$

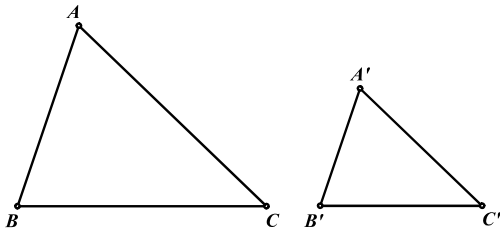
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \quad \text{۲- اضلاع متناظر متناسب باشند.}$$

که به عدد ثابت k ، نسبت تشابه دو مثلث گفته می‌شود.

دو مثلث بنابر هریک از سه حالت زیر متشابه خواهند بود:



الف) قضیه ۸-۱: هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث تشابه هستند.



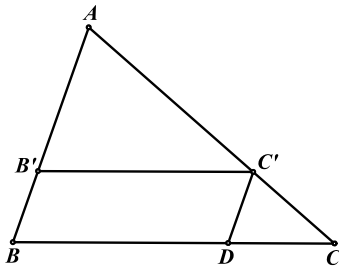
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

از آنجا که دو زاویه A و A' بایکدیگر و B و B' نیز بایکدیگر برابرند، پس زوایای C و C' نیز با هم برابر خواهند بود. بنابراین شرط اول تشابه دو مثلث یعنی تساوی زوایا برقرار است. اما برای اثبات تناسب اضلاع، مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC طوری قرار می‌دهیم که دو زاویه A و A' بریکدیگر منطبق شوند.

$$\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \quad (1)$$



پس تناسب دو ضلع برقرار است، اما برای اثبات نسبت ضلع سوم، از C' خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D قطع کند. طبق قضیه تالس خواهیم داشت:

$$C'D \parallel AB \Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

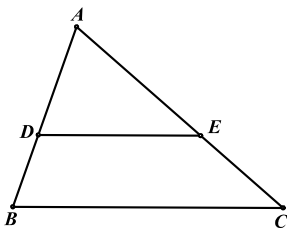
در متوازی‌الاضلاع $B'C'DB$ دو ضلع BD و $B'C'$ با هم برابرند

$$\Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

از آنجا که شرط دوم تشابه یعنی تناسب اضلاع نیز برقرار است، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مشابه هستند.



نتیجه: طبق قضیه فوق در صورتی که خطی موازی BC ، دو ضلع دیگر مثلث را در

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

نقاط D و E قطع کند. خواهیم داشت:

مسأله ۱-۱۰: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره:



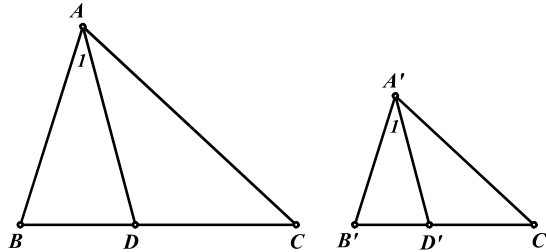
(الف) نسبت طول نیمسازهای نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

(ب) نسبت طول ارتفاعهای نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

(ج) نسبت مساحت دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

(د) نسبت محیط دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

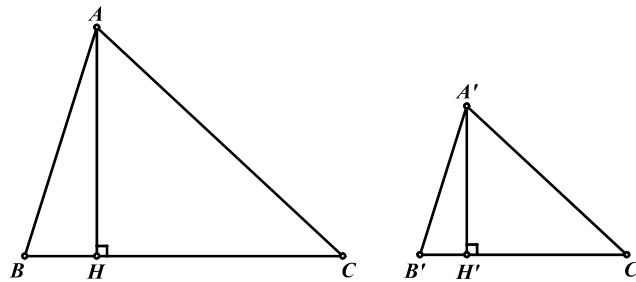
(الف) عدد ثابت k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در نظر می‌گیریم. AD و $A'D'$ به ترتیب نیمسازهای داخلی دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \frac{\hat{A}}{r} = \frac{\hat{A}'}{r'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle A'B'D' \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

(ب) به ترتیب ارتفاعهای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

(ج)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}A'H' \cdot B'C'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = k \cdot k = k^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

(د)

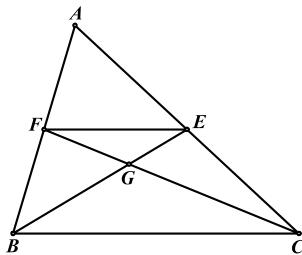
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

با استفاده از خواص نسبت‌های تناسب داریم:

$$\Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$



مسئله ۱-۱۱: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.



$$\text{حکم: } \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

در مثلث ABC ، BE و CF میانه‌های مثلث هستند یعنی:

$$AE = CE, AF = BF$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = 1$$

طبق عکس قضیه تالس نتیجه می‌گیریم که:

$$\Rightarrow EF \parallel BC$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{A}FE = \hat{A}BC \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BC \Rightarrow \hat{E}FG = \hat{B}CG \\ EF \parallel BC \Rightarrow \hat{F}EG = \hat{C}BG \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle GEF \sim \triangle GBC \Rightarrow \frac{GB}{GE} = \frac{GC}{GF} = \frac{BC}{FE}$$

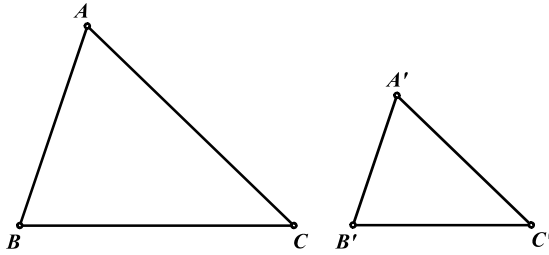
با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{GB}{GE} = \frac{GC}{GF} = \frac{2}{1}$$

(ب) قضیه ۹-۱: هر گاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها نیز برابر باشد، دو



مثلث متشابه هستند.

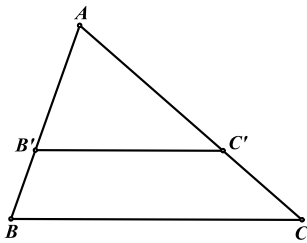


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

برای اثبات، مانند قسمت قبل مثلث‌ها را روی یکدیگر قرار می‌دهیم. طبق فرض و عکس قضیه تالس خواهیم



داشت:



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

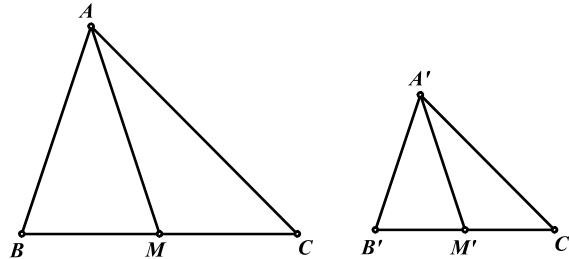
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

طبق حالت دو زاویه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

مسئله ۱-۱۲: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره نسبت طول میانه‌های متناظر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث



است.



عدد k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ فرض می‌کنیم. AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\frac{BM}{B'M'} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} = \frac{BC}{B'C'} = k \quad (2)$$

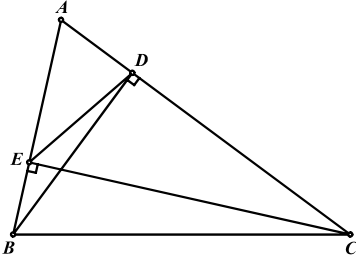
با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$\triangle ABM \sim \triangle A'B'M' \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$



مسئله ۱-۱۳: اگر ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، ثابت کنید: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث ACE و ABD متشابه‌اند.

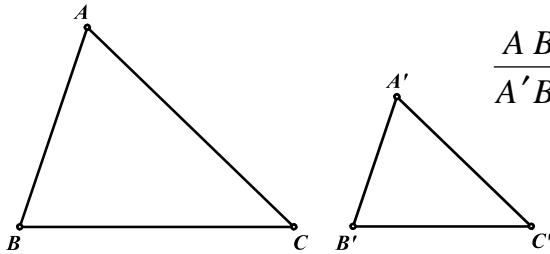


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$



ج) قضیه ۱-۱۰: هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، ن دو مثلث متشابه هستند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

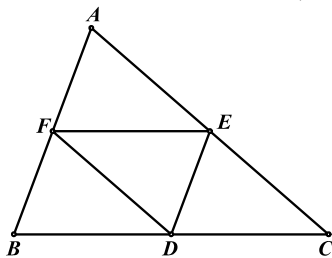
اثبات این قضیه به خود شما واگذار می‌شود.

مسئله ۱-۱۴: اگر D و E و F اوساط اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید دو مثلث DEF و ABC



به نسبت ۲ به ۱ بایکدیگر متشابه‌اند.

D و E و F را به ترتیب اوساط اضلاع BC ، AC و AB می‌نامیم.



$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = 1 \Rightarrow FE \parallel BD$$

$$\Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BC = 2FE$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد که:

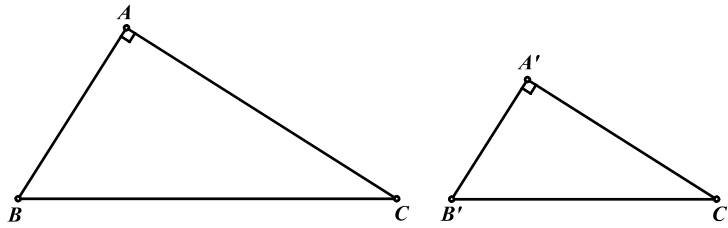
$$AC = rDF, AB = rDE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = r \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

مسأله ۱-۱۵: اگر برای دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ داشته باشیم



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{ثابت کنید:} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



عدد k را برابر نسبت $\frac{BC}{B'C'}$ در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = k \cdot A'B' \Rightarrow AB^r = k^r \cdot A'B'^r \\ BC = k \cdot B'C' \Rightarrow BC^r = k^r \cdot B'C'^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC^r - AB^r = k^r \cdot B'C'^r - k^r \cdot A'B'^r = k^r (B'C'^r - A'B'^r)$$

طبق قضیه فیثاغورث نتیجه می‌گیریم که:

$$AC^r = k^r \cdot A'C'^r \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = k$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) نقاط اوساط اضلاع AB ، BC ، CD و DA از چهار ضلعی $ABCD$ را به ترتیب M ، N ، P و



Q می‌نامیم. ثابت کنید چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

(۲) خط دلخواهی را از رأس C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرانیم تا امتدادهای اضلاع AB و AD



را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 1$

(۳) امتداد ساق‌های AD و BC از دوزنقه $ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. از M خطی به

موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید:



$$EM = MF$$

(۴) وسط ضلع BC از مثلث ABC را M می‌نامیم. نقطه دلخواه F را بر روی AC انتخاب می‌کنیم و



BF را رسم می‌کنیم تا AM را در E قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BE}$

(۵) مثلث ABC مفروض است. سه خط موازی یکدیگر از سه رأس A ، B و C می‌گذرانیم تا اضلاع مقابل یا

امتداد آنها را به ترتیب در A' ، B' و C' قطع کند. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید:



$$\frac{1}{AA'} = \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'}$$

(۶) در مثلث ABC ، M وسط ضلع BC و N وسط میانه‌ی AM است. محل تقاطع AC با امتداد



BN را D می‌نامیم. نشان دهید:

$$AD = \frac{1}{3}AC \quad (\text{الف})$$

$$ND = \frac{1}{4}BD \quad (\text{ب})$$

(۷) در مثلث ABC ، از M وسط ضلع BC ، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمساز رأس A را در



N قطع کند. نشان دهید: $MN = \frac{|AC - AB|}{2}$

(۸) خطی که موازی قطر AC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ رسم می‌شود، اضلاع AB و BC را در E و

F قطع می‌کند. محل برخورد دو خط CE و AD را P و محل برخورد دو خط AF و DC را Q



می‌نامیم. ثابت کنید خط PQ نیز با قطر AC موازی است.

(۹) در مثلث ABC ، A را نسبت به نقطه‌ی وسط BC ، قرینه می‌کنیم تا P و نقطه‌ی B را نسبت به C

قرینه می‌کنیم تا Q بدست آید. ثابت کنید که اضلاع مثلث APQ دو برابر میانه‌های مثلث ABC است.





۱۰) اگر نقاط M و N اوساط ساق‌های AD و BC از دوزنقه $ABCD$ باشند ثابت کنید:

$$\text{الف) } MN \parallel AB \parallel CD$$

$$\text{ب) } MN = \frac{AB + CD}{2}$$

۱۱) دو نیم خط موازی AM و BN را از دو سر پاره خط AB و در یک طرف آن رسم می‌کنیم. نقاط M و N را به ترتیب روی این دو نیم خط طوری انتخاب می‌کنیم که $AM + BN = AB$. اگر D وسط



MN باشد، ثابت کنید زاویه ADB قائمه است.

۱۲) در مثلث ABC ، از نقطه‌ی دلخواه D روی ضلع BC ، خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا



AC و AB و یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در N و P قطع کند. ثابت کنید:

الف) $DP + DN$ مقداری ثابت است.

$$\text{ب) } \frac{AP}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

۱۳) در دوزنقه $ABCD$ ، از P ، محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده‌ی AB رسم می‌کنیم تا دو ساق



AD و BC را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید:

$$\text{الف) } EP = PF$$

$$\text{ب) } \frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

۱۴) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، پای ارتفاع نظیر رأس A را H و پای ارتفاع‌های وارد از H



بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم. نشان دهید:

$$\text{الف) } AH^2 = BH \cdot CH$$

$$\text{ب) } AB^2 = BH \cdot BC$$

$$\text{ج) } HB \cdot HC = AE \cdot EC + AF \cdot FB$$

۱۵) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، خطی که از A می‌گذرد BC و BD را امتداد CD را به ترتیب در M



و N قطع می‌کند. نشان دهید: $AM^2 = MN \cdot ML$

۱۶) دو مربع $ACEK$ و $ABFL$ را در خارج مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) می‌سازیم. محل

برخورد دو پاره خط BE و AC را P و محل برخورد دو پاره خط CF و AB را Q می‌نامیم. نشان



دهید:

$$\text{الف) } AP = AQ$$

$$\text{ب) } AP^2 = BQ \cdot CP$$

۱۷) در مثلث ABC ، AH ارتفاع می‌باشد. E و F را به ترتیب پای ارتفاع‌های وارد از H بر اضلاع AC



و AB می‌نامیم. نشان دهید: $\widehat{BEH} = \widehat{CFH}$

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه ABC ($AB = AC$) مفروض است. از نقطه‌ی D واقع بر وتر BC ، عمودهای DE و DF را به ترتیب بر AC و AB فرود می‌آوریم. اگر M نقطه‌ی وسط ضلع



BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

(۲) در مثلث ABC ، بر دو ضلع AB و AC و در خارج مثلث ABC ، دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین طوری ایجاد می‌کنیم که AB و AC وترهای آن‌ها باشد. اگر رئوس این دو مثلث را D و



E بنامیم و M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

$$MD = ME \text{ (الف)}$$

$$MD \perp ME \text{ (ب)}$$

(۳) روی ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC مربع‌های $ABDE$ و $ACKF$ را رسم می‌کنیم. اگر



M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

$$EF = 2AM \text{ (الف)}$$

$$EF \perp AM \text{ (ب)}$$

(۴) نقطه‌ی P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\hat{PBA} = \hat{PCA}$. پای عمودهای وارد از P بر اضلاع AB و AC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر M وسط ضلع BC



باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

(۵) نقاط D و E را به ترتیب روی امتداد اضلاع AB و AC (از طرف C, B) از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $BD = CE$ باشد و محل تقاطع امتدادهای BC و DE را F می‌نامیم. ثابت کنید:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

(۶) خطی که از اوساط اقطار چهار ضلعی $ABCD$ می‌گذرد، اضلاع AB و CD را به ترتیب در E و F



$$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \text{ ثابت کنید:}$$

(۷) BH و CK ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. نقاط P و Q را به ترتیب روی BH و CK



طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\widehat{APC} = \widehat{AQB} = 90^\circ$. ثابت کنید: $AP = AQ$

(۸) در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، M وسط ضلع BC و H پای عمود وارد از



M بر ضلع AC و N وسط MH می‌باشد. ثابت کنید: $AN \perp BH$

(۹) در مثلث ABC ، زاویه‌ی B منفرجه است. اگر AH ارتفاع مثلث باشد و بدانیم که



$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH} \text{ ثابت کنید: } \hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$$

(۱۰) از G ، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC ، خط دلخواهی می‌گذرد. تصاویر نقاط A, B, C روی این خط را به ترتیب A', B', C' می‌نامیم. نشان دهید مجموع دو تا از طول‌های AA', BB', CC'



برابر سومی است.

فصل دوم

هندسه‌ی مقدماتی ۲

۱-۲ دایره و زوایا

هدف بخش: در این بخش با ۵ نوع زاویه در دایره آشنا می‌شویم و سعی می‌کنیم بیشتر به کاربرد همه آن‌ها در کنار یکدیگر بپردازیم. این ۵ نوع زاویه عبارتند از:

- (۱) زاویه مرکزی
- (۲) زاویه محاطی
- (۳) زاویه داخلی
- (۴) زاویه خارجی
- (۵) زاویه ظلّی

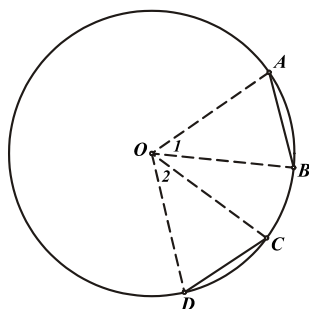
تعریف: زاویه مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشند.

تعریف: اندازه هر کمانی از دایره بر حسب درجه برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی نظیر آن کمان.

مسأله ۱-۲: ثابت کنید اگر دو کمان AB و CD از دایره بایکدیگر برابر باشند، دو وتر AB و CD نیز برابر



خواهند شد و بالعکس.



حکم : $AB = CD$

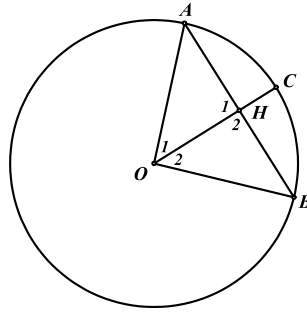
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AB} \\ \hat{O}_r = \widehat{CD} \\ AB = CD \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_r$$

دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین بایکدیگر هم‌نهشت‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_r \\ OA = OC \\ OB = OD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$



مسأله ۲-۲: ثابت کنید اگر از مرکز دایره به وسط کمان AB وصل کنیم، عمود منصف وتر AB خواهد شد.



از نقطه O به C وسط کمان AB وصل می‌کنیم تا وتر AB را در H قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} AC = BC \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AO = BO \\ OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOH = \triangle BOH \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

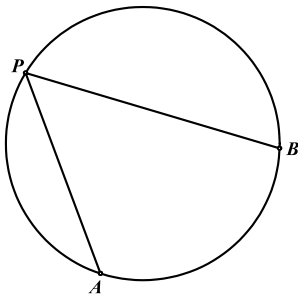
بنابراین OH هم عمود بر AB و هم منصف آن است.

تعریف: زاویه محاطی زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره باشند.

تعریف: کمان در خور هر زاویه به کمانی از دایره که داخل زاویه قرار دارد گفته می‌شود.



قضیه ۱-۲: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان در خور آن است.

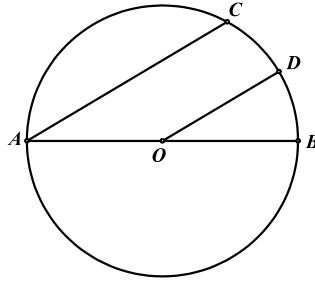


$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



مسئله ۲-۳: در دایره‌ی به مرکز O و قطر AB وتر AC با شعاع OD موازی است. ثابت کنید:

$$\widehat{CD} = \widehat{DB}$$



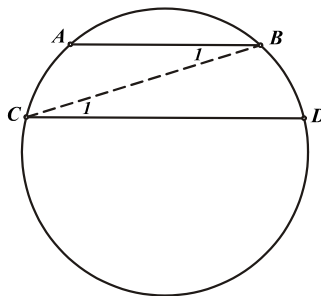
$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel OD \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DOB} \\ \widehat{CAB} = \frac{\widehat{CB}}{r} \\ \widehat{DOB} = \widehat{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{CB}}{r} = \widehat{DB} \Rightarrow \widehat{CB} = r \widehat{DB}$$

پس کمان CB دو برابر کمان DB است یعنی دو کمان CD و DB بایکدیگر برابرند.

مسئله ۲-۴: ثابت کنید اگر دو وتر AB و CD موازی باشند، کمان‌های محصور بین آنها نیز بایکدیگر برابرند و



بالعکس.



حکم : $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AC}}{r} \\ \hat{C}_1 = \frac{\widehat{BD}}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{r} = \frac{\widehat{BD}}{r} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

اثبات عکس مسئله نیز کار ساده‌ای است که به خود شما واگذار می‌شود.

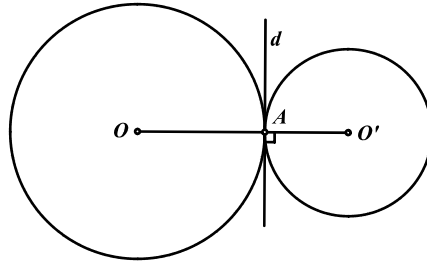
مسئله ۲-۵: دو دایره به مراکز O و O' در نقطه A بریکدیگر مماس داخل‌اند. خط دلخواهی که از A می‌گذرد،

دوایر را در C و C' قطع می‌کند. ثابت کنید: $OC \parallel O'C'$

لم: هر گاه دو دایره به مراکز O و O' در نقطه‌ای مثل A بریکدیگر مماس (داخل یا خارج) باشند سه نقطه‌ی



O, O', A هم خطاند. (بر روی یک خط راست قرار دارند).



اثبات لم: خط d را که در نقطه‌ی A بر هر دو دایره مماس است رسم می‌کنیم و از دو نقطه‌ی O و O' به A وصل می‌کنیم

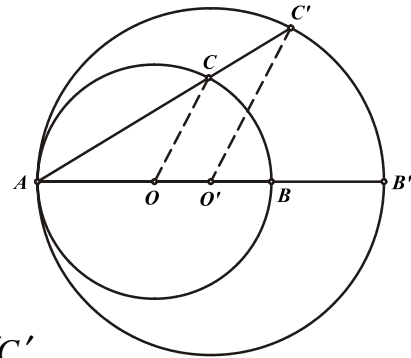
$$\left. \begin{array}{l} OA \perp d \\ O'A \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow OA \parallel O'A$$

پس سه نقطه‌ی O, O', A هم خط هستند.



اثبات مسأله: بنابر لم بالا در این مسأله نیز O, O', A هم خطاند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{r} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{B'C'}}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{r} = \frac{\widehat{B'C'}}{r} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{B'C'}$$



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{COB} = \widehat{BC} \\ \widehat{C'O'B'} = \widehat{B'C'} \\ \widehat{BC} = \widehat{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{C'O'B'} \Rightarrow OC \parallel O'C'$$

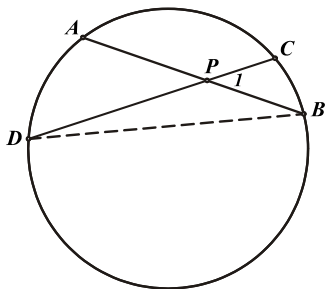
تعریف: زاویه داخلی زاویه‌ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره حاصل می‌شود.

نکته: هر زاویه داخلی دارای دو کمان در خور است. یکی کمانی که داخل خودش قرار دارد و دیگری کمانی که داخل زاویه متقابل به رأس با آن زاویه قرار دارد.



قضیه ۲-۲: اندازه هر زاویه داخلی برابر نصف مجموع کمان درخورهای آن است.

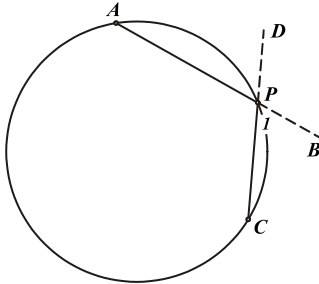
$$\text{حکم: } \hat{P}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{r}$$



از آنجا که \hat{P}_1 زاویه خارجی مثلث PDB است خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_1 &= \hat{D} + \hat{B} \\ \hat{D} &= \frac{\widehat{BC}}{r} \\ \hat{B} &= \frac{\widehat{AD}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \frac{\widehat{BC}}{r} + \frac{\widehat{AD}}{r} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{r}$$

ممکن است دو وتر یکدیگر را روی دایره نیز قطع کنند که در این حالت نیز خواهیم داشت:



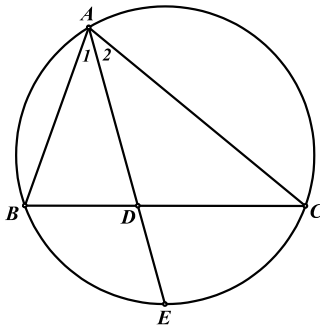
$$\hat{P}_1 = \frac{\widehat{AP} + \widehat{PC}}{r} = \frac{\widehat{APC}}{r}$$



مسئله ۶-۲: اگر AD نیمساز زاویه \hat{A} و E محل برخورد AD با دایره محیطی مثلث ABC باشد، ثابت



کنید: $\widehat{BDE} = \widehat{ABE}$



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{\widehat{BE}}{r} \\ \hat{A}_r &= \frac{\widehat{CE}}{r} \\ \hat{A}_1 &= \hat{A}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ABE} &= \frac{AC + CE}{r} \\ \widehat{BDE} &= \frac{AC + BE}{r} \\ \widehat{BE} &= \widehat{CE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BDE}$$

تعریف: زاویه خارجی زاویه‌ای است که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره بوجود می‌آید.

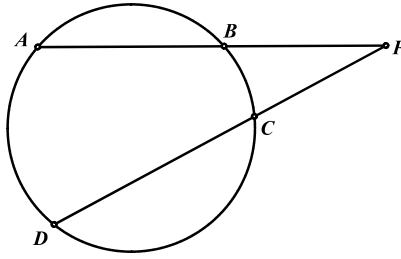
نکته: هر زاویه خارجی نیز دو کمان در خور دارد که هر دو در داخل زاویه قرار دارند.



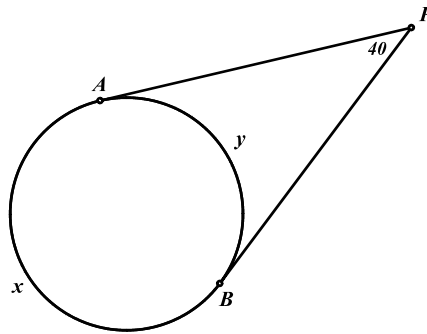
قضیه ۳-۲: اندازه هر زاویه خارجی برابر است با نصف تفاضل کمان درخورهایش. $\hat{P} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{r}$

اثبات این قضیه نیز مشابه قضیه قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

راهنمایی: خط BD را رسم کرده و به حکم نیز دقت کنید.



مسئله ۲-۷: اگر اندازه زاویه P برابر 40° باشد، اندازه کمان‌های x و y را بیابید.



$$\hat{P} = \frac{x - y}{r} = 40^\circ \Rightarrow x - y = 80^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 80^\circ \\ x + y = 140^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 220^\circ \Rightarrow x = 110^\circ, y = 30^\circ$$

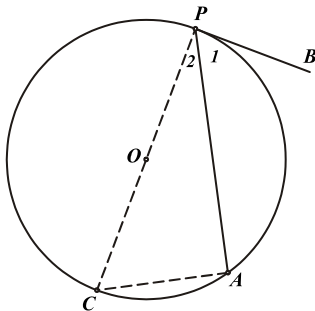
تعریف: زاویه ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر و ضلع دیگر آن خطی مماس بر دایره باشد.

نکته: خط مماس تنها در یک نقطه دایره را قطع می‌کند و در نقطه مماس بر شعاع دایره عمود است.



قضیه ۲-۴: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان درخورش.

قطر گذرنده از P را رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم دو زاویه P_1 و C بایکدیگر برابرند.



$$\hat{A} = \frac{\widehat{PC}}{r} = 90^\circ$$

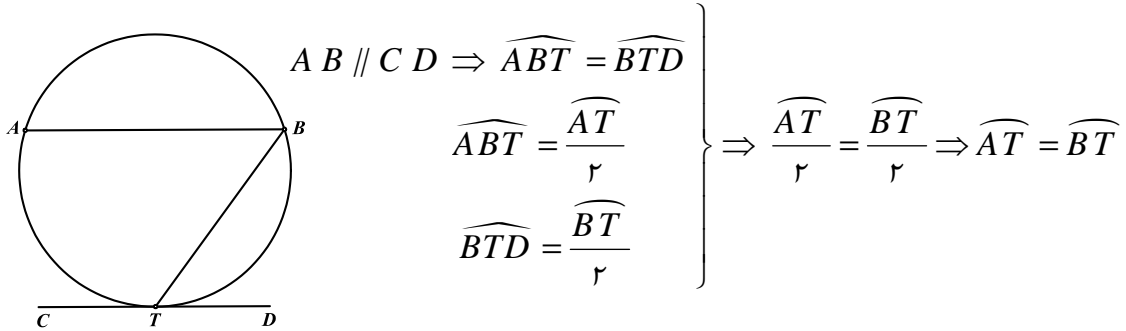
$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \hat{C} + \hat{P}_1 &= 90^\circ \\ \hat{P}_1 + \hat{P}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{C}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{C} &= \frac{\widehat{PA}}{r} \\ \hat{C} &= \hat{P}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \frac{\widehat{PA}}{r}$$



مسأله ۲-۸: اگر خط CD موازی وتر AB بوده و در نقطه T نیز بر دایره مماس باشد، ثابت کنید:

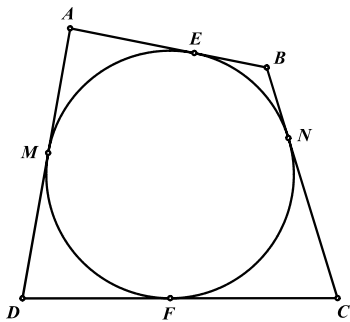
$$\widehat{AT} = \widehat{BT}$$



مسأله ۲-۹: ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبرو با هم برابرند. (چهارضلعی محیطی چهارضلعی



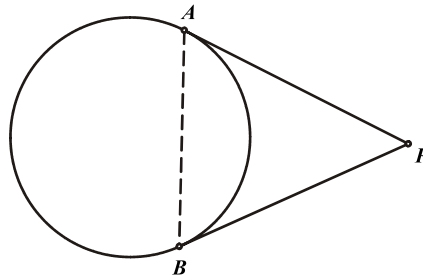
است که تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند)



$$\text{حکم: } AB + DC = AD + BC$$



لم: طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره بایکدیگر برابر است.



اثبات لم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \frac{\widehat{AB}}{r} \\ \widehat{B} &= \frac{\widehat{AB}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

بنابراین مثلث PAB متساوی الساقین بوده و دو ساق PA و PB بایکدیگر برابرند.

اثبات مسأله : بنابر لم فوق خواهیم داشت :

$$AE = AM , BE = BN , CF = CN , DF = DM$$

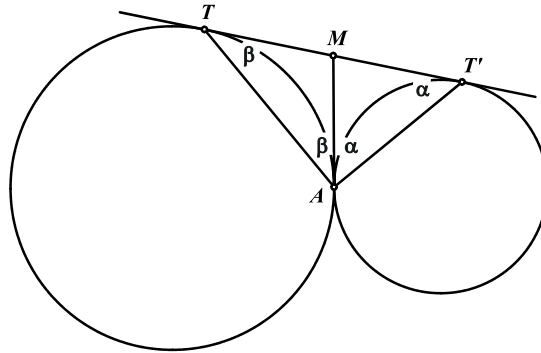
با جمع کردن طرفین تساویهای فوق داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

مسأله ۲-۱۰: دو دایره در نقطه A بریکدیگر مماس خارج اند و TT' مماس مشترک خارجی آنهاست. ثابت کنید



مثلث TAT' قائم الزاویه است.



مماس مشترک داخلی دو دایره را در نقطه A رسم می‌کنیم تا TT' را در M قطع کند. از آنجا که هر دو زاویه ظلّی با کمان درخور مشترک بایکدیگر برابرند داریم:

$$\widehat{MAT'} = \widehat{MT'A} = \frac{\widehat{AT'}}{r} = \alpha$$

$$\widehat{MAT} = \widehat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{r} = \beta$$

مجموع زوایای داخلی مثلث ATT' برابر 180° است. بنابراین:

$$\hat{T} + \hat{T'} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + (\beta + \alpha) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\beta + \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) از نقطه P مماس PT و قاطع PAB را بر دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید: $TA \cdot PT = TB \cdot PA$



(۲) ارتفاع‌های AA' و BB' از مثلث ABC یکدیگر را در H قطع می‌کنند. ارتفاع AA' را امتداد

می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در D قطع کند. ثابت کنید ضلع BC نیمساز زاویه HBD



است.

(۳) دو دایره در نقطه P بر یکدیگر مماس خارج‌اند. دو خط دلخواه طوری رسم می‌کنیم که از نقطه P گذشته و



دوایر را یکی در A و B و دیگری در C و D قطع کنند. نشان دهید: $AC \parallel BD$

(۴) نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند.

نشان دهید:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \text{ (الف)}$$

$$CE^2 = AE \cdot DE \text{ (ب)}$$

(۵) اگر نیمساز زوایای A و B از مثلث ABC دایره محیطی مثلث را به ترتیب در E و F و یکدیگر را در



I قطع کنند، ثابت کنید: $CE = BE = IE$

(۶) دو دایره به مراکز O_1 و O_2 یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند. خط دلخواهی از B می‌گذرانیم تا دو دایره



را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $\triangle AEF \sim \triangle AO_1O_2$

(۷) روی امتداد قطر CD از نیم دایره به مرکز O (نزدیک به C) نقطه A را انتخاب می‌کنیم و خطی از A

می‌گذرانیم تا نیم دایره را در دو نقطه B و E قطع کند بطوری که $AB = DO$. اگر $\widehat{EOD} = 45^\circ$



باشد، اندازه زاویه A را بیابید.

(۸) ارتفاع AH و نیمساز AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. قطری از دایره محیطی مثلث را که از A

می‌گذرد رسم می‌کنیم و انتهای دیگر قطر را A' می‌نامیم. نشان دهید AD زاویه $\widehat{HAA'}$ را نصف می‌کند.



(۹) روی نیم دایره‌ای به قطر AB دو نقطه C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ باشد. از نقطه

D عمودی بر CD خارج می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. اگر محل برخورد AC و BD را E



بنامیم، نشان دهید: $AF = FE$

(۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقاط A' ، B' و C'

قطع کنند. اگر ارتفاع‌های مثلث در نقطه‌ی H هم‌رس باشند، نشان دهید ارتفاع‌ها، نیمسازهای زوایای مثلث



$A'B'C'$ هستند.

(۱۱) خطی که از رأس B از مثلث ABC به موازات ضلع AC رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در C را در نقطه‌ی B' قطع می‌کند و خطی که از رأس C از مثلث ABC به موازات ضلع AB رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در B را در نقطه‌ی C' قطع می‌کند ثابت کنید:



$$BC^2 = CB'.BC'$$

(۱۲) نقطه‌ی P را روی دایره‌ی ای به مرکز O انتخاب می‌کنیم و تصویر آن بر روی قطر AB از دایره را N می‌نامیم روی شعاع PO پاره خط PQ را برابر $2AN$ جدا می‌کنیم اگر AQ دایره را در نقطه دیگری



$$\widehat{AOR} = 3\widehat{AOP} \text{ ثابت کنید:}$$

(۱۳) دایره‌ی ای به قطر AB مفروض است. وتر دلخواه AC و نیمساز زاویه‌ی \widehat{CAB} را رسم می‌کنیم تا این نیمساز وتر BC را در F و دایره را در H و مماسی که در نقطه‌ی B بر دایره رسم می‌شود را در D



$$\text{قطع کند. ثابت کنید: } FH = DH, \quad BD = BF$$

(۱۴) سه دایره $(O_1), (O_2), (O_3)$ دو به دو در نقاط D, E, F مماس خارج اند. امتدادهای



$$DF, DE \text{ دایره } (O_1) \text{ را در نقاط } A, B \text{ قطع می‌کنند. ثابت کنید:}$$

الف) قطر دایره (O_1) است.

ب) خط مرکزین دو دایره (O_2) و (O_3) موازی AB است.

(۱۵) دو دایره $(O_1), (O_2)$ در نقطه A بر یکدیگر مماس خارج اند. از نقطه دلخواه B بر روی دایره (O_1) مماس BD را بر دایره (O_2) رسم می‌کنیم تا دایره (O_1) را در C قطع کند. اگر امتداد پاره خط BA



$$\text{دایره } (O_2) \text{ را در } F \text{ قطع کند، ثابت کنید } AD \text{ نیمساز زاویه } \widehat{CAF} \text{ است.}$$

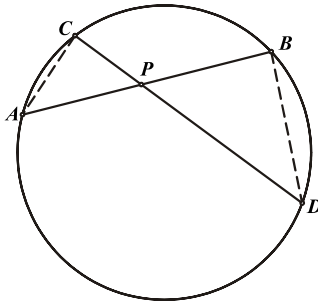
۲-۲ قوت نقطه نسبت به دایره

هدف بخش: در این بخش اشاره ای خواهیم داشت به یکی از خواص اساسی نقطه نسبت به دایره که کاربرد وسیعی در حل مسایل مرتبط با دایره دارد. قوت نقطه نسبت به دایره بسته به اینکه نقطه داخل یا خارج از دایره باشد به شکل های متفاوتی تعریف می شود که البته تفاوت چندانی بایکدیگر ندارند. در زیر با این مفاهیم آشنا می شویم.

مسئله ۲-۱۱: از نقطه P در داخل دایره C دو وتر دلخواه AB, CD را می گذرانیم. ثابت کنید حاصل ضرب



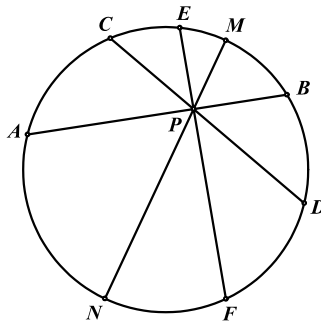
قطعات جدا شده روی هر وتر بایکدیگر برابر است.



حکم: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \frac{\widehat{CB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APC \sim \triangle BPD \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB} \Rightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

حال اگر دو وتر دلخواه EF, MN را نیز از P بگذرانیم با توجه به مسئله بالا می توانیم نتیجه بگیریم:



$$\left. \begin{array}{l} AP \cdot PB = CP \cdot PD \\ AP \cdot PB = EP \cdot PF \\ AP \cdot PB = MP \cdot PN \end{array} \right\} \Rightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD = EP \cdot PF = MP \cdot PN$$

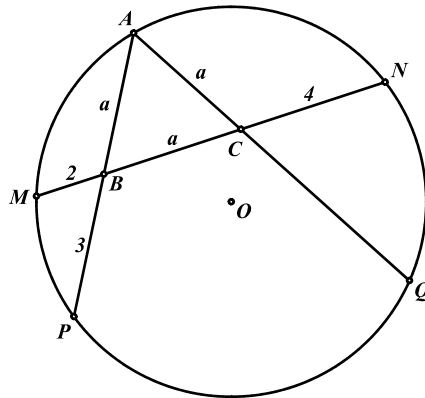


نتیجه: حاصل ضرب قطعات روی هر وترى که از نقطه P بگذرد با هم برابر و مقداری ثابت است که به این مقدار

ثابت، قوت نقطه P نسبت به دایره C می گوئیم و به صورت P_C^P نمایش می دهیم.



مسأله ۲-۱۲: در شکل زیر با توجه به مقادیر داده شده طول پاره خط CQ را بیابید.



$$P_C^B(O) = r \times a = r \times (a + 4) \Rightarrow ra = ra + 4r \Rightarrow a = 4$$

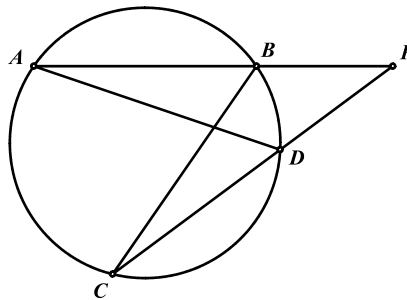
$$P_C^C(O) = a \times CQ = r \times (a + 2) \Rightarrow a \times CQ = 4a + 4 \Rightarrow CQ = \frac{4a + 4}{a}$$

$$\Rightarrow CQ = \frac{(4 \times 4) + 4}{4} = 5$$

مسأله ۲-۱۳: از نقطه‌ی P در خارج از دایره C دو خط دلخواه می‌گذرانیم بطوری که دایره را در نقاط

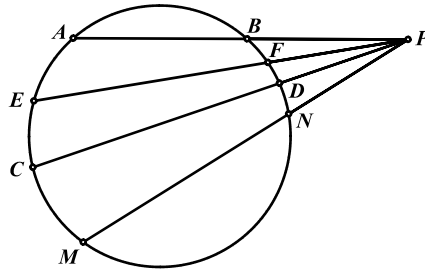


D, C, B, A قطع کنند. ثابت کنید: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{PAD} = \widehat{PCB} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{P} = \widehat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADP \sim \triangle BCP \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

حال اگر دو خط دلخواه دیگر نیز از P بگذرانیم که دایره C را در نقاط E, F, D, N قطع کنند با توجه به مسأله بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم:

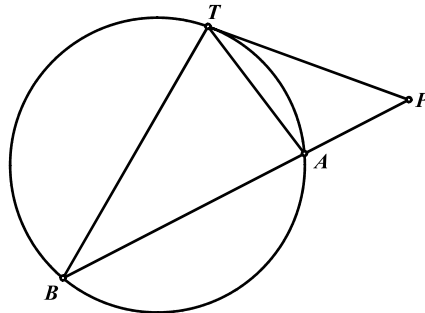


$$\left. \begin{array}{l} PA \cdot PB = PC \cdot PD \\ PA \cdot PB = PE \cdot PF \\ PA \cdot PB = PM \cdot PN \end{array} \right\} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = PM \cdot PN$$



نتیجه: برای تمام خطوط گذرنده از P حاصل ضرب فواصل نقطه P از نقاط تقاطع آن خط با دایره، همواره برابر و مقداری ثابت است که به این مقدار ثابت، قوت نقطه P نسبت به دایره C می‌گوییم و به صورت P_C^P نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲-۵: قوت نقطه‌ی P در خارج از دایره نسبت به دایره برابر است با مربع طول مماس مرسوم از P بر دایره.

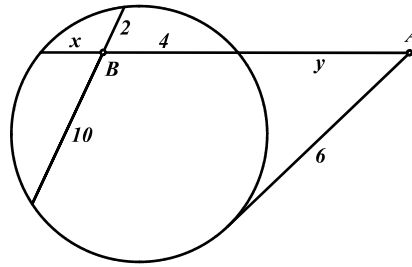


حکم: $PA \cdot PB = PT^2$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{TBA} = \widehat{ATP} = \frac{\widehat{TA}}{r} \\ \widehat{P} = \widehat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APT \sim \triangle BTP \Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$



مسأله ۲-۱۴: در شکل مقابل مقادیر x, y را بیابید.



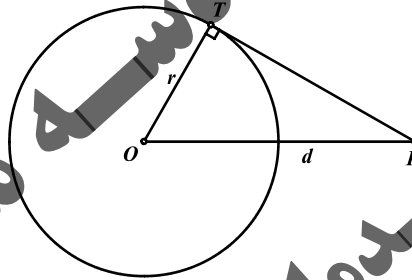
$$P_C^B = 4 \times x = 2 \times 10 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$P_C^A = y(y + 4 + x) = 6^2 \Rightarrow y(y + 9) = 36 \Rightarrow y = 3$$

قضیه ۲-۶: قوت نقطه P نسبت به دایره برابر است با تفاضل مربع فاصله نقطه P از مرکز دایره (d) و مربع



شعاع دایره (r).



ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه P خارج از دایره باشد.

$$\text{حکم: } P_C^P(O) = d^2 - r^2$$

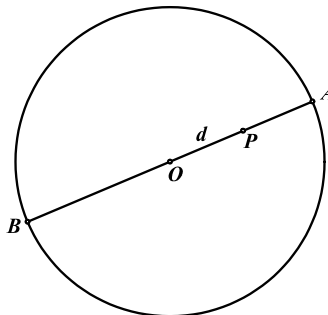
در این حالت از آنجا که مثلث OTP قائم الزاویه است طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$d^2 = r^2 + PT^2 \Rightarrow PT^2 = d^2 - r^2 = P_C^P(O)$$

در حالتی که P داخل دایره باشد قطر AB را که از نقطه P می‌گذرد در نظر می‌گیریم و با استفاده از اتحاد



$$\text{مزدوج ثابت می‌کنیم: } r^2 - d^2 = PA \cdot PB$$

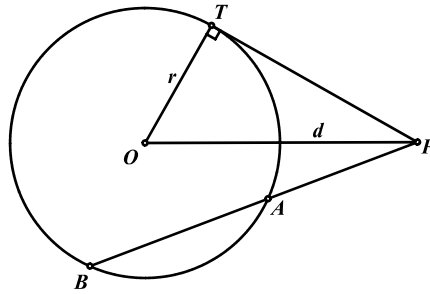


$$r^2 - d^2 = (r - d)(r + d) = (OA - OP)(OB + OP) = PA \cdot PB$$



جمع بندی: قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی $C(O)$ را به هریک از شکل های زیر می‌توان نشان داد:

$$P_{C(O)}^P = PA \cdot PB = PT^2 = |d^2 - r^2|$$

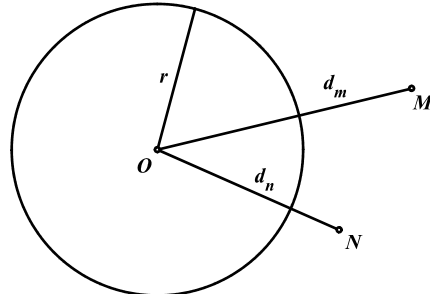


مسئله ۲-۱۵: در چه صورتی قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی $C(O)$ برابر صفر خواهد بود؟

$$P_{C(O)}^P = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2 \Rightarrow d = r$$

بنابراین قوت نقطه‌ی P در صورتی صفر خواهد شد که فاصله‌ی نقطه‌ی P از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد به عبارت دیگر زمانی که نقطه‌ی P روی محیط دایره باشد.

مسئله ۲-۱۶: در چه صورتی قوت دو نقطه متفاوت M, N نسبت به دایره‌ی $C(O)$ مساوی خواهد بود؟



$$P_{C(O)}^M = P_{C(O)}^N \Rightarrow d_m^2 - r^2 = d_n^2 - r^2 \Rightarrow d_m^2 = d_n^2 \Rightarrow d_m = d_n$$

پس زمانی قوت دو نقطه نسبت به یک دایره برابر است که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره یکسان باشد و همچنین قوت نقطه‌ای بزرگتر است که فاصله‌ی بیشتری از مرکز دایره داشته باشد.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) به قطر ساق BC از دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه $ABCD$ دایره‌ی M رسم کرده ایم تا ساق قائم AD را در M



و N قطع کند. اگر $AB = 3, CD = 7$ باشند مقدار $AM \cdot MD$ را بیابید.

(۲) دو دایره‌ی $C(O)$ و $C'(O')$ در نقاط M, N متقاطع اند. ثابت کنید امتداد خط مماس MN



مشترک خارجی دو دایره را نصف می‌کند.

(۳) از نقطه‌ی دلخواه A در خارج دایره‌ی $C(O)$ مماس AB را بر دایره رسم می‌کنیم و نقطه‌ی E را

طوری در نظر می‌گیریم که $AB = AE$ باشد. اگر D نقطه‌ی دلخواه روی دایره باشد، محل برخورد

AD با دایره را C نامیده و محل برخورد خطهای ED, EC با دایره را به ترتیب G, F می‌نامیم. ثابت



کنید: $AE \parallel FG$

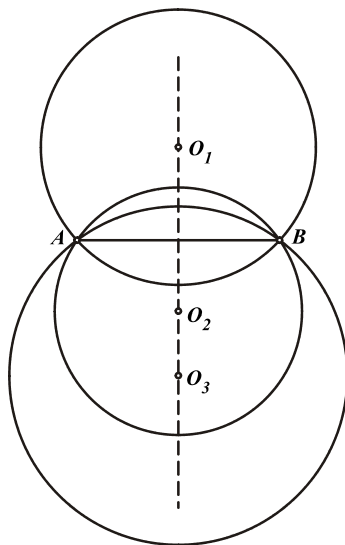
۳-۲ چهارضلعی های محاطی

هدف بخش: خواص مهم چهارضلعی های محاطی باعث شده تا این نوع از چهارضلعی ها کاربرد وسیعی در انواع سؤالات هندسه داشته باشند. به همین دلیل و همچنین آمیختگی این مبحث با دو بخش قبلی، در این بخش به بررسی خواص مختلف آن پرداخته می شود.

مسئله ۲-۱۷: دو نقطه دلخواه A, B مفروض اند. چند دایره می توان رسم کرد به طوری که از هر دو نقطه



بگذرند؟



بینهایت دایره - اگر O مرکز دایره ای باشد که چنین خاصیتی را داشته باشد تنها خاصیت O این است که از A, B به یک فاصله است و به عبارت دیگر O نقطه ای روی عمود منصف پاره خط AB است. پس اگر هر نقطه روی عمود منصف AB را به عنوان O در نظر بگیریم دایره ای به مرکز O حاصل خواهد شد که از A, B می گذرد.

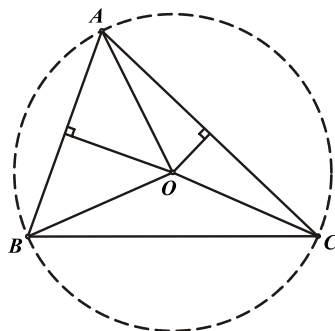
نتیجه: از هر دو نقطه مفروض بینهایت دایره می گذرد.

مسئله ۲-۱۸: سه نقطه غیر هم خط A, B, C مفروض اند. چند دایره می توان رسم کرد به طوری که از هر سه



نقطه بگذرند؟

فقط و فقط یک دایره - اگر O مرکز دایره فرضی باشد که چنین خاصیتی را داشته باشد طبق توضیحات مسئله قبل از آنجا که دایره از نقاط A, B می گذرد نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد و از طرف دیگر چون دایره از A, C نیز می گذرد O روی عمود منصف پاره خط AC نیز قرار دارد. پس O باید روی محل تقاطع عمود منصف های AB, AC قرار داشته باشد.



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OA = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OB = OC$$

از آنجا که محل تقاطع دو عمود منصف یک نقطه بیشتر نیست، یک نقطه O و بالاخره یک دایره بیشتر وجود ندارد.

نتیجه ۱: از هر سه نقطه‌ی غیر هم خط دقیقاً یک دایره می‌گذرد که به این دایره دایره‌ی محیطی مثلث ABC گویند. و مرکز آن نیز محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث است که با O نشان داده می‌شود.

نتیجه ۲: نقطه‌ی O روی عمود منصف BC نیز قرار خواهد داشت.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OA = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OB = OC$$

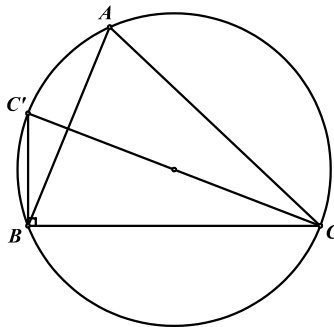
به عبارت دیگر عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.

مسئله ۲-۱۹: (قضیه‌ی سینوس‌ها) اگر R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC و a, b, c طول اضلاع متناظر



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

رئوس آن باشد، ثابت کنید:



قطر گذرنده از رأس C را رسم کرده و روبروی قطری آن را C' می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویه $C'BC$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \hat{C}' = \frac{BC}{CC'} = \frac{a}{2R} \\ \hat{C}' = \hat{A} = \widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$$

به همین ترتیب حکم برای رئوس B, C نیز اثبات می‌شود.

توجه داشته باشید که قضیه‌ی سینوس‌ها در حل مسایل هندسی کاربرد وسیعی دارد.

مسئله ۲-۲۰: چهار نقطه‌ی دلخواه D, C, B, A مفروض‌اند. چند دایره می‌توان رسم کرد به طوری که از هر

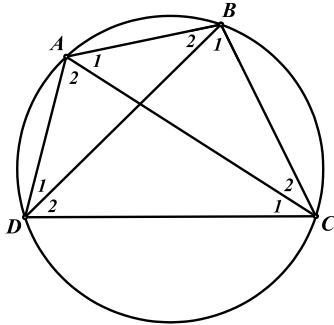
چهار نقطه بگذرند؟

در این حالت دیگر نمی‌توان حکمی قطعی برای هر چهار نقطه (چهارضلعی) دلخواه صادر کرد چرا که برای برخی چهارضلعی‌ها مانند لوزی (در صورتی که مربع نباشد) هرگز نمی‌توان چنین دایره‌ای رسم کرد اما برای برخی چهارضلعی‌ها مانند مربع و مستطیل همواره چنین دایره‌ای یافت می‌شود.

تعریف: چهارضلعی محاطی چهارضلعی است که بتوان دایره‌ای از هر چهار رأس آن گذراند یا به عبارتی چهارضلعی که بتوان آن را در دایره‌ای محاط کرد.



قضیه ۲-۷: در هر چهارضلعی محاطی، اگر قطرهای آن را رسم کنید هر دو زاویه رو به یک ضلع با یکدیگر برابرند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_r &= \widehat{DC} \\ \hat{B}_r &= \widehat{DC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$$

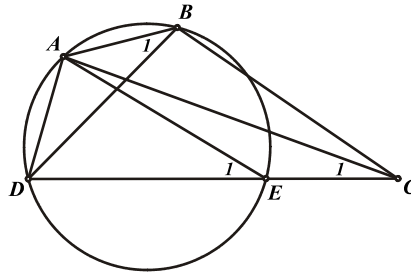
و به همین صورت خواهیم داشت: $\hat{A}_r = \hat{D}_r$, $\hat{D}_r = \hat{C}_r$, $\hat{C}_r = \hat{B}_r$

عکس قضیه: در هر چهارضلعی که قطرهای آن رسم شده است، اگر دو زاویه رو به یک ضلع با یکدیگر برابر باشند،



چهارضلعی محاطی است.

$$\hat{C}_r = \hat{B}_r \Rightarrow ABCD \text{ محاطی}$$



ابتدا فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی نباشد بنابراین دایره ای که از سه رأس A, B, D می‌گذرد از نقطه‌ی C نخواهد گذشت. محل تلاقی دایره با ضلع DC را E می‌نامیم. از آنجا که چهارضلعی $ABED$ محاطی است داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \hat{E}_r = \hat{B}_r \\ \hat{C}_r = \hat{B}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_r = \hat{E}_r$$

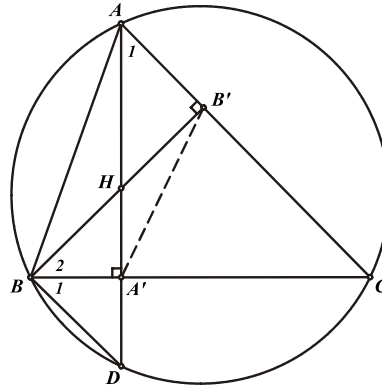
از آنجا که هرگز ممکن نیست $\hat{C}_r = \hat{E}_r$ باشد (چرا؟) پس به تناقض رسیده ایم یعنی دایره محیطی ABD از C گذشته و چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

نکته: این نوع از استدلال را که در بالا بکار گرفته شده برهان خلف می‌گویند که در آن برای اثبات درستی حکم خلاف حکم را در نظر گرفته و با استفاده از مفروضات مسأله و خلاف حکم به یک تناقض می‌رسند.

مسأله ۲-۲۱: اگر دو ارتفاع AA' , BB' از مثلث ABC یکدیگر را در H و ارتفاع AA' دایره محیطی مثلث را



در D قطع کند، ثابت کنید: $\widehat{HBA'} = \widehat{A'BD}$



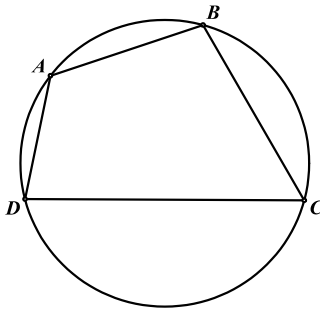
حکم: $\hat{B}_1 = \hat{B}_r$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^\circ &\Rightarrow \text{محاطی } AB'A'B \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{A}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \frac{\widehat{CD}}{r} & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_r$$



قضیه ۲-۸: در هر چهارضلعی محاطی زوایای رو به رو به هم مکمل یکدیگرند.

حکم: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$



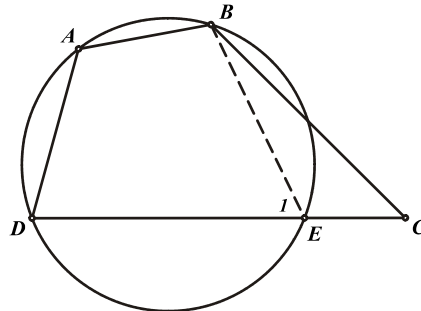
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{r} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{r} = \frac{360^\circ}{r} = 180^\circ$$

و به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



عکس قضیه: در هر چهارضلعی که دو زاویه روبرو به یکدیگر مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

محاطی $ABCD \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$



از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی نباشد در این صورت دایره ای که از سه رأس A, B, D می گذرد از نقطه ی C نخواهد گذشت. محل برخورد دایره با DC را E می نامیم. از آنجا که چهارضلعی $ABED$ محاطی است داریم:

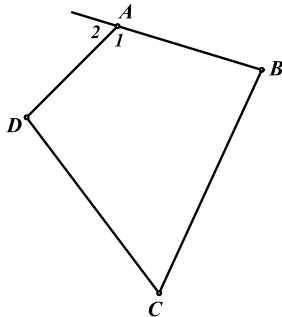
$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \hat{A} + \hat{E}_1 &= 180^\circ \\ \text{طبق فرض: } \hat{A} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} \Rightarrow BE \parallel BC$$

و از آنجا که هرگز دو خط BE, BC موازی نیستند پس به تناقض رسیده ایم یعنی چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

نکته: طبق استدلال زیر چنانکه در یک چهارضلعی دو زاویه روبرو مکمل یکدیگر باشند ($\hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ$) هر کدام



از دو زاویه با زاویه خارجی دیگر برابر خواهد بود ($\hat{C} = \hat{A}_r$) و بالعکس.



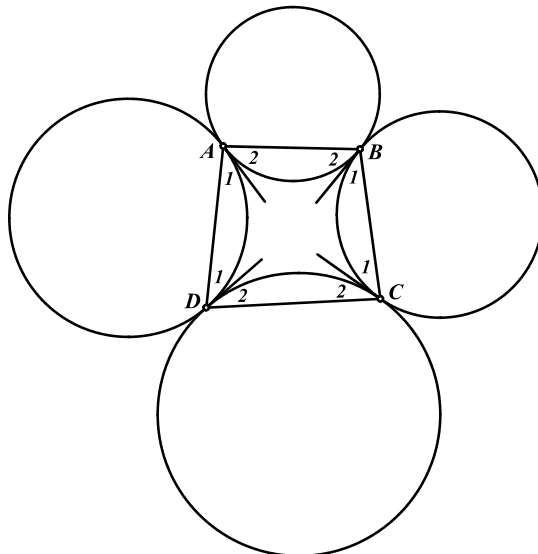
$$\left. \begin{aligned} \text{فرض: } \hat{A}_1 + \hat{C} &= 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_r &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{C}$$

نتیجه: در هر چهارضلعی محاطی هر زاویه با زاویه خارجی زاویه روبروی آن برابر است و بالعکس.

مسأله ۲-۲۲: چهار دایره ی غیر متقاطع در چهار نقطه ی D, C, B, A بر یکدیگر مماس خارج اند به طوری که هر



کدام بر دو دایره ی مجاور خود مماس است. ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.



مماس های مشترک دایره را در نقاط A, B, C, D رسم می کنیم و ثابت می کنیم دو زاویه ی روبرو به یکدیگر در چهارضلعی مکمل یکدیگرند. از آنجا که هر کدام از این زوایا ظلی هستند داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{D}_1 &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$$

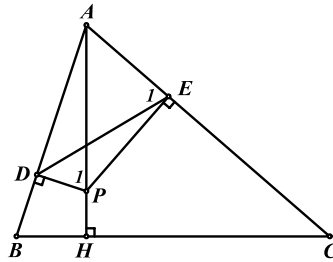
و به همین ترتیب داریم: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_3 = \hat{B}_3$
 با جمع کردن طرفین چهار تساوی بالا بایکدیگر خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} &= \hat{B} + \hat{D} \\ \hat{A} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{D} &= 360^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

مسأله ۲-۲۳: از نقطه ی دلخواه P بر روی ارتفاع AH از مثلث ABC عمودهای PD, PE را بر اضلاع



AC, AB فرود می آوریم. ثابت کنید چهارضلعی $BDEC$ محاطی است.



برای اثبات محاطی بودن چهارضلعی $BDEC$ نشان می دهیم:

معادل $\hat{B} = \hat{E}_1$:

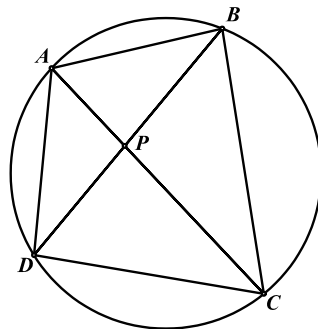
$$\left. \begin{aligned} \widehat{BHP} + \widehat{BDP} = 180^\circ &\Rightarrow \text{محاطی } BDPH \Rightarrow \hat{B} = \hat{P}_1 \\ \widehat{ADP} + \widehat{AEP} = 180^\circ &\Rightarrow \text{محاطی } ADPE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{P}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_1$$



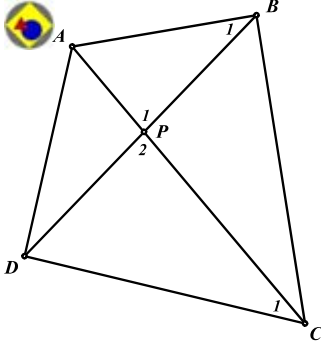
قضیه ۲-۹: در هر چهارضلعی محاطی حاصل ضرب قطعات روی هر قطر بایکدیگر برابر است.

از آنجا که قوت نقطه ی P نسبت به دایره ثابت است به راحتی می توان نتیجه گرفت:

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD$$



عکس قضیه: در هر چهارضلعی که حاصل ضرب قطعات روی هر قطر بایکدیگر برابر باشد، چهارضلعی محاطی است.



فرض: $AP \cdot PC = BP \cdot PD$
محاطی $ABCD$: حکم

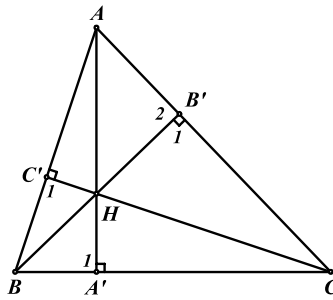
برای اثبات محاطی بودن چهارضلعی $ABCD$ نشان می‌دهیم: $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC} \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta DPC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

مسئله ۲-۲۴: ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کرده ایم تا یکدیگر را در نقطه‌ی H قطع کنند. نشان دهید حاصل



ضرب قطعات روی هر ارتفاع بایکدیگر برابر است.



حکم: $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$

$$\hat{C}'_1 = \hat{B}'_1 = 90^\circ \Rightarrow \text{محاطی } BC'B'C \Rightarrow CH \cdot HC' = BH \cdot HB' \quad (1)$$

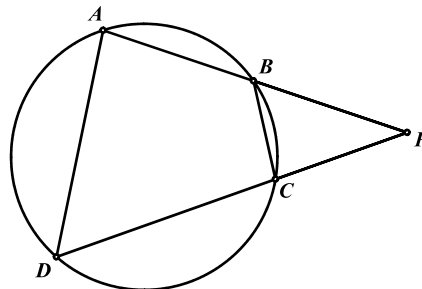
$$\hat{A}'_1 = \hat{B}'_r = 90^\circ \Rightarrow \text{محاطی } AB'A'B \Rightarrow AH \cdot HA' = BH \cdot HB' \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$$

قضیه ۲-۱۰: در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، اگر امتداد دو ضلع روبه‌رو (AB, CD) یکدیگر را در P قطع



کند $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ خواهد بود و بالعکس.

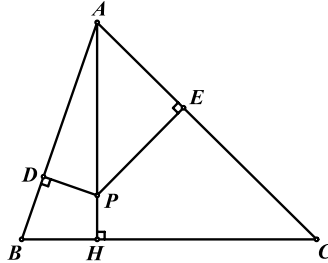


اثبات این قضیه نیز مشابه قضیه‌ی قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۲-۲۵: از نقطه‌ی دلخواه P بر روی ارتفاع AH از مثلث ABC عمودهای PE, PD را بر اضلاع



AC, AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید چهارضلعی $BDEC$ محاطی است.



برای اثبات حکم نشان می‌دهیم:

معادل حکم: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

$$\hat{BDP} + \hat{BHP} = 180^\circ \Rightarrow BDPH \text{ محاطی} \Rightarrow AD \cdot AB = AP \cdot AH \quad (1)$$

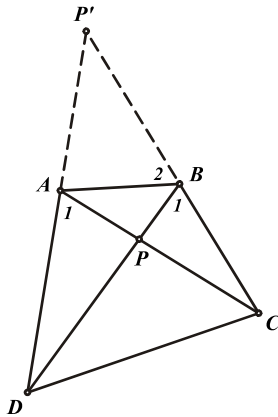
$$\hat{CHP} + \hat{CEP} = 180^\circ \Rightarrow CHPE \text{ محاطی} \Rightarrow AE \cdot AC = AP \cdot AH \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC$$

جمع بندی: در هر چهارضلعی محاطی پنج خاصیت می‌توان نام برد که از هر کدام از این پنج خاصیت می‌توان محاطی



بودن یک چهارضلعی را نتیجه گرفت که این پنج خاصیت عبارتند از:



$$\text{محاطی} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ 2) \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ 3) \hat{D} = \hat{B}_r \\ 4) AP \cdot PC = BP \cdot PD \\ 5) P'A \cdot P'D = P'B \cdot P'C \end{cases}$$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) دو دایره C_1, C_2 در نقاط A, B متقاطع اند. نقطه‌ی M را روی خط AB در نظر می‌گیریم و دو خط از آن می‌گذرانیم تا یکی دایره‌ی C_1 را در E, F و دیگری دایره‌ی C_2 را در Q, P قطع کند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی E, F, Q, P هم دایره‌اند.



(۲) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است. نقطه‌ی وسط کمان AB را P می‌نامیم و دو وتر PM, PN را چنان رسم می‌کنیم که AB را به ترتیب در E, D قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی $DENM$ محاطی است.



(۳) دو نقطه‌ی C, D را طوری روی نیم دایره‌ی به قطر AB انتخاب می‌کنیم که $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ باشد. P را نیز نقطه‌ای دلخواه روی نیم دایره در نظر می‌گیریم و محل تلاقی AD, AC با PC, PB را به ترتیب E, F می‌نامیم. ثابت کنید: $EF \perp AD$



(۴) بر روی ضلع AC از مثلث متساوی الاضلاع ABC مربعی بنا می‌کنیم. مرکز مربع را E و وسط ضلع AB را D می‌نامیم. اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{ADE} را بیابید.



(۵) ثابت کنید که در هر مثلث خطی که پای ارتفاع‌های وارد از دو رأس را به یکدیگر وصل می‌کند، بر شعاعی از دایره‌ی محیطی که از رأس سوم رسم شود، عمود است.



(۶) چهار دایره مطابق شکل، هر کدام دو دایره‌ی مجاور خود را در دو نقطه قطع می‌کند. ثابت کنید اگر چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، چهارضلعی $A'B'C'D'$ نیز محاطی خواهد بود.



(۷) در نیم دایره‌ی روبرو اگر O مرکز دایره بوده و $\hat{M} = \hat{N} = 10^\circ$ و $\widehat{AM} = 40^\circ$ باشند، اندازه‌ی کمان \widehat{BN} را پیدا کنید.



(۸) از دو رأس B, C از مثلث ABC عمودهای BB', CC' را بر AO (O مرکز دایره‌ی محیطی ABC) رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقاط B', C' از وسط ضلع BC به یک فاصله اند.



(۹) ارتفاع‌های AA', BB', CC' از مثلث ABC یکدیگر را در نقطه‌ی H قطع می‌کنند. نشان دهید ارتفاع AA' نیمساز زاویه‌ی $\widehat{B'A'C'}$ است.



(۱۰) دایره‌ای که از رأس‌های A, B, C از متوازی الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد ضلع AD را در A' و ضلع

$$CD \text{ را در } C' \text{ قطع می‌کند. نشان دهید: } \frac{A'D}{A'C'} = \frac{A'C}{A'B}$$



(۱۱) قضیه‌ی بطلمیوس: در هر چهارضلعی محاطی $ABCD$ نشان دهید:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

(۱۲) مثلث‌های ناپلئونی: بر روی اضلاع مثلث ABC سه مثلث BCA' , ACB' , ABC' را طوری بنا کرده



ایم که $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ$. ثابت کنید دایره‌های محیطی این سه مثلث در یک نقطه هم‌رس اند.

(۱۳) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC' , ACB' , BCA' را بنا



می‌کنیم. نشان دهید سه پاره خط AA' , BB' , CC' در یک نقطه هم‌رس اند.

(۱۴) در چهارضلعی محاطی $ABCD$ اقطار AC , BD بر یکدیگر عمودند. نشان دهید فاصله‌ی مرکز دایره‌ی



محیطی چهارضلعی از ضلع AB برابر نصف طول ضلع CD است.

۴-۲ مکان هندسی

هدف بخش: گاهی لازم است تمام نقاطی که دارای خاصیت مشترکی هستند را پیدا کنیم تا به حل برخی مسایل هندسه نایل آییم. این مفهوم، مکان هندسی نامیده می‌شود که از این به بعد در بخش‌های مختلف این کتاب با مسایلی از این دسته آشنا خواهید شد.

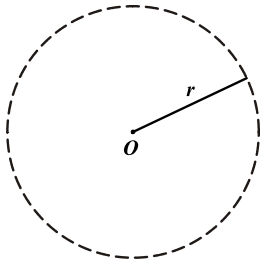
تعریف: مکان هندسی خاصیت P مجموعه همه‌ی نقاطی است که دارای ویژگی یا خاصیت P هستند، به عبارت دیگر:

الف) هر نقطه در این مجموعه (مکان هندسی) دارای خاصیت P است.
 ب) هر نقطه‌ای که خاصیت P را دارا باشد عضو این مجموعه (مکان هندسی) است.
 توجه داشته باشید که برای اثبات مسایل مکان هندسی باید هر دو شرط فوق اثبات شوند.

مسئله ۲-۲۶: ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی مفروض O به فاصله‌ی r هستند، یک دایره است.



در این مسئله خاصیت P ، به فاصله‌ی r بودن از نقطه‌ی O است و مکان هندسی مورد نظر نیز دایره‌ای به شعاع r و مرکز O است.



الف) هر نقطه روی دایره‌ای به شعاع r از نقطه‌ی O به فاصله‌ی r است.
 ب) هر نقطه‌ای که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی r باشد حتماً روی این دایره است.
 از آنجا که درستی دو شرط بالا واضح و روشن است مسئله اثبات شده است.

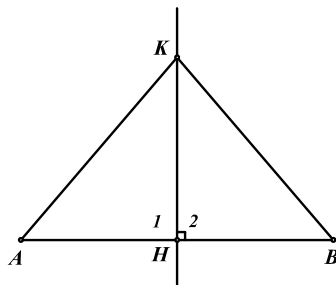
مسئله ۲-۲۷: ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره خط به یک فاصله اند، عمود منصف آن پاره خط



است.

در این مسئله خاصیت P ، یکسان بودن فاصله از دو سر پاره خط است و مکان هندسی مورد نظر نیز عمود منصف پاره خط است. برای اثبات مسئله باید دو شرط (الف) و (ب) را ثابت کنیم.

الف) هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر آن به یک فاصله است. اگر K نقطه‌ای روی عمود منصف AB باشد خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = HB \\ HK = HK \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHK = \triangle BHK \Rightarrow AK = BK$$

ب) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن قرار دارد.

از نقطه K که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است عمود KH را بر AB رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که KH منصف پاره خط AB نیز می‌باشد.

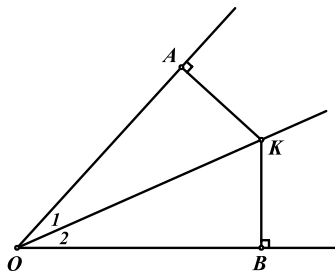
فرض: $AK = KB$

حکم: $AH = HB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AK = KB \\ KH = KH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKH = \triangle BKH \Rightarrow AH = HB$$



مسئله ۲-۲۸: ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است. در این مسئله خاصیت P ، هم فاصله بودن از اضلاع زاویه و مکان هندسی مورد نظر نیمساز زاویه است.



برای اثبات مسئله دو شرط (الف) و (ب) را ثابت می‌کنیم.

الف) هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

فرض: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

حکم: $KA = KB$

اگر نقطه‌ی K را روی نیمساز زاویه‌ی \hat{O} در نظر بگیریم دو مثلث زیر به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده بایکدیگر برابرند و خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ KO = KO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KOA = \triangle KOB \Rightarrow KA = KB$$

ب) هر نقطه‌ی ای که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه قرار دارد.

از نقطه‌ی K که از دو ضلع زاویه‌ی \hat{O} به یک فاصله است به رأس زاویه وصل کرده و ثابت می‌کنیم KO نیمساز زاویه است.

فرض: $KA = KB$

حکم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ KO = KO \\ KA = KB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKO = \triangle BKO \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

بنابراین دو مثلث فوق به حالت وتر و یک ضلع با هم برابرند و حکم ثابت شده است.

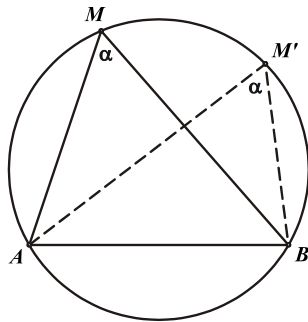
مسئله ۲۹-۲: ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که پاره خط مفروض AB را با زاویه α می‌بینید، کمانی از یک دایره است.

ابتدا حدس می‌زنیم که این کمان، کمانی از دایره محیطی مثلث AMB ($\widehat{AMB} = \alpha$) باشد و سپس به اثبات آن می‌پردازیم.

الف) هر نقطه روی کمان \widehat{AMB} از دایره محیطی مثلث AMB ($\widehat{AMB} = \alpha$)، پاره خط AB را با زاویه α درجه می‌بیند.



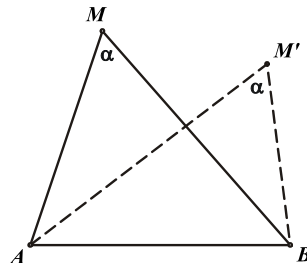
اگر نقطه‌ی M' را روی کمان \widehat{AMB} در نظر بگیریم خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}' = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{M} = \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}' = \alpha$$

ب) هر نقطه‌ای که پاره خط AB را با زاویه α ببیند، روی کمانی از دایره محیطی مثلث AMB است.

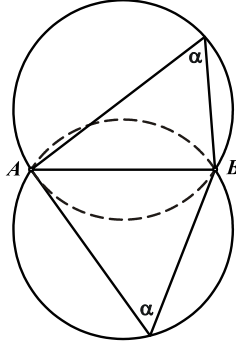
اگر M' هم پاره خط AB را با زاویه α ببیند، از آنجا که $\hat{M} = \hat{M}' = \alpha$ پس چهارضلعی $AMM'B$ محاطی بوده و M' بر روی کمان \widehat{AMB} از دایره محیطی مثلث AMB قرار دارد.



نکته : در واقع مکان هندسی نقاطی که پاره خط AB را با زاویه‌ی α می‌بینند، دو کمان از دو دایره می‌باشد که دایره‌ی دوم متقارن دایره‌ی فوق نسبت به پاره خط AB است. به این دو کمان، کمان درخورهای α درجه‌ی



AB گفته می‌شود.



مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) مکان هندسی نقاطی را بیابید که قوت یکسانی نسبت به دایره مفروض دارند.
- (۲) ضلع BC از مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض اند و رأس A بر روی کمان BAC تغییر می‌کند. ضلع AB را از طرف A به اندازه AC امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی M بدست آید. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.
- (۳) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ی درون یک زاویه‌ی مفروض که فاصله‌های آن از دو ضلع این زاویه مقدار مفروض K است، خط راست ثابتی است که از رأس این زاویه می‌گذرد.
- (۴) دو قطر عمود بر هم از دایره‌ی مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد (O) را در M ، AA' را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطه‌ی برخورد مماسی که در M بر دایره‌ی (O) رسم می‌شود و خطی که در N بر AA' عمود می‌شودیک خط راست را می‌پیماید.
- (۵) مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض است. دو نقطه‌ی متغیر E, D به ترتیب بر امتدادهای اضلاع AB, AC (نزدیک به B, C) قرار دارند به طوری که $BD \cdot CE = BC^2$. اگر محل تلاقی CD, BE را K بنامیم، مکان هندسی نقطه‌ی K را پیدا کنید.
- (۶) قطرهای عمود بر هم BD, AC از دایره‌ی (O) مفروض اند. وتر متغیر AP از این دایره قطر BD را در E قطع می‌کند. از E خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم تا خط BP را در M قطع کند. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.
- (۷) نقطه‌ی A و دو خط عمود بر هم d, d' مفروض اند. مستطیل متغیر $ABCD$ را طوری رسم می‌کنیم که رئوس D, B از آن به ترتیب روی خطوط d, d' قرار داشته باشند. مکان هندسی رأس C از این مستطیل را بیابید.
- (۸) دایره‌ی متغیری که از یک رأس یک زاویه‌ی مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های A, B قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایره متشکل از دو خط راست است.
- (۹) دایره‌ی (O) و دو نقطه‌ی B, C بر روی آن مفروض اند. نقطه‌ی A روی کمان BAC از این دایره تغییر می‌کند. نقطه‌ی وسط AB را K می‌نامیم و عمود KH را بر AC فرود می‌آوریم. مکان هندسی نقطه‌ی H را بیابید.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) در مثلث ABC ، ارتفاع AA' ، میانه AM و نیمساز زاویه A می‌باشد. پای عمودهای وارد از



C, B بر نیمساز رأس A را به ترتیب B', C' می‌نامیم. ثابت کنید:

الف) دو مثلث $A'B'C'$ ، ABC متشابه اند.

ب) مثلث $MB'C'$ متساوی الساقین است.

ج) چهارضلعی $A'B'MC'$ محاطی است.

(۲) نقطه‌ی دلخواه P روی نیمساز زاویه A از مثلث ABC مفروض است. C', B', A' به ترتیب تصاویر

نقطه‌ی P بر اضلاع BC, AC, AB می‌باشند. امتداد PA' ، پاره خط $B'C'$ را در N قطع می‌کند.



نشان دهید نقطه‌ی N بر روی میانه‌ی AM از مثلث ABC قرار دارد.

(۳) دایره‌ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث

می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویه‌ی HIK است.



(۴) D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC از مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) است. پای

عمودهای وارد از نقطه‌ی D بر اضلاع AC, AB را به ترتیب E, F می‌نامیم. اگر M وسط قاعده‌ی



BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

(۵) ثابت کنید مراکز نیمسازی (محل برخورد نیمسازهای داخلی) چهار مثلثی که رئوسشان، رئوس یک چهارضلعی

محاطی است یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

(۶) نیم دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. نقطه‌ی P را روی امتداد AB انتخاب می‌کنیم (A

بین P, B). از P قاطعی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در C, D قطع کند (C بین P, D). نقطه‌ی



تقاطع دوایر محیطی دو مثلث OAC, OBD را Q می‌نامیم. ثابت کنید: $O\hat{Q}P = 90^\circ$

(۷) DE قطری از دایره‌ی محیطی مثلث ABC است که بر ضلع BC در نقطه‌ی M عمود است. H

تصویر نقطه‌ی A روی قطر DE و K تصویر نقطه‌ی E روی AC است. ثابت کنید EK بر دایره‌ی



محیطی مثلث HMK مماس است.

(۸) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. محل تقاطع امتداد اضلاع AB, CD را E و محل تقاطع

امتداد اضلاع AD, BC را F می‌نامیم. نیمساز زاویه‌ی \hat{E} اضلاع AD, BC را به ترتیب در P, Q

و نیمساز زاویه‌ی \hat{F} اضلاع AB, CD را به ترتیب در K, L قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی



$PLQK$ یک لوزی است.

(۹) از نقطه‌ی P خارج دایره‌ی (O) مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. نقطه‌ی Q را بر امتداد OP طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $PQ = PT$. مماس QS را بر دایره رسم می‌کنیم و تصویر نقطه‌ی



S روی OP را K می‌نامیم. ثابت کنید: $PQ = PK$

(۱۰) دو دایره در نقطه‌ی P بر هم مماس داخل اند. وتر AB از دایره‌ی بزرگتر بر دایره‌ی کوچکتر در نقطه‌ی Q



مماس است. ثابت کنید PQ از وسط کمان AB می‌گذرد.

فصل سوم

خواص مثلث

۱-۳ ارتفاع

هدف بخش: در این بخش برخی از مهمترین خواص ارتفاع‌های مثلث را که در حل مسایل بکار برده می‌شوند، یادآور خواهیم شد و سپس با حل مسایلی چند، شما را با بخشی از گستره مسایل مختلف مرتبط با خواص ارتفاع‌ها آشنا خواهیم ساخت.

تعریف: ارتفاع نظیر هر رأس از مثلث، پاره خطی است که از آن رأس بر ضلع مقابل یا امتداد آن عمود می‌شود که به محل تلاقی ارتفاع با ضلع مقابل پای ارتفاع می‌گویند.

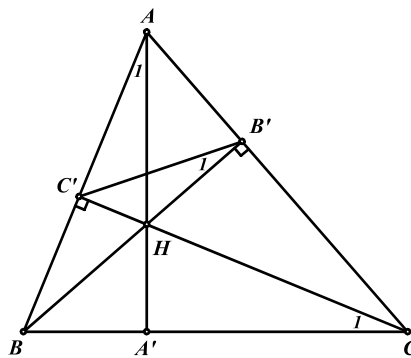
قضیه ۱-۳: ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.

راه حل اول: دو ارتفاع BB' ، CC' از مثلث ABC را رسم کرده و محل تلاقی آن‌ها را H می‌نامیم



ثابت می‌کنیم خط AH بر BC عمود بوده و ارتفاع مثلث ABC است.

$$\left. \begin{array}{l} BC \hat{=} B'C \Rightarrow \text{محاظی} \Rightarrow \hat{B}'_1 = \hat{C}'_1 \\ AC \hat{=} A'B' \Rightarrow \text{محاظی} \Rightarrow \hat{B}'_1 = \hat{A}'_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{A}'_1$$



از آنجا که در چهارضلعی $AC'A'C$ دو زاویه‌ی رو به یک ضلع یعنی \hat{A}'_1, \hat{C}'_1 بایکدیگر برابر شده‌اند پس چهارضلعی $AC'A'C$ محاطی می‌باشد بنابراین

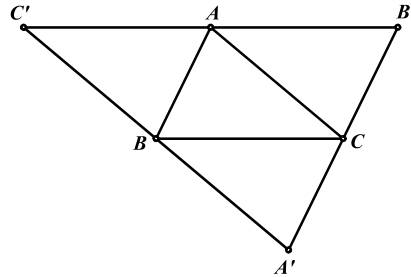
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}'_1 = \hat{C}'_1 \\ \hat{A}'_1 + \hat{C}'_1 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}'_1 = 90^\circ$$

توجه داشته باشید که ایده این راه حل در حل مسایل مربوط به هم‌رسی خطوط، بسیار مهم و کاربردی است یعنی برای اثبات هم‌رسی سه خط دو خط را رسم کرده و ثابت می‌کنیم که خط سوم نیز از محل تلاقی آن دو خط می‌گذرد.

راه حل دوم: از هر رأس مثلث خطی موازی ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا این سه خط یکدیگر را در سه نقطه A' , B' , C' قطع کنند. اگر ثابت کنیم ارتفاع‌های مثلث ABC عمود منصف‌های مثلث $A'B'C'$ هستند، از آنجا که پیش تر ثابت کردیم عمود منصف‌های هر مثلث هم‌مرس‌اند، پس ارتفاع‌های



مثلث ABC نیز هم‌مرس خواهند بود.



$$\left. \begin{array}{l} AB' \parallel BC \\ B'C \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow ABCB' \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow BC = AB'$$

$$\left. \begin{array}{l} AC' \parallel BC \\ BC' \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow ACBC' \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow BC = AC'$$

از مجموعه‌ی دو رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت: $AB' = AC'$

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel B'C' \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp B'C'$$

بنابراین AH هم عمود و هم منصف پاره خط $B'C'$ است بنابراین عمود منصف $B'C'$ می‌باشد و به همین ترتیب سایر ارتفاع‌ها نیز عمود منصف دیگر اضلاع مثلث $A'B'C'$ خواهند بود.

تعریف: محل هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث را مرکز ارتفاعی مثلث گویند که با H نمایش داده می‌شود.

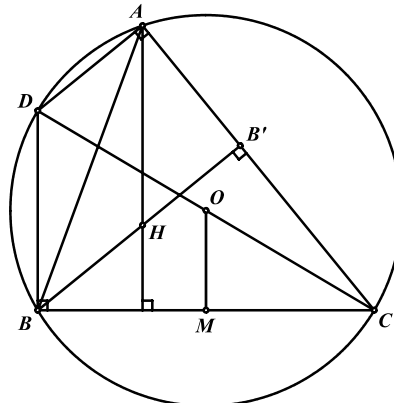
قضیه ۳-۲: نقطه قرینه مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به هر یک از اضلاع مثلث، روی دایره محیطی مثلث قرار دارد. اثبات این قضیه در مسأله‌ی ۲ بخش ۲-۱ آمده است.

قضیه ۳-۳: فاصله‌ی هر رأس از مرکز ارتفاعی مثلث برابر است با دو برابر فاصله مرکز دایره‌ی محیطی از ضلع



مقابل آن رأس.

$$\text{حکم: } AH = 2OM$$



رأس C را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی را در D قطع کند.

$$OM \parallel DB \Rightarrow \frac{OM}{BD} = \frac{OC}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DB = 2OM$$

برای اثبات حکم باید ثابت کنیم $DB = AH$ یا به عبارت دیگر باید نشان دهیم چهارضلعی $AHBD$ متوازی الاضلاع است.

$$\left. \begin{array}{l} DB \perp BC \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow DB \parallel AH$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}AC = 90^\circ \Rightarrow DA \perp AC \\ BH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow DA \parallel BH$$

پس چهارضلعی $AHBD$ متوازی الاضلاع است و $DB = AH$ و از آنجا که داشتیم $DB = 2OM$ پس خواهیم داشت $AH = 2OM$.

تعریف: مثلث ارتفاعیه هر مثلث، مثلثی است که از وصل کردن پای ارتفاع‌های آن مثلث به یکدیگر بدست می‌آید.



قضیه ۳-۴: ارتفاع‌های هر مثلث حاده الزاویه، نیمسازهای مثلث ارتفاعیه نظیر آن مثلث هستند.

اثبات این قضیه در مسأله‌ی ۹ بخش ۲-۳ آمده است.

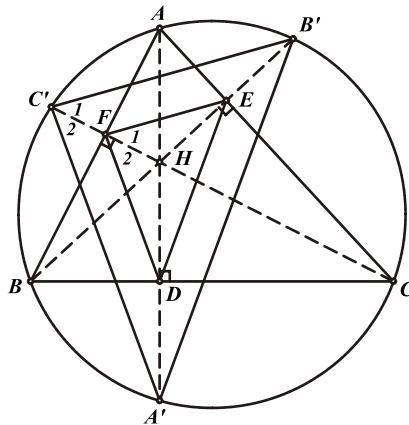
مسأله ۳-۱: ارتفاع‌های AD, BE, CF از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث



را در نقاط A', B', C' قطع کنند. ثابت کنید:

الف) اضلاع مثلث $A'B'C'$ با اضلاع مثلث ارتفاعیه دو به دو موازی اند.

ب) ارتفاع‌ها، نیمسازهای رئوس مثلث $A'B'C'$ هستند.



الف) می‌دانیم نقاط A', B', C' قرینه‌های مرکز ارتفاعی نسبت به اضلاع هستند. بنابراین

$$\frac{HE}{EB'} = \frac{HD}{DA'} = 1 \Rightarrow DE \parallel A'B'$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد: $FE \parallel B'C'$, $DF \parallel A'C'$

(ب) با توجه به قسمت (الف) و قضیه‌ی پیش خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} FE \parallel B'C' \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{F}_1 \\ DF \parallel A'C' \Rightarrow \hat{C}'_r = \hat{F}_r \\ \hat{F}_1 = \hat{F}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_r$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد: $\hat{B}'_1 = \hat{B}'_r$, $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_r$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) سه دایره‌ی برابر از نقطه‌ی H می‌گذرند. ثابت کنید H مرکز ارتفاعی مثلثی است که رئوسش بر سه نقطه‌ی دیگر برخورد دو به دو دایره‌ها منطبق است.
- (۲) ثابت کنید که اگر یکی از اضلاع مثلثی بر خط ثابتی در صفحه و مرکز ارتفاعی آن بر نقطه‌ی ثابت قرار گیرد آنگاه دایره‌ی محیطی این مثلث هم از نقطه‌ی ثابت می‌گذرد.
- (۳) در مثلث ABC ، مرکز ارتفاعی و M وسطیکی از اضلاع می‌باشد. HM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید M وسط HK است.
- (۴) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر گرفته، دایره‌ی محیطی مثلث ABC و قطر BOB' از این دایره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط DB' بر AC عمود است.
- (۵) خطی که مرکز ارتفاعی مثلث ABC را به وسط ضلع BC از آن وصل می‌کند، دایره‌ی محیطی آن را در نقاط A_1, A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC, A_1BC, A_2BC رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.
- (۶) ثابت کنید قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به یک رأس و قرینه‌ی آن رأس نسبت به وسط ضلع مقابل و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث بر یک استقامت هستند.
- (۷) نشان دهید مثلثی که رأس‌های آن، پای ارتفاع وارد بر قاعده و نقاط وسط ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع دیگر از یک مثلث مفروض هستند، با مثلث مفروض متشابه است و دایره‌ی محیطی این مثلث از مرکز ارتفاعی و وسط قاعده‌ی مثلث مفروض می‌گذرد.
- (۸) ثابت کنید تصاویر مرکز ارتفاعی مثلث روی دو نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه‌ی آن مثلث، روی خطی قرار دارند که از وسط ضلع روبروی آن زاویه می‌گذرد.
- (۹) نقاط A', B', C' را به ترتیب بر اضلاع BC, AC, AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که دو مثلث $A'B'C', ABC$ بایکدیگر متشابه باشند ($\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}'$) نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ بر مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC منطبق است.
- (۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC دایره‌ی محیطی مثلث را در نقاط A', B', C' قطع می‌کنند. همچنین اضلاع مثلث‌های $A'B'C', ABC$ یکدیگر را به ترتیب در نقاط M, N, P, Q, R, S قطع می‌کنند. ثابت کنید خطوط PS, NR, MQ یکدیگر را در مرکز ارتفاعی مثلث ABC قطع می‌کنند.
- (۱۱) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC, BCD, CDA, DAB را به ترتیب H_d, H_a, H_b, H_c می‌نامیم. ثابت کنید خطوط AH_a, BH_b, CH_c, DH_d در یک نقطه هم‌رس بوده و یکدیگر را نصف می‌کنند.
- (۱۲) خط دلخواه l از مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد. اگر خطوط l_a, l_b, l_c قرینه‌های خط l نسبت به اضلاع مثلث باشند، ثابت کنید این سه خط هم‌رس اند.

۲-۳ میانه

هدف بخش: در این بخش به بیان برخی موارد از مهمترین خواص میانه‌ها و مثلث میانه ای پرداخته و بایکی از مهمترین نقاط موجود در مثلث یعنی مرکز ثقل مثلث آشنا می‌شویم و در پایان نیز وضعیت مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث نسبت به یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

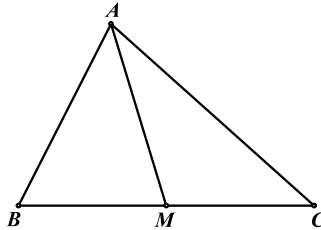
تعریف: میانه نظیر هر رأس مثلث، پاره خطی است که آن رأس را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند.



مسئله ۲-۳: هر میانه مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

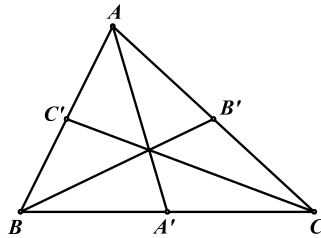
پیش تر می‌دانیم که $\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{BM}{CM}$ و از آنجا که AM میانه‌ی مثلث ABC است $\frac{BM}{CM} = 1$ و

بنابراین $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = 1$ و مساحت دو مثلث ABM ، ACM بایکدیگر برابرند.



قضیه ۳-۵: میانه‌های هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.

بنابر **مسئله ۱-۱۱** می‌دانیم که هر دو میانه مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. بنابراین میانه‌های AA' ، BB' ، CC' میانه AA' را به نسبت ۲ به ۱ و در یک نقطه قطع می‌کنند یعنی در یک نقطه هم‌رس‌اند.



تعریف: محل هم‌رسی میانه‌های مثلث را مرکز ثقل مثلث گویند که همواره با G نمایش داده می‌شود.



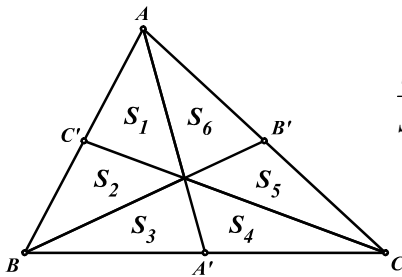
مسئله ۳-۳: میانه‌های هر مثلث آن مثلث را به شش مثلث با مساحت‌های یکسان تقسیم می‌کنند.

اگر مساحت این شش مثلث را به ترتیب S_1 تا S_6 بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC'}{CB} = 1 \Rightarrow S_1 = S_2$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$S_3 = S_4, S_5 = S_6$$



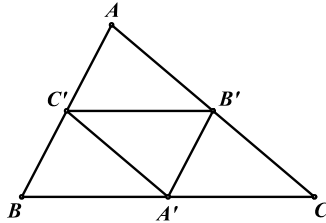
$$S_{ABA'} = S_{ACA'} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 \Rightarrow S_1 + 2S_2 = 2S_3 + S_1 \Rightarrow S_2 = S_3$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد $S_1 = S_2$ ، $S_3 = S_4$ و از مجموعه آنچه بدست آمد نتیجه می‌شود :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

تعریف : مثلث میانه ای هر مثلث، مثلثی است که اوساط اضلاع آن مثلث را به یکدیگر متصل می‌کند.

مسأله ۳-۴ : نشان دهید مثلث میانه ای هر مثلث، با سه مثلث دیگر که در کنار آن بوجود می‌آیند هم‌نهشت است.



ضلع $A'B'$ اوساط دو ضلع مثلث ABC را به یکدیگر متصل کرده است و بنا بر قضیه‌ی تالس با ضلع AB موازی است. پس $AB \parallel A'B'$ و به همین ترتیب $BC \parallel B'C'$ ، $AC \parallel A'C'$. بنابراین هریک از چهارضلعی‌های $CA'C'B'$ ، $BC'B'A'$ ، $AB'A'C'$ به دلیل توازی اضلاع روبرو متوازی الاضلاع هستند. در نتیجه هر چهار مثلث به حالت تساوی سه ضلع بایکدیگر هم‌نهشت اند.

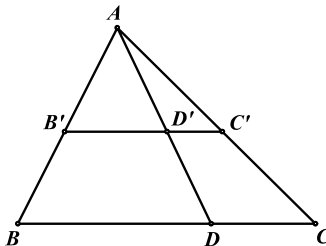
مسأله ۳-۵ : الف) مرکز ثقل مثلث ABC ، مرکز ثقل مثلث میانه ای آن نیز می‌باشد.

ب) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC (نقطه‌ی O) مرکز ارتفاعی مثلث میانه ای آن نیز می‌باشد.

الف) لم: اگر خط AD ضلع BC را به نسبت دلخواهی قطع کند هر خط دلخواه موازی با BC را نیز به همین



نسبت تقسیم خواهد کرد.



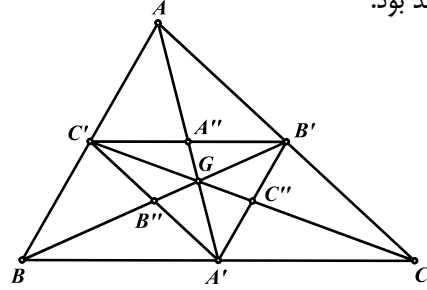
$$\text{حکم: } \frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$$

$$\left. \begin{array}{l} B'D' \parallel BC \Rightarrow \triangle AB'D' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{AD'} \\ D'C' \parallel DC \Rightarrow \triangle AD'C' \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{DC}{D'C'} = \frac{AD}{AD'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{B'D'} = \frac{DC}{D'C'} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$$

برای اثبات قسمت (الف) میانه‌های مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در G قطع کنند. اگر ثابت کنیم این خطوط میانه‌های مثلث $A'B'C'$ نیز هستند محل تقاطع آن‌ها (نقطه‌ی G) مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$



نیز خواهد بود.



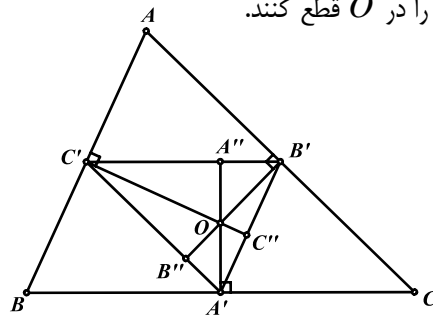
$$\left. \begin{array}{l} \frac{C'A''}{A''B'} = \frac{BA'}{A'C} \\ \frac{B'A'}{A'C} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{C'A''}{A''B'} = 1$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود $\frac{A'B''}{B''C'} = 1, \frac{B'C''}{C''A'} = 1$ بنابراین $A'A'', B'B'', C'C''$ میانه‌های مثلث میانه ای هستند و نقطه‌ی G مرکز ثقل آن می‌باشد.

(ب) عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا اضلاع مثلث میانه ای را در A'', B'', C''



ویکدیگر را در O قطع کنند.



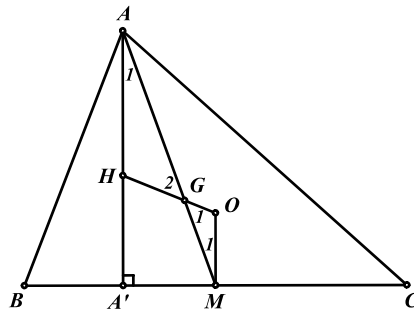
$$\left. \begin{array}{l} B'C' \parallel BC \\ A'A'' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow A'A'' \perp B'C'$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $B'B'' \perp A'C', C'C'' \perp A'B'$. بنابراین عمودمنصف‌های مثلث ABC ارتفاع‌های مثلث $A'B'C'$ هستند و نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد.

قضیه ۳-۶: در هر مثلث ABC مرکز دایره‌ی محیطی (O) مرکز ثقل (G) و مرکز ارتفاعی (H) هم خط اند



که به خط گذرنده از این سه نقطه خط اویلر مثلث گفته می‌شود.



می‌دانیم که H, G, O به ترتیب محل برخورد عمودمنصف‌ها، میانه‌ها و ارتفاع‌های مثلث هستند. برای اثبات هم خطی H, G, O میانه AM را در نظر گرفته و از نقاط H, O به نقطه‌ی G وصل می‌کنیم و نشان می‌دهیم خطوط HG, OG هم رأستا هستند. اما برای اثبات هم رأستایی خطوط OG, GH از آنجا که خطوط AG, GM روی میانه و هم رأستا هستند با اثبات برابری زوایای G_1, G_2 می‌توان نتیجه گرفت این دو زاویه متقابل به رأس بوده و خطوط GH, OG نیز هم رأستا هستند.

حال طبق خواص مطرح شده در مورد H, G داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \\ \frac{AH}{OM} = \frac{2}{1} \\ AA' \parallel OM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHG \sim \triangle MOG \Rightarrow \hat{G}_1 = \hat{G}_2$$

نکته: از تشابه فوق نتیجه می‌شود $\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$ و بنابراین مرکز ثقل مثلث همواره پاره خط OH را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) در مثلث ABC ، G مرکز ثقل مثلث و H پای یک ارتفاع می‌باشد. HG را از طرف G امتداد می‌دهیم تا
-  $KG = 2HG$: ثابت کنید. قطع K را در ABC محیطی مثلث ABC را در $KG = 2HG$: ثابت کنید.
- (۲) فرض کنید K معرف نقطه‌ی قرینه‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC باشد. ثابت کنید که خط اوایلر مثلث ABC پاره خط AK را نصف می‌کند.
-  نشان دهید خطی که از مرکز ثقل مثلث به نقطه‌ی P بر روی دایره‌ی محیطی وصل شود، از وسط خطی می‌گذرد که مرکز ارتفاعی مثلث را به روبروی قطری P وصل می‌کند.
- (۳) خطی که به موازات میانه‌ی AA' از مثلث ABC رسم می‌شود، اضلاع BC, CA, AB را به ترتیب در نقاط H, N, D قطع می‌کند. ثابت کنید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC, BD ، نسبت به رأس A متقارن اند.
- (۴) از G مرکز ثقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB, AC را به ترتیب در A_c, A_b قطع کند. به همین ترتیب از G خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا BA, BC را به ترتیب در B_a, B_c قطع کند و از G خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا CB, CA را به ترتیب در C_b, C_a قطع کند. ثابت کنید که دو مثلث $A_c B_a C_b, A_b B_c C_a$ همنهشت اند.
- (۵) نقطه‌ی دلخواه M را بر روی نیمساز رأس A از مثلث ABC انتخاب می‌کنیم و عمودهای MQ, MR را به ترتیب بر اضلاع AB, AC رسم می‌کنیم. اگر عمود خارج شده از M بر BC ، پاره خط QR را در N قطع کند ثابت کنید N روی میانه نظیر رأس A قرار دارد.
- (۶) فرض کنید همه‌ی زوایای داخلی مثلث ABC کمتر از 120° باشد و P نقطه‌ی ای در درون مثلث ABC باشد به طوری که هریک از زاویه‌های APB, BPC, CPA برابر 120° است. ثابت کنید که خطوط اوایلر مثلث‌های APB, BPC, CPA در یک نقطه هم‌رس اند.
- (۷) اگر a, b, c طول اضلاع مثلث ABC و m_a طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد ثابت کنید:
- $$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 \quad m_a^2 = \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}C^2 - \frac{1}{4}A^2$$
- (۸) (قضیه استوارت) اگر در مثلث ABC ، قاطع AD به طول d ، پاره خط BC را به طول‌های x, y ($BD = x, CD = y$) تقسیم کند خواهیم داشت:
- $$a(d^2 + xy) = b^2x + c^2y$$
- (۹) در مثلث ABC ، به قرینه‌ی میانه‌ی ضلع BC نسبت به نیمساز زاویه‌ی A ، زیر میانه‌ی ضلع BC گفته می‌شود. اگر AK زیر میانه‌ی مثلث ABC باشد ثابت کنید $\frac{BK}{CK} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. همچنین اگر F, E به ترتیب تصاویر نقطه‌ی K بر اضلاع AB, AC باشد ثابت کنید:
- $$\frac{KE}{KF} = \frac{AB}{AC}$$
- 

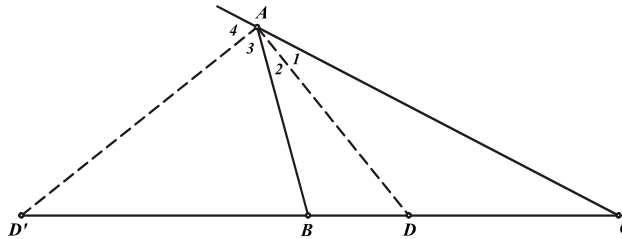
۳-۳ نیمساز و دوائر محاطی

هدف بخش: در این بخش به بررسی خواص نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث خواهیم پرداخت و با دوائر محاطی مثلث، یکی از مباحث مهم هندسه مسطحه که ناشی از خواص نیمسازها می‌باشد آشنا خواهیم شد.

تعریف: نیمساز خطی است که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند. هر رأس مثلث دارای دو نیمساز است، یکی نیمساز خود زاویه که به آن نیمساز داخلی مثلث گفته می‌شود و دیگری نیمساز زاویه‌ی خارجی آن رأس از مثلث که به آن نیمساز خارجی مثلث گفته می‌شود.



مسئله ۳-۶: نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس از مثلث همواره بر یکدیگر عمودند.



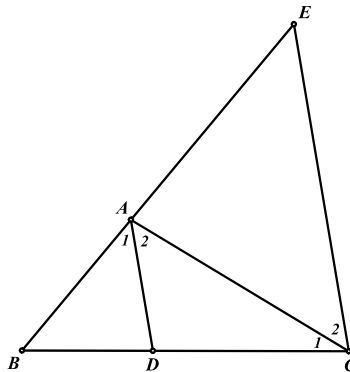
نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC و امتداد آن را در D, D' قطع کنند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_r \\ \hat{A}_s = \hat{A}_f \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r + \hat{A}_s + \hat{A}_f = 2\hat{A}_r + 2\hat{A}_s = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_r + \hat{A}_s = 90^\circ \Rightarrow \hat{DAD}' = 90^\circ$$



قضیه ۳-۷: نیمساز هر زاویه از مثلث ضلع مقابل آن را به نسبت طول دو ضلع دیگر مثلث قطع می‌کند.



$$\text{حکم: } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

از رأس C خطی موازی نیمساز AD از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در E قطع کند. طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad (1)$$

بنابراین برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $AE = AC$

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{C}_r \\ AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_l = \hat{E} \\ \hat{A}_l = \hat{A}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_r = \hat{E} \Rightarrow AE = AC$$

و با قرار دادن AC به جای AE در رابطه‌ی (۱) حکم نتیجه می‌شود.

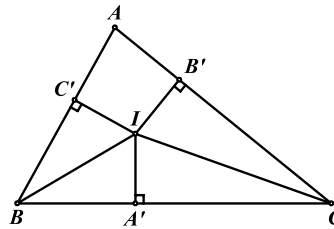
نکته: در قضیه‌ی فوق اگر D را محل تلاقی نیمساز خارجی زاویه‌ی A با امتداد ضلع BC در نظر بگیریم باز هم حکم صادق خواهد بود و اثبات آن نیز مشابه فوق است.



قضیه ۳-۸: در هر مثلث، نیمسازهای داخلی در یک نقطه هم‌رس اند.

محل برخورد نیمسازهای زوایای B, C را I می‌نامیم و پای عمودهای وارد از I بر اضلاع A', B', C' می‌نامیم. می‌دانیم که نیمساز، مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله اند. از آن جا که I روی نیمساز زوایای B و C قرار دارد خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} IA' = IC' \\ IA' = IB' \end{array} \right\} \Rightarrow IB' = IC'$$

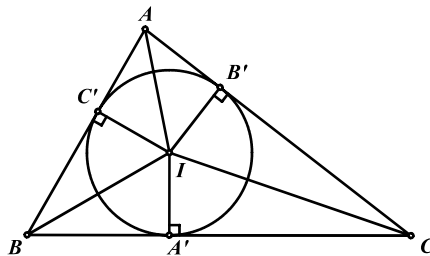


بنابراین I روی نیمساز زاویه‌ی \hat{A} نیز قرار دارد بنابراین هر سه نیمساز در یک نقطه هم‌رس اند.

محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی همواره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. بنابراین در صورتی که دایره‌ای به مرکز نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازها و به شعاع فاصله آن از هر یک از اضلاع رسم کنیم، این دایره بر هر سه ضلع مثلث

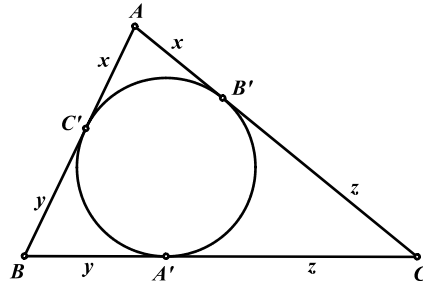


مماس خواهد شد، که نقاط مماس همان پای عمودهای وارد از I بر اضلاع مثلث هستند.



تعریف: دایره‌ی محاطی داخلی مثلث، دایره‌ای است که بر هر سه ضلع مماس می‌باشد و مرکز آن نیز محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است که همواره با I نشان داده می‌شود و شعاع آن را نیز با r نمایش می‌دهند.

می‌دانیم که مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره بایکدیگر برابرند بنابراین در هر مثلث ABC مانند شکل روبرو، قطعات روی اضلاع دو به دو بایکدیگر برابرند که آن‌ها را همواره با x, y, z و نمایش می‌دهیم بدین ترتیب محیط مثلث برابر $2(x + y + z)$ می‌باشد که بنا بر قرار داد $x + y + z$ را برابر P تعریف کرده و محیط مثلث را با $2P$ نمایش می‌دهیم یا به عبارت دیگر P همواره برابر نصف محیط است.



مسئله ۳-۷: اگر c, b, a به ترتیب طول اضلاع مقابل رؤس C, B, A باشند ثابت کنید:

$$z = P - c, \quad y = P - b, \quad x = P - a$$

با توجه به آنچه در قسمت فوق گفته شد داریم:

$$P - a = (x + y + z) - (y + z) = x$$

و دو مورد دیگر نیز به سادگی مورد اثبات می‌شوند.

مسئله ۳-۸: نشان دهید مساحت مثلث همواره برابر است با حاصل ضرب شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث در نصف



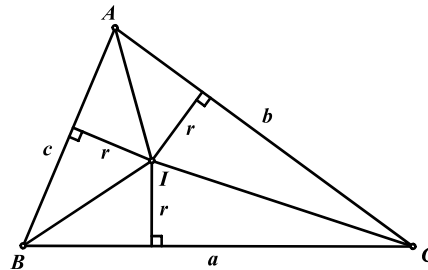
محیط آن.

حکم: $S = Pr$

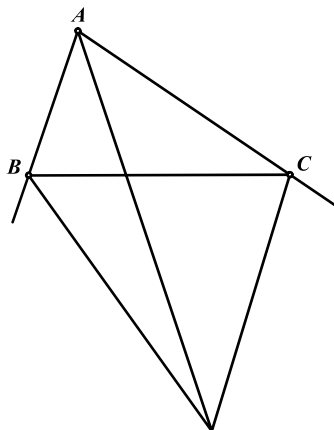
$$S = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{ACI}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}r \cdot c + \frac{1}{2}r \cdot a + \frac{1}{2}r \cdot b = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$\Rightarrow S = rP$$

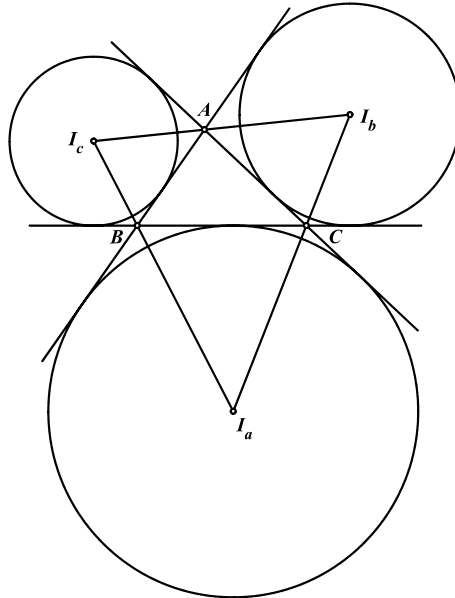


قضیه ۳-۹: در هر مثلث، نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم در یک نقطه هم‌رس اند.



اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۳-۸ است که به خود شما واگذار می‌شود.

محل هم‌رسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم همواره از سه ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله است. بنابراین در صورتی که دایره ای به مرکز آن و به شعاع فاصله اش از هر یک از اضلاع رسم کنیم، این دایره بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس خواهد شد که نقاط مماس همان پای عمودهای وارد از مرکز دایره (محل تلاقی نیمسازهای خارجی) بر اضلاع مثلث هستند. هر مثلث سه دایره با این ویژگی‌ها دارد که در شکل زیر این دواير و مراکز آن‌ها مشخص شده اند.



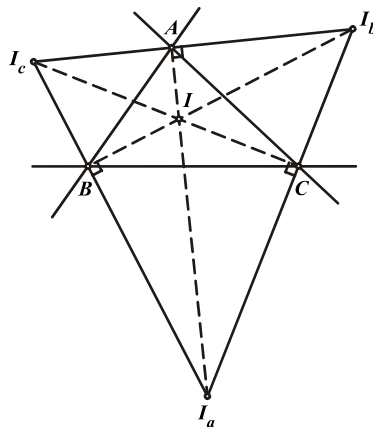
تعریف: دواير محاطی خارجی مثلث، دایره‌هایی هستند که بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماسند و مرکز آن‌ها نیز نقاط تلاقی دو به دو نیمسازهای خارجی مثلث است که همواره مانند شکل بالا با I_c, I_b, I_a نمایش داده می‌شوند و شعاع‌های آن‌ها را نیز به ترتیب به ترتیب با r_c, r_b, r_a نشان می‌دهند.

مسئله ۳-۹: اگر مراکز دواير محاطی خارجی مثلث ABC باشند نشان دهید مرکز دایره‌ی محاطی



داخلی مثلث ABC بر مرکز ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ منطبق است.

حکم: $I_{ABC} = H_{I_a I_b I_c}$



اگر همه‌ی نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC را مطابق شکل رسم کنیم، نیمسازهای داخلی یکدیگر را در I قطع خواهند کرد و هر نیمساز داخلی نیز با دو نیمساز خارجی دیگر هم‌رس خواهند بود و از آنجا که نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه بر یکدیگر عمودند پاره خط‌های $I_a A, I_b B, I_c C$ ارتفاع‌های مثلث $I_a I_b I_c$ بوده و I نیز مرکز ارتفاعی و مثلث ABC نیز مثلث ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ می‌باشند.

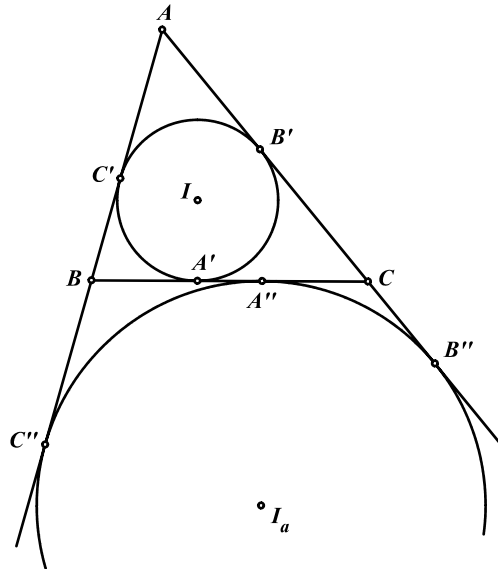
مسأله ۳-۱۰: دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط A', B', C' بر اضلاع متناظر مثلث ABC مماس است. دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با مرکز I_a را رسم می‌کنیم و محل تماس آن با اضلاع یا امتداد



اضلاع را مطابق شکل A'', B'', C'' می‌نامیم. نشان دهید:

$$(الف) \quad P_{ABC} = AB'' = AC'' \quad (P \text{ نصف محیط است})$$

$$(ب) \quad BA' = CA''$$



(الف) از آنجا که طول مماس‌های مرسوم از هر نقطه بر دایره بایکدیگر برابر است داریم:

$$\left. \begin{array}{l} CA'' = CB'' \\ BA'' = BC'' \end{array} \right\} \Rightarrow BC = CB'' + BC''$$

$$\Rightarrow AB + AC + BC = AB + AC + CB'' + BC''$$

$$\Rightarrow 2P_{ABC} = AC'' + AB''$$

دو خط AC'', AB'' مماس‌های مرسوم از A بر دایره‌ی محاطی خارجی بوده و بایکدیگر برابرند. بنابراین:

$$\Rightarrow 2P_{ABC} = 2AB'' = 2AC'' \Rightarrow P_{ABC} = AB'' = AC''$$

(ب) اگر طول اضلاع مقابل رؤوس متناظر را a, b, c بنامیم، طبق مسأله ۳-۷ و قسمت (الف) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BA' = y = P - b \\ A''C = CB'' = AB'' - AC = P - b \end{array} \right\} \Rightarrow BA' = A''C$$

نکته: بنابر قسمت (ب) مسأله فوق نقاط A'', A' از وسط ضلع BC به یک فاصله اند و تقاطعی با این خاصیت دو

نقطه هم نوا خوانده می‌شوند.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) از رأس A از مثلث ABC عمودهای AM ، AN را بر نیمسازهای خارجی رؤوس B ، C فرود می‌آوریم. ثابت کنید که طول پاره خط MN برابر نصف محیط مثلث ABC است.
- (۲) AD ، نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC رسم شده است. در نقطه A مماس ℓ را بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط رأست مرسوم از D به موازات ℓ ، بر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC مماس است.
- (۳) ثابت کنید اگر D نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد و خط‌های AD ، BD ، CD به ترتیب از مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BDC ، CDA ، ADB بگذرند، آنگاه D مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC است.
- (۴) در مثلث ABC مرکز دایره‌ی محاطی را I و وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی را M می‌نامیم. ثابت کنید:
- $$MB = MC = MI$$
- (۵) در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AB است. ثابت کنید که میانه‌ی AD نیمساز زاویه‌ی A است که ضلع AC با میانه‌ی AE از مثلث ABD تشکیل می‌دهد.
- (۶) P, Q, R, S تصاویر رأس A روی نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای B, C از مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی مذکور روی یک خط واقع اند.
- (۷) ثابت کنید هر دو نقطه از چهار مرکز دوائر محاطی خارجی و داخلی، با دو رأس غیر هم خط از مثلث روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش وسطیکی از کمان‌های دایره‌ی محیطی است که آن دو رأس دو انتهای آن هستند. (بطوری که نقاط I_b, I_c, B, C روی یک دایره و به همین ترتیب I_b, I_a, B, A ؛ I_a, I_c, A, C ؛ I_a, I_b, C, I_a ؛ I_b, I_c, A, I_b نیز هر کدام روی یک دایره می‌باشند).
- (۸) ثابت کنید:
- الف) مجموع شعاع‌های دوائر محاطی خارجی مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و چهار برابر شعاع دایره‌ی محیطی.
- ب) مجموع فاصله‌های مرکز دایره‌ی محیطی از سه ضلع مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محیطی و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث.
- (۹) اگر d فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و d_a فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث باشد، ثابت کنید:
- $$d^r = R(R - 2r) , d_a^r = R(R + 2r_a)$$
- (۱۰) اگر JJ' قطری از دایره‌ی محاطی داخلی باشد که بر OI ، خط واصل مراکز دوائر محاطی و محاطی داخلی عمود باشد، ثابت کنید که محیط مثلث OJJ' با قطر دایره‌ی محیطی مثلث مفروض برابر است.

(۱۱) ثابت کنید نسبت مساحت یک مثلث به مساحت مثلثی که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث با دایره‌ی محاطی داخلی آن تعیین می‌شود، برابر است با نسبت قطر دایره‌ی محیطی مثلث به شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن.



(۱۲) دایره‌ای که از D ، پای ارتفاع AD و نقاط I و I_a ، مراکز دوائر محاطی داخلی و خارجی از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC برابر است.



(۱۳) خطی که پای نیمساز داخلی AD از زاویه‌ی A در مثلث ABC را به نقطه‌ی K ، محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AC وصل می‌کند، خطی را که در نقطه‌ی A بر AC عمود است در نقطه‌ی F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AF = h_a$ (طول ارتفاع نظیر رأس A می‌باشد).



(۱۴) فرض کنید BE و CF نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC و K نقطه‌ای دلخواه روی پاره‌خط EF باشد. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه‌ی K از اضلاع AB و AC برابر فاصله‌ی نقطه‌ی K از ضلع BC است.



(۱۵) اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند و d_a طول نیمساز زاویه‌ی A باشد، ثابت کنید:

$$d_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

(۱۶) پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث قائم الزویه ABC ($A = 90^\circ$) را H می‌نامیم. اگر I ، I_1 و I_2 به ترتیب مراکز دوائر محاطی مثلث‌های ABC ، ABH و ACH باشند، نشان دهید: $AI = I_1 I_2$



۳-۴ دایره نه نقطه

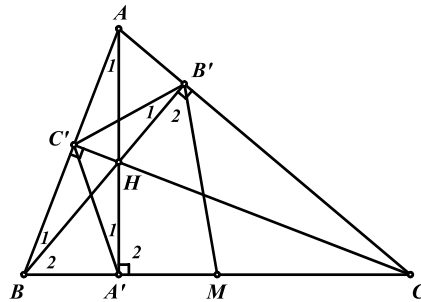
هدف بخش: در بخش‌های پیشین با دایره‌های محاطی و محیطی مثلث و مراکز این دایره‌ها آشنا شدیم. یکی دیگر از مهم‌ترین دایره‌های موجود در هر مثلث دایره نه نقطه مربوط به آن می‌باشد که در این بخش با آن و برخی از مهم‌ترین خواص آن آشنا خواهیم شد.

برای درک بهتر دایره نه نقطه بجای طرح مستقیم بحث، با مطرح کردن دو مسأله مرحله به مرحله به بررسی موضوع می‌پردازیم.

مسأله ۳-۱۱: ثابت کنید نقطه‌ی M وسط ضلع BC ، روی دایره‌ی محیطی مثلث ارتفاعیه مثلث ABC قرار



دارد.



حکم مسأله به معنای محاطی بودن چهارضلعی $A'MB'C'$ می‌باشد و برای اثبات این حکم نیز راه‌های مختلفی می‌توان یافت. اما در این مقطع ما برای اثبات حکم نشان می‌دهیم دو زاویه $C'A'M$ و $C'B'M$ مکمل یکدیگرند. از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $BB'C$ ، میانه برابر نصف وتر است داریم:

$$B'M = BM \Rightarrow \widehat{B'_r} = \widehat{B_r}$$

$$\widehat{AB'H} + \widehat{AC'H} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AB'HC'} \text{ محاطی} \Rightarrow \widehat{B'_1} = \widehat{A_1}$$

$$\widehat{BA'H} + \widehat{BC'H} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BA'HC'} \text{ محاطی} \Rightarrow \widehat{A'_1} = \widehat{B_1}$$

$$\widehat{A'_r} = \widehat{AA'B} = 90^\circ$$

با جمع کردن طرفین روابط فوق با یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \widehat{C'B'M} + \widehat{C'A'M} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{B_r} + \widehat{AA'B} = 180^\circ$$

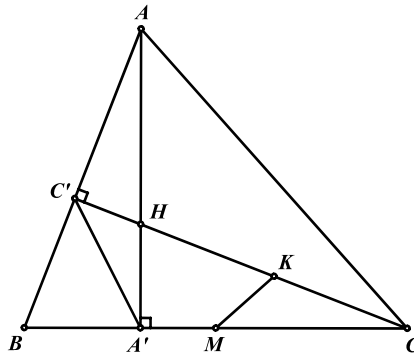
بنابراین مجموع دو زاویه‌ی $C'A'M$ و $C'B'M$ برابر مجموع زوایای داخلی مثلث ABA' بوده و برابر 180° است.

نتیجه: به همین طریق می‌توان نشان داد که اوساط اضلاع دیگر مثلث نیز روی دایره‌ی محیطی مثلث ارتفاعیه قرار دارند و به عبارت دیگر شش نقطه‌ی اوساط اضلاع و پای ارتفاع‌های هر مثلث روی یک دایره قرار دارند.

مسئله ۳ - ۱۲: در مسأله‌ی پیش اگر وسط پاره خط CH را K بنامیم، ثابت کنید نقطه‌ی K نیز روی دایره‌ی



گذرنده از پای ارتفاع‌ها و اوساط اضلاع قرار دارد.



برای اثبات حکم مسأله باید نشان دهیم نقطه‌ی K با حداقل سه نقطه از نقاط واقع بر دایره‌ی فوق هم‌دایره است. در این مقطع ثابت می‌کنیم نقطه‌ی K با سه نقطه‌ی A' ، M و C' هم‌دایره است. (شما می‌توانید سه نقطه‌ی دیگر انتخاب کنید و راه حل دیگری ارائه دهید). به عبارت دیگر نشان می‌دهیم چهارضلعی $MA'C'K$ محاطی است. با توجه به خواص چهارضلعی‌های محاطی خواهیم داشت:

$$\widehat{BC'H} + \widehat{BA'H} = 180^\circ \Rightarrow BC'HA' \text{ محاطی} \Rightarrow CH \cdot CC' = CA' \cdot CB$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{2} \cdot CC' = CA' \cdot \frac{CB}{2} \Rightarrow CK \cdot CC' = CA' \cdot CM$$

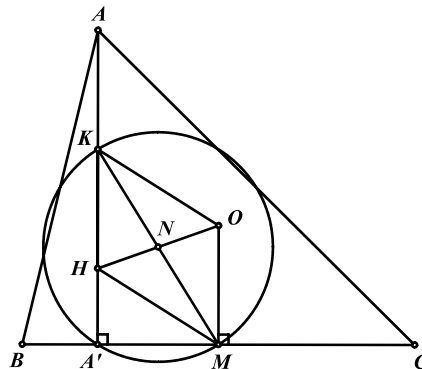
و با توجه به خاصیت پنجم چهارضلعی‌های محاطی، چهارضلعی $C'KMA'$ نیز محاطی می‌باشد.

نتیجه: به همین طریق می‌توان نشان داد که اوساط AH و BH نیز روی دایره‌ی گذرنده از اوساط اضلاع و پای ارتفاع‌های مثلث قرار دارند و به عبارت دیگر هر نه نقطه‌ی اوساط اضلاع، پای ارتفاع‌ها و اوساط AH ، BH و CH هم‌دایره‌اند.

تعریف: دایره نه نقطه مثلث، دایره‌ای است که از اوساط اضلاع، پای ارتفاع‌ها و اوساط AH ، BH و CH می‌گذرد.



قضیه‌ی ۳ - ۱۰: مرکز دایره نه نقطه‌ی هر مثلث (N) روی خط اویلر آن و وسط OH قرار دارد.



می‌دانیم که دایره نه نقطه مطابق شکل از نقاط M وسط ضلع BC و A' پای ارتفاع نظیر رأس A و K وسط AH می‌گذرد و از آن جا که زاویه‌ی محاطی $\widehat{KA'M}$ برابر 90° است بنابراین قطر KM دایره نه نقطه بوده و نقطه‌ی N مرکز دایره نه نقطه مثلث در وسط KM قرار دارد. پس برای اثبات حکم باید نشان دهیم خط اوایلر مثلث (خط OH) پاره خط MK را نصف می‌کند.

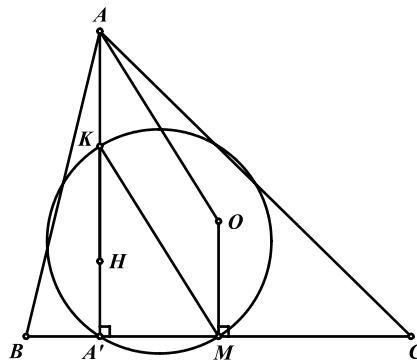
$$\left. \begin{array}{l} KH = \frac{1}{2}AH \\ OM = \frac{1}{2}AH \end{array} \right\} \Rightarrow KH = OM$$

$$\left. \begin{array}{l} KH \perp BC \\ OM \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow KH \parallel OM$$

از آن جا که دو ضلع روبه‌رو یعنی KH و OM با یکدیگر موازی و مساوی هستند می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی $KHMO$ یک متوازی الاضلاع است و قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین اولاً OH از وسط قطر KM گذشته و مرکز دایره نه نقطه (N) روی OH قرار دارد، ثانیاً نقطه‌ی N مرکز دایره نه نقطه یعنی محل برخورد اقطار متوازی الاضلاع، وسط OH قرار دارد.



مسأله ۳-۱۳: شعاع دایره نه نقطه هر مثلث برابر نصف شعاع دایره‌ی محیطی آن می‌باشد.



برای اثبات حکم فوق کافی است نشان دهیم قطر KM از دایره نه نقطه با شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC (AO) برابر است.

$$AK = OM = \frac{1}{2}AH, AK \parallel OM$$

از آن جا که دو ضلع AK و OM از چهارضلعی $AKMO$ با یکدیگر موازی و مساوی هستند، بنابراین این چهارضلعی متوازی الاضلاع بوده و در نتیجه $AO = KM$ می‌باشد.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) ارتفاع مرسوم بر ضلع BC از مثلث ABC ، دایره‌ی محیطی آن را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. ثابت کنید که فاصله‌ی مرکز دایره‌ی نه نقطه تا ضلع BC ، برابر $\frac{1}{4}AD$ است.
- (۲) در مثلث ABC ، ارتفاع مرسوم از رأس A بر ضلع BC و M و N تصاویر نقاط B و C روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A هستند. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث HMN روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.
- (۳) از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی در راستای دلخواه، و از هر رأس خطی عمود بر این خطوط رسم می‌کنیم. به این ترتیب سه مستطیل حاصل می‌شود که اضلاع AB ، CA و BC قطرهای آن‌ها هستند. ثابت کنید که سه قطر دیگر این مستطیل‌ها در نقطه‌ای روی دایره‌ی نه نقطه مثلث ABC هم‌رس‌اند.
- (۴) فرض کنید ℓ معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد و A' ، B' و C' تصویر نقطه‌های A ، B و C روی ℓ باشند. ثابت کنید عمودهای وارد از نقاط A' ، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB ، در یک نقطه روی دایره نه نقطه مثلث ABC هم‌رس‌اند.
- (۵) اگر O و H به ترتیب مراکز دایره‌ی محیطی و ارتفاعی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دوایر نه نقطه‌ی سه مثلث AOH ، BOH و COH در دو نقطه متقاطع‌اند.
- (۶) دایره‌ای که به قطر BC رسم می‌کنیم اضلاع AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. خط دلخواهی که از E می‌گذرد، دایره‌ی محیطی مثلث AEF و دایره‌ی به قطر BC را در نقاط P و Q (غیر از E) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط پاره‌خط PQ روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.
- (۷) فرض کنید نقاط D ، E و F پای ارتفاع‌های مثلث ABC باشند. ثابت کنید خط‌های اوپلر سه مثلث AEF ، BDF و CDE در یک نقطه روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC هم‌رس‌اند.
- (۸) خط دلخواه ℓ را از مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC می‌گذرانیم. از چهار نقطه‌ی A ، B ، C و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمودهایی بر خط ℓ رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع طول‌های این چهار عمود رسم شده بر ℓ ، با در نظر گرفتن جهت همواره برابر صفر است.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) ثابت کنید در مثلث ABC ، نیمساز زاویه A ، خطی که اوساط اضلاع AB و BC را به هم وصل می‌کند و خط واصل نقطه‌های تماس دایره‌ی محاطی با اضلاع BC و AC ، در یک نقطه متقاطع‌اند.



(۲) در مثلث ABC ، پاره‌خط‌های AD و BE را به ترتیب روی پاره‌خط‌های AC و BC برابر ضلع AB جدا می‌کنیم. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره‌ی محیطی و دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشند،



ثابت کنید:

$$DE \perp OI \text{ (الف)}$$

ب) شعاع دایره‌ی محیطی مثلث CDE برابر OI است.

(۳) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط B_1 و C_1 بر اضلاع AB و AC مماس است و دایره‌ی محاطی خارجی نیز در نقاط B_2 و C_2 بر امتداد اضلاع AB و AC مماس است. فرض کنید M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد و خط AM ، پاره‌خط‌های B_1C_1 و B_2C_2 را به ترتیب در E و F قطع می‌کند.



ثابت کنید که چهارضلعی $BECF$ ، متوازی‌الاضلاع است.

(۴) نقاط A' ، B' و C' را به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{CC'B} = \widehat{BB'A} = \widehat{AA'C}$. نشان دهید مرکز دایره‌ی محیطی مثلثی که از برخورد



پاره‌خط‌های AA' ، BB' و CC' تشکیل می‌شود بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.

(۵) در مثلث ABC ، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی را نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC قرینه می‌کنیم تا نقطه‌ی T حاصل شود. از نقطه‌ی D وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC به T وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید مجموع طول دو تا از



پاره‌خط‌های KA ، KB و KC برابر طول سومی است.

(۶) نقطه‌ی دلخواه D را روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم و دایره‌ای را رسم می‌کنیم که بر ضلع BC و پاره‌خط AD و بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس باشد. ثابت کنید:

الف) خطی که از محل تماس دایره‌ی مذکور با دو پاره‌خط BC و AD می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محاطی



داخلی مثلث ABC نیز می‌گذرد.

ب) خط‌المرکزین دو دایره‌ای که به روش بالا در طرفین AD رسم می‌شوند از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی



مثلث ABC می‌گذرد.

فصل چهارم

همرسی و هم خطی

۴-۱ سوا، منلائوس، دزارگ

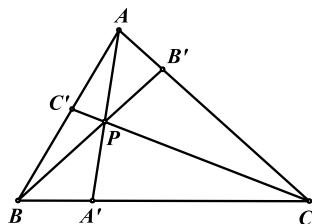
هدف بخش: بسیاری از همرسی یا هم خطی‌ها در یک یا چند مثلث اتفاق می‌افتند. قضایای سوا و منلائوس از کاربردی‌ترین قضایا در اثبات اینگونه مسایل می‌باشند. همچنین در حل بسیاری از مسایل ناگزیر از تبدیل مسایل همرسی و هم خطی به یکدیگر هستیم که قضیه دزارگ نیز یکی از مهم‌ترین ایده‌ها در این حوزه می‌باشد. در این بخش با انواع کاربردهای این قضایا آشنا خواهیم شد.

تعریف: خط سواپی خطی است که از یک رأس مثلث گذشته و ضلع مقابل یا امتداد آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

قضیه سوا ۱-۴: در مثلث ABC سه خط سواپی AA' ، BB' و CC' هم‌رس‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:



$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$



توجه داشته باشید در صورتی که A' ، B' و C' بر امتداد اضلاع قرار داشته باشند نیز همچنان رابطه‌ی فوق برقرار است.

ابتدا فرض می‌کنیم سه خط سواپی فوق در نقطه‌ای مانند P هم‌رس باشند و نشان می‌دهیم رابطه‌ی فوق برقرار است. برای این منظور هر کدام از نسبت‌های فوق را به طور جداگانه به نسبت مساحت‌ها تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{ABA'}}{S_{ACA'}} = \frac{S_{PBA'}}{S_{PCA'}} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{ABA'} - S_{PBA'}}{S_{ACA'} - S_{PCA'}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

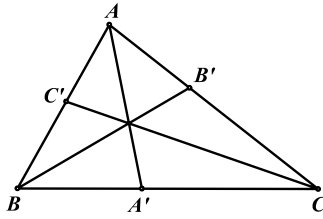
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}$$

$$\Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} \cdot \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} \cdot \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}} = 1$$

طرف دوم قضیه نیز با استفاده از برهان خلف و صورت طرف اول به راحتی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.



مسأله ۴ - ۱: ثابت کنید نیمسازهای داخلی هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند. می‌دانیم که نیمساز هر رأس مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور آن رأس قطع می‌کند. در نتیجه داریم:



$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$$

بنابراین طبق قضیه سوا نیمسازهای مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.

توجه داشته باشید که اثبات هم‌رسی میانه‌های مثلث نیز بوسیله‌ی قضیه‌ی سوا به همین سادگی صورت می‌گیرد.

مسأله ۴ - ۲:

الف) اگر A' ، B' و C' محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث با اضلاع BC ، AC و AB باشند،



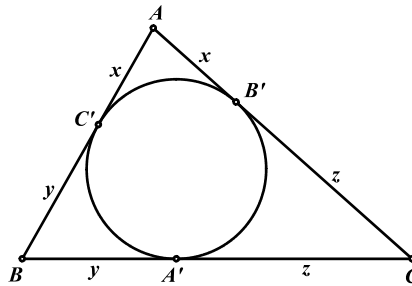
نشان دهید خطوط AA' ، BB' و CC' در یک نقطه هم‌رس‌اند.

ب) اگر A'' ، B'' و C'' محل تماس دایره‌های محاطی خارجی نظیر رئوس A ، B و C با اضلاع مقابل



آن‌ها باشند، نشان دهید خطوط AA'' ، BB'' و CC'' در یک نقطه هم‌رس‌اند.

(الف)

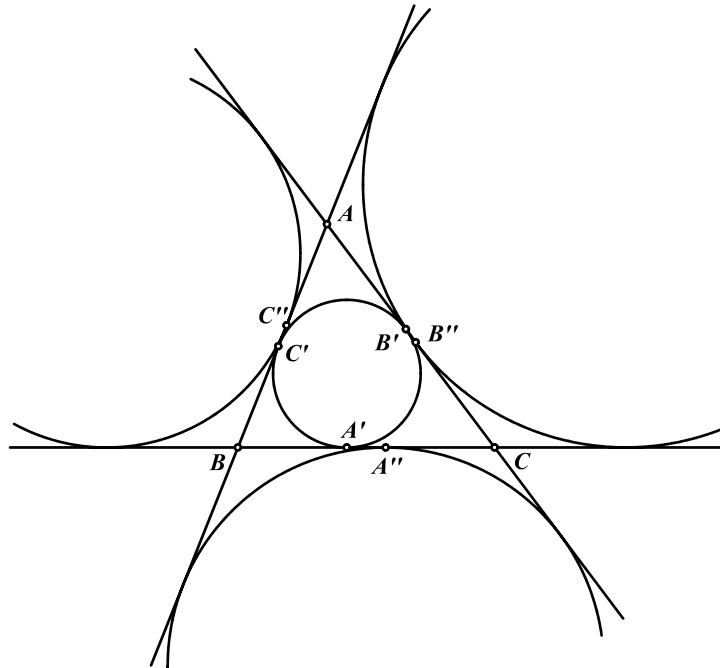


$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

بنابراین طبق قضیه‌ی سوا خطوط AA' ، BB' و CC' هم‌رس‌اند.

ب) طبق مسأله‌ی ۳-۱۰ می‌دانیم:

$$AC' = BC'' , BA' = CA'' , AB' = CB''$$



بنابر روابط فوق و طبق قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{AB'}{B'C} (=1)$$

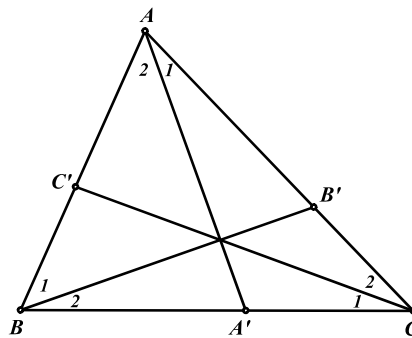
بنابراین طبق قضیه‌ی سوا خطوط AA'' ، BB'' و CC'' در یک نقطه هم‌رس‌اند که به محل هم‌رسی آن‌ها نقطه‌ی ناگل گفته می‌شود.

صورت سینوسی قضیه سوا: در مثلث ABC سه خط سواپی AA' ، BB' و CC' هم‌رس‌اند اگر و فقط اگر



داشته باشیم:

$$\frac{\sin \widehat{A}_1}{\sin \widehat{A}_2} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_1}{\sin \widehat{B}_2} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_1}{\sin \widehat{C}_2} = 1$$



برای اثبات قضیه‌ی فوق کافی است نشان دهیم که رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی صورت معمولی سوا هم‌ارز است به عبارت دیگر:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \widehat{A}_1}{\sin \widehat{A}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_1}{\sin \widehat{B}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_1}{\sin \widehat{C}_r} = 1$$

برای این منظور هریک از نسبت‌های رابطه‌ی اول را با استفاده از لم مسأله‌ی ۶ بخش ۳-۲ به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin \widehat{C}_r}{\sin \widehat{C}_1} \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sin \widehat{A}_r}{\sin \widehat{A}_1} \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin \widehat{B}_r}{\sin \widehat{B}_1} \cdot \frac{BC}{AB}$$

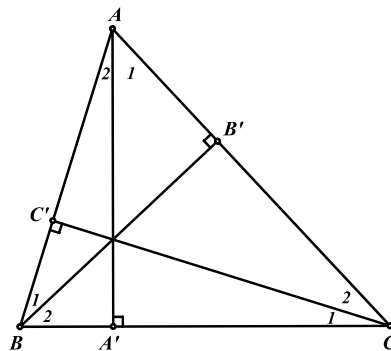
با ضرب کردن طرفین روابط فوق در یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} &= \frac{\sin \widehat{A}_r}{\sin \widehat{A}_1} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_r}{\sin \widehat{B}_1} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_r}{\sin \widehat{C}_1} \\ \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 &\Leftrightarrow \frac{\sin \widehat{A}_1}{\sin \widehat{A}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_1}{\sin \widehat{B}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_1}{\sin \widehat{C}_r} = 1 \end{aligned}$$



مسأله ۳-۴: ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.

از آن جا که $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^\circ$ چهارضلعی $AB'A'B$ محاطی است. بنابراین $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_r$ و به طریق مشابه داریم $\widehat{A}_r = \widehat{C}_1$ و $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_r$ در نتیجه خواهیم داشت:



$$\frac{\sin \widehat{A}_1}{\sin \widehat{A}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_1}{\sin \widehat{B}_r} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_1}{\sin \widehat{C}_r} = \frac{\sin \widehat{A}_1}{\sin \widehat{C}_1} \cdot \frac{\sin \widehat{B}_1}{\sin \widehat{A}_1} \cdot \frac{\sin \widehat{C}_1}{\sin \widehat{B}_1} = 1$$

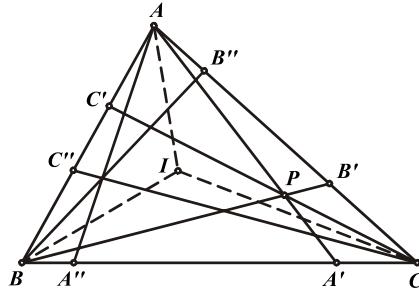
بنابراین طبق قضیه‌ی سوا سوا سینوسی ارتفاع‌های AA' ، BB' و CC' هم‌رس‌اند.

توجه داشته باشید که اثبات هم‌رسی نیمسازها نیز بوسیله‌ی صورت سینوسی سوا بسیار ساده‌تر است.

مسأله ۴ - ۴ : خطوط سوایی AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC در نقطه‌ی P هم‌رس‌اند. اگر خطوط سوایی AA'' ، BB'' و CC'' به ترتیب قرینه‌ی خطوط AA' ، BB' و CC' نسبت به نیمسازهای رئوس A ، B و C باشند، نشان دهید خطوط AA'' ، BB'' و CC'' نیز در یک نقطه هم‌رس‌اند. (این نقطه‌ی

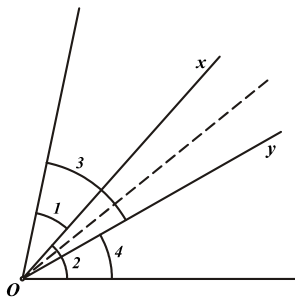


هم‌رسی، مزدوج هم زاویه‌ی نقطه‌ی P نامیده می‌شود.)



$$\text{فرض : } \frac{\sin \widehat{CAA'}}{\sin \widehat{BAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABB'}}{\sin \widehat{CBB'}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCC'}}{\sin \widehat{ACC'}} = 1$$

$$\text{حکم : } \frac{\sin \widehat{CAA''}}{\sin \widehat{BAA''}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABB''}}{\sin \widehat{CBB''}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCC''}}{\sin \widehat{ACC''}} = 1$$



با کمی دقت می‌توان دریافت چنانچه خطوط OY و OX قرینه‌ی یکدیگر نسبت به نیمساز زاویه‌ی O باشند آنگاه $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ و $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ می‌باشد. بنابراین در مسأله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\widehat{CAA'} = \widehat{BAA''} \quad , \quad \widehat{BAA'} = \widehat{CAA''}$$

$$\widehat{ABB'} = \widehat{CBB''} \quad , \quad \widehat{CBB'} = \widehat{ABB''}$$

$$\widehat{BCC'} = \widehat{ACC''} \quad , \quad \widehat{ACC'} = \widehat{BCC''}$$

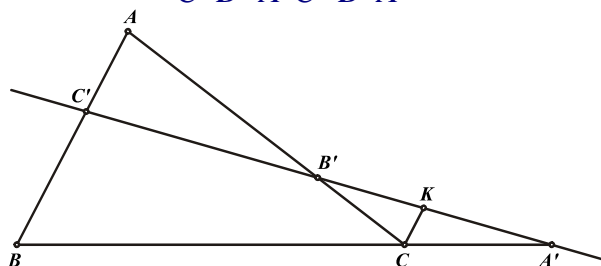
با جایگزینی تساوی‌های فوق در فرض مسأله، به راحتی حکم مسأله نتیجه خواهد شد.

قضیه‌ی منلائوس ۴ - ۲: در مثلث ABC ، سه نقطه‌ی A' ، B' و C' به ترتیب واقع بر اضلاع BC ، AC و AB



و یا امتداد آن‌ها، بر یک استقامت‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$



توجه داشته باشید که چنانچه A' ، B' و C' بر امتداد اضلاع قرارداشته باشند همچنان رابطه‌ی فوق صادق است.

ابتدا فرض می‌کنیم که نقاط A' ، B' و C' بر یک استقامت باشند و نشان می‌دهیم که رابطه‌ی فوق برقرار است. برای این منظور از نقطه‌ی C خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا خط $A'B'C'$ را در K قطع کند.

$$\begin{aligned} \triangle A'KC &\sim \triangle A'C'B \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{C'B}{KC} \\ \triangle B'KC &\sim \triangle B'AC' \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{KC}{AC'} \\ \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} &= \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{C'B}{KC} \cdot \frac{KC}{AC'} = 1 \end{aligned}$$

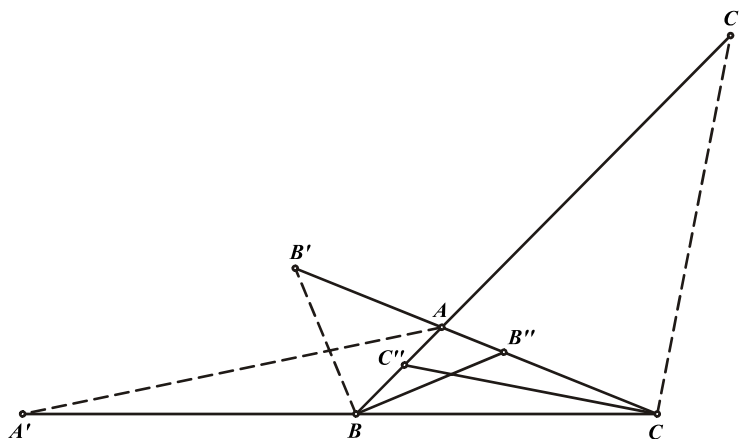
طرف دوم قضیه نیز با استفاده از برهان خلف به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

نکته: از آنجا که رابطه‌های بکار رفته در دو قضیه‌ی سوا و منلائوس مانند یکدیگر می‌باشند باید توجه داشته باشید چنانچه برای سه نقطه‌ی A' ، B' و C' روی اضلاع مثلث ABC یا بر امتداد آن‌ها، این رابطه برقرار باشد در صورتی که هر سه نقطه‌ی A' ، B' و C' بر اضلاع قرار داشته و یا یک نقطه بر ضلع و دو نقطه‌ی دیگر بر امتدادهای اضلاع واقع باشند، رابطه‌ی فوق مربوط به قضیه‌ی سوا می‌باشد و در صورتی که هر سه نقطه‌ی A' ، B' و C' بر امتداد اضلاع قرار داشته و یا یک نقطه بر امتداد ضلع و دو نقطه‌ی دیگر بر ضلع‌های مثلث واقع باشند رابطه‌ی فوق مربوط به قضیه‌ی منلائوس می‌باشد.



مسأله ۴-۵: در هر مثلث غیر متساوی‌الساقین ABC ثابت کنید:

- (الف) محل تلاقی نیمسازهای خارجی رئوس مثلث با اضلاع مقابل همواره بر یک استقامت قرار دارند.
 (ب) محل تلاقی نیمسازهای داخلی رئوس B و C با اضلاع مقابل و نیمساز خارجی رأس A با ضلع مقابلش، با یکدیگر هم‌خط‌اند.



(الف) برای حل مسأله بوسیله‌ی قضیه‌ی منلائوس باید نشان دهیم:

$$\text{حکم: } \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

طبق خواص نیمسازها داریم:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC}, \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{BC}, \frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} (=1)$$

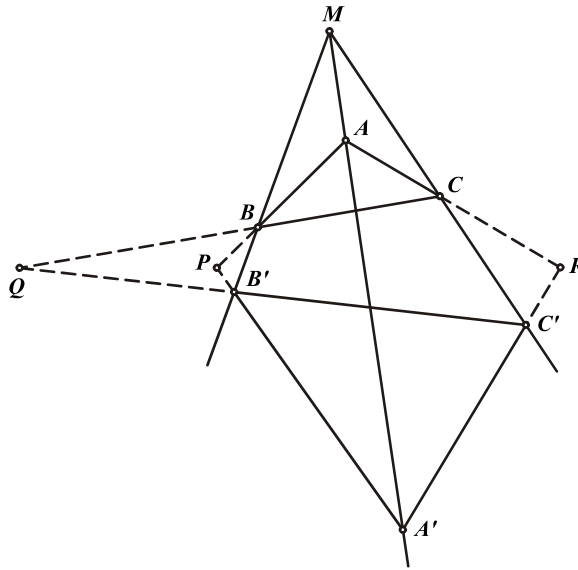
بنابراین نقاط A' ، B' و C' با یکدیگر هم‌خط‌اند.

(ب) اثبات این قسمت نیز مشابه قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

قضیه دزارگ ۳-۴: اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ خطوط AA' ، BB' و CC' هم‌مس باشد



آنگاه نقاط تلاقی اضلاع متناظر با یکدیگر هم‌خط هستند و بالعکس.



محل هم‌رسی AA' ، BB' و CC' را M و محل تلاقی اضلاع متناظر با یکدیگر را P ، Q و R می‌نامیم. بنابر قضیه منلائوس برای مثلث MBC و قاطع $QB'C'$ داریم:

$$\frac{MB'}{BB'} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CC'}{MC'} (=1)$$

همچنین برای مثلث MAB و قاطع $PA'B'$ داریم:

$$\frac{BB'}{MB'} \cdot \frac{AP}{BP} \cdot \frac{MA'}{AA'} (=1)$$

و برای مثلث MAC و قاطع $RA'C'$ داریم:

$$\frac{MC'}{CC'} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{AA'}{MA'} (=1)$$

با ضرب سه رابطه‌ی فوق در یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{AP}{BP} (=1)$$

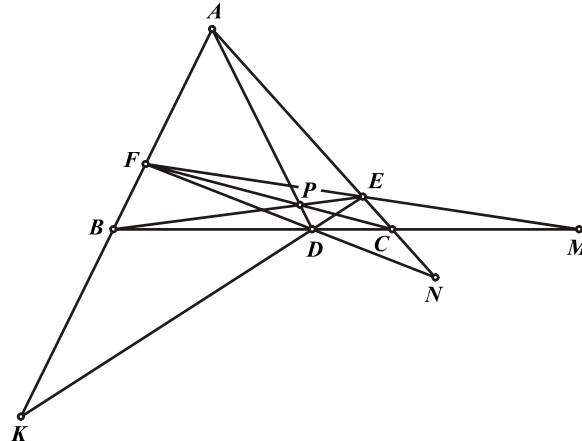
پس بنابر قضیه منلائوس برای مثلث ABC نقاط P ، Q و R روی یک استقامت قرار دارند.

اثبات عکس قضیه نیز به خود شما واگذار می‌شود.

نکته: چنانچه دو ضلع متناظر مثلث‌ها با یکدیگر موازی باشند خط گذرنده از محل تلاقی دیگر اضلاع متناظر با یکدیگر، با این دو ضلع موازی خواهد بود.

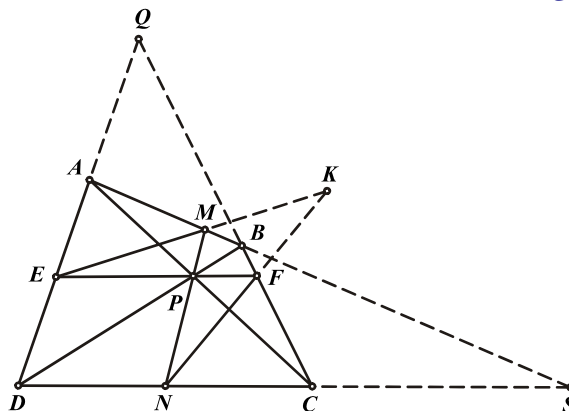
تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با شرایط فوق را دو مثلث همسان و نقطه‌ی M را مرکز همسانی و خط QPR را محور همسانی دو مثلث می‌نامند.

مسئله ۴-۶: خطوط سوایی AD ، BE و CF از مثلث ABC در نقطه‌ی P هم‌رس‌اند. نشان دهید نقاط (DE, AB) و (FD, CA) و (EF, BC) بر یک استقامت‌اند.



دو مثلث ABC و DEF با یکدیگر همسان هستند و نقطه‌ی P نیز مرکز همسانی این مثلث‌ها می‌باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی دزارگ، دو مثلث فوق محور همسانی نیز دارند پس سه نقطه‌ی $M = (EF, BC)$ و $N = (FD, AC)$ و $K = (DE, AB)$ بر روی یک خط راست قرار دارند.

مسئله ۴-۷: چهارضلعی $ABCD$ مفروض است بطوری که اضلاع روبروی آن موازی نیستند. اقطار AC و BD یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. نقاط M ، N ، F و E طوری روی اضلاع AB ، BC ، CD و DA تغییر می‌کنند که خطوط MN و EF از نقطه‌ی P می‌گذرند. اگر EM و FN یکدیگر را در K قطع کنند، مکان هندسی نقطه‌ی K را بیابید.



دو مثلث AME و CNF با یکدیگر همسان بوده و نقطه‌ی P مرکز همسانی این مثلث‌ها می‌باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی دزارگ، دو مثلث فوق دارای محور همسانی نیز هستند. پس سه نقطه‌ی $S = (AM, CN)$ و $Q = (AE, CF)$ و $K = (EM, FN)$ بر یک استقامت قرار دارند و به عبارت دیگر نقطه‌ی K همواره روی SQ قرار دارد. از طرف دیگر با بازگشت همین راه حل ثابت می‌شود که هر نقطه روی خط SQ خاصیت نقطه‌ی K را دارد. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ی K خط SQ می‌باشد.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه در صفحه‌ی مثلث ABC باشد و A_1 و A_2 پای عمودهای وارد از P بر نیمسازهای داخلی و خارجی A از مثلث ABC باشند. به همین نحو B_1, B_2, C_1, C_2 را تعریف می‌کنیم. ثابت کنید خطهای A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 در یک نقطه متقاطع‌اند.
- (۲) ثابت کنید برای اینکه قطرهای AD, BE, CF از شش‌ضلعی $ABCDEF$ ، که در دایره‌ای محاط شده است، در یک نقطه به هم برسند، شرط لازم و کافی این است که برابری

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$
 برقرار باشد.
- (۳) فرض کنید I مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC و A_1, B_1, C_1 و A_2, B_2, C_2 نقطه‌های تماس این دایره به ترتیب با اضلاع BC, AC, AB باشند. روی نیم‌خطهای IA_1, IB_1, IC_1 به ترتیب، نقطه‌های A', B', C' را به فاصله‌های برابر از I ، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای AA', BB', CC' هم‌مس‌اند.
- (۴) ثابت کنید که مماس‌های مرسوم از رأس‌های مثلث بر دایره‌ی محیطی آن، اضلاع مقابل آن را در سه نقطه‌ی هم خط قطع می‌کنند.
- (۵) دایره‌ای ضلع AB از مثلث ABC را در نقطه‌های C_1 و C_2 ، ضلع AC را در نقطه‌های B_1 و B_2 و ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1, BB_1, CC_1 در یک نقطه به هم برسند خطهای AA_2, BB_2, CC_2 هم در یک نقطه متقاطع‌اند.
- (۶) روی اضلاع AB, AC, BC از مثلث ABC ، نقاط C_1, B_1, A_1 را اختیار می‌کنیم. فرض کنید C_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AB و A_1B_1 ، A_2 نقطه‌ی برخورد خطوط BC و B_1C_1 و B_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AC و A_1C_1 باشد. ثابت کنید اگر خطوط AA_1, BB_1, CC_1 در یک نقطه هم‌مس باشند، آنگاه نقطه‌های A_2, B_2, C_2 بر یک خط راست واقع‌اند.
- (۷) خط راستی، ضلع‌های AB و AC و امتداد ضلع BC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط F, E و D قطع می‌کند. ثابت کنید که وسط پاره‌های AD, BE, CF بر یک خط راست واقع‌اند. (به عبارت دیگر اوساط اقطار هر چهارضلعی کامل هم‌خط‌اند. در هر چهارضلعی کامل امتداد اضلاع روبرو یکدیگر را قطع می‌کنند و دارای سه قطر است. در شکل مسأله BE, FC, AD اقطار چهارضلعی کامل $FECB$ هستند.)
- (۸) نقطه‌های A_1, B_1, C_1 را به ترتیب بر اضلاع BC, AC, AB از مثلث ABC و نقطه‌های A_2, B_2, C_2 را بر اضلاع B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ اختیار می‌کنیم. می‌دانیم که خطوط AA_1, BB_1, CC_1 هم‌مس‌اند. ثابت کنید که خطوط AA_2, BB_2, CC_2 هم‌مس‌اند اگر و فقط اگر A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 هم‌مس باشند.

(۹) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن، سه مثلث متساوی الساقین $A'BC$ ، $B'CA$ و $C'AB$ را طوری رسم می‌کنیم که این سه مثلث با هم متشابه باشند و داشته باشیم $A'B = A'C$ ،



ثابت کنید سه خط AA' ، BB' و CC' هم‌م‌رس‌اند.

(۱۰) جفت نقاط D و D' ؛ E و E' ؛ F و F' را به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC و متقارن نسبت به اوساط اضلاع متناظر انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که دو مثلث DEF و



$D'E'F'$ هم‌ارزند. (دو مثلث با مساحت‌های برابر را دو مثلث هم‌ارز یا معادل گویند).

(۱۱) دایره‌ای که به مرکز نقطه‌ای روی عمود منصف ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌شود اضلاع AB و AC را به ترتیب در جفت نقاط P و P' ، Q و Q' قطع می‌کند. خطوط PQ و $P'Q'$ ، خط BC را به ترتیب در نقاط K و K' قطع می‌کنند. ثابت کنید K و K' از نقطه‌ی وسط ضلع BC به یک



فاصله‌اند.

(۱۲) اگر سه خط سوایی AD ، BE و CF در نقطه‌ی P هم‌رس باشند، ثابت کنید:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$$


(۱۳) سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقاط A, B, C ؛ A', B', C' ؛ A'', B'', C'' قطع



شده‌اند. نشان دهید که خطوط $B''C$ ، $C'A''$ و AB' هم‌رس‌اند.

(۱۴) دو خط سوایی BE و CF یکدیگر را در نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC قطع می‌کنند. ثابت



کنید DA نیمساز زاویه‌ی EDF است.

(۱۵) دایره‌ی به قطر ارتفاع AD از مثلث ABC ، اضلاع AC و AB را در E و F قطع می‌کند. پای تصویر رأس A بر خط EF را A' می‌نامیم. B' و C' را به طور مشابه تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که خطوط AA' ،



BB' و CC' هم‌رس‌اند

(۱۶) در مثلث ABC نیم دایره‌ای را چنان محاط می‌کنیم که قطر آن بر ضلع BC باشد و بر اضلاع AC و AB به ترتیب در نقاط E و F مماس باشد. اگر محل تقاطع دو خط BE و CF را K بنامیم ثابت کنید که AK بر



BC عمود است.

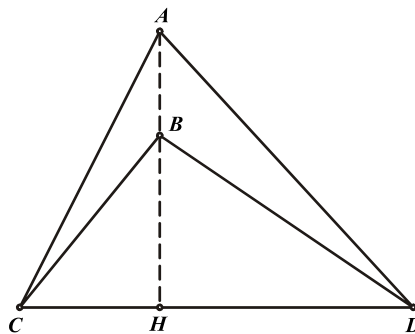
۴ - ۲ قضیه کارنو

هدف بخش: در برخورد با برخی از انواع مسایل مربوط به همرسی خطوط، ناگزیر از استفاده از روابط طولی برای حل آن‌ها هستیم. یکی از کاربردی‌ترین قضایا در این حوزه، قضیه‌ی کارنو است که در این بخش با آن آشنا خواهیم شد.

مسأله ۸-۴: نشان دهید خط گذرنده از نقاط A و B بر پاره خط CD عمود است اگر و فقط اگر داشته باشیم:



$$AC^r - AD^r = BC^r - BD^r \quad (1)$$



برای اثبات مسأله‌ی فوق ابتدا فرض می‌کنیم رابطه‌ی (۱) برقرار باشد و نشان می‌دهیم AB بر CD عمود است. اگر H_a و H_b به ترتیب پای عمودهای وارد از نقاط A و B بر خط CD باشند، طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$AC^r - AD^r = AH_a^r + H_aC^r - AH_a^r - H_aD^r = H_aC^r - H_aD^r$$

$$BC^r - BD^r = BH_b^r + H_bC^r - BH_b^r - H_bD^r = H_bC^r - H_bD^r$$

با جایگزینی دو رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$H_aC^r - H_aD^r = H_bC^r - H_bD^r$$

$$\Rightarrow (H_aC + H_aD)(H_aC - H_aD) = (H_bC + H_bD)(H_bC - H_bD)$$

$$\Rightarrow H_aC - H_aD = H_bC - H_bD$$

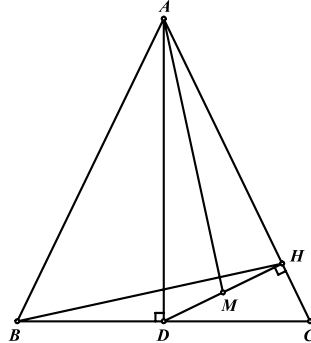
$$\Rightarrow H_aC + CD - H_aD = H_bC + CD - H_bD$$

$$\Rightarrow rH_aC = rH_bC \Rightarrow H_aC = H_bC$$

بنابراین نقاط H_a و H_b بر یکدیگر منطبق هستند و AB بر CD عمود است.

اثبات طرف دوم مسأله نیز با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث بسیار واضح است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۹-۴: ارتفاع AD از مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$) را رسم می‌کنیم. اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی D بر ضلع AC باشد و نقطه‌ی وسط DH را M بنامیم، نشان دهید AM بر BH عمود است.



با توجه به مسأله‌ی پیش، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم: $AB^2 - AH^2 = MB^2 - MH^2$.
طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$AB^2 - AH^2 = AD^2 + DB^2 - AD^2 + DH^2 = DB^2 + DH^2 \quad (1)$$

و بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث BMD داریم:

$$\begin{aligned} MB^2 - MH^2 &= MD^2 + DB^2 - 2MD \cdot DB \cdot \cos \widehat{BDM} - MH^2 \\ &= DB^2 + 2MD \cdot DB \cdot \cos \widehat{CDH} \\ &= DB^2 + 2MD \cdot DH = DB^2 + DH^2 \end{aligned}$$

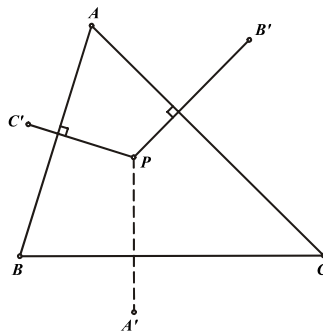
$$\Rightarrow MB^2 - MH^2 = DB^2 + DH^2 \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $AB^2 - AH^2 = MB^2 - MH^2$

قضیه کارنو ۴-۴: خطوط عمود وارد از نقاط A' ، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC در یک نقطه هم‌رس‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:



$$AC'^2 - C'B'^2 + BA'^2 - A'C'^2 + CB'^2 - B'A'^2 = 0$$



برای اثبات قضیه‌ی فوق فرض می‌کنیم رابطه‌ی بالا برقرار بوده و خطوط عمود وارد از نقاط B' و C' بر اضلاع AC و AB یکدیگر را در P قطع کنند و نشان می‌دهیم خط گذرنده از نقاط A' و P بر ضلع BC عمود است.

طبق مسأله‌ی پیش، از آنجا که خطوط PB' و PC' به ترتیب بر اضلاع AC و AB عمود هستند داریم:

$$AC'^2 - C'B^2 = PA^2 - PB^2$$

$$CB'^2 - B'A^2 = PC^2 - PA^2$$

با جایگزینی دو رابطه‌ی فوق در فرض قضیه خواهیم داشت:

$$BA'^2 - A'C^2 = PB^2 - PC^2$$

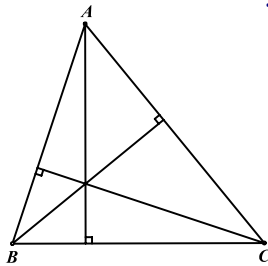
بنابراین طبق مسأله‌ی پیش خط $A'P$ بر ضلع BC عمود است.

نکته: توجه داشته باشید که نقاط A' ، B' و C' می‌توانند روی اضلاع مثلث نیز قرار داشته باشند که در این صورت حالت خاصی از قضیه حاصل می‌شود که البته کاربرد زیادی نیز دارد.

مسأله ۴-۱۰: نشان دهید در هر مثلث ارتفاع‌های نظیر رئوس در یک نقطه هم‌رس‌اند.

در قضیه‌ی کارنو چنانچه A' را روی رأس A و B' و C' را نیز

روی رئوس B و C در نظر بگیریم، رابطه‌ی کارنو به صورت زیر برقرار است:



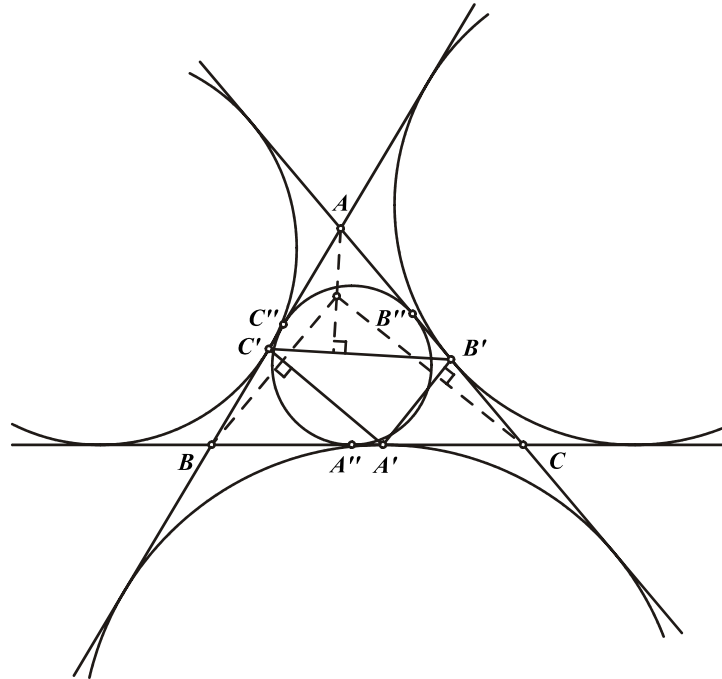
$$AC'^2 - CB^2 + BA'^2 - AC^2 + CB'^2 - BA^2 = 0$$

بنابراین طبق قضیه‌ی کارنو خطوط عمود وارد از نقاط A ، B و C به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB در یک نقطه هم‌رس‌اند.

مسأله ۴-۱۱: اگر A' ، B' و C' محل تماس دایره‌های محاطی خارجی نظیر رئوس A ، B و C با اضلاع مقابل آن‌ها باشند، نشان دهید خطوط عمود وارد از رئوس A ، B و C به ترتیب بر اضلاع $A'C'$ ، $B'C'$ و



$A'B'C'$ از مثلث $A'B'C'$ در یک نقطه هم‌رس‌اند.



طبق قضیه‌ی کارنو برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$B'A'' - AC'' + C'B'' - BA'' + A'C'' - CB'' = 0$$

اما طبق مسأله ۱۰-۳ داریم:

$$B'A = B''C, \quad AC' = BC'', \quad C'B = C''A, \quad BA' = CA''$$

$$A'C = A''B, \quad CB' = AB''$$

با جایگزینی روابط فوق در حکم مسأله نتیجه می‌شود:

$$B''C'' - BC'' + C''A'' - CA'' + A''B'' - AB'' = 0$$

و از آنجا که پاره‌خط‌های رابطه‌ی فوق دو به دو با یکدیگر برابرند درستی حکم بالا کاملاً روشن است.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) ثابت کنید که اگر عمودهای وارد از نقطه‌های A' ، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC در یک نقطه متقاطع باشند، آنگاه عمودهای وارد از نقطه‌های A ، B و C به ترتیب بر خط‌های $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$ هم، در یک نقطه متقاطع‌اند.



(۲) ثابت کنید که عمودهای مرسوم بر اضلاع مثلث در نقاط تماس دوائر محاطی خارجی با اضلاع مثلث، هم‌مرس‌اند.



(۳) فرض کنید A' ، B' و C' معرف پای عمودهای وارد از رئوس A ، B و C از مثلث ABC بر خط ℓ باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A' ، B' و C' به ترتیب بر BC ، AC و AB ، در یک نقطه متقاطع‌اند.



(۴) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطه‌ی دلخواه D مفروض‌اند. فرض کنید A' ، B' و C' به ترتیب معرف مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های BCD ، CAD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از رأس‌های A ، B و C به ترتیب بر $A'B'$ ، $B'C'$ و $A'C'$ ، در یک نقطه متقاطع‌اند.



(۵) فرض کنید AD ، BE و CF ارتفاع‌های مثلث ABC و A' ، B' و C' تصویرهای A ، B و C به ترتیب روی EF ، DF و DE باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A' ، B' و C' به ترتیب بر BC ، AC و AB در یک نقطه متقاطع‌اند.



(۶) رئوس مثلث $A'B'C'$ بر روی ارتفاع‌های مثلث ABC قرار دارد. اگر از وسط اضلاع مثلث $A'B'C'$ عمودهایی بر اضلاع متناظر مثلث ABC رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود هم‌مرس‌اند.



(۷) پاره‌خط BE را بر امتداد ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ضلع BC جدا می‌کنیم. عمودی که از E بر BE اخراج می‌شود نیمساز زاویه‌ی DAB را در K قطع می‌کند. ثابت کنید خط KC بر قطر BD عمود است.



(۸) نقطه‌ی P را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. عمودهای PD و PE را بر اضلاع AC و BC فرود آورده و اوساط AE و BD را M و N می‌نامیم. نشان دهید MN بر DE عمود است.



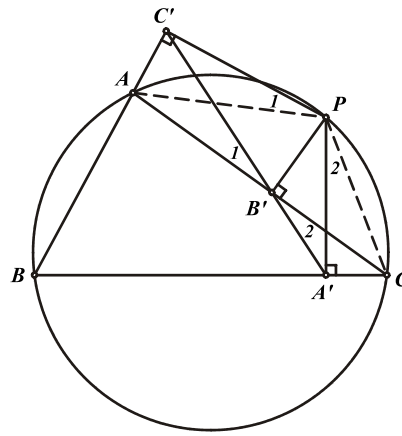
۴-۳ خط سیمسون

هدف بخش: یکی از جالبترین هم خطی‌های واقع در دایره، قضیه‌ی خط سیمسون است که به خاطر شهرت بیش از حدش در اکثر کتب هندسه مسطحه مورد بحث قرار گرفته است. ما نیز در این بخش به تبیین این قضیه و کنکاش در برخی خواص و مسایل مربوط به خط سیمسون می‌پردازیم.

قضیه خط سیمسون ۴-۵: فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه و A' ، B' و C' پای عمودهای مرسوم از P بر اضلاع (یا امتداد اضلاع) BC ، AC و AB از مثلث ABC باشند. در این صورت A' ، B' و C' هم‌خطاند



اگر و فقط اگر P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد.



ابتدا فرض می‌کنیم P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع باشد. برای اثبات هم‌خطی A' ، B' و C' نقاط A' و C' را به نقطه‌ی B' وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم خطوط $A'B'$ و $B'C'$ هم راستا هستند و برای این منظور کافی است نشان دهیم $B'_1 = B'_r$ از آنجا که $\widehat{AC'P} + \widehat{AB'P} = 180^\circ$ چهارضلعی $AC'PB'$ محاطی بوده و بنابراین $\widehat{B'_1} = \widehat{P_1}$ و چون $\widehat{PA'C} + \widehat{PB'C} = 90^\circ$ چهارضلعی $PA'C$ نیز محاطی بوده و بنابراین $\widehat{B'_r} = \widehat{P_r}$. چهارضلعی $APCB$ محاطی است، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \widehat{PAC'} &= \widehat{PCB} \\ \widehat{PC'A} &= \widehat{PA'C} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle APC' \sim \triangle CPA' \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{P_r}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B'_1} &= \widehat{P_1} \\ \widehat{B'_r} &= \widehat{P_r} \\ \widehat{P_1} &= \widehat{P_r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B'_1} = \widehat{B'_r}$$

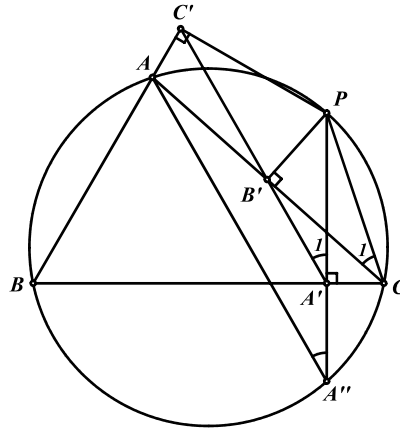
پس خطوط $A'B'$ و $B'C'$ هم راستا بوده و نقاط A' ، B' و C' هم خطاند. طرف دوم این قضیه نیز با استفاده از طرف اول و برهان خلف به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

تعریف: خط $A_1B_1C_1$ را خط سیمسون نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC می‌نامند.

مسئله ۴-۱۲: نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC مفروض است. نقاط A' ، B' و C' تصویرهای نقطه‌ی P بر اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC می‌باشند و امتداد PA' ، PB' و PC' دایره‌ی محیطی را بار دیگر در A'' ، B'' و C'' قطع می‌کند. نشان دهید AA'' ، BB'' و CC'' با خط



سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC موازی می‌باشند.



از آنجا که چهارضلعی $PB'A'C$ محاطی است داریم:

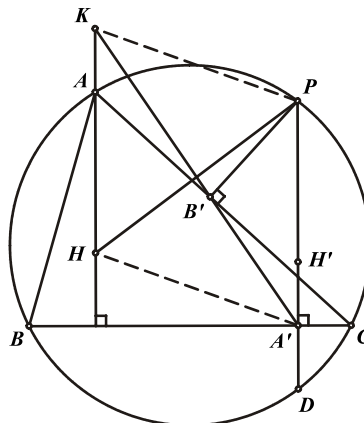
$$\left. \begin{aligned} \widehat{A'_1} &= \widehat{C_1} \\ \widehat{A''} &= \widehat{C_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A''} = \widehat{A'_1} \Rightarrow A''A \parallel A'C'$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد BB'' و CC'' نیز با خط سیمسون نقطه‌ی P موازی هستند.

مسئله ۴-۱۳: اگر P نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، ثابت کنید خط



سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC پاره‌خط PH را نصف می‌کند.



عمودهای PA' و PB' را بر اضلاع BC و AC فرود می‌آوریم و خط سیمسون $A'B'$ را امتداد می‌دهیم تا ارتفاع نظیر رأس A را در K قطع کند. اگر H' مرکز ارتفاعی مثلث PBC و D محل تلاقی امتداد PA' با دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد آنگاه برای اثبات حکم مسأله کافی است نشان دهیم چهارضلعی $KHA'P$ متوازی الاضلاع است.

از طرفی AH و PH' هر دو ۲ برابر فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی از ضلع BC بوده و داریم $AH = PH'$. از طرف دیگر چون H' مرکز ارتفاعی مثلث PBC است پس $A'H' = A'D$ و همچنین از آنجا که $AD \parallel KA'$ و $A'D \parallel AK$ بنابراین چهارضلعی $AKA'D$ متوازی الاضلاع است و داریم $A'D = AK$.

$$\left. \begin{array}{l} A'D = A'H' \\ A'D = AK \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A'H' = AK \\ PH' = AH \end{array} \right\} \Rightarrow A'H' + PH' = AK + AH \Rightarrow PA' = KH$$

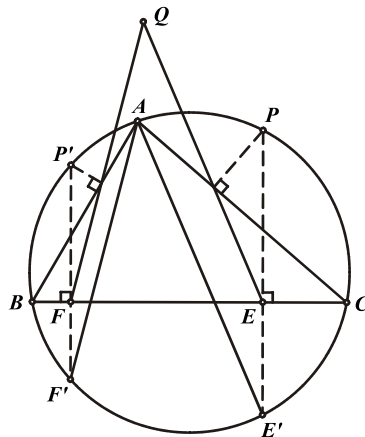
و چون $PA' \parallel KH$ بنابراین چهارضلعی $KHA'P$ متوازی الاضلاع است.

نکته: توجه داشته باشید این خاصیت خط سیمسون، که همواره PH را نصف می‌کند در حل مسایل مربوط به خط سیمسون بسیار مهم و کاربردی است.

مسأله ۴-۱۴: دو نقطه‌ی P و P' روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC مفروض‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین خطوط



سیمسون نظیر نقاط P و P' نسبت به مثلث ABC برابر نصف کمان PP' است.



عمودهای PE و PF را بر BC فرود آورده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در E' و F' قطع کنند. بنا بر **مسأله‌ی ۴-۱۲:** داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AF' \parallel QF \\ AE' \parallel QE \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FQE} = \widehat{F'AE'} = \frac{\widehat{F'E'}}{2} \left. \begin{array}{l} P'F' \parallel PE' \\ \Rightarrow \widehat{F'E'} = \widehat{P'P} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FQE} = \frac{\widehat{P'P}}{2}$$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) مثلث ABC و نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و A' پای عمود وارد از P بر ضلع BC و K محل تلاقی خط سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC و ارتفاع AD باشند، نشان دهید PK با $A'H$ موازی است. 
- (۲) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در دایره‌ی (O) محاط شده‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین خطوط سیمسون هر نقطه‌ی دلخواه P روی دایره‌ی (O) نسبت به این دو مثلث، همواره مقداری ثابت است. 
- (۳) دایره‌ی (O) و سه وتر PA, PB, PC از آن مفروض‌اند. سه دایره‌ی $(PA), (PB), (PC)$ را به قطر این سه وتر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را دو به دو در سه نقطه‌ی D, E, F قطع کنند. نشان دهید این سه نقطه هم‌خط‌اند. 
- (۴) مثلث متغیری دایره‌ی محیطی و مرکز ثقل ثابتی دارد. نشان دهید که خط سیمسون نقطه‌ی مفروض P روی دایره‌ی محیطی نسبت به این مثلث، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد. 
- (۵) چهار خط دو به دو ناموازی در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید دوایر محیطی چهار مثلثی که از تقاطع سه به سه این خطوط بوجود می‌آیند در یک نقطه هم‌رس هستند. این نقطه به نقطه‌ی میشل معروف است. 
- (۶) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر A', B', C' پای ارتفاع‌ها و A'', B'', C'' محل تلاقی امتداد ارتفاع‌ها با دایره‌ی محیطی مثلث باشند نشان دهید: 
- الف) خطوط سیمسون نظیر نقاط A'', B'', C'' نسبت به مثلث ABC به ترتیب با خطوط مماس بر دایره در نقاط A, B, C موازی می‌باشند.
- ب) اضلاع مثلث حاصل از تلاقی خطوط سیمسون نظیر نقاط A'', B'', C'' نسبت به مثلث ABC با اضلاع مثلث ارتفاعیه مثلث ABC دو به دو موازی‌اند.
- (۷) اگر خط سیمسون نقطه‌ی P از روبروی قطری P در دایره‌ی محیطی مثلث بگذرد، نشان دهید که این خط سیمسون از مرکز ثقل مثلث نیز می‌گذرد. 
- (۸) از نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC عمودهایی بر اضلاع BC, AC, AB رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در نقاط L, M, N و دایره‌ی محیطی را در A', B', C' قطع کنند. خط سیمسون LMN خطوط $B'C', A'C', A'B'$ را به ترتیب در L', M', N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط AL', BM', CN' هم‌رس‌اند. 
- (۹) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. اگر P, Q, R به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر AB, BC و CA باشند و داشته باشیم $PR=QR$ ، ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌ی \widehat{ABC} و \widehat{CDA} روی خط AC یکدیگر را قطع می‌کنند. (المیاد ریاضی جهانی سال ۲۰۰۳)

۴ - قضیه پاسکال

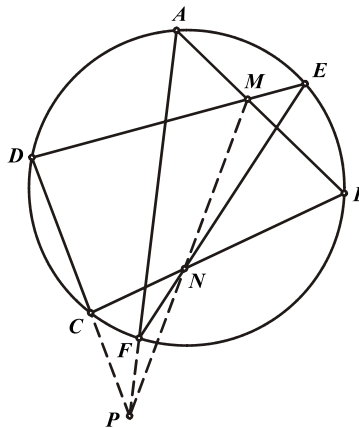
هدف بخش: معمولاً در مسایلی که همرسی خطوط یا هم خطی نقاط در یک دایره اتفاق می افتد بسیاری از قضایای مربوط به همرسی و هم خطی، کارآیی خود را از دست می دهند. در این مواقع قضیه ی پاسکال می تواند ابزاری بسیار مناسب و قدرتمند برای اثبات همرسی ها یا هم خطی ها باشد. این قضیه صورتی ساده اما کاربردی مبتکرانه و زیبا دارد که در این بخش با آن آشنا خواهیم شد.

قضیه پاسکال ۴-۶: در هر شش ضلعی محاطی، محل برخورد اضلاع مقابل یا امتداد آن ها همواره بر یک خط راست قرار دارند. به عبارت دیگر اگر اضلاع یک شش ضلعی محاطی را به ترتیب f, b, \dots, a بنامیم نقاط محل برخورد اضلاع (a, d) محل برخورد اضلاع (b, e) و محل برخورد اضلاع (c, f) همواره هم خط خواهند بود.



البته در این قضیه شش ضلعی محاطی می تواند محدب، مقعر و بنابراین خود متقاطع باشند.

اثبات قضیه: در شش ضلعی $ABCDEF$ ، $(AB, DE) = M$ و $(BC, EF) = N$ می باشد. MN را امتداد می دهیم تا امتداد AF را در P قطع کند داریم:



(۱)

$$\frac{PM}{PN} = \frac{S_{MAF}}{S_{NAF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AF \cdot \sin \widehat{MAF}}{\frac{1}{2} \cdot FN \cdot AF \cdot \sin \widehat{AFN}} = \frac{AM}{FN} \cdot \frac{\sin \widehat{MAF}}{\sin \widehat{AFN}} = \frac{AM}{FN} \cdot \frac{BF}{AE}$$

به همین ترتیب اگر CD ، MN را در P_1 قطع کند خواهیم داشت:

$$\frac{MP_1}{P_1N} = \frac{DM}{NC} \cdot \frac{CE}{BD} \quad (۲)$$

با توجه به تشابه دو مثلث AME و MDB با یکدیگر و همچنین دو مثلث BNF و CNE با یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{DM}{BD} = \frac{AM}{AE}, \quad \frac{BF}{FN} = \frac{CE}{NC} \Rightarrow \frac{DM}{BD} \cdot \frac{CE}{NC} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{BF}{FN} \quad (3)$$

با جایگزینی روابط (۱) و (۲) در رابطه‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{MP_1}{NP_1} = \frac{MP}{NP} \Rightarrow \frac{MN}{NP_1} = \frac{MN}{NP} \Rightarrow NP_1 = NP$$

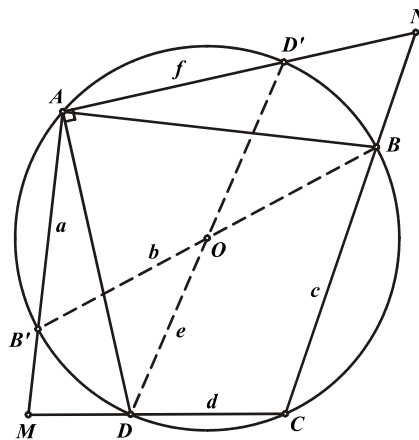
بنابراین نقطه‌ی P_1 بر P منطبق بوده و محل برخورد خطوط AF و CD روی خط MN قرار دارد.

نکته: تعمیم قضیه‌ی پاسکال به این صورت است که این قضیه نه فقط برای دایره، بلکه برای هر سطح مقطع مخروطی، مانند بیضی یا هذلولی صادق است.

مسئله ۴-۱۵: چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. عمودی بر ضلع AB در نقطه‌ی A اخراج می‌کنیم تا ضلع CD را در M قطع کند و عمودی نیز بر ضلع AD در نقطه‌ی A اخراج می‌کنیم تا ضلع BC را در N قطع کند.



نشان دهید MN از مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد.



نقاط برخورد AM و AN با دایره را به ترتیب B' و D' می‌نامیم. از آنجا که زوایای $\widehat{BAB'}$ و $\widehat{DAD'}$ قائمه می‌باشند بنابراین BB' و DD' قطرهای دایره بوده و محل برخورد آن‌ها، نقطه‌ی O مرکز دایره می‌باشد. طبق قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AB'BCDD'$ نقاط $(a, d) = M$ ، $(b, e) = O$ ، و $(c, f) = N$ هم خط می‌باشند. بنابراین MN از نقطه‌ی O می‌گذرد.

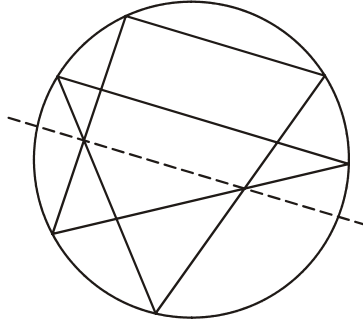
نکته: توجه داشته باشید که ترتیب رئوس در ذکر نام شش ضلعی کاملاً تعیین کننده است به عبارت دیگر دو شش ضلعی $ABCDEF$ و $BACDEF$ کاملاً متفاوتند.

در بررسی کاربردهای مختلف قضیه‌ی پاسکال دو حالت خاص مهم آن را هرگز نباید از نظر دور داشت که عبارتند از:

۱- در صورتی که دو ضلع مقابل در یک شش ضلعی محاطی با یکدیگر موازی باشند (یکدیگر را در بی‌نهایت قطع



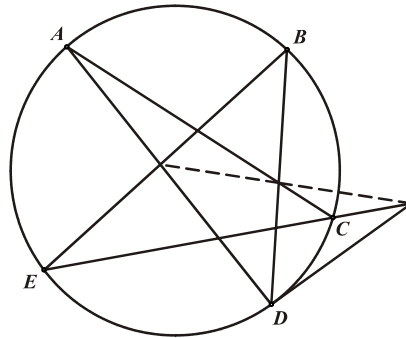
کنند) خط گذرنده از محل تلاقی دیگر اضلاع مقابل به هم نیز با این خطوط موازی خواهد بود.



۲- در صورتی که طول هر کدام از اضلاع شش ضلعی برابر صفر شود، آن ضلع به خطی مماس بر دایره تبدیل می‌شود و همچنان قضیه‌ی پاسکال صادق خواهد بود. شش ضلعی مربوط به آن را به صورت $ADDBEC$



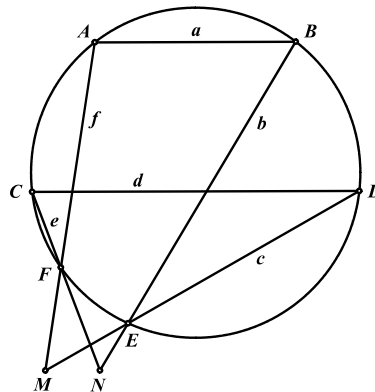
نمایش می‌دهیم.



مسأله ۴-۱۶: AB و CD دو وتر موازی در دایره هستند و E و F نیز دو نقطه‌ی دلخواه بر روی دایره می‌باشند.

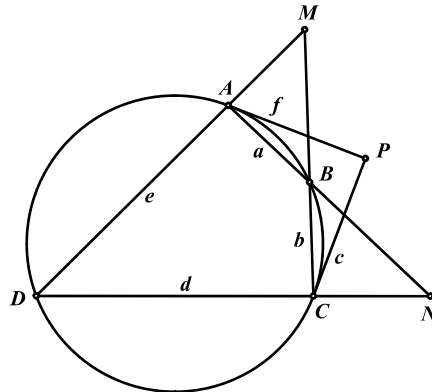


اگر $M = (AF, DE)$ و $N = (BE, CF)$ نشان دهید: $MN \parallel AB$



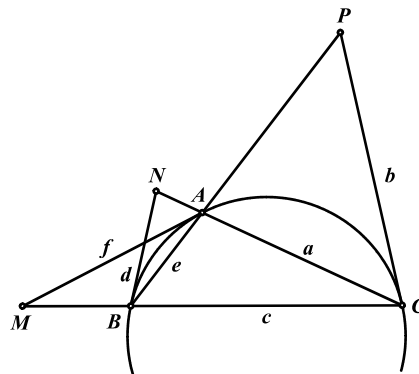
با توجه به قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $ABEDCF$ از آنجا که دو ضلع روبروی AB و CD با یکدیگر موازی می‌باشند بنابراین خط گذرنده از نقاط $(b, e) = N$ و $(c, f) = M$ نیز با AB و CD موازی خواهد بود.

مسئله ۴-۱۷: چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. اگر امتداد اضلاع مقابل دو به دو یکدیگر را در M و N و خطوط مماس بر دایره در نقاط A و C یکدیگر را در P قطع کنند نشان دهید نقاط M, N و P هم‌خطاند.



با توجه به قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AABCCD$ نقاط $(a, d) = N$ ، $(b, e) = M$ و $(c, f) = P$ بر یک خط راست قرار دارند.

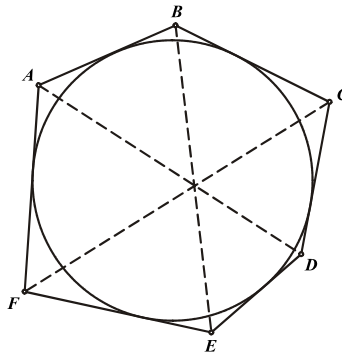
مسئله ۴-۱۸: در مثلث ABC در رئوس A, B و C مماس‌هایی بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم می‌کنیم تا اضلاع مقابل آن را به ترتیب در M, N و P قطع کنند. ثابت کنید M, N و P هم‌خطاند.



طبق قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AABBCC$ نقاط $(a, d) = N$ ، $(b, e) = P$ و $(c, f) = M$ با یکدیگر هم‌خطاند.

قضیه‌ی پاسکال دوگانی مشهور به قضیه‌ی بریانشن دارد که به شرح زیر می‌باشد:

قضیه بریانشن ۴ - ۷: در هر شش ضلعی محیطی، خطوط واصل رأس‌های مقابل در یک نقطه هم‌رس‌اند.

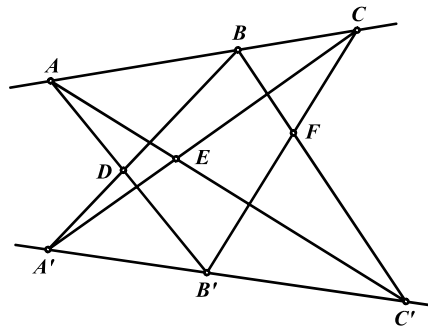


همچنین قضیه‌ی پاپوس نیز حالت خاصی از تعمیم قضیه‌ی پاسکال می‌باشد که به دلیل کاربرد بسیار محدود آن تنها به اشاره‌ای از آن بسنده می‌کنیم.

قضیه پاپوس ۴ - ۸: اگر نقاط A, B, C با یکدیگر و نقاط A', B', C' نیز با یکدیگر هم خط باشند، نقاط $D = (AB', A'B)$ ، $E = (AC', A'C)$ ، $F = (BC', B'C)$ نیز با یکدیگر هم خط خواهند



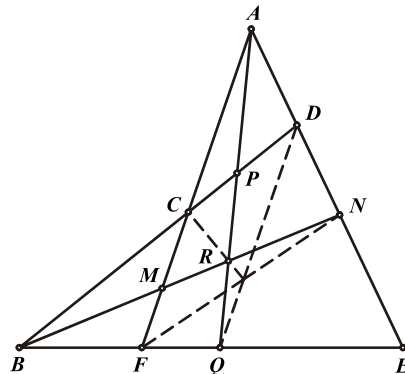
بود.



مسئله ۴ - ۱۹: سه خط گذرنده از نقطه‌ی A سه خط گذرنده از نقطه‌ی B را مطابق شکل در نه نقطه قطع می‌کنند.



نشان دهید خطوط CR و FN, DQ در یک نقطه هم‌رس‌اند.



می‌دانیم سه نقطه‌ی A, D, N با یکدیگر و سه نقطه‌ی B, F, Q نیز با یکدیگر هم‌خط‌اند بنابراین طبق قضیه‌ی پاپوس نقاط $C = (AF, BD)$ ، $R = (AQ, BN)$ ، $C = (DQ, FN)$ نیز با یکدیگر هم‌خط‌اند و به عبارت دیگر خط CR با خطوط DQ و FN هم‌رس است.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) نقاط B' و C' را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اگر خطوط BB' و CC' دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند ثابت کنید خط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC در نقطه‌ی A و خطوط $B'C'$ و MN در یک نقطه هم‌رس‌اند.
- (۲) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. نقاط E و F را به ترتیب روی اضلاع AB و CD در نظر می‌گیریم. اگر DE و AF دایره‌ی محیطی چهارضلعی محاطی $ABCD$ را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند نشان دهید خطوط EF ، MN و BC در یک نقطه هم‌رس‌اند.
- (۳) چهارضلعی $ABCD$ مفروض است به نحوی که $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ می‌باشد. اگر نقاط H و O به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید نقاط H ، O و D بر یک خط راست واقع‌اند.
- (۴) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم که در نقاط D و E به ترتیب بر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه‌ی P بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس داخل باشد. ثابت کنید نقطه‌ی وسط پاره‌خط DE بر مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC منطبق می‌باشد.
- (۵) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. نقطه‌ی P درون چهارضلعی چنان قرار گرفته که $\widehat{DAP} + \widehat{DCP} = \widehat{CBP} + \widehat{CDP} = 90^\circ$ می‌باشد. اگر نقاط E و O به ترتیب محل تلاقی اقطار چهارضلعی و مرکز دایره‌ی محیطی آن باشند نشان دهید نقاط E ، P و O هم خط‌اند.
- (۶) خط دلخواه d اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC را در A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده است. نقطه‌ی دلخواه M را روی خط d در نظر گرفته و خطوط AM ، BM و CM را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در نقاط A_2 ، B_2 و C_2 قطع کنند. نشان دهید خطوط A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 در نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC هم‌رس‌اند.
- (۷) نیم دایره‌ای به قطر BC مفروض است. از نقطه‌ی A در خارج آن مماس‌های AM و AN را بر نیم دایره رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد قطر BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. اگر BN و CM یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند ثابت کنید خط AP بر EF عمود است.
- (۸) چهارضلعی محاطی و محیطی $ABCD$ مفروض می‌باشد. اگر O ، I و E به ترتیب مرکز دایره‌ی محاطی و مرکز دایره‌ی محیطی و محل تلاقی قطرهای چهارضلعی باشند، نشان دهید این سه نقطه بر یک استقامت قرار دارند.
- (۹) ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. دایره‌ای به قطر AH رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. مماس‌های مرسوم در نقاط M و N بر این دایره یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطه‌ی P بر امتداد میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد.

(۱۰) چهارضلعی محیطی $ABCD$ مفروض است. اگر اضلاع AB ، BC ، CD و DA به ترتیب در نقاط P ، Q ، M و N بر دایره‌ی محاطی این چهارضلعی مماس باشند، ثابت کنید خطوط PM ، QN ، AC و BD در یک نقطه



همرس‌اند.

(۱۱) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. نقاط دلخواه E و F به ترتیب روی اضلاع AB و CD قرار دارند. محل تلاقی AF و DE را N و محل تلاقی BF و CE را M می‌نامیم. ثابت کنید خط گذرنده از نقاط M و



N متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) در مثلث ABC ، AH و AD به ترتیب ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A و BH' و BD' به ترتیب ارتفاع و نیمساز نظیر رأس B می‌باشند. I و O به ترتیب مراکز دایره محاطی داخلی و محیطی مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید I و H و H' هم خطاند اگر و فقط اگر O ، D و D' هم خط باشند.



(۲) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاطی می‌باشند. محل برخورد خطوط $(A'B', BC)$ ، $(A'C', BC)$ ، $(A'B', AC)$ ، $(B'C', AC)$ ، $(B'C', AB)$ ، $(A'C', AB)$ را به ترتیب D ، E ، F ، D' ، E' ، F' می‌نامیم. ثابت کنید خطوط DD' ، EE' و FF' هم‌مس‌اند.



(۳) نقطه P روی دایره (O) قرار دارد و چهار ضلعی $ABCD$ در (O) محاط است. ترکیب‌های سه به سه از رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ ، چهار مثلث را تعیین می‌کنند. چهار خط سیمسون نظیر نقطه P نسبت به این چهار مثلث را بدست می‌آوریم و P را روی آن‌ها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون نقطه P نسبت به چهارضلعی محاطی $ABCD$ نامید.



(۴) شعاع OP از دایره محیطی مثلث ABC اضلاع این مثلث را در نقاط A' ، B' و C' قطع می‌کند. نشان دهید نقاط A'' ، B'' و C'' که تصاویر نقاط A' ، B' و C' روی خطوط AP ، BP و CP هستند، روی خط سیمسون P نسبت به ABC قرار دارند.



(۵) در مثلث ABC نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری انتخاب شده‌اند که: $AM = BN = AB$. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC باشند، ثابت کنید: $OI \perp MN$



(۶) دو مثلث قائم‌الزاویه و متشابه ABE و ACD ($\widehat{EAB} = \widehat{DAC}$ و $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$) را در خارج مثلث ABC رسم می‌کنیم. ثابت کنید محل تقاطع دو پاره خط BD و CE روی ارتفاع AH قرار دارد.



(۷) نقطه F را بر امتداد ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $AC = CF$. دایره‌ای که از نقاط A ، C و F می‌گذرد، دایره به قطر BC را در نقطه P قطع می‌کند اگر خطوط BP و CP اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند ثابت کنید D ، E و F بر یک



استقامت‌اند.

(۸) دایره‌ای ضلع BC از مثلث ABC را در نقاط A_1 و A_2 و ضلع AC را در نقاط B_1 و B_2 و ضلع AB را در نقاط C_1 و C_2 قطع کرده‌است. مماس در نقاط A_1 و A_2 بر دایره مذکور یکدیگر در نقطه‌ی A' قطع می‌کنند و نقاط B' و C' هم بطور مشابه بدست می‌آیند. ثابت کنید سه خط AA' ، BB' و CC' هم‌مرس‌اند.



(۹) سه دایره (O_1, r_1) ، (O_2, r_2) و (O_3, r_3) طوری در مثلث ABC محاط شده‌اند که دو به دو دایره‌های (O_1) و (O_2) در P و دایره‌های (O_1) و (O_3) در Q و دایره‌های (O_2) و (O_3) در R بر یکدیگر مماس هستند و همچنین دایره (O_1) بر اضلاع AB و AC و دایره (O_2) بر اضلاع BC و BA و دایره (O_3) بر اضلاع CA و CB مماس می‌باشند. نشان دهید سه خط AR ، BQ و CP در یک نقطه هم‌مرس‌اند.



(۱۰) در مثلث ABC مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ای به قطر BC ، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند خط واصل PQ را L_A بنامید. اگر L_B و L_C نیز به همین ترتیب تعریف شوند ثابت کنید L_A ، L_B و L_C در یک نقطه هم‌مرس‌اند.



(۱۱) مثلث ABC و دایره محاطی داخلی آن که در نقاط A' ، B' و C' بر اضلاع آن مماس است مفروض‌اند. اگر سه خط سوایی هم‌مرس گذرنده از رئوس A ، B و C به ترتیب دایره محاطی را برای اولین بار در نقاط A'' ، B'' و C'' قطع کنند، نشان دهید خطوط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ در یک نقطه هم‌مرس‌اند.



فصل پنجم

دایره‌ها

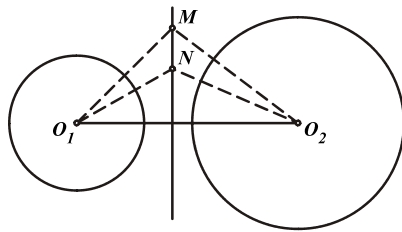
۵-۱ محور اصلی

هدف بخش: محور اصلی مفهومی جالب و در عین حال کاربردی در دایره‌هاست که از بحث قوت نقطه نسبت به دایره نشأت می‌گیرد. در این بخش بطور مختصر با محور اصلی دو دایره آشنا خواهیم شد و سعی می‌کنیم تا با پرداختن به انواع کاربردهای آن در حل مسایل مختلف هندسه، دیدی کامل و همه جانبه نسبت به این مفهوم مهم هندسی بدست دهیم.

قضیه ۵-۱: مکان هندسی نقاطی مانند N که قوت آن نسبت به دو دایره مفروض برابر هستند، خطی است عمود بر



خط‌المركزين دو دایره.



دو نقطه M و N را طوری در نظر می‌گیریم که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ برابر باشد.

$$P_{C_1}^M = P_{C_2}^M \Rightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \Rightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

$$P_{C_1}^N = P_{C_2}^N \Rightarrow NO_1^2 - R_1^2 = NO_2^2 - R_2^2 \Rightarrow NO_1^2 - NO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

و با توجه به دو رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$MO_1^2 - MO_2^2 = NO_1^2 - NO_2^2$$

بنابراین طبق مسأله ۴-۸ خط MN بر O_1O_2 عمود است. پس اگر نقطه M را ثابت فرض کنیم تمام نقاط مانند N که قوت یکسانی نسبت به دو دایره دارند روی خط عمود وارد از نقطه M بر خط‌المركزين دو دایره قرار دارند. از طرف دیگر با عکس همین راه حل به سادگی ثابت می‌شود که هر نقطه روی عمود وارد از M بر خط‌المركزين دو دایره، قوت یکسانی نسبت به آن دو دارد. بنابراین مکان هندسی نقطه N خطی عمود بر خط‌المركزين دو دایره است.

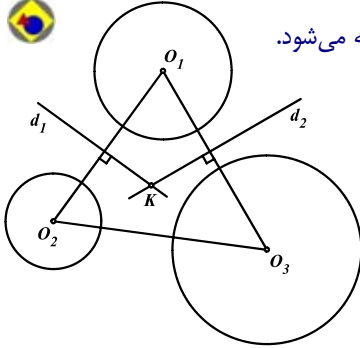
تعریف: خط MN را که قوت تمام نقاط آن نسبت به دو دایره یکسان است، محور اصلی دو دایره می‌نامند.

اگر دو دایره C_1 و C_2 با یکدیگر هم مرکز باشند، محور اصلی ندارند و اگر در دو نقطه A و B یکدیگر را قطع کنند از آنجا که $P_{C_1}^A = P_{C_2}^A = O$ و $P_{C_1}^B = P_{C_2}^B = O$ ، بنابراین هر دو نقطه A و B روی محور اصلی دو دایره قرار دارند و به عبارت دیگر خط AB محور اصلی دو دایره است.

قضیه ۵-۲: اگر C_1, C_2 و C_3 سه دایره دلخواه در صفحه باشند، محورهای اصلی دو به دو این دوایر در یک نقطه



همرسند که به این نقطه مرکز اصلی سه دایره C_1, C_2 و C_3 گفته می‌شود.

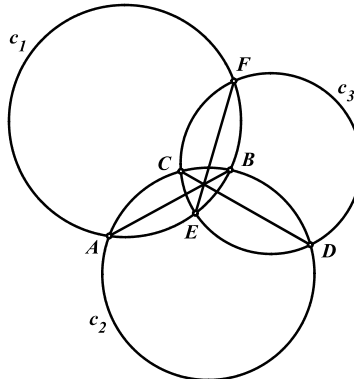


اگر d_1 محور اصلی دوایر C_1, C_2 و d_2 محور اصلی دوایر C_1 و C_3 باشد و محل تلاقی d_1 و d_2 را K بنامیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} P_{(O_1)}^K &= P_{(O_2)}^K \\ P_{(O_1)}^K &= P_{(O_3)}^K \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{(O_2)}^K = P_{(O_3)}^K$$

بنابراین نقطه K روی محور اصلی دوایر C_2 و C_3 نیز قرار دارد و هر سه محور اصلی در نقطه K همرسند.

مسئله ۵-۱: سه دایره C_1, C_2 و C_3 دو به دو متقاطع‌اند. اگر C_2, C_1 یکدیگر را در A و B ، C_2 و C_3 یکدیگر را در C و D و دوایر C_1 و C_3 یکدیگر را در E و F قطع کنند، نشان دهید AB و CD و EF در یک نقطه همرسند.



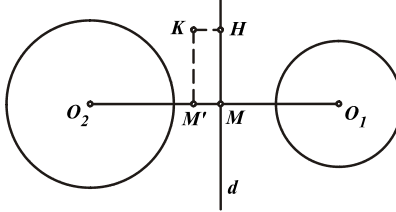
می‌دانیم AB و CD و EF محورهای اصلی دو به دو دوایر هستند و بنابر قضیه پیش در مرکز اصلی سه دایره C_1, C_2 و C_3 همرسند.

قضیه کیسی ۵-۳: فرض کنید خط d محور اصلی دو دایره (O_1) و (O_2) باشد. اگر نقطه‌ای



دلخواه در صفحه باشد و پای عمود وارد از K بر d را H بنامیم، آنگاه داریم:

$$|P_{C_1(O_1)}^K - P_{C_2(O_2)}^K| = r_K H \cdot O_1 O_2$$



محل تلاقی خط d و $O_1 O_2$ را M و پای عمود وارد از K بر $O_1 O_2$ را M' می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$P_{C_1}^K - P_{C_1}^H = O_1 K^r - O_1 H^r = O_1 M'^r - O_1 M^r$$

$$= (O_1 M' - O_1 M) (O_1 M' + O_1 M) = MM' (O_1 M' + O_1 M) \quad (1)$$

$$P_{C_2}^K - P_{C_2}^H = O_2 K^r - O_2 H^r = O_2 M'^r - O_2 M^r$$

$$= (O_2 M' - O_2 M) (O_2 M' + O_2 M) = -MM' (O_2 M' + O_2 M) \quad (2)$$

از آنجا که H روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، داریم $P_{C_1}^H = P_{C_2}^H$ و با کم کردن طرفین روابط (۱) و

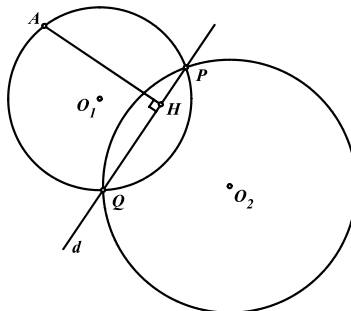
(۲) از یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$P_{C_1}^K - P_{C_2}^K = MM' [(O_1 M' + O_1 M) + (O_2 M' + O_2 M)] = MM' (2O_1 O_2) = 2KH \cdot O_1 O_2$$

مسئله ۵-۲: نقطه ثابت A و خط d مفروض‌اند. دایره متغیر (O_1) از نقطه A گذشته و خط d را در نقاط P و Q قطع می‌کند. دایره متغیر (O_2) نیز از نقاط P و Q می‌گذرد و قوت نقطه A نسبت به آن مقداری ثابت



است. نشان دهید طول $O_1 O_2$ همواره ثابت است.



خط d محور اصلی دو دایره (O_1) و (O_2) است و بنا بر قضیه کیسی داریم:

$$P_{(O_2)}^A - P_{(O_1)}^A = r_A H \cdot O_1 O_2. \text{ در عبارت پیش } P_{(O_1)}^A = 0, \text{ همچنین } AH \text{ و } P_{(O_2)}^A \text{ مقادیری ثابت}$$

هستند، پس $O_1 O_2$ نیز همواره ثابت است.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) میان‌های CC' و BB' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر دایره C_1 و C_2 به قطر BB' و CC'



یکدیگر را در P و Q قطع کنند، نشان دهید نقاط P و Q و A هم خطاند.

(۲) دایره (O') روی دایره (O) مفروض است. وتر متغیر AB از دایره (O) همواره بر دایره (O')



مماس می‌باشد. مکان هندسی مرکز دایره محیطی مثلث $AO'B$ را بیابید.

(۳) نقطه K و دایره ثابت (O) مفروض‌اند. دایره متغیر (O') از K می‌گذرد و مرکز آن روی دایره (O)



قرار دارد. نشان دهید محور اصلی دو دایره (O) و (O') بر دایره ثابت دیگری مماس است.

(۴) دوزنقه $ABCD$ مفروض است. اگر دایره‌ی به قطر AC و BD یکدیگر را در M و N قطع کنند،



نشان دهید خط MN از محل تلاقی ساق‌های AD و BC می‌گذرد.

(۵) نیم دایره‌ای به قطر AB و نقطه M بر روی آن مفروض است. عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم و

دایره‌ای به قطر MH رسم می‌کنیم تا AM و BM را به ترتیب در P و Q قطع کند. اگر این دایره، نیم دایره به قطر AB را در نقطه K نیز قطع کند، نشان دهید خطوط MK ، PQ ، AB در یک



نقطه هم‌رس‌اند.

(۶) A ، B ، C و D چهار نقطه واقع بر یک خط راست می‌باشند. دو دایره به قطرهای AC و BD در

E و F متقاطع‌اند. نقطه P را روی EF در نظر می‌گیریم و BP و CP را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب دایره‌ی به قطر BD و AC را دوباره در N و M قطع کنند. نشان دهید AM ، DN ، EF



در یک نقطه هم‌رس‌اند.

(۷) نقاط P و Q روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری انتخاب شده‌اند که چهار ضلعی

$BPQC$ محاطی است. خط d موازی ضلع BC اضلاع AB و AC را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید محور اصلی دایره محیطی مثلث‌های BQF و CPE وقتی d تغییر می‌کند، ثابت است.



(۸) ثابت کنید محورهای اصلی دو به دو دایره محاطی مثلث، نیمسازهای داخلی یا خارجی مثلث میانه‌ای آن هستند.



(۹) نقاط D و E را طوری روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم که $DE \parallel BC$.

نقطه P را درون مثلث ADE در نظر گرفته و محل تلاقی DE با PB و PC را به ترتیب F و G می‌نامیم. نشان دهید AP بر خط‌المرکزین دایره محیطی مثلث‌های PDF و PGE عمود است.



(۱۰) نیم دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. نقطه M را روی امتداد قطر AB (نزدیک به B) در نظر می‌گیریم و خط دلخواهی از M می‌گذرانیم تا نیم‌دایره را به ترتیب در C و D قطع کند. اگر نقطه دیگر تلاقی دوایر محیطی مثلث‌های OBC و OAD را K بنامیم، نشان دهید MK بر OK عمود است. (المیاد جهانی بالکان ۱۹۹۶)



(۱۱) مثلث ABC مفروض است. از نقطه P واقع در درون مثلث ABC عمودهای PM و PN را بر اضلاع AB و AC فرود می‌آوریم. اگر داشته باشیم $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ ، مکان هندسی نقطه P را بیابید.



(۱۲) مثلث ABC مفروض است. دایره (O_1) از A و B گذشته و مرکزش روی AC قرار دارد و دایره (O_2) از A و C گذشته و مرکزش روی AB قرار دارد. ثابت کنید محور اصلی این دو دایره از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرد.



(۱۳) پای ارتفاع‌های نظیر رئوس A, B, C از مثلث ABC را به ترتیب A', B', C' می‌نامیم. اضلاع AB, AC, BC را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب امتدادهای $A'B', A'C', B'C'$ را در C'', B'', A'' قطع کنند. نشان دهید پای عمودهای وارد از نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC بر خطوط AA'', BB'', CC'' روی دایره محیطی مثلث ABC قرار دارند.



(۱۴) دو دایره (O_1) و (O_2) در نقاط A و B متقاطع‌اند. دایره (O) به قطر O_1O_2 دایره (O_1) را در C و دایره (O_2) را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید خطوط CD, EF و AB موازی و هم فاصله‌اند.



(۱۵) وتر ثابت AB از دایره (O) مفروض است. نقطه‌ای دلخواه روی AB است. دوایر $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ را در طرفین این وتر چنان رسم می‌کنیم که در نقطه P بر AB مماس بوده و بر دایره (O) نیز مماس داخل باشند. نشان دهید با تغییر نقطه P مقدار $\frac{r_1}{r_2}$ همواره ثابت است.



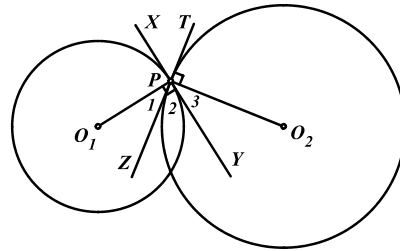
۵-۲ دایره‌های متعامد

هدف بخش: دو دایره متقاطع مانند دو خط همواره در نقطه تقاطعشان با یکدیگر می‌توانند زوایای مختلفی بسازند و در حالتی که این زاویه قائمه باشد دو دایره ویژگی‌های خاصی خواهند داشت که البته به دلیل کاربرد نه چندان گسترده آن، در این بخش بطور خلاصه به مهمترین آن‌ها و برخی کاربردهای آن می‌پردازیم.

تعریف: زاویه بین دو دایره در صورتی که با یکدیگر متقاطع باشند، عبارت است از زاویه بین دو خط مماس بر دایره‌ها در نقطه تقاطع آن‌ها.

البته از آنجا که خط مماس بر دایره در نقطه مماس، بر شعاع دایره عمود است زاویه بین دو دایره را می‌توان با زاویه بین شعاع دایره‌ها در نقطه تقاطع آن‌ها نیز تعریف کرد، چرا که داریم:

$$\widehat{TPY} = 90^\circ + \widehat{P} = \widehat{O_1PY} + \widehat{P} = \widehat{O_1PO_2}$$



تعریف: دو دایره متعامد (عمود بر هم) دو دایره‌ای هستند که با یکدیگر زاویه قائمه می‌سازند.

قضیه ۵-۲: دو دایره $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ در نقاط P و Q متقاطع‌اند. این دو دایره متعامدند اگر و



فقط اگر هر کدام از روابط زیر برقرار باشد:

(الف) $O_1P \perp O_2P$

(ب) $R_1^2 + R_2^2 = O_1O_2^2$

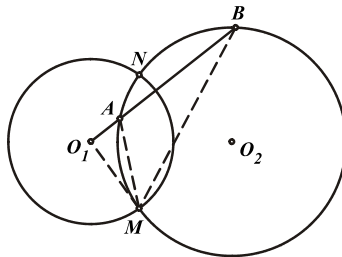
(ج) شعاع O_1P بر دایره (O_2) مماس باشد.

رابطه (الف) که به وضوح به معنای تعامد دو دایره است و رابطه (ب) نیز طبق قضیه فیثاغورث به رابطه (الف) منتج خواهد شد. قسمت (ج) نیز بیانی دیگر از رابطه (الف) می‌باشد، چرا که در صورتی که O_1P بر (O_2) مماس باشد شعاع O_2P بر آن عمود خواهد بود.

مسئله ۵-۳: نشان دهید دو دایره (O_1, R_1) و (O_2, R_2) با یکدیگر متعامدند اگر و فقط اگر برای خط گذرنده از



$O_1A, O_2B = R_1^2$ می‌کند داشته باشیم: $O_1A \cdot O_2B = R_1^2$



اگر دو دایره (O_1) و (O_2) بر یکدیگر عمود باشند O_1M بر (O_2) مماس بوده و خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1MA} = \widehat{O_1BM} = \frac{\widehat{AM}}{2} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle O_1AM \sim \triangle O_1BM$$

$$\Rightarrow \frac{O_1M}{O_1B} = \frac{O_1A}{O_1M} \Rightarrow O_1A \cdot O_1B = R_1^2$$

و عکس مسأله نیز با برگشت همین راه به سادگی قابل اثبات است.

تعریف: به هر دو نقطه هم خط با O_1 (مانند A و B) که در رابطه $O_1A \cdot O_1B = R_1^2$ صدق می‌کنند، دو نقطه وارون نسبت به دایره (O_1) گفته می‌شود.

نکته ۱: دو نقطه وارون در یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

نکته ۲: از دو نقطه وارون، یکی داخل و دیگری خارج از دایره قرار دارد.

نکته ۳: اگر نقطه‌ای روی دایره قرار داشته باشد، وارون آن بر خود نقطه منطبق است.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) دو دایره C_1 و C_2 در A و B متقاطع‌اند. نشان دهید C_1 و C_2 با یکدیگر متعامدند اگر و فقط اگر مجموع دو کمان AB روی این دو دایره برابر 180° باشد.
- (۲) دو دایره در A و B متقاطع‌اند. خط دلخواه گذرنده از نقطه B دو دایره را در C و D قطع می‌کند. ثابت کنید مثلث ACD قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر دو دایره بر یکدیگر عمود باشند.
- (۳) نقطه P درون مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید دایره محیطی مثلث BPC بر دایره محیطی مثلث ABC عمود است اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\widehat{ABP} + \widehat{ACP} = 90^\circ$
- (۴) دو دایره متعامد C_1 و C_2 در A و B متقاطع‌اند. از نقطه P روی دایره C_1 به A و B وصل می‌کنیم تا C_2 را در C و D قطع کنند. ثابت کنید CD قطر دایره C_2 می‌باشد.
- (۵) نشان دهید که در مثلث ABC الف) دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند متعامدند.
ب) دایره IBC بر دایره‌ای که به قطر $I_B I_C$ رسم می‌شود عمود است.
- (۶) اگر دایره (O) بر دو دایره (O_1) و (O_2) متعامد باشد نشان دهید نقطه O روی محور اصلی دو دایره (O_1) و (O_2) قرار دارد.
- (۷) دو قطر عمود بر هم از دو دایره متعامد مفروض‌اند. نشان دهید خط‌هایی که از یک سر یک قطر به دو سر قطر دیگر رسم می‌شوند، از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند.

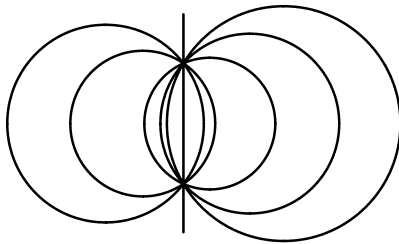
۵-۳ دایره‌های هم‌محور

هدف بخش: در بخش اول همین فصل با محور اصلی دو دایره آشنا شدیم. حال زمانی که بیش از دو دایره هم‌محور اصلی یکسانی داشته باشند مفهوم جالبی به نام دایره‌های هم‌محور بوجود می‌آید که البته از آنجا که کاربرد وسیعی در حل مسایل هندسی ندارد، در این بخش بطور خلاصه مروری بر مهمترین خواص و کاربردهای آن خواهیم داشت.

تعریف: گروهی از دایره‌ها را که یک خط ثابت محور اصلی هر دو دایره از این گروه باشد، یک دسته دایره هم‌محور



گویند.



قوت هر نقطه روی محور اصلی دسته دایره، نسبت به تمام دایره‌های آن دسته یکسان است بنابراین چنانچه یکی از دایره‌ها، محور اصلی دسته دایره را در دو نقطه قطع کند تمام دایره‌های دسته از این دو نقطه خواهند گذشت و چنانچه یکی از این دایره‌ها، محور اصلی را قطع نکند هیچ یک از دایره‌های دسته، محور اصلی را قطع نمی‌کنند.

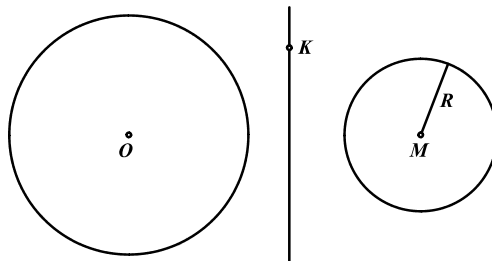
قضیه ۵-۵: مراکز دایره‌های یک دسته دایره هم‌محور هم‌خط‌اند.

فرض کنید M مرکز دایره مفروضی از دسته دایره هم‌محور باشد و O نیز مرکز دایره‌ی دلخواه دیگری از این دسته دایره باشد. اگر خط d محور اصلی این دسته دایره باشد OM همواره بر d عمود است بنابراین مراکز دایره‌های مختلف این دسته دایره همواره بر خطی که از M گذشته و بر d عمود می‌شود، قرار دارند که به آن خط مرکزی دسته دایره گفته می‌شود.

مسئله ۵-۴: محور اصلی و یک دایره از یک دسته دایره هم‌محور مفروض‌اند. اگر ℓ خط مرکزی دسته دایره و M نقطه‌ای دلخواه روی آن باشد، ثابت کنید دایره‌ای به مرکز M که عضو این دسته دایره هم‌محور باشد، دایره‌ای



منحصر بفرده است.



اگر نقطه K را روی محور اصلی دسته دایره در نظر بگیریم داریم:

$$P_{(O)}^K = P_{(M)}^K \Rightarrow P_{(O)}^K = KM^r - R^r$$

از آنجا که مقادیر $P(O)^K$ و KM مشخص و معلوم هستند مقدار R شعاع دایره نیز مشخص خواهد بود و بنابراین دایره (M, R) که عضو این دسته دایره هم‌محور است، دایره‌ای منحصر بفرد است.

نکته: بنابر مسأله پیش یک دسته دایره هم‌محور را به دو طریق می‌توان نمایش داد:

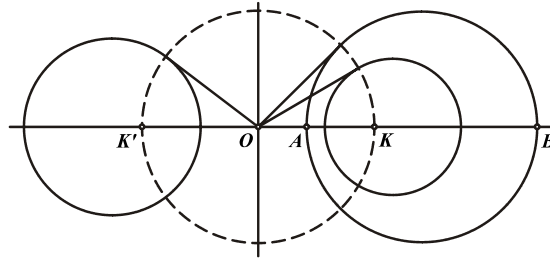
۱- با تعیین یک دایره و محور اصلی آن

۲- با تعیین دو دایره از آن دسته دایره

نقاط حدی

دسته دایره هم‌محور غیر متقاطع زیر را در نظر بگیرید. خط d محور اصلی دسته دایره بوده و خط مرکزی آن را در O قطع می‌کند.

از آنجا که نقطه O روی محور اصلی دسته دایره قرار داشته و قوت آن نسبت به تمام دایره‌های دسته یکسان می‌باشد، بنابراین طول تمام مماس‌های مرسوم از نقطه O بر دایره‌های دسته با یکدیگر برابر است و نقاط مماس، بر دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. چنانچه می‌بینید این دایره بر تمام دایره‌های دسته عمود می‌باشد و خط مرکزی دسته دایره را در نقاط K و K' قطع می‌کند.



تعریف: به نقاط K و K' نقاط حدی دسته دایره هم‌محور غیر متقاطع گفته می‌شود.

قضیه ۵-۶: نقاط حدی K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های دسته، وارون یکدیگرند.

از آنجا که دایره (O) بر هر یک از دوایر دسته، عمود است نقاط K و K' نیز نسبت به هر یک از دایره‌های دسته وارون یکدیگرند.

عکس قضیه: اگر دو نقطه K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های یک مجموعه از دایره‌ها با مراکز هم‌خط، وارون یکدیگر باشند، آن مجموعه دایره‌ها یک دسته دایره هم‌محور تشکیل می‌دهند.

اگر نقطه وسط KK' را O بنامیم، از آنجا که نقاط K و K' نسبت به دایره‌ای به قطر AB وارون یکدیگر هستند داریم:

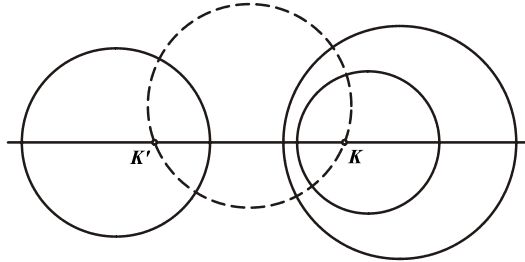
$$OA \cdot OB = OK^2 \Rightarrow P_C^O = OK^2$$

و به همین ترتیب قوت نقطه O نسبت به تمام دایره‌های دیگر این مجموعه برابر OK^2 است. بنابراین نقطه O روی محور اصلی دو به دو دوایر مجموعه قرار دارد و خط عمود خارج شده از O بر KK' محور اصلی دو به دو دوایر این مجموعه می‌باشد. پس این مجموعه، تشکیل یک دسته دایره هم‌محور می‌دهند.

مسئله ۵-۵: نشان دهید هر دایره‌ای که از نقاط حدی یک دسته دایره هم‌محور غیر متقاطع بگذرد، بر همه دایره‌های



دسته عمود است.

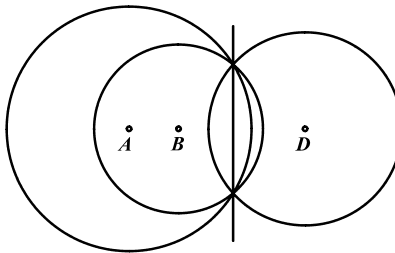


با توجه به اینکه نقاط حدی K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های دسته، وارون یکدیگرند، بنابر مسئله ۵-۳ این دایره بر هر یک از دایره‌های این دسته عمود می‌باشد.

مسئله ۶-۵: نقطه O مرکز دایره $C(O, R)$ روی محور اصلی دسته دایره هم‌محوری قرار دارد. نشان دهید اگر



دایره C با یکی از دایره‌های دسته متعامد باشد آنگاه با همه دایره‌های دسته متعامد است.



فرض کنید دایره C با دایره (A) از این دسته دایره هم‌محور متعامد باشد که در این صورت

$$P_{(A)}^O = R^2$$

با توجه به اینکه O روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد خواهیم داشت:

$$P_{(B)}^O = P_{(A)}^O \Rightarrow P_{(B)}^O = R^2$$

بنابراین دایره (B) نیز بر دایره C عمود است و به همین ترتیب تمام دایره‌های این دسته دایره هم‌محور بر

دایره C عمود هستند.

نکته: با توجه به مسئله فوق می‌توان این نتیجه را نیز گرفت که اگر دایره‌ای با دو دایره از یک دسته دایره هم‌محور

متعامد باشد آنگاه بر همه دایره‌های آن دسته عمود خواهد بود.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) نشان دهید محورهای اصلی دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم‌محور، با دایره‌ای که متعلق به این دسته دایره نیست، هم‌سازند و نقطه‌ی هم‌رسی آن‌ها روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد.
- (۲) نشان دهید دایره‌های متعام با دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم‌محور، یک دسته دایره‌ی هم‌محور تشکیل می‌دهند.
- (۳) نشان دهید سه یا بیش از سه دایره که با یک دایره متعام باشند و مرکزشان روی خط ثابتی قرار داشته باشند، یک دسته دایره‌ی هم‌محور تشکیل می‌دهند.
- (۴) نشان دهید که مماس مشترک دو دایره‌ی یک دسته دایره‌ی هم‌محور غیر متقاطع، از یک نقطه‌ی حدی دسته، با زاویه‌ی قائمه دیده می‌شود.
- (۵) برای هر رأس یک مثلث، دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از آن رأس بگذرد، با دایره محیطی مثلث متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد. نشان دهید ای سه دایره هم‌محورند.
- (۶) مماس‌هایی که در رأس‌های A ، B و C از مثلث حاده‌الزاویه بر دایره محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب اضلاع BC ، AC و AB را در U ، V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU ، BV و CW قطرشان هستند هم‌محورند، و محور اصلی آن‌ها خط اویلر مثلث است.
- (۷) سه دایره با مراکز ناهم‌خط و یک نقطه مفروض‌اند. سه دایره رسم می‌کنیم که از نقطه مفروض بگذرند و هر کدام با دو دایره از سه دایره مفروض هم‌محور باشند. نشان دهید که این سه دایره یک نقطه مشترک دیگر نیز دارند.
- (۸) چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D که هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. دو خط AB و CD با یکدیگر در نقطه‌ی E و دو خط BC و DA با یکدیگر در نقطه‌ی F متقاطع‌اند. ثابت کنید سه دایره به قطرهای AC ، BD و EF یا از دو نقطه می‌گذرند یا هیچ یک از دو تای آن‌ها هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) دایره‌ای به مرکز O از رأس‌های B و C از مثلث ABC می‌گذرد و اضلاع AB و AC را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث‌های ABC و AMN یکدیگر را دوباره در K



قطع کنند، نشان دهید: $\widehat{AKO} = 90^\circ$ (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۸۵)

(۲) مثلث ABC و مرکز ارتفاعی آن مفروض‌اند. به ترتیب اوساط اضلاع BC ، AC و AB را M ، N و P می‌نامیم. از A خطی عمود بر MH رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در A' قطع کند. اگر نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم، نشان دهید نقاط A' ، B' و C' بر خطی عمود بر خط



اویلر مثلث ABC قرار دارند.

(۳) مثلث ABC و میانه AM از آن مفروض‌اند. دایره‌ای به قطر AM رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند. اگر مماس‌های مرسوم بر دایره در نقاط D و E یکدیگر را در



P قطع کنند، نشان دهید: $PB = PC$

(۴) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقاط M و N بر دایره‌ی C مماس داخل‌اند. و مرکز C_2 روی C_1 قرار دارد. وتر مشترک دایره‌ی C_1 و C_2 ، دایره‌ی C را در نقاط A و B قطع می‌کند. MA و MB نیز C_1 را در نقاط D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید خط DE بر C_2 مماس است. (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۹)



(۵) مثلث ABC را در نظر بگیرید. دایره‌ای از رأس‌های B و C می‌گذرد و اضلاع AB و AC را به ترتیب در C' و B' قطع می‌کند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC و $AB'C'$



باشند، ثابت کنید خطوط BB' ، CC' و HH' هم‌مس‌اند.

(۶) در مثلث ABC ، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ی به قطر BC ، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را l_a می‌نامیم. خطوط l_b و l_c نیز بطور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید



خطوط l_a ، l_b و l_c هم‌مس‌اند.

(۷) دو دایره‌ی C_1 و C_2 مفروض‌اند بطوری که نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی C_1 روی C_2 قرار می‌گیرد. BC را وتر مشترک دو دایره می‌گیریم. وتر AD ، BC را در E قطع می‌کند. از نقطه‌ی D ، مماس‌های DF و



DG را بر C_1 رسم می‌کنیم. ثابت کنید F ، E و G روی یک خط راست قرار دارند.

(۸) چهار ضلعی $ABCD$ مفروض است. نقطه P درون چهار ضلعی چنان قرار گرفته که داشته باشیم:

$\widehat{DAP} + \widehat{DCP} = \widehat{CBP} + \widehat{CDP} = 90^\circ$. اگر نقاط E و O به ترتیب محل تلاقی اقطار چهار ضلعی و



مرکز دایره محیطی آن باشند، نشان دهید نقاط P ، E و O هم خط‌اند.

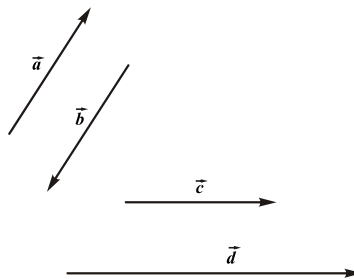
فصل ششم

هندسه برداری

۶-۱ خواص و کاربردهای بردارها

هدف بخش: هندسه برداری یکی از کاربردی‌ترین مباحث هندسی است که البته معمولاً بیشتر به صورت محض به خواص آن پرداخته می‌شود و به همین دلیل نیز از جذابیت آن کاسته است. اما در این فرصت کوتاه سعی می‌شود با مروری گذرا بر مهم‌ترین خواص بردارها، نگاه دقیق‌تری به کاربرد وسیع آن در ارائه راه‌حلهایی ساده‌تر برای حل مسایل هندسه مسطحه و حتی هندسه فضایی داشته باشیم.

تعریف: بردار پاره‌خطی است دارای اندازه، راستا و جهت و به صورت \vec{a} یا \overline{AB} نمایش داده می‌شود که نقاط A و B به ترتیب نقاط ابتدا و انتهای آن می‌باشند و اندازه یا طول آن نیز به صورت $|\overline{AB}|$ نمایش داده می‌شود. بنابراین هر بردار دارای سه خاصیت اساسی اندازه (طول)، راستا و جهت است. مثلاً در بردارهای شکل زیر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در اندازه و راستا یکسان هستند اما جهتی متفاوت دارند و بردارهای \vec{c} و \vec{d} در راستا و جهت یکسان‌اند اما در اندازه متفاوت‌اند.



نکته: دو بردار هم جهت لزوماً هم‌راستا نیز می‌باشند اما دو بردار هم‌راستا لزوماً هم جهت نمی‌باشند.

تعریف: دو بردار برابر (هم‌سنگ) دو برداری هستند که در اندازه و راستا و جهت یکسان باشند.

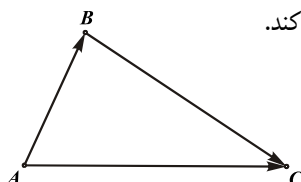
تعریف: دو بردار قرینه دو برداری هستند که در اندازه و راستا و جهت یکسان بوده اما در جهت متفاوت

$$\text{باشند. } (\vec{a} = -\vec{b})$$

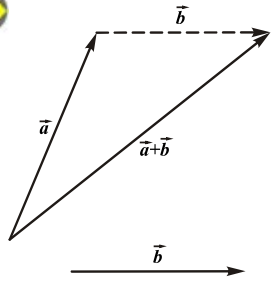
قواعد جمع و تفریق بردارها

حاصل جمع یا تفریق دو یا چند بردار همواره یک بردار است و از قواعد زیر پیروی می‌کند.

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \quad -1$$

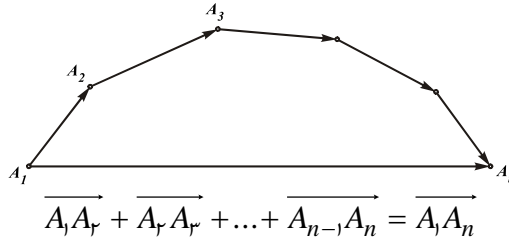


بنابراین برای جمع دو بردار دلخواه \vec{a} و \vec{b} کافی است مطابق شکل برداری برابر بردار \vec{b} در انتهای بردار \vec{a}



رسم کنیم و طبق قاعده فوق حاصل جمع آن‌ها را بیابیم.

بنابر قاعده فوق مجموع هر n بردار مختلف نیز با رسم آن‌ها در انتهای یکدیگر به صورت شکل زیر خواهد بود:



$$-۲ \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی})$$

$$-۳ \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری})$$

$$-۴ \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$-۵ \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

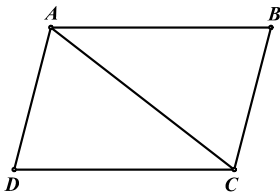
در مورد تفریق بردارها نیز کافی است با عکس کردن جهت بردار علامت منفی آن را به مثبت تبدیل کنیم و از

$$(-\vec{AB} = +\vec{BA}) \quad \text{قوانین جمع بردارها استفاده کنیم}$$

مسئله ۶-۱: ثابت کنید هر چهار ضلعی که دو ضلع روبه‌روی آن با یکدیگر موازی و مساوی باشند، یک



متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $AB \parallel CD, AB = CD$

حکم: $AD \parallel BC$

دو بردار \vec{AB} و \vec{DC} به دلیل یکسان بودن در اندازه و راستا و جهت با یکدیگر برابرند. با تجزیه دو بردار

\vec{DA} و \vec{CB} خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \vec{DA} &= \vec{DC} + \vec{CA} \\ \vec{CB} &= \vec{CA} + \vec{AB} \\ \vec{AB} &= \vec{DC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{DA} = \vec{CB} \Rightarrow \begin{cases} DA \parallel CB \\ |\vec{DA}| = |\vec{CB}| \end{cases}$$

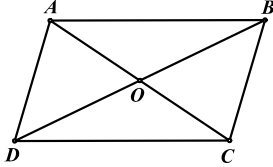
بنابراین دو بردار DA و CB با یکدیگر برابرند که از آنجا می توان هم راستایی ($DA \parallel CB$) و هم اندازه بودن ($| \overline{DA} | = | \overline{CB} |$) آن ها را نتیجه گرفت.

توجه داشته باشید که فنون مختلف تجزیه یک بردار به مجموع چند بردار از مهم ترین و کاربردی ترین ایده های موجود در هندسه برداری می باشد.



مسئله ۶-۲: ثابت کنید هر چهار ضلعی که اقطار آن یکدیگر را نصف کنند، یک متوازی الاضلاع است.

حکم: $AB \parallel CD$, $AB = CD$

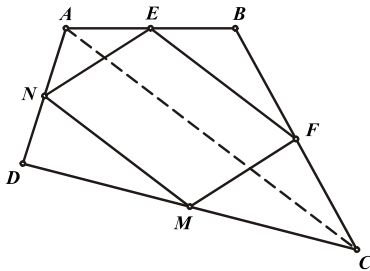


برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم $\overline{AB} = \overline{DC}$ است. دو بردار را تجزیه می کنیم، از آن جا که در چهارضلعی $ABCD$ اقطار یکدیگر را نصف می کنند، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} \\ \overline{DC} &= \overline{DO} + \overline{OC} \\ \overline{AO} &= \overline{OC} \\ \overline{DO} &= \overline{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel DC \\ | \overline{AB} | = | \overline{DC} | \end{cases}$$

بنابراین دو بردار \overline{AB} و \overline{DC} با یکدیگر هم راستا و هم اندازه هستند.

مسئله ۶-۳: اگر اوساط اضلاع چهارضلعی دلخواه $ABCD$ را E ، F ، M ، N بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی



$EFMN$ همواره متوازی الاضلاع است.

حکم: $EF \parallel MN$, $EF = MN$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم $\overline{EF} = \overline{NM}$. اگر بردار \overline{EF} را به دو طریق تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{EB} + \overline{BF} \\ \overline{EF} &= \overline{EA} + \overline{AC} + \overline{CF} \end{aligned}$$

از آنجا که دو بردار \overline{EB} و \overline{EA} با یکدیگر و دو بردار \overline{FB} و \overline{FC} نیز با یکدیگر قرینه اند و مجموعی برابر صفر دارند، از جمع کردن دو عبارت فوق خواهیم داشت:

$$2\overline{EF} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC} \quad (۱)$$

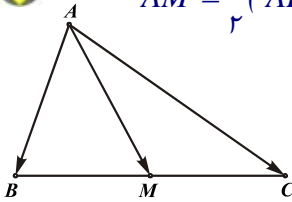
و به همین ترتیب با تجزیه بردار \overline{NM} می‌توان نتیجه گرفت:

$$\overline{NM} = \frac{1}{2} \overline{AC} \quad (2)$$

و از دو رابطه (۱) و (۲) نیز می‌توان نتیجه گرفت $\overline{EF} = \overline{NM}$ و بنابراین دو ضلع EF و MN با یکدیگر موازی و مساوی بوده و چهارضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.



مسئله ۶-۴: اگر M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، ثابت کنید: $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$



از آنجا که دو بردار \overline{BM} و \overline{CM} ، دو بردار قرینه با مجموع صفر هستند داریم:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AM} &= \overline{AB} + \overline{BM} \\ \overline{AM} &= \overline{AC} + \overline{CM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

قواعد ضرب عدد در بردار

حاصل ضرب عدد حقیقی k در بردار \vec{a} همواره یک بردار هم‌راستا با بردار \vec{a} و به اندازه k برابر اندازه بردار \vec{a} می‌باشد. که ممکن است هم جهت ($k > 0$) یا در عکس جهت ($k < 0$) بردار \vec{a} باشد. ضرب عدد در بردار همواره از قواعد زیر پیروی می‌کند:

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a} \quad -1$$

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| \quad -2$$

$$k(k'\vec{a}) = k(k'\vec{a}) \quad -3$$

$$(k+k')\vec{a} = k\vec{a} + k'\vec{a} \quad -4$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad -5$$

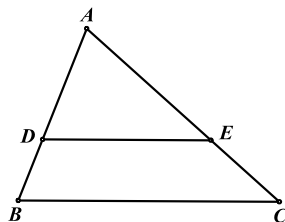
نکته: بنابر تعاریف و قواعد فوق دو خط a و b با یکدیگر موازی (هم راستا) هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} = k\vec{b}$ باشد. ($k \in R$)



مسئله ۶-۵: عکس قضیه تالس را با استفاده از هندسه برداری ثابت کنید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

با استفاده از ترکیب در مخرج به تناسب جدید روبه رو رسیده و آن را برابر k در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overline{AD}| = k |\overline{AB}| \Rightarrow \overline{DA} = k \overline{BA} \\ |\overline{AE}| = k |\overline{AC}| \Rightarrow \overline{AE} = k \overline{AC} \end{cases}$$

با توجه به عبارات فوق می‌توان بردار \overrightarrow{DE} را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = k \overrightarrow{BA} + k \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = k \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = k \overrightarrow{BC}$$

بنابراین دو پاره‌خط DE و BC موازی یکدیگر بوده و نسبت طول آن‌ها نیز برابر k می‌باشد.

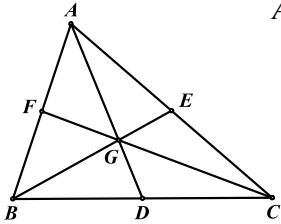
تعریف: نقطه G مرکز ثقل n ضلعی (یا چند وجهی) $A_1 A_2 \dots A_n$ است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{A_1 G} + \overrightarrow{A_2 G} + \dots + \overrightarrow{A_n G} = \vec{0}$$



مسئله ۶-۶: ثابت کنید محل همرسی میانه‌های مثلث ABC مرکز ثقل مثلث است.

محل همرسی میانه‌ها را G می‌نامیم و ثابت می‌کنیم $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$



$$\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \Rightarrow \overrightarrow{FDG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$$

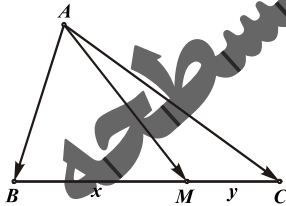
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{2DG} \quad (1)$$

$$|\overrightarrow{AG}| = 2|\overrightarrow{GD}| \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{DG} = \vec{0} \quad (2)$$

و از دو رابطه (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت: $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$



قضیه ۶-۱: اگر خط دلخواه AM ضلع BC از مثلث ABC را به نسبت x به y قطع کند ثابت کنید:



$$\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AC}$$

$$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{MC}|} = \frac{x}{y} \Rightarrow y|\overrightarrow{BM}| = x|\overrightarrow{MC}| \Rightarrow y\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow y\overrightarrow{BM} = -x\overrightarrow{CM}$$

$$\Rightarrow y\overrightarrow{BM} + x\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

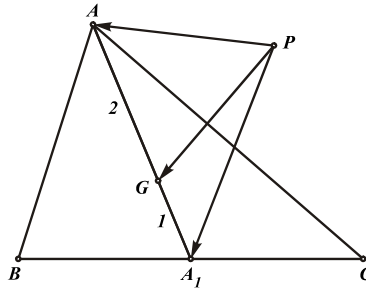
اگر \overrightarrow{AM} را به دو صورت زیر نوشته و یکی را در x و دیگری را در y ضرب کرده و با یکدیگر جمع کنیم از

آن جا که عبارت فوق برابر صفر می‌باشد خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} &\Rightarrow y\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} &\Rightarrow x\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{CM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+y)\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AC}$$

مسئله ۶-۷: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند و یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند.



نقاط G_a ، G_b و G_c را به نسبت ۲ به ۱ به ترتیب روی میانه‌های AA_1 ، BB_1 ، CC_1 انتخاب می‌کنیم. و نقطه P را به عنوان قطب ثابت و به طور دلخواه در صفحه در نظر می‌گیریم. اگر نشان دهیم بردارهای $\overrightarrow{PG_a}$ ، $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ با یکدیگر برابرند، از آنجا که نقطه ابتدای آن‌ها (P) یکسان است می‌توان نتیجه گرفت نقطه انتهای آن‌ها نیز یکسان بوده G_a ، G_b و G_c بر یکدیگر منطبق‌اند و به عبارت دیگر میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ در یک نقطه قطع می‌کنند.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PG_a} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PA_1} \\ \overrightarrow{PA_1} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PG_a} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \Rightarrow \overrightarrow{PG_a} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

و به ترتیب مشابه بردارهای $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ نیز برابر $\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ بدست می‌آیند. بنابراین سه

بردار $\overrightarrow{PG_a}$ و $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ با یکدیگر برابرند.

توجه داشته باشید که ایده مسئله فوق در حل مسایل هم‌رسی خطوط، بسیار کارآمد است.

قواعد ضرب بردار در بردار

به طور کلی ضرب دو بردار به دو صورت داخلی و خارجی تعریف می‌شود. اما در این بخش با توجه به کاربرد آن، تنها به ضرب داخلی می‌پردازیم.

تعریف: حاصل ضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی بوده و برابر حاصل ضرب طول دو بردار در کسینوس زاویه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{a, b}$$

بین آن‌ها می‌باشد:

ضرب داخلی بردارها از قواعد زیر پیروی می‌کند:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad -1$$

$$k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} \quad -2$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad -3$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2 \quad -4$$

$$\vec{b} = \vec{o} \text{ یا } \vec{a} = \vec{o} \text{ یا } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad -5$$

نکته: بنابر قاعده فوق شرط لازم و کافی برای تعامد دو خط a و b ، صفر بودن حاصل ضرب داخلی بردارهای \vec{a} و \vec{b} می‌باشد.

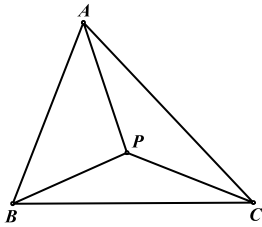
مسئله ۶-۸: ثابت کنید ارتفاع‌های مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند.



لم: اگر P نقطه‌ای دلخواه در مثلث ABC باشد نشان دهید رابطه زیر همواره برقرار است:

$$(\vec{AP} \cdot \vec{BC}) + (\vec{BP} \cdot \vec{CA}) + (\vec{CP} \cdot \vec{AB}) = 0$$

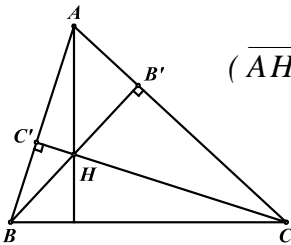
اثبات لم: اگر بردار \vec{BC} را تجزیه کرده و از خواص ضرب داخلی بردارها استفاده کنیم خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} & \vec{AP} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) + \vec{BP} \cdot \vec{CA} + \vec{CP} \cdot \vec{AB} \\ &= -\vec{AP} \cdot \vec{AB} + \vec{AP} \cdot \vec{AC} - \vec{BP} \cdot \vec{AC} + \vec{CP} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{AB} \cdot (\vec{CP} - \vec{AP}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AP} - \vec{BP}) \\ &= (\vec{AB} \cdot \vec{CA}) + (\vec{AC} \cdot \vec{AB}) \\ &= (\vec{AB} \cdot \vec{CA}) - (\vec{CA} \cdot \vec{AB}) = 0 \end{aligned}$$



اثبات مسئله: محل تقاطع دو ارتفاع BB' و CC' را H می‌نامیم. طبق لم فوق خواهیم داشت:



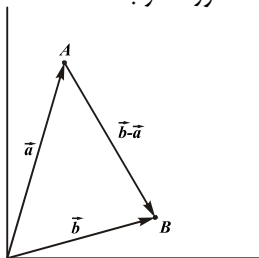
$$\left. \begin{aligned} & (\vec{AH} \cdot \vec{BC}) + (\vec{BH} \cdot \vec{CA}) + (\vec{CH} \cdot \vec{AB}) = 0 \\ & BH \perp CA \Rightarrow \vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0 \\ & CH \perp AB \Rightarrow \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow AH \perp BC$$

بنابراین AH نیز ارتفاع نظیر ضلع BC می‌باشد و به عبارت دیگر هر سه ارتفاع در نقطه‌ای مانند H هم‌رس‌اند.

تعریف: بردار مکان هر نقطه، برداری است که ابتدای آن مبدا مختصات و انتهای آن، نقطه مورد نظر باشد.

بنابراین اگر بردارهای \vec{a} و \vec{b} بردارهای مکان نقاط A و B باشند می‌توان

بردار \vec{AB} را به صورت $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ تجزیه کرد.



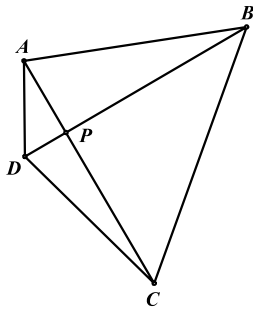
توجه داشته باشید که تجزیه بردارهای موجود در صفحه به بردارهای مکان آنها یکی دیگر از ایده‌های مهم هندسه برداری در حل مسایل است.

مسئله ۶-۹: ثابت کنید قطرهای یک چهارضلعی برهم عمودند اگر و تنها اگر مجموع مربعات اضلاع مقابل با یکدیگر



برابر باشند.

حکم: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$



برای اثبات حکم فوق کافی است نشان دهیم دو عبارت $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ و $|\vec{AB}|^2 + |\vec{CD}|^2 = |\vec{AD}|^2 + |\vec{BC}|^2$ با یکدیگر یکسان و هم ارزند. اگر بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ را بردارهای مکان رئوس چهارضلعی در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 + |\vec{CD}|^2 &= |\vec{AD}|^2 + |\vec{BC}|^2 \Rightarrow \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AD}^2 + \vec{BC}^2 \\ \Rightarrow (\vec{b} - \vec{a})^2 + (\vec{d} - \vec{c})^2 &= (\vec{d} - \vec{a})^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 \\ \Rightarrow \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{d}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{d}\vec{c} &= \vec{d}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{d} + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} \\ \Rightarrow \vec{a}\vec{b} + \vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{d} + \vec{c}\vec{d} - \vec{b}\vec{c} &= 0 \Rightarrow \vec{a}(\vec{b} - \vec{d}) - \vec{c}(\vec{b} - \vec{d}) = 0 \\ \Rightarrow (\vec{a} - \vec{c})(\vec{b} - \vec{d}) = 0 \Rightarrow \vec{CA} \cdot \vec{DB} &= 0 \end{aligned}$$

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) ثابت کنید مرکز ثقل هر n ضلعی (یا چند وجهی) یکتا و منحصر به فرد است.
- (۲) اگر G مرکز ثقل n ضلعی (یا چند وجهی) A_1, A_2, \dots, A_n بوده و P نیز نقطه‌ای دلخواه باشد، ثابت کنید:
- $$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{n} (\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \dots + \overrightarrow{PA_n})$$
- (۳) اگر G و G' مراکز ثقل مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ باشند، ثابت کنید:
- $$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$$
- (۴) سه صفحه موازی a, a', a'' در فضا مفروض‌اند. سه خط دلخواه در نظر می‌گیریم تا صفحات را قطع کنند. محل تقاطع خطوط با صفحه a را A, B, C و با صفحه a' را A', B', C' و با صفحه a'' را A'', B'', C'' می‌نامیم. اگر G, G', G'' به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های $ABC, A'B'C', A''B''C''$ باشند، ثابت کنید G, G', G'' هم‌خط‌اند.
- (۵) با استفاده از هندسه برداری ثابت کنید در هر مثلث نقاط O, G, H هم خط بوده و $HG = 2GO$ می‌باشد.
- (۶) ثابت کنید در هر چهارضلعی دلخواه، میانه‌ها و خطی که اوساط اقطار را به هم وصل می‌کند یکدیگر را نصف می‌کنند. (میانه چهارضلعی پاره‌خطی است که اوساط دو ضلع مقابل را به یکدیگر متصل می‌کند).
- (۷) ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اضلاع با مجموع مربعات اقطار برابر است.
- (۸) ثابت کنید قطرهای یک چهارضلعی برهم عمودند اگر و تنها اگر میانه‌های آن با یکدیگر برابر باشند.
- (۹) برای هر نقطه دلخواه P و مستطیل $ABCD$ ثابت کنید:
- الف) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$
- ب) $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$
- (۱۰) مستطیل‌های $ABDE, BCFG, CAHI$ را به طرف خارج روی اضلاع مثلث ABC می‌سازیم. ثابت کنید عمود منصف‌های پاره‌خط‌های HE, DG, FI در یک نقطه هم‌رس‌اند.
- (۱۱) n ضلعی A_1, A_2, \dots, A_n مفروض است. مرکز ثقل $n-1$ ضلعی حاصل از کنار گذاشتن رأس A_i را G_i می‌نامیم. ثابت کنید n ضلعی G_1, G_2, \dots, G_n با n ضلعی A_1, A_2, \dots, A_n به نسبت $n-1$ متجانس می‌باشد.
- (۱۲) نقطه دلخواه P را درون مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اگر مساحت مثلث‌های PBC, PAC, PAB به ترتیب برابر S_1, S_2, S_3 باشند، نشان دهید: $S_1 \cdot \overrightarrow{PA} + S_2 \cdot \overrightarrow{PB} + S_3 \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

(۱۳) دو مربع $ABCD$ و $AEFG$ در رأس A مشترک‌اند. از به هم وصل کردن رئوس نزدیک به هم دو مربع، دو



مثلث ایجاد می‌شود. ثابت کنید میانه هر کدام از این دو مثلث ارتفاع دیگری است.

(۱۴) از رأس قائمه C در مثلث قائم‌الزاویه ABC خط دلخواهی را رسم می‌کنیم و از رئوس A و B عمودهای

AA' و BB' را بر این خط فرود می‌آوریم. اگر C' قرینه C نسبت به وسط $A'B'$ باشد، ثابت کنید:



$$\widehat{AC'B} = 90^\circ$$



(۱۵) (قضیه کسینوس‌ها) اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند ثابت کنید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

(۱۶) فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، نشان دهید برابری زیر برقرار است:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2) \quad (\text{قضیه‌ی لایبنیتس})$$

(۱۷) اگر در مثلث ABC ، H مرکز ارتفاعی باشد. ثابت کنید:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HC} \cdot \overline{HA}$$

(۱۸) اگر O و I به ترتیب مراکز دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی آن باشند، نشان

دید:

الف) $\overline{HA} \cdot \tan \hat{A} + \overline{HB} \cdot \tan \hat{B} + \overline{HC} \cdot \tan \hat{C} = \overline{0}$

ب) $\overline{OA} \cdot \sin \hat{A} + \overline{OB} \cdot \sin \hat{B} + \overline{OC} \cdot \sin \hat{C} = \overline{0}$

ج) $a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \overline{0}$

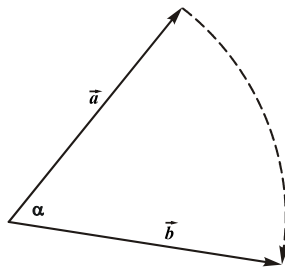
(۱۹) اگر P نقطه دلخواهی باشد و I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و a ، b و c طول اضلاع آن باشند، ثابت

کنید:

$$\overline{PI} = \frac{a \cdot \overline{PA} + b \cdot \overline{PB} + c \cdot \overline{PC}}{a + b + c}$$

۶-۲ بردار دوران

هدف بخش: یکی از مهم‌ترین و قدرتمندترین ابزارهای هندسه برداری در حل مسایل مختلف، بردار دوران است که البته تاکنون کمتر به آن پرداخته‌اند. به همین دلیل بردار دوران را در این بخش به طور جداگانه از سایر ابزارهای هندسه برداری مورد بحث قرار می‌دهیم و برآنیم تا شما را با قدرت فوق‌العاده آن در حل مسایل آشنا سازیم.



برای دوران هر بردار با زاویه α و در جهت ساعتگرد (یا پاد ساعتگرد) باید بردار موردنظر را حول نقطه ابتدای آن و در جهت موردنظر به اندازه α درجه چرخاند تا دوران یافته آن حاصل شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار \vec{b} دوران یافته بردار \vec{a} با زاویه α درجه در جهت ساعتگرد می‌باشد که آن را به صورت $\vec{b} = R_{\vec{a}}^{\alpha}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین دوران همواره طول بردار را ثابت نگه می‌دارد.

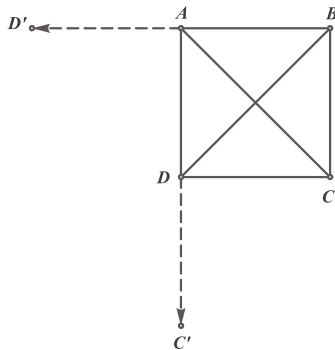
قضیه ۶-۲: دوران یافته هر بردار با زاویه α درجه و در جهتی خاص برابر است با مجموع دوران یافته‌های بردارهای سازنده آن با زاویه α و در همان جهت.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_r + \dots + \vec{a}_n \Rightarrow R_{\vec{a}}^{\alpha} = R_{\vec{a}_1}^{\alpha} + R_{\vec{a}_r}^{\alpha} + \dots + R_{\vec{a}_n}^{\alpha}$$

برای فهم بهتر قضیه به مسأله ساده زیر توجه کنید.

مسأله ۶-۱۰: ثابت کنید اقطار مربع بر یکدیگر عمود و با یکدیگر مساوی هستند.

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم بردار \overrightarrow{AC} پس از 90° درجه دوران برابر بردار \overrightarrow{BD} خواهد بود که در این صورت زاویه بین آن‌ها 90° درجه و طول آن‌ها نیز برابر خواهد بود.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

اگر بردارهای سازنده \overrightarrow{AC} را 90° درجه در جهت ساعتگرد دوران دهیم بردار \overrightarrow{AD} به بردار $\overrightarrow{AD'}$ تبدیل می‌شود که با بردار \overrightarrow{BA} برابر است و بردار \overrightarrow{DC} نیز به بردار $\overrightarrow{DC'}$ تبدیل می‌شود که با بردار \overrightarrow{AD} برابر است. بنابراین داریم:

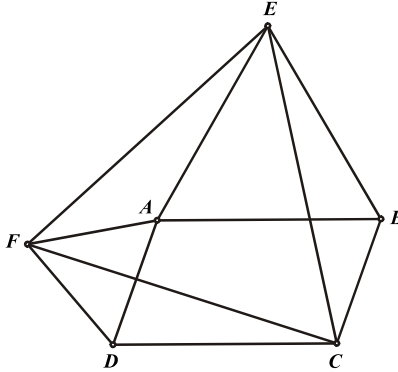
$$R_{\overrightarrow{AC}}^{90^\circ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

بنابراین بردار \overrightarrow{AC} پس از 90° درجه دوران بر \overrightarrow{BD} منطبق می‌شود. پس AC و BD بر یکدیگر عمود و با هم مساوی‌اند.

مسئله ۶-۱۱: مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABE و ADF را روی اضلاع AB و AD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$



و در خارج از آن می‌سازیم. ثابت کنید مثلث CEF متساوی‌الاضلاع است.



برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم بردار \overrightarrow{CF} پس از 60° درجه دوران در جهت ساعتگرد بر بردار \overrightarrow{CE} منطبق خواهد شد که در این صورت زاویه \widehat{FCE} برابر 60° درجه و طول اضلاع FC و EC نیز با یکدیگر برابر می‌شوند و در نتیجه مثلث FCE متساوی‌الاضلاع خواهد بود. از آن جا که بردارهای \overrightarrow{CD} و \overrightarrow{BA} با یکدیگر و بردارهای \overrightarrow{DA} و \overrightarrow{CB} نیز با یکدیگر برابرند، خواهیم داشت:

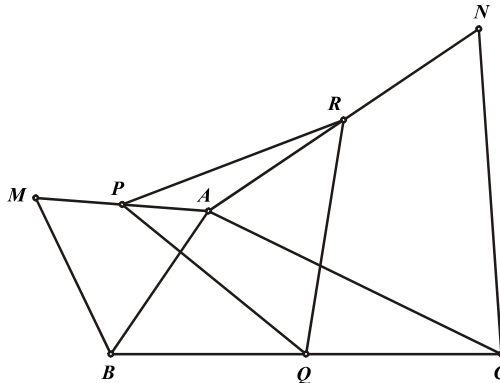
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DF} \Rightarrow R_{\overrightarrow{CF}}^{\widehat{60^\circ}} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$$

توجه داشته باشید که در استفاده از بردار دوران انتخاب بهترین نحوه تجزیه بردارها، مهم‌ترین قسمت حل مسئله را تشکیل می‌دهد. در تجزیه یک بردار باید همواره سعی کنید بردارهایی را انتخاب کنید که قابلیت دوران یافتن با زاویه دوران (α) را داشته باشند و بردارهایی که این خاصیت را ندارند به نحوی از این مجموع حذف کنید. به نحوه تجزیه بردارها در مسئله زیر دقت کنید.

مسئله ۶-۱۲: روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج از آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع MAB و NAC را می‌سازیم. اگر P و Q و R به ترتیب اوساط AM ، BC و AN باشند، ثابت کنید مثلث PQR



متساوی‌الاضلاع است.



برای اثبات حکم نشان می‌دهیم $\vec{RQ} = \vec{QR}$

$$\vec{QP} = \vec{QB} + \vec{BM} + \vec{MP}$$

$$\vec{QP} = \vec{QC} + \vec{CA} + \vec{AP}$$

از آن جا که $\vec{MP} = -\vec{AP}$, $\vec{QB} = -\vec{QC}$ ، با جمع کردن دو عبارت فوق نتیجه می‌شود:

$$r\vec{QP} = \vec{BM} + \vec{CA} \Rightarrow \vec{QP} = \frac{1}{r}(\vec{BM} + \vec{CA})$$

$$\Rightarrow \vec{RQ} = \frac{1}{r}(\vec{BA} + \vec{CN}) \quad (1)$$

حال برای اثبات حکم باید ثابت کنیم: $\vec{QR} = \frac{1}{r}(\vec{BA} + \vec{CN})$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{QR} = \vec{QB} + \vec{BA} + \vec{AR} \\ \vec{QR} = \vec{QC} + \vec{CN} + \vec{NR} \end{array} \right\} \Rightarrow r\vec{QR} = \vec{BA} + \vec{CN} \Rightarrow \vec{QR} = \frac{1}{r}(\vec{BA} + \vec{CN}) \quad (2)$$

بنابر دو عبارت (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت $\vec{RQ} = \vec{QR}$ است به عبارت دیگر مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

مسائل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

- (۱) مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی الساقین MAB و NAC ($\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$) را روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن می‌سازیم و نقطه وسط ضلع BC را P می‌نامیم. ثابت کنید مثلث MPN قائم‌الزاویه متساوی الساقین است.
- (۲) دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $AB'C'$ در رأس A مشترک‌اند. اگر P, Q, R به ترتیب اوساط AB', AC, BC' باشند، ثابت کنید مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.
- (۳) در مثلث ABC ضلع BC ثابت و رأس A متغیر است. در نقطه B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم و MB را به اندازه AB روی آن جدا می‌کنیم. در نقطه C نیز عمودی بر AC اخراج کرده و NC را روی آن به اندازه AC جدا می‌کنیم. اگر نقطه وسط MN را P بنامیم، ثابت کنید در صورت تغییر A ، نقطه P همواره ثابت است.
- (۴) سه مثلث متساوی‌الاضلاع $OAB, OA'B', OA''B''$ در رأس O مشترک‌اند. اگر M, N, P به ترتیب اوساط $A'B', A''B'', AB''$ باشند، ثابت کنید مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.
- (۵) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج از آن مربع‌هایی می‌سازیم. اگر مراکز این مربع‌ها را M, N, P و Q بنامیم، ثابت کنید MN بر PQ عمود و با یکدیگر مساوی هستند.
- (۶) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن دو مربع $ABMN$ و $ACDE$ را می‌سازیم. اگر نقطه وسط DM را P بنامیم ثابت کنید مثلث PBC قائم‌الزاویه متساوی الساقین است.
- (۷) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ به ترتیب مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی یک در میان به سوی خارج و داخل می‌سازیم. رئوس این مثلث‌ها را نقاط X, Y, Z, W می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $XYZW$ یک متوازی‌الاضلاع است.
- (۸) نقطه دلخواه P را روی دایره محیطی مثلث ABC انتخاب می‌کنیم. از نقطه P دو عمود PE و PF را بر BC و AC فرود می‌آوریم و اوساط AE و BF را به ترتیب N و M می‌نامیم. ثابت کنید MN بر EF عمود است.
- (۹) بر روی اضلاع مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) دو مربع $ABDE$ و $ACGF$ را می‌سازیم و مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین PBC ($\hat{P} = 90^\circ$) را نیز روی BC (نزدیک به A) بنا می‌کنیم. ثابت کنید مثلث PEF نیز قائم‌الزاویه متساوی الساقین است. (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۸)
- (۱۰) مستطیل $ABCD$ مفروض است. عمود BK را بر AC فرود می‌آوریم. اگر M وسط AK و N وسط CD باشند، ثابت کنید: $MN \perp BM$

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

(۱) چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. مراکز ثقل مثلث‌های ABC, BCD, CDA, DAB را به ترتیب G_a, G_b, G_c, G_d می‌نامیم. ثابت کنید خطوط AG_a, BG_b, CG_c, DG_d در یک نقطه هم‌سازند و



یکدیگر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کنند.

(۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$) نقطه D وسط ضلع AB و نقطه E مرکز ثقل مثلث ADC و



نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید: $EO \perp CD$

(۳) نقاط D, E و F به ترتیب روی اضلاع BC, AC, AB از مثلث ABC قرار دارند. نشان دهید مراکز ثقل

مثلث‌های DEF و ABC بر هم منطبق‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA}$ (مرحله دوم



المیاد ریاضی ۷۹)

(۴) چهارضلعی $ABCD$ و نقطه دلخواه X مفروض‌اند. مراکز ثقل مثلث‌های ABC, BCD, CDA و DAB را

به ترتیب G_a, G_b, G_c, G_d می‌نامیم. d_a خطی است که از رأس A به موازات پاره‌خط XG_a رسم می‌شود. ثابت کنید اگر d_a, d_b, d_c را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم این چهار خط در یک نقطه با یکدیگر



هم‌ساز خواهند بود.

(۵) مجموعه S شامل $m+n$ نقطه را به دو مجموعه‌ی m و n عضوی افزایش می‌کنیم. اگر G_m, G_n به ترتیب

مراکز ثقل این دو مجموعه باشند، نشان دهید مرکز ثقل S روی خط واصل G_m, G_n قرار دارد و پاره‌خط

$G_m G_n$ را به نسبت $\frac{n}{m}$ تقسیم می‌کند.

(۶) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع با مراکز M, N, P ساخته‌ایم. ثابت کنید



مثلث MNP نیز متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

(۷) ارتفاع AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از نقطه D بر ضلع AC را E می‌نامیم. نقطه F



را چنان روی DE انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\frac{EF}{FD} = \frac{BD}{DC}$. نشان دهید: $AF \perp BE$

(۸) بر روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به

ترتیب O_1, O_2, O_3, O_4 می‌نامیم. اگر اقطار AC و BD از چهارضلعی با یکدیگر برابر باشند، ثابت کنید:



$O_1 O_3 \perp O_2 O_4$

(۹) اقطار چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی

مثلث‌های ABO و DOC و G و G' به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ADO و BCO باشند، نشان دهید:



$HH' \perp GG'$

(۱۰) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه ABD ، ACE و BCF را چنان می‌سازیم که
 $\widehat{DBA} = \widehat{ECA} = \widehat{FBC}$ ، $\widehat{DAB} = \widehat{CAE} = \widehat{FCB}$ باشند. اگر D' قرینه‌ی رأس D نسبت به ضلع



AB باشد، ثابت کنید چهارضلعی $D'ECF$ متوازی‌الاضلاع است.

(۱۱) نقطه‌ای مانند M بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که خط راستی که مرکز دایره محیطی

مثلث ABC را به نقطه‌ی میانه‌ی مثلث BCM وصل می‌کند، بر CM عمود است. اگر $\frac{BC}{BA} = k$ ، نسبت

$$\frac{BM}{BA}$$

را پیدا کنید.

(۱۲) در مثلث ABC ، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری انتخاب شده‌اند که
 $AM = BN = AB$. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC باشند،



نشان دهید: $IO \perp MN$

(۱۳) مثلث ABC و نقطه‌ی M وسط ضلع BC مفروض است. خط دلخواه l ، خطوط AC ، AM و AB را به



$$\frac{AM}{AQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{AR} + \frac{AB}{AP} \right)$$

ترتیب در R ، Q و P قطع می‌کند. نشان دهید:

فصل هفتم

تبدیلات هندسی

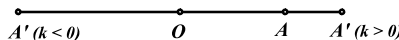
۷-۱ تجانس

هدف بخش: تجانس همواره به عنوان اولین و رایج‌ترین بحث در تبدیلات هندسی مورد بررسی قرار می‌گیرد و این نیست مگر به دلیل کاربرد فوق‌العاده آن در حل مسایل هندسه مسطحه. در این بخش با اصول و کاربردهایی چند از آن آشنا می‌شویم.

تعریف: تجانس تبدیلی است از صفحه بر روی آن که هر نقطه مانند A را پس از تجانس به مرکز نقطه O و نسبت k به نقطه‌ای مانند A' تبدیل می‌کند به طوری که نقاط O ، A و A' هم خط بوده و $\frac{OA'}{OA} = k$ است. A' را

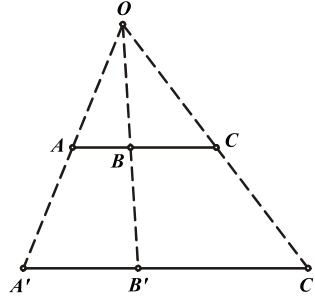


مجانس A به مرکز O و نسبت k می‌نامند.

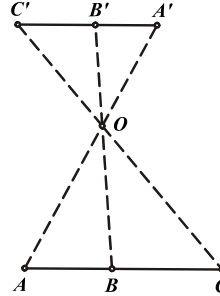


- نکته ۱-** مجانس هر نقطه همواره روی خطی قرار دارد که از آن نقطه و مرکز تجانس می‌گذرد.
- نکته ۲-** اگر نسبت تجانس (k) مثبت باشد نقاط A و A' در یک طرف مرکز تجانس (O) قرار می‌گیرند که به آن تجانس مستقیم گفته می‌شود.
- نکته ۳-** اگر نسبت تجانس (k) منفی باشد نقاط A و A' در دو طرف مرکز تجانس (O) قرار می‌گیرند که به آن تجانس معکوس گفته می‌شود.
- نکته ۴-** اگر $k = 0$ مجانس هر نقطه، مرکز تجانس خواهد بود و اگر $k = 1$ مجانس هر نقطه روی خود آن قرار می‌گیرد.
- نکته ۵-** تجانس به مرکز O و نسبت $k = -1$ همان قرینه کردن نسبت به نقطه O است.
- نکته ۶-** اگر A_1, A_2 مجانس‌های نقطه A نسبت به مرکز O و به نسبت‌های k و $-k$ باشند، آنگاه A_1, A_2 نسبت به O قرینه یکدیگر خواهند بود.
- نکته ۷-** اگر $|k| > 1$ نقطه A' نسبت به A از O دورتر خواهد بود در صورتی که اگر $|k| < 1$ باشد نقطه A' نسبت به A فاصله کمتری از O خواهد داشت.
- نکته ۸-** اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت k باشد، آنگاه A نیز مجانس A' به مرکز O و نسبت $\frac{1}{k}$ است.

مسئله ۷-۱: سه نقطه A, B, C با یکدیگر هم خطاند. اگر A', B', C' به ترتیب مجانس‌های آن‌ها به مرکز O و نسبت k باشند، ثابت کنید A', B', C' نیز با یکدیگر هم خطاند و خط $A'B'C'$ با خط ABC موازی است.



$K > 0$



$K < 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k &\Rightarrow A'B' \parallel AB \\ \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k &\Rightarrow B'C' \parallel BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel B'C'$$

بنابراین سه نقطه A', B', C' روی خطی موازی ABC قرار دارند.

با توجه به بحث فوق مجانس هر نقطه دیگری روی خط ABC روی خط $A'B'C'$ واقع خواهد شد و به عبارت دیگر مجانس خط ABC خط $A'B'C'$ خواهد بود.

قضیه ۷-۱: مجانس هر خط در صفحه، خطی است موازی با آن در صفحه

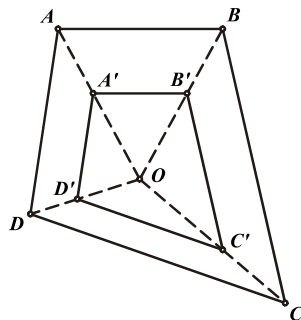
نکته: با کمی تأمل در مسئله پیش متوجه خواهید شد که اگر پاره‌خط $A'C'$ مجانس AC به مرکز O و نسبت k باشد داریم:

$$\frac{A'C'}{AC} = k$$

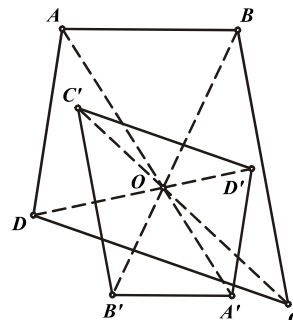
تجانس در چند ضلعی‌ها



قضیه ۷-۲: مجانس هر n ضلعی یک n ضلعی است که اضلاع آن‌ها دوجه دو با یکدیگر موازی و متناسب‌اند.



$K > 0$



$K < 0$

با توجه به قضیه پیش، اثبات این قضیه نیز واضح است چرا که هر ضلع n ضلعی پاره‌خطی است که مجانس آن، پاره‌خطی موازی با آن خواهد بود که نسبت طول آن‌ها نیز همان نسبت تجانس است.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k$$

شکل سمت چپ نشان دهنده تجانس مستقیم و شکل سمت راست نشان دهنده تجانس معکوس روی چهارضلعی $ABCD$ است.

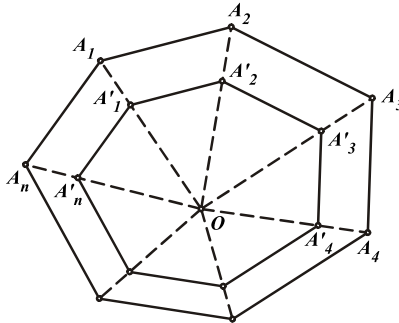


عکس قضیه: هر دو n ضلعی با اضلاع دوجه دو موازی و متناسب، با یکدیگر متجانس‌اند.

فرض: $\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \frac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = \dots = \frac{A_n'A_1'}{A_nA_1} = k$

اگر A_1A_2' و A_2A_3' یکدیگر را در O قطع کنند از آن جا که $A_1'A_2'$ ، A_2A_3' با یکدیگر موازی و به نسبت k متناسب‌اند، نقطه O مرکز تجانس آن‌ها خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA_2'}{OA_2} = \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = k \\ \frac{OA_1'}{OA_1} = \frac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = k \\ \widehat{OA_1'A_2'} = \widehat{OA_2'A_3'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OA_1'A_2' \sim \triangle OA_2'A_3'$$



بنابراین خط A_2A_3' نیز از O می‌گذرد و O مرکز تجانس دو ضلع A_1A_2' ، A_2A_3' به نسبت k می‌باشد. به همین ترتیب O مرکز تجانس دوجه دو اضلاع و در نتیجه مرکز تجانس دو n ضلعی و به نسبت k می‌باشد.

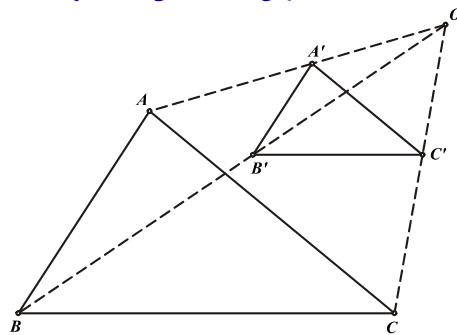
نکته ۱- در دو چند ضلعی متجانس، خطوطی که رئوس متناظر را به هم وصل می‌کند در مرکز تجانس دو چند ضلعی هم‌مرس‌اند.

نکته ۲- تنها توازی اضلاع برای اثبات تجانس دو مثلث کافی است چرا که در این صورت دو مثلث متشابه و اضلاع آن‌ها متناسب خواهند بود.

مسئله ۷-۲: برای دو مثلث مفروض ABC و $A'B'C'$ می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ ، $AC \parallel A'C'$. اگر خطوط



در نقطه‌ای مانند O هم‌رس باشند نشان دهید دو مثلث با یکدیگر متجانس‌اند.



برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $BC \parallel B'C'$

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} \\ A'C' \parallel AC \Rightarrow \frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

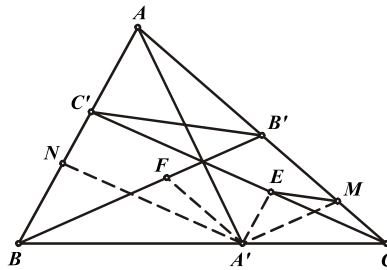
مسئله ۷-۳: سه خط سوایی AA' , BB' , CC' از مثلث ABC همسرانند. از نقطه A' خطوطی به موازات AB و

AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب CC' و BB' را در E و F قطع کنند. بار دیگر از نقطه A' خطوطی به

موازات CC' , BB' رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در M و N قطع کنند. نشان دهید نقاط F , E ,



M و N با یکدیگر هم خطانند.



برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم هر یک از پاره‌خطهای ME , EF و FN با $B'C'$ موازی‌اند.

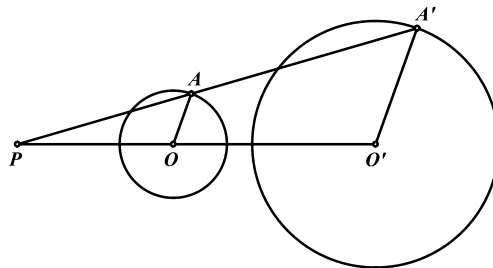
از آنجا که در دو مثلث $A'EM$, $A'E \parallel BC'$ و $A'M \parallel BB'$ هستند، طبق مسأله پیش می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث با یکدیگر متجانس

هستند و EM موازی $B'C'$ می‌باشد. به همین ترتیب EF و NF نیز موازی $B'C'$ خواهند بود.

تجانس در دایره‌ها



قضیه ۷-۳: مجانس هر دایره یک دایره است.



نقطه A را روی دایره $C(O)$ در نظر گرفته و مجانس آن به مرکز P و نسبت k را A' می‌نامیم. اگر مجانس

نقطه O مرکز دایره C را نیز O' بنامیم، پاره‌خط $O'A'$ مجانس شعاع OA خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\frac{O'A'}{OA} = k \Rightarrow O'A' = k.OA$$

از آن جا که با تغییر A روی دایره $C(O)$ مقدار OA ثابت می‌ماند، بنابراین در عبارت فوق $O'A'$ نیز همواره ثابت است و A' روی دایره‌ای به مرکز O' تغییر می‌کند.

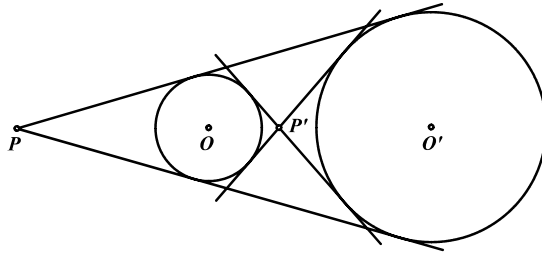
نکته ۱- نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آنهاست.

نکته ۲- محل تلاقی مماس‌های مشترک داخلی یا خارجی دو دایره، مرکز تجانس دو دایره است. چرا که هر مماس مشترک دو دایره، دو نقطه مجانس را به یکدیگر وصل می‌کند پس از مرکز تجانس دو دایره می‌گذرد.

نکته ۳- هر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ به دو صورت مستقیم و معکوس با یکدیگر متجانس‌اند. که در صورت متخارج بودن دو دایره، محل تلاقی مماس‌های مشترک آنها (P, P') ، مراکز این تجانس‌ها



خواهند بود.

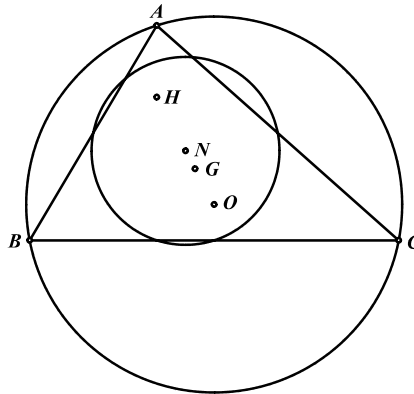


نکته ۴- در صورتی که دو دایره بر یکدیگر مماس باشند، نقطه مماس یکی از مراکز تجانس دو دایره خواهد بود.

مسئله ۷-۴: نشان دهید در هر مثلث ABC دایره نه نقطه و دایره محیطی مثلث به مرکز H و نسبت ۱ به ۲ با



یکدیگر متجانس‌اند.



پیش از این می‌دانیم که شعاع دایره محیطی همواره دو برابر شعاع دایره نه نقطه مثلث است و از طرف دیگر H

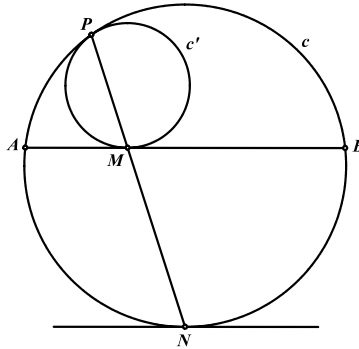
نقطه‌ای روی خط‌المركزین دو دایره است به طوری که $\frac{HO}{HN} = \frac{2}{1}$. یعنی نسبت فاصله H از مراکز دو دایره برابر

نسبت شعاع‌ها (نسبت تجانس) در دو دایره است. پس H مرکز تجانس مستقیم دو دایره است. توجه داشته باشید که به همین صورت مرکز ثقل مثلث (G) نیز مرکز تجانس معکوس این دو دایره است.

مسأله ۷-۵: دایره C' در نقطه P بر دایره C مماس داخل است. وتر AB از دایره C در نقطه M بر دایره C'



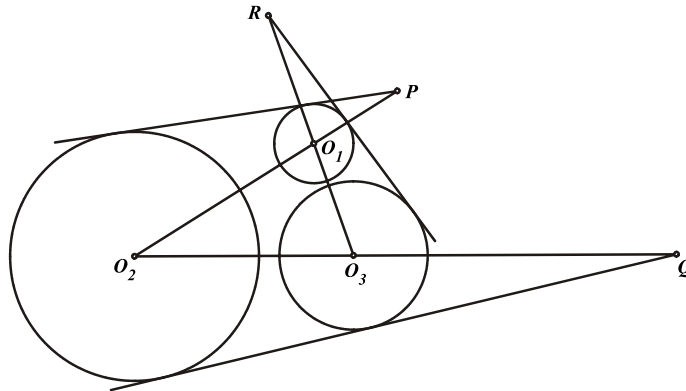
مماس شده است. نشان دهید امتداد خط PM کمان AB را نصف می‌کند.



اگر محل تلاقی PM با دایره C را N بنامیم، مرکز تجانس دو دایره و در نتیجه N مجانس نقطه M خواهد بود. مجانس خط AB به مرکز P و نسبت $\frac{PN}{PM}$ خط d خواهد بود که از N گذشته و با AB موازی باشد. همچنین از آنجا که AB بر دایره C' مماس است، خط d (مجانس AB) نیز بر دایره C (مجانس دایره C') مماس خواهد بود. بنابراین کمان‌های AN و BN که بین دو خط موازی قرار دارند با یکدیگر برابرند و N وسط کمان AB است.



قضیه ۷-۴: مراکز تجانس مستقیم دایره دو هر سه دایره، بر یک استقامت‌اند.



سه دایره $C_1(O_1, R_1)$, $C_2(O_2, R_2)$, $C_3(O_3, R_3)$ را در نظر می‌گیریم و مرکز تجانس مستقیم دایره C_1, C_2 را P و C_2, C_3 را Q و C_1, C_3 را R می‌نامیم. از آنجا که نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آن‌هاست داریم:

$$\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}, \frac{QO_2}{QO_3} = \frac{R_2}{R_3}, \frac{RO_3}{RO_1} = \frac{R_3}{R_1} \Rightarrow \frac{PO_1}{PO_2} \cdot \frac{QO_2}{QO_3} \cdot \frac{RO_3}{RO_1} = 1$$

پس بنابر قضیه منلائوس در مثلث $O_1O_2O_3$ نقاط P, Q, R هم خط‌اند.

نکته ۱- مشابه فوق می‌توان ثابت کرد دو مرکز تجانس معکوس دایره دو هر سه دایره با مرکز تجانس مستقیم دو دایره دیگر از همین سه دایره هم خط‌اند.

نکته ۲- این قضیه برای هر سه شکل متجانسی صادق است. به عبارت دیگر مراکز تجانس دایره دو هر سه شکل متجانسی با یکدیگر هم خط‌اند که اثبات آن نیز مشابه فوق است.

مسائل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

(۱) دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه K بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید وسط AK و وسط BC و



مرکز دایره محاطی بر یک استقامت‌اند.

(۲) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC ، AC و AB به ترتیب در نقاط D ، E و F مماس است.

D' ، قرینه‌ی نقطه‌ی D نسبت به نیمساز داخلی زاویه‌ی A است و نقاط E' و F' نیز به ترتیب مشابه تعریف می‌شوند. اگر M ، N و P به ترتیب اوساط اضلاع BC ، AC و AB باشند ثابت کنید



PF' ، NE' ، MD' هم‌رس‌اند.

(۳) دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC ، AC و AB به ترتیب در نقاط D ، E و F مماس است. اگر

D' ، E' ، F' به ترتیب اوساط کمان‌های BC ، AC و AB از دایره محیطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید



FF' ، EE' ، DD' هم‌رس‌اند.

(۴) اگر نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث ABC و G_A ، G_B و G_C به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های PBC ،



PAB و PCA باشند، ثابت کنید AG_A ، BG_B و CG_C هم‌رس‌اند.

(۵) رئوس A ، B و C از مثلث ABC را نسبت به اضلاع روبه‌رو قرینه می‌کنیم تا نقاط D ، E و F بدست آیند.

D' ، E' ، F' پای تصاویر N - مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC - بر اضلاع BC ، AC و AB می‌باشند.

ثابت کنید دو مثلث DEF و $D'E'F'$ به مرکز G - مرکز ثقل مثلث ABC - و نسبت $\frac{1}{4}$ متجانس هستند.



(۶) مثلث ABC مفروض است. نقاط A' ، A'' بر روی AC و AB قرار داشته و $A'A''$ با BC موازی است.

نقاط B' و B'' روی AB و BC قرار داشته و $B'B''$ با AC موازی است. نقاط C' و C'' روی BC و AC قرار داشته و $C'C''$ با AB موازی است. نقاط برخورد $B'C''$ با BC را D و $C'A''$ با AC را E و



$A'B''$ با AB را F می‌نامیم. ثابت کنید سه نقطه‌ی D ، E و F بر یک خط واقع‌اند.

(۷) نقاط D ، E و F اوساط اضلاع BC ، CA و AB از مثلث ABC می‌باشند. قرینه نقطه دلخواه P را نسبت به

سه نقطه‌ی D ، E و F به ترتیب K ، L و M می‌نامیم. ثابت کنید پاره‌خط‌های AK ، BL و CM در یک نقطه



مانند Q هم‌رس‌اند و در حالتی که نقطه P بر یک دایره حرکت نماید مکان هندسی Q را پیدا کنید.

(۸) ثابت کنید که خط‌های سیمسون دو انتهای یک قطر از دایره محیطی مثلث ABC ، یکدیگر را روی دایره‌ی نه



نقطه‌ی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

(۹) مثلث ABC با مساحت S مفروض است. فرض کنید دو مثلث با مساحت‌های S_1 ، S_2 یکی محاط و دیگری

محیط بر مثلث ABC باشند طوری که اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر موازی باشند. ثابت کنید: $S^2 = S_1 \cdot S_2$



(۱۰) می‌دانیم سه خط که هر کدام یک رأس مثلث را به محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی با ضلع روبه‌رو وصل می‌کند در یک نقطه به نام نقطه‌ی ناگل هم‌مرس‌اند. فرض کنید G مرکز ثقل، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، J مرکز دایره محاطی داخلی مثلث میانه‌ای و K نقطه‌ی ناگل مثلث مفروضی باشند. ثابت کنید که نقاط J, I, G و



K بر یک خط واقع‌اند و $IJ = JK, GK = 2IG$.

(۱۱) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض است. دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم که بر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه A' بر دایره محیطی مثلث ABC مماس داخل باشد. نقاط B' و C' نیز به طور

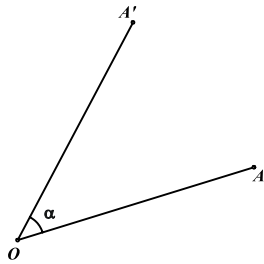


مشابه تعریف می‌شوند. نشان دهید سه خط AA', BB', CC' هم‌مرس‌اند.

۷-۲ دوران و تجانس ماریچی

هدف بخش: پیش تر در بخش بردار دوران با مفهوم اولیه دوران آشنا شده ایم. در این بخش با تبدیل دوران و تبدیل تجانس ماریچی که ترکیبی از دو تبدیل تجانس و دوران است آشنا شده و نحوه کاربرد آن‌ها در حل مسایل مختلف را می بینیم.

دوران



تعریف: دوران تبدیلی است از صفحه بر روی آن که با مشخص بودن مرکز دوران (نقطه O) و زاویه دوران (α) نقطه A را به نقطه A' تبدیل می کند به طوری که $OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

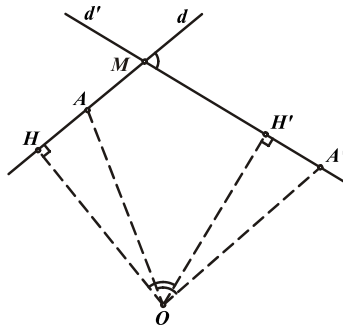
نکته ۱- زاویه دوران همواره جهت دار است. یعنی زاویه دوران یا ساعتگرد است و یا پاد ساعتگرد و زوایای ساعتگرد را با علامت منفی و زوایای پاد ساعتگرد را با علامت مثبت نمایش می دهیم. بنابراین جهت α را همواره در نظر داشته باشید.

نکته ۲- در تبدیل دوران تنها نقطه ای که پس از تبدیل ثابت مانده و تغییری نمی کند، مرکز دوران است.



قضیه ۷-۵: دوران یافته α درجه هر خط، یک خط است که با آن زاویه α درجه می سازد.

خط d و مرکز دوران O را در نظر می گیریم. پای عمود وارد از O بر d را H می نامیم و نقطه دلخواه A را روی خط d فرض می کنیم. اگر A' و H' دوران یافته های A و H به مرکز O باشند داریم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{HOH'} = \widehat{AOA'} = \alpha &\Rightarrow \widehat{HOA} = \widehat{H'OA'} \\ OH = OH' \\ OA = OA' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle HOA = \triangle H'OA' \Rightarrow \widehat{A'H'O} = 90^\circ$$

بنابراین اگر A هر نقطه ای روی خط d باشد A' همواره روی خطی عمود بر OH' در نقطه H' (خط d') خواهد بود. پس هر نقطه روی خط d به نقطه ای روی خط d' تبدیل می شود و خط d' یافته خط d می باشد. همچنین به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $OHHM'$ زاویه بین دو خط، برابر α است.

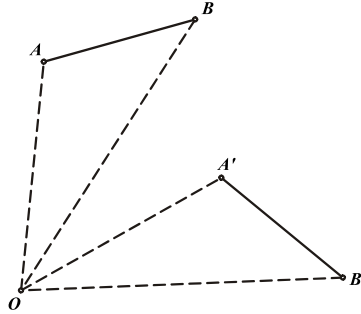
نتیجه: بنابر قضیه فوق تبدیل دوران همواره زوایا را حفظ می کند و به عبارت دیگر اگر A', B', C' دوران یافته های

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

درجه A, B, C باشند آن گاه



قضیه ۶-۷: تبدیل دوران طول پاره‌خط یا فاصله بین هر دو نقطه را حفظ می‌کند.

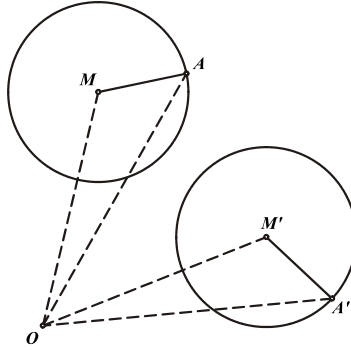


اثبات این قضیه نیز مشابه اثبات قضیه پیش با استفاده از تساوی مثلث‌ها صورت می‌پذیرد که به خود شما واگذار می‌شود.

نتیجه ۱- با توجه به قضیه فوق دوران یافته هر دایره، دایره‌ای برابر با آن است چون $MA' = MA$ و با تغییر A



روی دایره‌ی (M) طول MA' ثابت بوده و A' روی دایره‌ای به مرکز M' تغییر خواهد کرد.

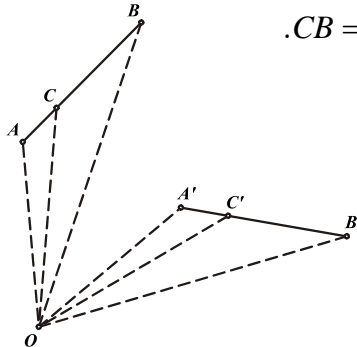


نتیجه ۲- اگر $A'B'$ دوران یافته‌ی AB باشد، نقاط C' و C به ترتیب روی این دو پاره‌خط دوران یافته‌های

یکدیگرند اگر و فقط اگر $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$. چرا که اگر C روی AB باشد دوران یافته آن، C' روی $A'B'$



بوده و $AC = A'C'$ و $CB = C'B'$.

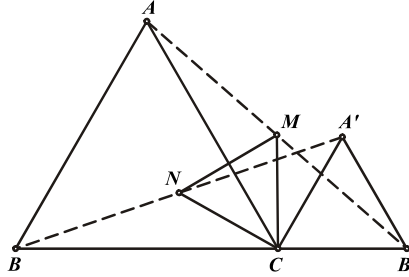


نتیجه ۳- دوران یافته هر مثلث، مثلثی است همنهشت با آن و طی این تبدیل تمام نقاط، خطوط و دوابر مربوط به

مثلث اول به نقاط، خطوط و دوابر مربوط به مثلث دوم تبدیل می‌شوند. از این جمله نقاط O, G, H, I و خط

اولی و دایره نه نقطه و محیطی دو مثلث است که به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

مسأله ۶-۷: روی امتداد ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C$ را طوری می‌سازیم که A و A' در یک طرف BC قرار گیرند. اگر M و N به ترتیب اوساط پاره‌خط‌های $AB, A'B'$ باشند، ثابت کنید MNC متساوی‌الاضلاع است.



با دوران به مرکز نقطه C و با زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد، نقطه B' به A' و نقطه A به B تبدیل می‌شود، پس پاره‌خط $B'A$ به $A'B$ تبدیل می‌شود.

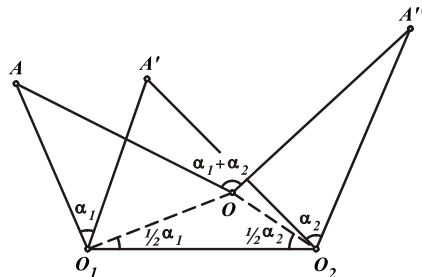
با توجه به نتیجه ۲ قضیه پیش از رابطه‌ی $\frac{B'M}{MA} = \frac{A'N}{NB}$ نتیجه می‌گیریم که نقطه M به N تبدیل

می‌شود یعنی $CM = CN$ و $\widehat{MCN} = 60^\circ$. در نتیجه مثلث CMN متساوی‌الاضلاع است.

قضیه ۷-۷: ترکیب دو دوران یکی به مرکز O_1 و زاویه α_1 و دیگری به مرکز O_2 و زاویه α_2 همواره دورانی است با زاویه $\alpha_1 + \alpha_2$.

نکته: اگر $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ$ ترکیب دو دوران یک تبدیل انتقال خواهد بود.

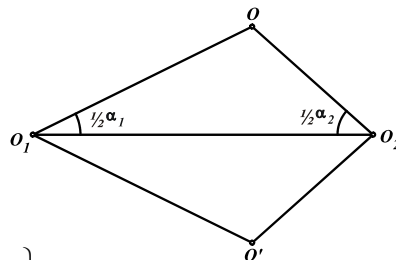
قضیه ۷-۸: اگر O مرکز دوران معادل با ترکیب دو دوران به مراکز O_1, O_2 و با زوایای α_1, α_2 باشد داریم:



$$\widehat{OO_1O_2} = \frac{\alpha_1}{2} \text{ و } \widehat{O_1O_2O} = \frac{\alpha_2}{2}$$

نقطه O را با شرایط مذکور در قضیه، در نظر می‌گیریم. با دوران به مرکز O_1 و زاویه α_1 ، نقطه O به O'

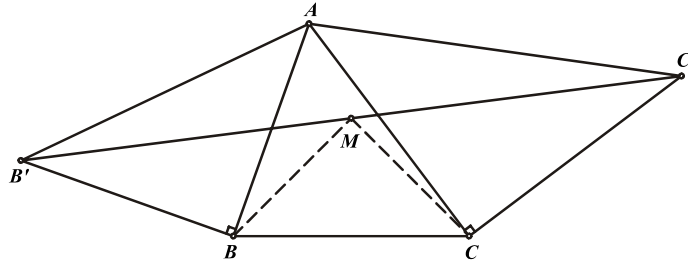
منتقل می‌شود. بنابراین داریم:



$$\left. \begin{array}{l} OO = OO' \\ \widehat{OO_1O_2} = \widehat{O_1O_2O'} = \frac{\alpha_1}{2} \\ OO_1O_2 = OO_1O_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OO_1O_2 = \triangle O'O_1O_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O_1O_2 = O_1O_2' \\ \widehat{O_1O_2O} = \widehat{O_1O_2O'} = \frac{\alpha_2}{2} \end{array} \right.$$

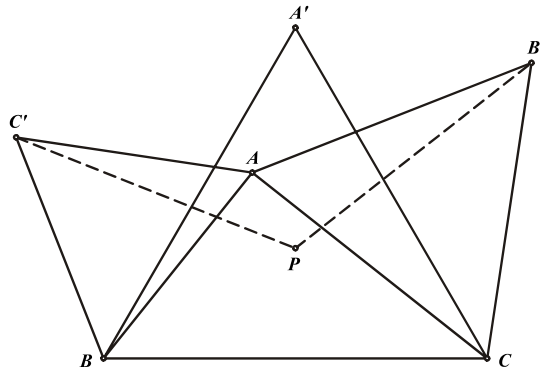
بنابراین با دوران به مرکز O_r و زاویه α_r ، نقطه O' به O منتقل می‌شود. پس دوران معادل با ترکیب این دو دوران نقطه O را به خودش تبدیل می‌کند. در نتیجه این نقطه، مرکز دوران معادل با این ترکیب دوران است.

مسئله ۷-۷: در مثلث ABC ، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABB' ، ACC' را خارج آن بنا می‌کنیم به طوری که $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'} = 90^\circ$. ثابت کنید اگر M وسط $B'C'$ باشد مثلث MBC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



با دوران به مرکز C و زاویه 90° در جهت ساعتگرد نقطه‌ی C' به A و با دوران به مرکز B و زاویه 90° در جهت پاد ساعتگرد، نقطه‌ی A به B' تبدیل می‌شود. ترکیب این دو تبدیل، دورانی است با زاویه 180° که نقطه C' را به B' تبدیل می‌کند. پس مرکز آن وسط پاره‌خط $B'C'$ یعنی نقطه M است. از طرفی طبق قضیه ۷-۸ داریم: $\widehat{MCB} = \widehat{CBM} = 45^\circ$. بنابراین مثلث MBC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

مسئله ۷-۸: روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC ، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC' ، ACB' را در خارج آن می‌سازیم. اگر $A'BC$ مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد که A و A' در یک طرف BC قرار گرفته باشند و P مرکز ثقل مثلث $A'BC$ باشد، ثابت کنید مثلث $PB'C'$ متساوی‌الساقین است و $\widehat{B'PC'} = 120^\circ$.



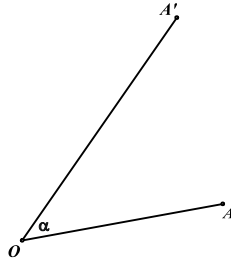
با دوران به مرکز C و زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد و سپس دوران به مرکز B و زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد نقطه C' به B' تبدیل می‌شود. طبق قضیه ۷-۸ مرکز دوران معادل با این ترکیب دوران نقطه P است زیرا $\widehat{PCB} = \widehat{CBP} = 30^\circ$. پس دوران به مرکز P و زاویه 120° درجه، نقطه B' را به C' تبدیل می‌کند. در نتیجه مثلث $PB'C'$ متساوی‌الساقین است و $\widehat{B'PC'} = 120^\circ$.

تجانس ماریچی

تعریف: تجانس ماریچی تبدیلی است از صفحه بر روی آن که با مشخص بودن مرکز (نقطه O) و زاویه (α) و نسبت

$$\frac{OA'}{OA} = k, \widehat{AOA'} = \alpha$$

آن (k)، نقطه A را به نقطه A' تبدیل می‌کند، به طوری که



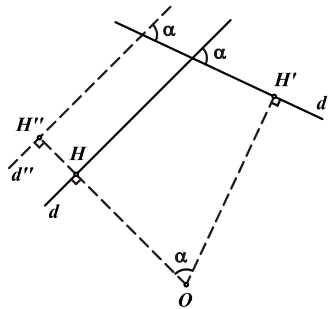
به عبارت دیگر تجانس ماریچی، ترکیب تجانس و دوران است به این صورت که نقطه A را به مرکز O و با زاویه α دوران می‌دهیم و سپس نقطه حاصل را به نسبت k و به همان مرکز O تجانس می‌دهیم تا نقطه A' حاصل شود.

نکته ۱- در تجانس ماریچی نیز مانند دوران، زاویه α همواره جهت‌دار است.

نکته ۲- در تبدیل تجانس ماریچی تنها نقطه‌ای که پس از تبدیل ثابت مانده و تغییری نمی‌کند، مرکز تجانس ماریچی است.



قضیه ۷-۹: مجانس ماریچی هر خط با زاویه α و نسبت k خطی است که با آن زاویه α درجه می‌سازد.

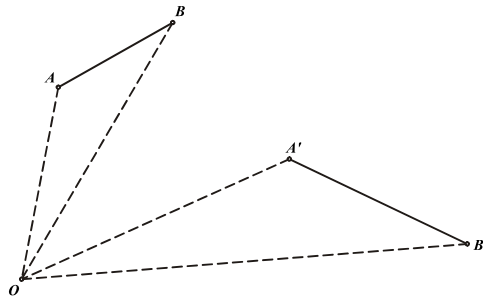


از آنجا که تبدیل تجانس ماریچی ترکیبی از دو تبدیل تجانس و دوران است و مجانس خط d (خط d'') خطی موازی با آن و دوران یافته α درجه d'' نیز (خط d') زاویه α درجه با d'' می‌سازد، بنابراین مجانس ماریچی خط d (خط d') خطی است که با آن زاویه α درجه می‌سازد.
نتیجه: بنابر قضیه فوق تبدیل تجانس ماریچی همواره زوایا را حفظ می‌کند، یعنی زاویه بین اجزاء شکل پس از تبدیل ثابت باقی می‌ماند.

قضیه ۷-۱۰: تبدیل تجانس ماریچی به نسبت k ، طول پاره‌خط یا فاصله بین هر دو نقطه را k برابر می‌کند.

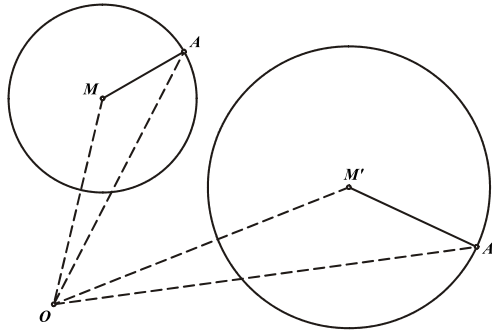


$$\frac{A'B'}{AB} = k$$

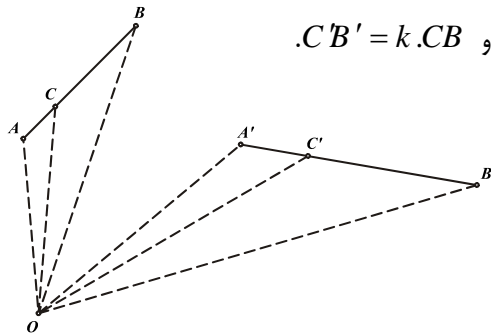


می‌دانیم که دوران، طول را حفظ کرده و تجانس به نسبت k نیز طول را k برابر می‌کند. بنابراین تبدیل تجانس ماریچی نیز که ترکیبی از دو تبدیل فوق است، طول هر پاره‌خط یا فاصله هر دو نقطه را k برابر می‌کند.

نتیجه ۱- با توجه به قضیه پیش مجانس ماریچی هر دایره‌ای با زاویه α و نسبت k ، دایره‌ای با شعاع k برابر شعاع آن دایره است. چرا که $M'A' = k \cdot MA$ و با تغییر A روی دایره‌ی (M) طول $M'A'$ ثابت بوده و A' روی دایره‌ای به مرکز M' تغییر خواهد کرد.



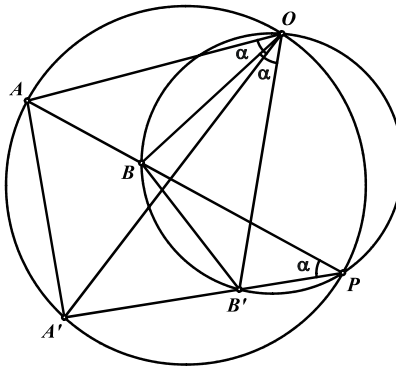
نتیجه ۲- اگر $A'B'$ مجانس ماریچی AB باشد، نقاط C و C' به ترتیب روی این دو پاره‌خط تبدیل یافته‌های یکدیگرند اگر و فقط اگر $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$. چرا که اگر C روی AB باشد تبدیل یافته آن C' روی $A'B'$ بوده و $A'C' = k \cdot AC$ و $C'B' = k \cdot CB$.



قضیه ۷-۱۱: اگر پاره‌خط $A'B'$ مجانس ماریچی پاره‌خط AB باشد و محل تلاقی این دو خط P باشد آنگاه مرکز



تجانس ماریچی بر محل برخورد دایر محیطی مثلث‌های PAA' ، PBB' قرار دارد.



فرض می‌کنیم زاویه تجانس ماریچی که AB را به $A'B'$ تبدیل کرده α و نسبت آن k باشد. اگر دوایر محیطی دو مثلث PBB' , PAA' یکدیگر را در O قطع کنند داریم:

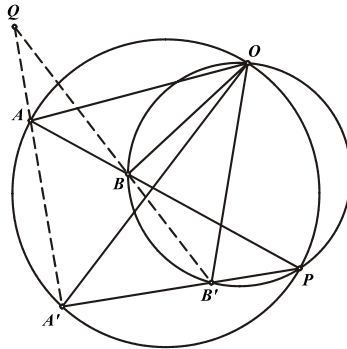
$$\left. \begin{aligned} \widehat{OAB} &= \widehat{OA'B'} \\ \widehat{OBA} &= \widehat{OB'A'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

$$\widehat{AOA'} = \frac{1}{2} \widehat{AA'} = \widehat{APA'} = \alpha$$

$$\widehat{BOB'} = \frac{1}{2} \widehat{BB'} = \widehat{BPB'} = \alpha$$

از روابط اخیر نتیجه می‌شود نقطه O ، همان مرکز تجانس ماریچی مذکور است.

نکته: در قضیه پیش، نقطه O مرکز تجانس ماریچی است که پاره‌خط AA' را به پاره‌خط BB' تبدیل می‌کند.

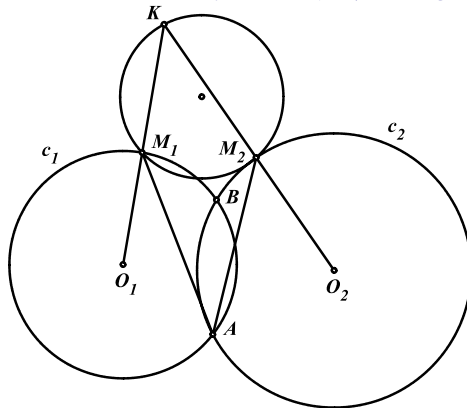


چرا که طبق قضیه پیش مرکز تجانس ماریچی که AA' را به BB' تبدیل می‌کند بر محل برخورد دوایر محیطی مثلث‌های $QA'B'$, QAB قرار دارد و از آنجا که نقطه O همان نقطه میشل (مسئله ۵ بخش ۴-۳) چهارضلعی کامل $ABB'A'$ است پس دوایر محیطی مثلث‌های QAB و $QA'B'$ نیز از O می‌گذرند و بنابراین O مرکز تجانس ماریچی است که AA' را به BB' تبدیل می‌کند.

مسئله ۷-۹: فرض کنید C_1, C_2 دو دایره به مرکزهای O_1, O_2 باشند که در نقطه‌ی A یکدیگر را قطع کرده‌اند. زاویه ثابت α به رأس A را در نظر می‌گیریم. نقاط برخورد اضلاع این زاویه با دایره‌های C_1, C_2 را به ترتیب M_1, M_2 و نقطه برخورد خط‌های O_1M_1, O_2M_2 را K می‌نامیم. نشان دهید که وقتی این زاویه حول نقطه



A دوران کند، دایره‌ی محیطی مثلث KM_1M_2 ، همواره از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرد.



محل برخورد دوم دو دایره C_1, C_2 را B می‌نامیم.

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \widehat{M_1AB} + \widehat{BAM_2} &= \frac{1}{2}\widehat{M_1B} + \frac{1}{2}\widehat{BM_2} \\ \widehat{O_1KO_2} &= \widehat{O_1BO_2} - \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{O_1KO_2} = \widehat{O_1BO_2} - \alpha$$

$$\widehat{O_1KO_2} = \widehat{O_1BO_2} - (\widehat{M_1O_1B} + \widehat{BO_2M_2})$$

با تغییر زاویه α حول نقطه A زاویه بین دو پاره‌خط O_1M_1 و O_2M_2 و نسبت آن‌ها ثابت می‌ماند. پس تجانس ماریچی وجود دارد که پاره‌خط O_1M_1 را به O_2M_2 تبدیل می‌کند. طبق قضیه ۷-۱۱ دایره محیطی مثلث KM_1M_2 همواره از مرکز این تجانس ماریچی می‌گذرد.

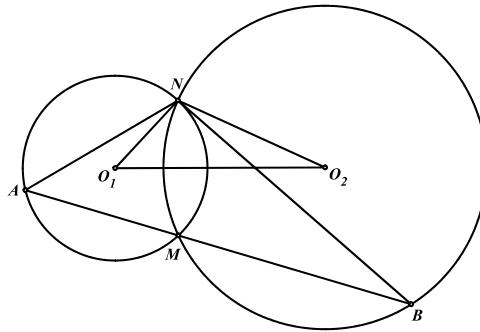
قضیه ۷-۱۲: ترکیب دو تجانس ماریچی به مراکز O_1, O_2 و زوایای α_1, α_2 و نسبت‌های k_1, k_2 یک تجانس ماریچی است با زاویه $\alpha_1 + \alpha_2$ و نسبت $k_1.k_2$.
نکته: قضیه فوق برای n تجانس ماریچی نیز قابل تعمیم است.

مسئله ۷-۱۰: سه دایره C_1, C_2, C_3 در نقطه N هم‌مرس‌اند. دومین نقطه برخورد دایره‌های C_1, C_2 و C_2, C_3 را به ترتیب M_1, M_2, M_3 می‌نامیم. A_1 نقطه دلخواهی روی دایره C_1 است. A_2M_2 با دایره C_2 در نقطه A_2 و A_3M_3 با دایره C_3 در نقطه A_3 و A_1M_1 با دایره C_1 در نقطه A_1 برخورد دارد. ثابت کنید A_1 بر A_2A_3 منطبق است.

لم: دو دایره (O_1, r_1) و (O_2, r_2) در نقاط M و N متقاطع هستند. خط دلخواهی که از M می‌گذرد دو دایره (O_1) و (O_2) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید با تجانس ماریچی به مرکز N و زاویه $\widehat{O_1NO_2}$ و



نسبت $\frac{r_2}{r_1}$ ، نقطه A به B تبدیل می‌شود.



برای اثبات لم نشان می‌دهیم دو مثلث NAB, NO_1O_2 متشابه‌اند.

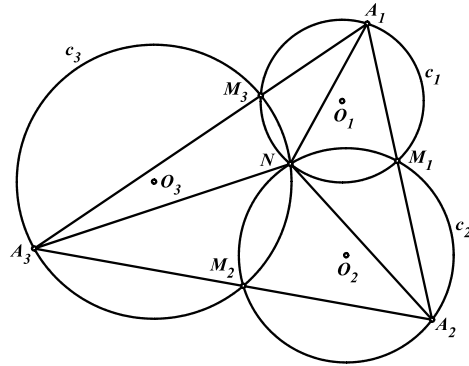
$$\left. \begin{aligned} \widehat{NO_1O_2} &= \frac{1}{2}\widehat{NO_1M} = \widehat{NAM} \\ \widehat{NO_2O_1} &= \frac{1}{2}\widehat{NO_2M} = \widehat{NBM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle NO_1O_2 \sim \triangle NAB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{O_1NO_2} = \widehat{ANB} \\ \frac{NB}{NA} = \frac{NO_2}{NO_1} = \frac{r_2}{r_1} \end{cases}$$

بنابراین لم اثبات شد.

اثبات مسأله: مراکز سه دایره C_1, C_2, C_3 را به ترتیب O_1, O_2, O_3 و طول شعاع آن‌ها را R_1, R_2, R_3 و R_3 می‌نامیم. سه تجانس ماریچی به مرکز N و زوایای ساعتگرد $\widehat{O_1NO_2}, \widehat{O_2NO_3}$ و $\widehat{O_3NO_1}$ و به



نسبت‌های $\frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_3}, \frac{R_3}{R_1}$ را به ترتیب T_1, T_2, T_3 می‌نامیم.



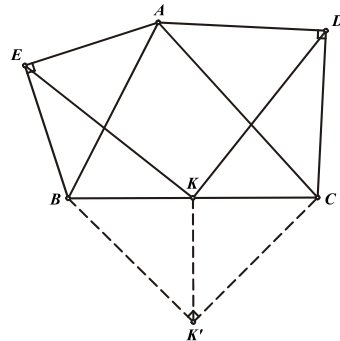
طبق لم اثبات شده، با تبدیل T_1 ، نقطه A_1 به A_2 و با تبدیل T_2 نقطه A_2 به A_3 و با تبدیل T_3 نقطه A_3 به A_1 تبدیل می‌شود. ترکیب این سه تبدیل به همین ترتیب که ذکر شده، تجانس ماریچی است با زاویه

$$\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1} = 1 \text{ و به نسبت } \widehat{O_1NO_2} + \widehat{O_2NO_3} + \widehat{O_3NO_1} = 360^\circ$$

یعنی این تبدیل هر نقطه را به خودش منتقل می‌کند (تبدیل همانی است) و از طرفی این تبدیل نقطه A_1 را به

A_4 تبدیل می‌کند و در نتیجه A_4 بر A_1 منطبق است.

مسأله ۷-۱۱: روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین DAC و EAB را بنا می‌کنیم ($\widehat{ADC} = \widehat{AEB} = 90^\circ$) اگر K وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث



KDE قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BCK' را در خارج مثلث ABC رسم می‌کنیم به طوری که

$\widehat{BK'C} = 90^\circ$. با تجانس ماریچی به مرکز C و زاویه 45° در جهت پاد ساعتگرد و نسبت $\sqrt{2}$ ، نقطه D به A

تبدیل می‌شود و با تجانس ماریچی به مرکز B و زاویه 45° در جهت پاد ساعتگرد و نسبت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ نقطه A به E

منتقل می‌شود. ترکیب این دو تبدیل، تجانس ماریچی است با زاویه 90° پاد ساعتگرد و نسبت یک که نقطه D را به

E منتقل می‌کند.

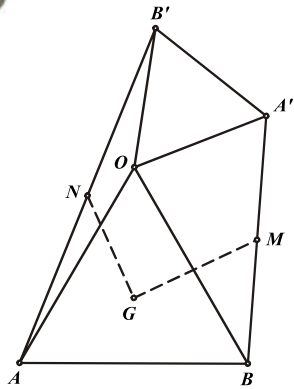
از طرف دیگر با تجانس ماریچی به مرکز C نقطه K به K' و با تجانس ماریچی به مرکز B ، نقطه K' دوباره به K منتقل می‌شود. بنابراین نقطه K مرکز تجانس ماریچی معادل با ترکیب دو تبدیل اولیه بوده است. در مجموع نتیجه می‌گیریم $\widehat{DKE} = 90^\circ$ ، $\frac{DK}{EK} = 1$ و مثلث KDE قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

قضیه ۷-۱۳: ترکیب یک تجانس به مرکز O_1 و نسبت k با یک دوران به مرکز O_2 و زاویه α ، یک تجانس ماریچی با زاویه α و نسبت k است.

نکته: در قضیه فوق، اگر تبدیل تجانس را T_1 و تبدیل دوران را T_2 بنامیم، تبدیل $T_1 \circ T_2$ نیز مانند $T_2 \circ T_1$ یک تجانس ماریچی است اما لزوماً این دو تبدیل برابر نیستند.

مسأله ۷-۱۲: OAB و $OA'B'$ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند که دارای یک جهت می‌باشند. نقطه G مرکز ثقل مثلث OAB و نقاط M و N به ترتیب اوساط پاره‌خط‌های $A'B$ ، AB' می‌باشند. ثابت کنید دو

مثلث GNA' ، GMB' متشابه‌اند.



با یک تجانس به مرکز B و نسبت ۲ و سپس یک دوران به مرکز O و زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد، نقطه M به B' تبدیل می‌شود. با این تبدیل نقطه G ثابت می‌ماند بنابراین مرکز تجانس ماریچی به زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد و با نسبت ۲ است که M را به B' تبدیل می‌کند یعنی داریم:

$$\widehat{MGB'} = 60^\circ, \frac{GB'}{GM} = 2 \quad (1)$$

همچنین با یک تجانس به مرکز A و نسبت ۲ و سپس یک دوران به مرکز O و زاویه 60° در جهت ساعتگرد، نقطه N به A' تبدیل می‌شود. این تبدیل نیز نقطه G را ثابت نگه می‌دارد. پس مرکز تجانس ماریچی به زاویه 60° در جهت ساعتگرد و نسبت ۲ است که نقطه N را به A' تبدیل می‌کند. یعنی داریم:

$$\widehat{NGA'} = 60^\circ, \frac{GA'}{GN} = 2 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دو مثلث GNA' و GMB' با یکدیگر متشابه‌اند.

مسائل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

- (۱) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABM و ACN را رسم می‌کنیم به طوری که $\widehat{MAB} = \widehat{NAC} = 90^\circ$. همچنین روی ضلع BC ، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه PBC را طوری رسم می‌کنیم که $\widehat{BPC} = 90^\circ$ و نقاط A و P در یک طرف BC باشند. نشان دهید نقاط M ، P و N رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه هستند. (مرحله دوم المیاد ریاضی ۷۸)
- (۲) فاصله نقطه P که داخل مربع $ABCD$ قرار دارد، از رئوس A ، B و C به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. مساحت مربع $ABCD$ را بدست آورید.
- (۳) نقطه E در صفحه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و بیرون آن طوری قرار گرفته که مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است. اگر P نقطه‌ای دلخواه باشد نشان دهید: $PC + PD + AD \geq PE$
- (۴) روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین EAB و DAC را بنا می‌کنیم. ($\widehat{ADC} = \widehat{AEB} = 90^\circ$) اگر K وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید مثلث KDE متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.
- (۵) روی اضلاع AB ، BC ، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن، چهار مربع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به ترتیب P ، R ، Q و S می‌نامیم. ثابت کنید دو پاره‌خط PQ و RS با هم برابر و بر هم عمودند.
- (۶) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC ، CDE و EFG طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که D وسط AG است. ثابت کنید BFD متساوی‌الاضلاع است. (برای نام‌گذاری رئوس مثلث‌ها، جهت ثابتی را در نظر بگیرید.)
- (۷) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع PBC ، QCA و RAB روی اضلاع مثلث ABC طوری ساخته شده‌اند که P ، Q و R خارج آن قرار دارند. اگر D ، E و F مراکز ثقل این مثلث‌ها باشند، ثابت کنید مثلثی DEF متساوی‌الاضلاع است که آن را مثلث ناپلئون مثلث ABC می‌نامیم.
- (۸) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع OA_1A_2 ، OB_1B_2 و OC_1C_2 در رأس O مشترک هستند. ثابت کنید اوساط پاره‌خط‌های A_2B_1 ، B_2C_1 و C_2A_1 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. (برای نام‌گذاری مثلث‌ها جهت ثابتی را در نظر بگیرید.)
- (۹) مثلث‌های متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC' ، BCA' و CAB'' را در خارج مثلث ABC طوری بنا می‌کنیم که داشته باشیم: $\widehat{AC'B} = \widehat{BA'C} = \widehat{CB'A} = 90^\circ$. ثابت کنید دو پاره‌خط AA' و $B'B''$ با هم برابر و بر هم عمودند.
- (۱۰) C_1 و C_2 دو دایره متقاطع در نقاط M و N هستند. A را نقطه‌ای دلخواه بر C_1 می‌گیریم و دومین نقطه برخورد خط AM با دایره C_2 را B ، دومین نقطه برخورد خط BN با C_1 را C ، دومین نقطه برخورد CM با C_2 را D ، و بالاخره دومین نقطه برخورد DN با C_1 را E می‌نامیم. ثابت کنید که طول AE به انتخاب نقطه اولیه A بر C_1 بستگی ندارد.

(۱۱) از نقطه دلخواه P بر روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC سه خط موازی اضلاع BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب خطوط CA ، AB و BC را در نقاط E ، D و F قطع کنند. ثابت کنید این سه



نقطه بر یک خط واقع‌اند.

(۱۲) دو مثلث هم‌نهشت ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاط می‌باشند. نقاط برخورد اضلاع متناظر را E ، D و F می‌نامیم. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF متشابه بوده و مرکز ارتفاعی مثلث DEF بر O ، مرکز دایره



محیطی مثلث ABC منطبق است.

(۱۳) نقطه P بر کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. اگر I_1 و I_2 مراکز دایره‌ی محاطی مثلث‌های



PAB و PAC باشند، ثابت کنید دایره محیطی مثلث PI_1I_2 ، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

(۱۴) P نقطه‌ای داخل چهارضلعی $ABCD$ است به طوری که $\widehat{PAD} = \widehat{PBC}$ ، $\widehat{PDA} = \widehat{PCB}$. اگر K



محل برخورد عمود منصف‌های دو پاره خط AB و CD باشد ثابت کنید $\widehat{DKC} = \widehat{DAP}$.

(۱۵) دو دایره مفروض یکدیگر را در نقاط K و L قطع می‌کنند. خط متغیری که از K می‌گذرد دو دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. اوساط دو کمان AL و BL که K بر آن قرار ندارد را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید



دایره محیطی مثلث CKD از وسط پاره خط AB می‌گذرد.

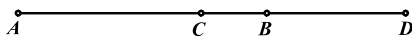
۷-۳ تقسیم همساز یا توافقی

هدف بخش: تقسیم همساز یکی از مباحث پیشرفته هندسه مسطحه است که البته از نوع تبدیلات هندسی نمی‌باشد اما از آنجا که این بحث مدخل و پیش نیاز ورود به تبدیلات مهمی چون قطبی می‌باشد بنابراین در این بخش نگاهی خواهیم داشت به مبانی تقسیم همساز و به دنبال آن برخی خواص و کاربردهای جالب دستگاه‌های توافقی را نیز مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف: چنانچه نقاط C و D پاره خط AB را به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کنند، این چهار نقطه را یک گستره‌ی همساز یا توافقی می‌نامند و به صورت $(ABCD) = -1$ نیز نمایش داده می‌شود. همچنین نقاط



C و D را مزدوج همساز یا توافقی یکدیگر نسبت به پاره خط AB می‌نامند.

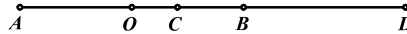


$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

قضیه ۷-۱۴: اگر داشته باشیم $(ABCD) = -1$ و نقطه O وسط پاره خط AB باشد آنگاه خواهیم داشت



$$OA^2 = OC \cdot OD \text{ و بالعکس.}$$



$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{OA + OC}{OB - OC} = \frac{OD + OA}{OD - OB} \Rightarrow \frac{OA + OC}{OA - OC} = \frac{OD + OA}{OD - OA}$$

با ترکیب در مخرج روی عبارت فوق خواهیم داشت:

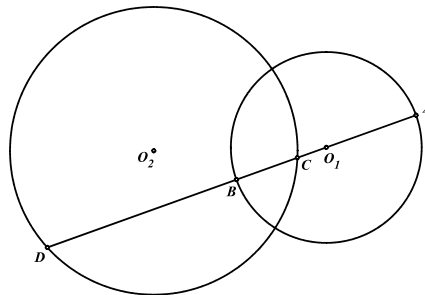
$$\frac{OA + OC}{rOA} = \frac{OD + OA}{rOD} \Rightarrow OA^2 + OA \cdot OD = OA \cdot OD + OC \cdot OD \Rightarrow OA^2 = OC \cdot OD$$

عکس قضیه نیز به همین روش قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسئله ۷-۱۳: ثابت کنید هر خطی که از مرکز یکی از دو دایره متعامد می‌گذرد توسط دو دایره به طور همساز تقسیم



می‌شود.



طبق **مسئله ۵-۳** می‌دانیم چنانچه دو دایره (O_1) و (O_2) بر یکدیگر عمود باشند داریم

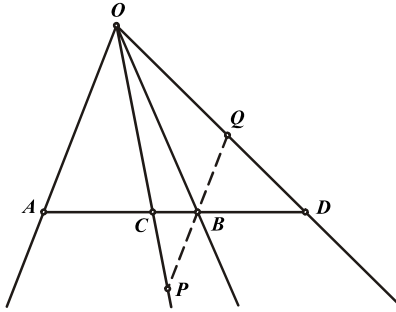
$$O_1 B^2 = O_1 C \cdot O_1 D \text{ پس بنا بر عکس قضیه پیش از آنجا که } O_1 \text{ وسط } AB \text{ است نتیجه می‌شود } (ABCD) = -1.$$

توجه داشته باشید که عکس مسئله فوق نیز صادق است.

قضیه ۷-۱۵: $(ABCD) = -1$ و نقطه‌ی O خارج از خط AB مفروض‌اند. اگر خطی که از B به موازات OA



رسم می‌شود OC و OD را به ترتیب در P و Q قطع کند آنگاه $PB = BQ$



$$BQ \parallel OA \Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle OAD \Rightarrow \frac{BQ}{OA} = \frac{BD}{AD} \quad (1)$$

$$BP \parallel OA \Rightarrow \triangle BPC \sim \triangle OAC \Rightarrow \frac{BP}{OA} = \frac{BC}{AC} \quad (2)$$

$$(ABCD) = -1 \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow \frac{BQ}{OA} = \frac{BP}{OA} \Rightarrow BQ = BP$$

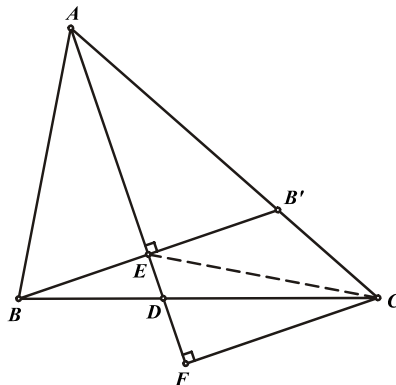
توجه داشته باشید که عکس قضیه نیز صادق است یعنی چنانچه $PQ \parallel OA$ و $PB = BQ$ آنگاه

$$(ABCD) = -1$$

مسئله ۷-۱۴: اگر D پای نیمساز نظیر رأس A در مثلث ABC باشد و E و F تصاویر نقاط B و C روی AD



باشند ثابت کنید $(ADEF) = -1$

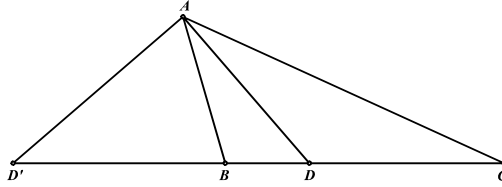


اگر BE را امتداد دهیم تا AC را در B' قطع کند، در مثلث ABB' نیمساز AE ارتفاع نیز می‌باشد و بنابراین مثلث ABB' متساوی الساقین بوده و $BE = B'E$.

از آنجا که $BB' \parallel CF$ پس طبق عکس قضیه پیش خطوط CE و CF پاره‌خط AD را به صورت همساز تقسیم می‌کنند چرا که BB' از E به موازات CF رسم شده و $BE = B'E$.



قضیه ۷-۱۶: نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس از مثلث، ضلع مقابل را به طور همساز تقسیم می‌کنند.



برای نیمساز داخلی AD داریم $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ و به همین ترتیب برای نیمساز خارجی AD' نیز می‌دانیم

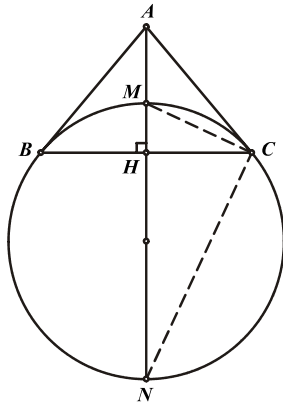
$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{پس بنا بر دو رابطه پیش داریم} \quad \frac{BD}{CD} = \frac{BD'}{CD'} \quad \text{و بنابراین} \quad (BCDD') = -1$$

توجه داشته باشید که عکس قضیه نیز برقرار است به این صورت که اگر $(BCDD') = -1$ و $AD \perp AD'$ آنگاه AD و AD' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه BAC خواهند بود.

مسئله ۷-۱۵: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، ارتفاع نظیر رأس A قاعده BC را در H و دایره‌ای که در B و C



بر ساق‌ها مماس است در M و N قطع کرده است. ثابت کنید: $(AHMN) = -1$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACM} &= \frac{CM}{r} \\ \widehat{BCM} &= \frac{BM}{r} \\ \widehat{BM} &= \widehat{CM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$$

پس CM نیمساز داخلی زاویه C است و از آنجا که $\widehat{MCN} = 90^\circ$

بنابراین CN نیز نیمساز خارجی زاویه C است و طبق قضیه پیش داریم $(AHMN) = -1$

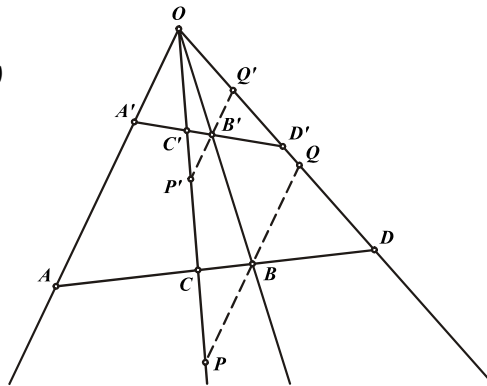
قضیه ۷-۱۷: اگر $(ABCD) = -1$ و نقطه‌ای خارج از خط AB باشد چهار آنگاه چهار خط OA, OB, OC, OD و



هر خط دیگری را نیز که این چهار خط را قطع کند به نسبت همساز تقسیم خواهند کرد.

فرض: $(ABCD) = -1$

حکم: $(A'B'C'D') = -1$



از نقاط B و B' خطوطی به موازات OA رسم می‌کنیم تا OC و OD را در P ، Q ، P' و Q' قطع کنند. از آنجا که $(ABCD) = -1$ طبق قضیه ۷-۱۵ خواهیم داشت $PB = BQ$ ، همچنین به دلیل توازی PQ و $P'Q'$ نتیجه می‌شود $P'B' = B'Q'$. پس بنا بر عکس قضیه ۷-۱۵ می‌توان نتیجه گرفت $(A'B'C'D') = -1$.

تعریف: چهار خط هم‌مرس OA ، OB ، OC و OD که توسط یک مورب، و در نتیجه توسط هر موربی در چهار نقطه همساز قطع می‌شوند را یک دستگاه همساز یا توافقی می‌نامیم که به صورت $O(ABCD) = -1$ نمایش می‌دهیم. همچنین هر یک از این چهار خط را نیز یک شعاع همساز یا توافقی می‌نامیم.

مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

(۱) قاطع d اضلاع مثلث ABC را در M ، N و P قطع می‌کند. اگر A' ، B' و C' را روی اضلاع طوری انتخاب کنیم که هر کدام به همراه نقطه حاصل از تقاطع d با آن ضلع، ضلع مورد نظر را به نسبت همساز تقسیم



کنند، ثابت کنید AA' ، BB' و CC' هم‌م‌س‌ر‌ا‌ن‌د.

(۲) خط d و دو نقطه A و B در طرفین آن مفروض‌اند. نشان دهید نقطه‌ای مانند P روی خط d وجود دارد که خط d نیمساز زاویه APB باشد.



(۳) نشان دهید در هر مثلث ABC همواره $A(HOI I_b) = -1$ است.

(۴) چهار نقطه هم خط A ، B ، C و D مفروض‌اند. نقاط P و Q را روی این خط طوری پیدا کنید که داشته باشیم



$$-1 = (ABPQ) \text{ و } -1 = (CDPQ).$$

(۵) در دایره‌ای دو وتر AB و AC را رسم می‌کنیم. قطر عمود بر AB ، وتر AC را در H و امتداد BC را در K و دایره را در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که M و N ، پاره خط HK را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند.



(۶) ثابت کنید در هر دوزنقه محل تلاقی دو ساق، محل تلاقی دو قطر و اوساط دو قاعده، چهار نقطه هم خط می‌باشند که یک گستره‌ی همساز را تشکیل می‌دهند.



(۷) D و E را پای نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A از مثلث ABC در نظر بگیرید. اگر میانه نظیر ضلع



BC بر دایره‌ای به قطر DE مماس باشد ثابت کنید مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

(۸) نشان دهید اگر در گستره توافقی $(ABCD) = -1$ همه پاره خط‌ها از یک نقطه‌ی گستره، مثلاً A ، اندازه

$$\text{گرفته شوند آنگاه داریم: } \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

(۹) ثابت کنید در دو دایره متخارج نقاط برخورد مماس‌های مشترک داخلی و خارجی با خط‌المرکزین دو دایره، نسبت



به مرکزهای این دو دایره مزدوج توافقی‌اند.



(۱۰) نشان دهید $O(ABCD) = -1$ اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{\sin \widehat{AOC}}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}$

(۱۱) AD و AA' به ترتیب ارتفاع و میانه مثلث ABC هستند. از نقطه A' خطوطی به موازات اضلاع AB و



AC رسم می‌کنیم تا ارتفاع AD را به ترتیب در P و Q قطع کنند. ثابت کنید: $(ADPQ) = -1$

(۱۲) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع AC و $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ است. در نقطه C عمودی بر ضلع BC خارج می‌کنیم



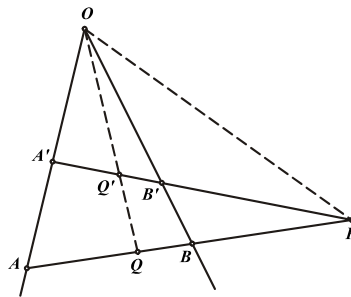
تا امتداد ضلع AB را در F قطع کند. نشان دهید: $\widehat{AMB} = \widehat{FMC}$

۷-۴ قطب و قطبی

هدف بخش: قطب و قطبی یکی از جالب‌ترین تبدیلات هندسی است که به دلیل تبدیل نقطه و خط به یکدیگر در حل مسایل پیشرفته هندسه مسطحه کاربردی منحصر بفرد دارد. مبحث قطب و قطبی بسط و گسترشی است بر تقسیم همساز که به زیبایی هر چه تمام‌تر شکل یافته و به کار گرفته شده است که در این بخش با آن آشنا خواهیم شد.

قطب و قطبی نسبت به زاویه

قضیه ۷-۱۸: نقطه P و زاویه O مفروض‌اند. خط متغیری از P گذشته و اضلاع زاویه O را در A و B قطع می‌کند. اگر مزدوج همساز نقطه P نسبت به پاره خط AB را Q بنامیم ($(ABQP) = -1$) آنگاه مکان هندسی نقطه Q خطی است که از O می‌گذرد.



خط ثابت PBA و نقطه Q را به عنوان مزدوج توافقی P نسبت به AB در نظر می‌گیریم. از آنجا که $(ABQP) = -1$ بنابراین $O(ABQP) = -1$ تشکیل یک دستگاه توافقی را می‌دهد. پس هر خط دیگری که از P بگذرد و شعاع‌های همساز OA ، OB و OQ را به ترتیب در A' ، B' و Q' قطع کند خواهیم داشت $(A'B'Q'P) = -1$ یعنی Q' مزدوج همساز P نسبت به $A'B'$ خواهد بود و به عبارت دیگر تمامی مزدوج همسازهای نقطه P روی شعاع همساز OQ قرار دارند. بنابراین مکان هندسی نقطه Q خطی است که از O می‌گذرد.

تعریف: نقطه P را قطب و خط OQ را قطبی نقطه P نسبت به زاویه O می‌نامند.

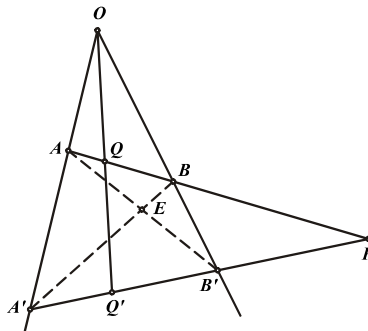
نکته ۱- نقطه P تنها یک قطبی نسبت به زاویه O دارد در حالی که هر خط OQ می‌تواند بی‌نهایت قطب داشته باشد که روی خط OP واقع شده‌اند.

نکته ۲- همواره از قطب و قطبی یکی داخل و دیگری در خارج از زاویه قرار می‌گیرند.

مسئله ۷-۱۶: نقطه P و زاویه O مفروض‌اند. دو خط دلخواه از P می‌گذرانیم تا اضلاع زاویه O را در A ، B ، A' و B' قطع کنند. اگر AB' و $A'B$ یکدیگر را در E قطع کنند، نشان دهید قطبی P نسبت به زاویه O از

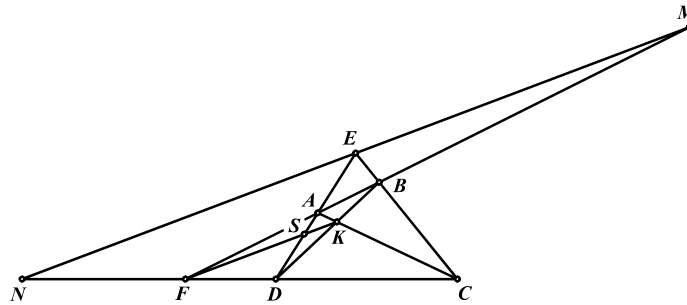


نقطه E می‌گذرد.



فرض می‌کنیم قطبی P از E گذشته و AB و $A'B'$ را به ترتیب در Q و Q' قطع کند. در این صورت داریم:
 $E(A'B'Q'P) = -1$ و $E(ABQP) = -1$ از طرف دیگر شعاع EP در دو دستگاه همساز مشترک و شعاع‌های همساز EA و EB نیز به ترتیب در راستای شعاع‌های EA' و EB' هستند. بنابراین شعاع‌های چهارم این دو دستگاه نیز با یکدیگر هم‌راستا خواهند بود و به عبارت دیگر E روی QQ' یا قطبی نقطه P قرار دارد.
 این مسأله با یک بار استفاده از قضایای سوا و متلائوس نیز به سادگی قابل حل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۷-۱۷: چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است به طوری که امتداد اضلاع AB و CD یکدیگر را در F و امتداد اضلاع AD و BC یکدیگر را در E قطع می‌کنند. محل برخورد اقطار چهارضلعی $ABCD$ را K می‌نامیم و از نقطه E خطی به موازات FK رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و CD را به ترتیب در M و N قطع کند. ثابت کنید E وسط MN است.



طبق مسأله پیش می‌دانیم که FK قطبی نقطه E نسبت به زاویه BFC است و بنابراین $F(ADSE) = -1$ و از آنجا که خط MN به موازات FK رسم شده و توسط دو شعاع FA و FD به ترتیب در M و N قطع شده است بنابراین قضیه ۷-۱۵ خواهیم داشت $EM = EN$.

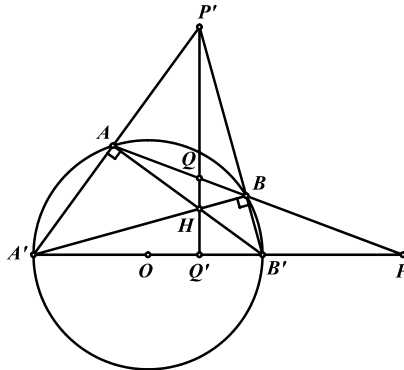
قطب و قطبی نسبت به دایره

قضیه ۷-۱۹: نقطه P و دایره (O) مفروض‌اند. خط متغیری از P گذشته و دایره (O) را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر نقطه Q مزدوج همساز نقطه P نسبت به پاره‌خط AB باشد $(ABQP) = -1$ ، آنگاه مکان



هندسی نقطه Q خطی است که بر PO عمود است.

خط ثابت PO را رسم می‌کنیم تا دایره را در A' و B' قطع کند و مزدوج همساز P نسبت به پاره‌خط $A'B'$ را Q' می‌نامیم. اگر نشان دهیم با تغییر خط PBA همواره QQ' بر PO عمود است حکم اثبات شده است.



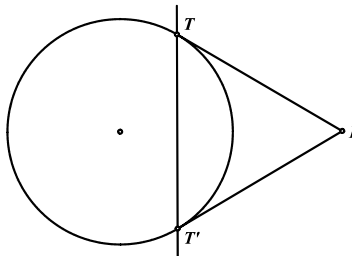
محل تلاقی AA' و BB' را P' و محل تلاقی $B'A$ و BA' را H می‌نامیم. از طرفی می‌دانیم $P'H$ قطبی نقطه P نسبت به زاویه $A'PB'$ است و بنابراین از نقاط Q و Q' می‌گذرد چرا که داریم $(ABQP) = -1$ و $(A'B'Q'P) = -1$.

از طرف دیگر $\widehat{A'BB'} = \widehat{A'AB'} = 90^\circ$ و بنابراین $B'A$ و $A'B$ ارتفاعات مثلث $P'A'B'$ هستند و H نیز مرکز ارتفاعی مثلث است. پس $P'H$ نیز ارتفاع دیگری از مثلث بوده و بر $A'B'$ عمود است. بنابراین QQ' بر PO عمود است و حکم ثابت شده است.

سعی کنید همین حکم را در حالتی که P داخل دایره است با روشی مشابه روش فوق ثابت کنید.

تعریف: نقطه P را قطب و خط PQ' را قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) می‌نامند.

نکته ۱- در شکل فوق هر چه خط PBA را به سمت بالا حرکت دهیم سه نقطه A ، B و Q به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند تا جایی که این خط در نقطه T بر دایره مماس شده و سه نقطه A ، B و Q در نقطه T بر یکدیگر منطبق می‌شوند. بنابراین نقطه T و همچنین نظیر آن T' نیز روی قطبی نقطه P قرار دارند و به عبارت دیگر خط TT' قطبی نقطه P نسبت به دایره است.



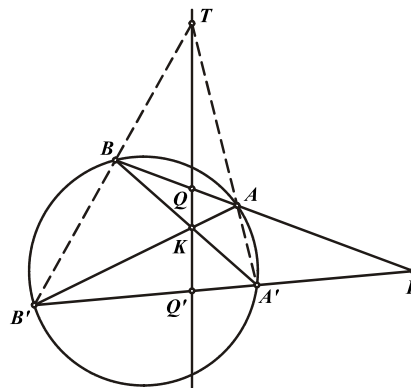
نکته ۲- اگر P روی دایره باشد، قطبی آن خطی مماس بر دایره در نقطه P خواهد بود.

نکته ۳- اگر P بر مرکز دایره واقع شود، قطبی نخواهد داشت و همچنین اگر قطبی از مرکز دایره بگذرد، قطب نخواهد داشت.

نکته ۴- اگر قطب P خارج دایره باشد قطبی آن با دایره متقاطع است و اگر قطب P داخل دایره باشد، قطبی آن با دایره نامتقاطع است.

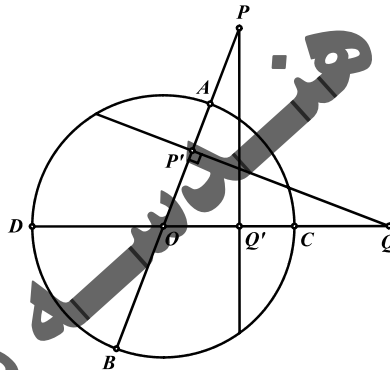
نکته ۵- هر نقطه P تنها یک قطبی نسبت به دایره دارد و بالعکس.

مسئله ۷-۱۸: دو خط گذرنده از نقطه P دایره C را در نقاط A ، B ، A' و B' قطع کرده‌اند. اگر AB' و BA' یکدیگر را در نقطه K قطع کنند، نشان دهید K روی قطبی نقطه P نسبت به دایره C قرار دارد.



اگر AA' و BB' یکدیگر را در T قطع کنند، طبق مسأله ۷-۱۶ می‌دانیم که TK قطبی نقطه P نسبت به زاویه $A'TB'$ است. پس اگر TK وترهای AB و $A'B'$ را در Q و Q' قطع کند داریم $(ABQP) = -1$ و $(A'B'Q'P) = -1$ و بنابراین خط QQ' قطبی نقطه P نسبت به دایره C است که از K نیز می‌گذرد. شما می‌توانید این مسأله را در حالت‌های مختلفی که هر کدام از نقاط P و K در داخل یا خارج دایره باشند، حل کنید.

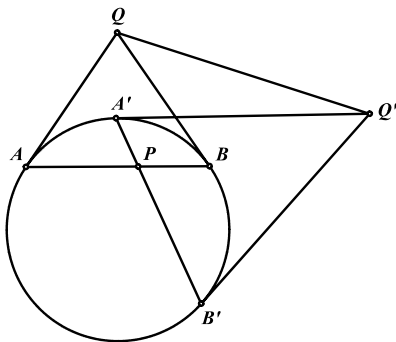
قضیه ۷-۲۰: دو نقطه P و Q و دایره (O) مفروض‌اند. اگر قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) از نقطه Q بگذرد، قطبی نقطه Q نسبت به دایره (O) نیز از نقطه P می‌گذرد. (P و Q می‌توانند داخل یا خارج از دایره باشند).



خطوط PO و QO را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A, B, C, D قطع کنند. اگر P' و Q' به ترتیب مزدوج همسازهای نقاط P و Q نسبت به پاره خط‌های AB و CD باشند، از آنجا که O وسط قطرهای AB و CD قرار دارد خواهیم داشت $OP \cdot OP' = R^2 = OQ \cdot OQ'$.
بنابراین چهارضلعی $PP'Q'Q$ محاطی است و $\widehat{PP'Q} = \widehat{PQ'Q}$. اگر قطبی نقطه P از Q بگذرد، $P'Q$ قطبی نقطه P بوده و بر PO عمود خواهد بود. پس $\widehat{PQ'Q} = \widehat{PP'Q} = 90^\circ$. بنابراین از آنجا که PQ' از نقطه Q' مزدوج همساز نقطه Q گذشته و بر OQ نیز عمود است می‌توان نتیجه گرفت که PQ' قطبی نقطه Q است و به عبارت دیگر قطبی نقطه Q نیز از P می‌گذرد.



مسأله ۷-۱۹: اگر P نقطه‌ای داخل دایره (O) باشد قطبی نقطه P نسبت به دایره را رسم کنید.

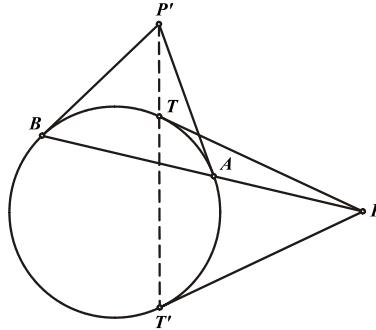


دو وتر دلخواه AB و $A'B'$ را از نقطه P می‌گذرانیم. با رسم مماس‌هایی بر دایره در نقاط A و B و همچنین A' و B' ، قطب‌های خطوط AB و $A'B'$ بدست می‌آید که آن‌ها را Q و Q' می‌نامیم. خط QQ' قطبی نقطه P خواهد بود، چرا که قطبی نقاط Q و Q' از P می‌گذرد و بنابراین قطبی نقطه P نیز از نقاط Q و Q' خواهد گذشت.

مسئله ۷-۲۰: نقطه P و دایره (O) مفروض‌اند. خط دلخواهی از نقطه P رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. اگر مماس‌های PT و PT' را از نقطه P بر دایره رسم کنیم، نشان دهید خط TT' و خطوط



مماس بر دایره در نقاط A و B در یک نقطه هم‌رس‌اند.

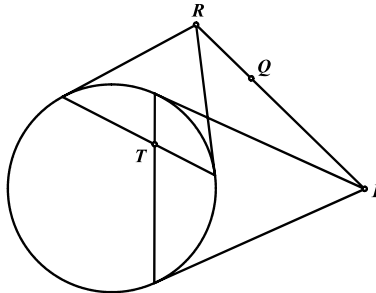


اگر محل تلاقی مماس‌های بر دایره در نقاط A و B را P' بنامیم، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم قطبی نقطه P یعنی TT' از نقطه P' می‌گذرد. از آنجا که P روی قطبی P' (خط AB) قرار دارد بنابراین واضح است که P' نیز روی قطبی P (خط TT') قرار خواهد داشت.

قضیه ۷-۲۱: اگر سه نقطه P ، Q و R با یکدیگر هم‌خط باشند، خطوط قطبی آن‌ها نسبت به دایره (O) هم‌رس



خواهند بود و بالعکس.



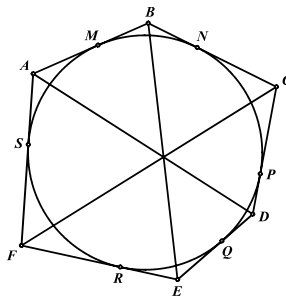
خطوط قطبی دو نقطه P و R را رسم می‌کنیم تا در نقطه T یکدیگر را قطع کنند. در این صورت خط PQR قطبی نقطه T می‌باشد. از آنجا که قطبی نقطه T از نقطه Q می‌گذرد بنابراین قطبی نقطه Q نیز از T خواهد گذشت. پس خطوط قطبی نقاط P ، Q و R در T هم‌رس‌اند.

عکس قضیه نیز به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسئله ۷-۲۱ (قضیه بریانشن): اگر شش ضلعی $ABCDEF$ محیطی باشد، نشان دهید قطرهای AD و BE و



CF در یک نقطه هم‌رس‌اند.



اگر قطب‌های خطوط AD ، BE و CF نسبت به دایره محاطی را به ترتیب K_1 ، K_2 و K_3 بنامیم، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم نقاط K_1 ، K_2 و K_3 هم‌خط‌اند.

محل تماس اضلاع با دایره را به ترتیب M ، N ، P ، Q ، R و S می‌نامیم. از آنجا که نقاط A و D روی قطبی نقطه K_1 قرار دارند، نقطه K_1 نیز روی خطوط قطبی نقاط A و D یعنی خطوط PQ و MS قرار خواهد داشت به عبارت دیگر $K_1 = (MS, PQ)$ و به همین ترتیب خواهیم داشت $K_2 = (MN, RQ)$ و $K_3 = (NP, SR)$ و بنا بر قضیه پاسکال برای شش ضلعی محاطی $MNPQRS$ نتیجه می‌شود که نقاط K_1 ، K_2 و K_3 با یکدیگر هم‌خط‌اند. پس حکم ثابت شد.

مثلث‌های خود قطبی

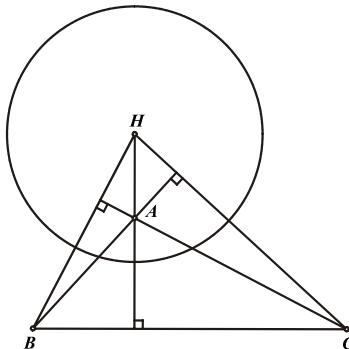
تعریف: یک مثلث را نسبت به یک دایره خود قطبی می‌نامند اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.

قضیه ۷-۲۲: اگر مثلثی نسبت به یک دایره خود قطبی باشد، مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث منطبق است.

می‌دانیم که خط قطبی همواره بر خط گذرنده از قطب و مرکز دایره عمود است و بنابراین مرکز دایره روی خط عمود وارد از قطب بر قطبی واقع است. پس اگر مثلث ABC نسبت به دایره (O) خود قطبی باشد آنگاه O مرکز دایره، باید روی خط عمود وارد از رئوس بر اضلاع مقابل آن که ارتفاع‌های مثلث هستند قرار داشته باشد و به عبارت دیگر مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث واقع است.

نکته ۱- از سه رأس مثلث خود قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر خارج دایره قرار دارند. چرا که اگر رأس A داخل دایره باشد رأس B و C روی قطبی A در خارج از دایره خواهند بود و اگر A بیرون دایره باشد و قطبی آن، دایره را در P و Q قطع کند، رئوس B و C مزدوج‌های توافقی P و Q خواهند بود چرا که قطبی B نسبت به دایره از C می‌گذرد. بنابراین یکی داخل و دیگری خارج دایره خواهد بود.

نکته ۲- هر مثلث خود قطبی همواره یک زاویه منفرجه دارد. چرا که نقطه قطب و قطبی آن، همیشه روی خط عمود وارد از قطب بر قطبی در یک طرف مرکز دایره قرار دارند و این خاصیت تنها در مثلث‌هایی با زاویه منفرجه برقرار است که مرکز ارتفاعی آن‌ها خارج از مثلث قرار دارد. پس هیچ مثلث حاده‌الزاویه‌ای نمی‌تواند خود قطبی باشد.

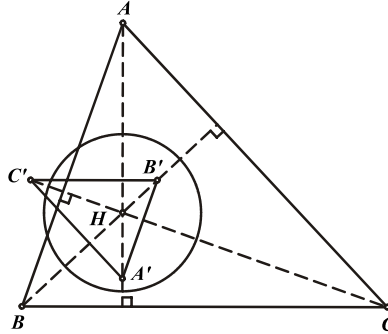


مسئله ۷-۲۲: نشان دهید تبدیل یافته قطبی مثلث ABC نسبت به دایره‌ای به مرکز H مرکز ارتفاعی مثلث، مثلثی



است متجانس با مثلث ABC .

قطبی رأس A بر AH عمود بوده و بنابراین با ضلع BC موازی است و به همین ترتیب قطبی هر رأس با ضلع مقابل آن رأس موازی است. پس تبدیل یافته قطبی مثلث ABC با آن مجانس است.



قضیه ۷-۲۳: ترکیب تبدیل قطبی با تبدیل تجانس، تبدیلی است که تمام خواص تبدیل قطبی را دارد.

به عبارت دیگر اگر شکل A را با استفاده از تبدیل قطبی به شکل A' تبدیل کنیم و دوباره شکل A' را با استفاده از تجانس به شکل A'' تبدیل کنیم از آنجا که تبدیل تجانس تنها شکل را به یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌کند و تمام زوایا و هم‌خطی‌ها و هم‌رسی‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین تمام خواص قطبی که روی شکل A' برقرار است روی A'' نیز برقرار خواهد بود.

نکته: بنابر قضیه فوق می‌توان با استفاده از ترکیب تبدیل قطبی و تجانس، خواص مثلث‌های خود قطبی را برای هر مثلث حاده‌الزاویه نیز تعمیم داده و استفاده کرد. به این صورت که ابتدا مثلث دلخواه ABC را با تبدیل قطبی نسبت به دایره‌ای به مرکز H به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌کنیم. از آنجا که طبق مسأله ۷-۲۲ مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC مجانس است، بنابراین با یک تبدیل تجانس می‌توان مثلث $A'B'C'$ را به مثلث ABC تبدیل کرد. حال در مجموع این دو تبدیل، هر رأس مثلث ABC به ضلع مقابل آن و بالعکس تبدیل شده‌اند و این تبدیل تمام خواص تبدیل قطبی را نیز دارد.

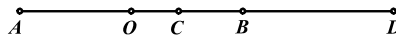
مسائل (راه حل کامل این مسائل را در کتاب ببینید)

- (۱) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خطهای قطبی آن نسبت به دو دایره مفروض بر هم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المركزین دو دایره قطر آن است.
- (۲) فرض کنید H نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC باشد. اگر BH و CH اضلاع AC و AB را در E و F قطع کنند ثابت کنید AD نیمساز زاویه EDF است.
- (۳) نقطه دلخواه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. در نقطه P عمودهایی بر PA ، PB و PC خارج می‌کنیم تا اضلاع مقابل را به ترتیب در A' ، B' و C' قطع کنند. نشان دهید نقاط A' ، B' و C' هم‌خط‌اند.
- (۴) نقطه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. خط دلخواه l اضلاع BC ، AC و AB یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده است. در نقطه P عمودهایی بر خطوط PA_1 ، PB_1 و PC_1 خارج می‌کنیم تا خط l را به ترتیب در نقاط A_2 ، B_2 و C_2 قطع کنند. نشان دهید خطوط AA_2 ، BB_2 و CC_2 در یک نقطه هم‌رس‌اند.
- (۵) قطر AB از دایره C مفروض است. نقطه P را روی خط مماس گذرنده از A در نظر گرفته و مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر TH خط عمود وارد از T بر قطر AB باشد، نشان دهید PB پاره خط TH را نصف می‌کند.
- (۶) دایره (O') از مرکز دایره (O) گذشته و آن را در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه دلخواه T روی دایره (O') مماس‌های TC و TD را بر دایره (O) فرود می‌آوریم. اگر AB و TO یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید نقاط C ، D و P هم‌خط‌اند.
- (۷) از نقطه M مماس‌های MD و MA و از نقطه N مماس‌های NC و NB را مطابق شکل بر دایره C رسم کرده‌ایم. محل تلاقی امتدادهای MA و BC را P و محل تلاقی امتدادهای NB و AD را Q و محل تلاقی AB و PQ را S می‌نامیم. ثابت کنید نقاط S ، M و N بر یک استقامت‌اند.
- (۸) نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC ضلع BC و دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه D دایره‌ای به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویه XAY را نصف می‌کند. (مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۳)
- (۹) مثلث ABC و نقطه دلخواه P مفروض‌اند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمود بر AP رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل A را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب مشخص می‌کنیم. نشان دهید سه نقطه A' ، B' و C' هم‌خط‌اند.
- (۱۰) قضیه پروانه: در دایره $C(O,R)$ وتر MN مفروض است. از نقطه P وسط این وتر دو وتر دلخواه AB و CD را می‌گذرانیم. اگر AD و BC با MN در نقاط E و F برخورد نمایند، ثابت کنید: $PE = PF$
- (۱۱) در مثلث ABC ، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ی به قطر BC ، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را در l_a می‌نامیم. خطوط l_b و l_c نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید خطوط l_a ، l_b و l_c هم‌رس‌اند.

۷-۵ انعکاس

هدف بخش: انعکاس یکی از زیباترین و در عین حال قوی‌ترین تبدیلات هندسی است که قدرت فوق‌العاده‌ای در حل بسیاری از مسایل پیشرفته هندسه دارد. البته استفاده از انعکاس در حل مسایل هندسه نیازمند مهارت‌هایی ویژه است که سعی می‌شود تا در این بخش پس از اشاره به اصول و مبانی آن، با برخی از این مهارت‌ها نیز آشنا شویم.

پیش از این می‌دانیم که اگر $(ABCD) = -1$ و O نقطه وسط AB باشد آنگاه $OC \cdot OD = OA^2 = k$.



بر همین اساس می‌توان تبدیل هندسی تعریف کرد که با معلوم بودن نقطه O و عدد k نقطه C را به D و بالعکس تبدیل می‌کند.

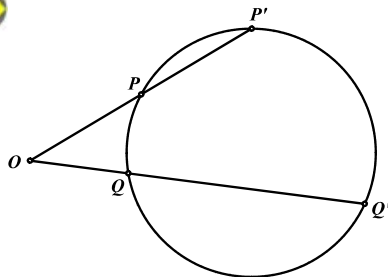
تعریف: اگر نقطه O به عنوان مرکز انعکاس و عدد k به عنوان ثابت انعکاس مفروض باشند، انعکاس تبدیلی است از صفحه بر روی آن که هر نقطه P را به نقطه P' تبدیل می‌کند به طوری که نقاط O ، P و P' هم خط بوده و $OP \cdot OP' = k$. در این صورت P' را منعکس P می‌نامیم. واضح است که P نیز منعکس P' است.

نکته ۱- با توجه به بحث ابتدای بخش اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع \sqrt{k} رسم کنیم دو نقطه P و P' نسبت به آن دایره وارون یکدیگرند. این دایره را دایره انعکاس و \sqrt{k} را شعاع انعکاس می‌نامند.

نکته ۲- اگر نسبت انعکاس k باشد P و P' در یک طرف نقطه O و اگر $-k$ باشد در دو طرف نقطه O قرار خواهند داشت.

نکته ۳- با توجه به تعریف، منعکس هر خط نسبت به نقطه‌ای روی آن همان خط خواهد بود. چرا که منعکس هر نقطه از خط روی همان خط قرار خواهد گرفت.

مسئله ۷-۲۳: اگر P' و Q' منعکس‌های نقاط P و Q نسبت به نقطه غیر هم‌خط O و با ثابت k باشند نشان



دهید:

الف) نقاط P ، Q ، P' و Q' هم‌دایره‌اند.

$$P'Q' = \frac{k \cdot PQ}{OP \cdot OQ} \quad \text{ب)}$$

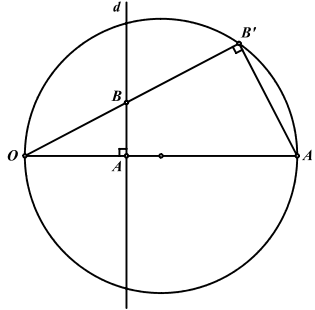
الف) با توجه به فرض داریم $OP \cdot OP' = k = OQ \cdot OQ'$ بنابراین چهارضلعی $PP'Q'Q$ محاطی است و نقاط P ، P' ، Q و Q' هم‌دایره‌اند.

(ب) از آنجا که $\triangle OPQ \sim \triangle OP'Q'$ داریم:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{OQ'.OQ}{OP.OQ} = \frac{k}{OP.OQ} \Rightarrow P'Q' = \frac{k.PQ}{OP.OQ}$$



قضیه ۷-۲۴: منعکس هر خط نسبت به نقطه‌ای خارج از آن، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.



فرض کنید می‌خواهیم منعکس خط d نسبت به نقطه O با ثابت k را بیابیم. پای عمود وارد از O بر خط d را A می‌نامیم و B را نیز نقطه دلخواهی روی d در نظر می‌گیریم. اگر A' و B' به ترتیب منعکس‌های نقاط A و B نسبت به نقطه O باشند از آنجا که چهارضلعی $ABB'A'$ محاطی است نتیجه می‌شود $\widehat{OB'A'} = \widehat{BAA'} = 90^\circ$. بنابراین با تغییر B روی خط d ، نقطه B' همواره پاره‌خط OA' را با زاویه 90° درجه می‌بیند. پس B' همواره روی دایره‌ای به قطر OA' حرکت خواهد کرد. یعنی منعکس خط d دایره‌ای به قطر OA' است.

عکس قضیه: منعکس هر دایره نسبت به نقطه‌ای روی آن، یک خط است.

اثبات این قضیه با توجه به اثبات قضیه پیش بسیار ساده است که به خود شما واگذار می‌شود.

نکته ۱- اگر دایره $C(O)$ را نسبت به نقطه P روی آن منعکس کنیم خط حاصل بر PO عمود است.

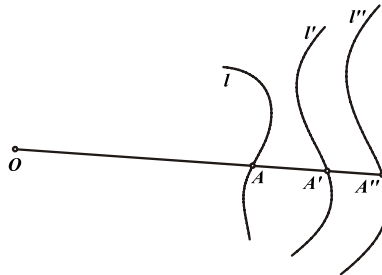
نکته ۲- هر دایره و خط به دو صورت منعکس یکدیگرند و دو انتهای قطری از دایره که بر خط عمود است مراکز این انعکاس‌ها هستند.

نکته ۳- اگر k مثبت باشد خط و دایره، هر دو در یک طرف مرکز انعکاس و اگر k منفی باشد در دو طرف آن خواهند بود.

مسئله ۷-۲۴: منحنی l و نقطه O مفروض‌اند. یک‌بار منحنی l را نسبت به مرکز O با ثابت k' منعکس می‌کنیم تا منحنی l' حاصل شود و بار دیگر منحنی l را نسبت به مرکز O با ثابت k'' منعکس می‌کنیم و آن را l''



می‌نامیم. نشان دهید منحنی‌های l' و l'' مجانس یکدیگرند.



نقطه دلخواه A را روی l در نظر می‌گیریم و منعکس‌های آن را به ترتیب A' و A'' می‌نامیم. در این صورت داریم:

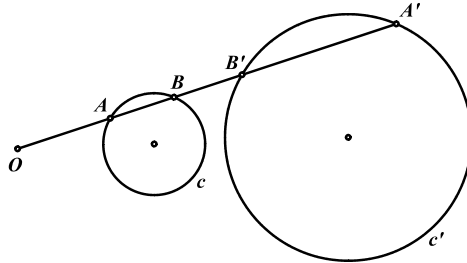
$$\left. \begin{array}{l} OA \cdot OA'' = k'' \\ OA \cdot OA' = k' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA''}{OA'} = \frac{k''}{k'}$$

از آنجا که k'' و k' مقادیری ثابت هستند پس با تغییر نقطه A روی l همواره A'' و A' به نسبت معلوم

مجانس یکدیگر خواهند بود. بنابراین l'' مجانس l' به نسبت $\frac{k''}{k'}$ و مرکز O می‌باشد.



قضیه ۷-۲۵: منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد، یک دایره است.



اگر O مرکز و ثابت انعکاس باشند و P نیز قوت نقطه O نسبت به دایره C باشد نشان می‌دهیم منعکس دایره C نسبت به مرکز O و با ثابت k دایره‌ای مانند C' است.

خط دلخواهی از O می‌گذرانیم تا دایره C را در نقاط A و B قطع کند و منعکس‌های آن‌ها نسبت به مرکز O و با ثابت k را به ترتیب A' و B' می‌نامیم. منعکس دایره C نسبت به مرکز O و با ثابت P خود دایره خواهد شد چرا که $P = OA \cdot OB$ و هر دو نقطه مانند A و B با این انعکاس به یکدیگر تبدیل می‌شوند. حال اگر بار دیگر دایره C را نسبت به مرکز O و با ثابت k منعکس کنیم طبق مسأله پیش شکل حاصل دایره‌ای خواهد بود مجانس با دایره C به نسبت $\frac{k}{P}$.

نکته ۱- توجه داشته باشید که A' منعکس A و B است و به همین ترتیب B' منعکس B و A است. پس سعی کنید تفاوت دو نقطه منعکس و مجانس در دو دایره را در ذهن خود روشن کنید تا دو نقطه مجانس و منعکس را اشتباه در نظر نگیرید.

نکته ۲- هر دو دایره به دو صورت منعکس یکدیگرند و مراکز تجانس دو دایره (محل برخورد مماس‌های مشترک داخلی و خارجی) مراکز این انعکاس‌ها هستند.

نکته ۳- اگر دو دایره منعکس یکدیگر باشند مراکز آن‌ها منعکس یکدیگر نخواهند بود، بلکه به نسبت خاصی مجانس یکدیگرند.

نکته ۴- اگر نسبت انعکاس برابر قوت مرکز انعکاس نسبت به دایره باشد، منعکس دایره خود آن است.

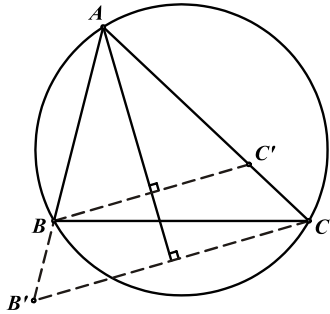
قضیه ۷-۲۶: تبدیل انعکاس همواره زوایا را حفظ می‌کند.

به عنوان مثال اگر دو خط d_1, d_2 را به مرکز و نسبت خاصی منعکس کنیم زاویه بین این دو خط و زاویه بین منعکس‌های آن‌ها که ممکن است خط یا دایره بشوند، برابر است. اثبات این قضیه در حالات مختلف آن، به سادگی صورت می‌پذیرد که به خود شما واگذار می‌شود.

قضیه ۷-۲۷: اگر مثلث ABC را به مرکز A و نسبت $AC.AB$ منعکس کنیم و سپس نسبت به نیمساز زاویه A قرینه سازیم، نقاط B و C به یکدیگر و ضلع BC به دایره محیطی مثلث تبدیل خواهد شد.

اگر B' و C' به ترتیب منعکس‌های B و C باشند خواهیم داشت:

$$AB.AB' = AC.AC' = AB.AC \Rightarrow AB = AC', AC = AB'$$



بنابراین مثلث‌های ABC' و ACB' متساوی‌الساقین بوده و نیمساز رأس A ، ارتفاع و میانه این مثلث‌ها می‌باشد و B' و C' به ترتیب قرینه‌های B و C نسبت به این نیمساز خواهند بود. پس با انعکاس مثلث ABC به مرکز A و نسبت $AB.AC$ و تقارن نسبت به نیمساز A رئوس B و C به یکدیگر تبدیل می‌شوند. منعکس ضلع BC نیز دایره خواهد شد که از مرکز انعکاس (A) و منعکس‌های B و C خواهد گذشت، یعنی همان دایره‌های محیطی مثلث ABC .

توجه داشته باشید که تبدیل فوق یعنی ترکیب یک انعکاس به مرکز A و نسبت $AB.AC$ با یک تقارن نسبت به نیمساز زاویه A تبدیل جالبی است که به دلیل خاصیت منحصر بفرد آن کاربرد زیادی در حل مسایل مربوطه دارد.

مسائل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

(۱) چهار نقطه در یک صفحه مفروض اند. منعکس هر دسته سه تایی را نسبت به نقطه‌ی چهارم می‌یابیم. نشان دهید



که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.



(۲) قضیه بطلمیوس: برای هر چهار نقطه‌ی دلخواه A, B, C, D در صفحه ثابت کنید:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$



(۳) اگر (O, R) و (I, r) به ترتیب دوائر محیطی و محاطی داخلی مثلث باشند، ثابت کنید:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

(۴) دو دایره‌ی ثابت (C_1) و (C_2) یکدیگر را در نقاط E و F قطع می‌کنند. دایره‌ی متغیر (C) بر

دوائر (C_1) و (C_2) در نقاط C و D مماس است و خط EF را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید



چهار خط AC, AD, BC, BD از چهار نقطه‌ی ثابت در صفحه عبور می‌کنند.

(۵) خط ثابت d از مرکز دایره‌ی ثابت (O, R) می‌گذرد و دایره‌ی متغیر (O', R') از نقطه O می‌گذرد و

مرکزش روی خط d قرار دارد. مکان هندسی محل تماس مماس مشترک دو دایره‌ی C و C' را با دایره‌ی



متغیر بیابید.

(۶) D نقطه‌ای دلخواه روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC است. ثابت کنید مرکز دایره‌ای که بر دوائر



محیطی مثلث‌های ABC, ADC, ABD مماس داخل است، روی AD قرار دارد.

(۷) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است. دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی K بر یکدیگر مماس خارج و بر دایره C

مماس داخل و بر وتر AB مماس هستند. اگر مماس مشترک C_1 و C_2 در نقطه‌ی K ، دایره‌ی C را در

نقطه‌ی P قطع کند، $(P$ و K در یک طرف وتر AB قرار دارند) ثابت کنید KP نیمساز زاویه‌ی APB است.



(۸) دو نقطه‌ی ثابت A و B و دایره‌ی C مفروض اند. قاطعی متغیر از B می‌گذرانیم تا دایره‌ی C را در C و D قطع

کند. E و F محل تلاقی دیگر دایره‌ی C با AC و AD می‌باشند. مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث



AEF را بیابید.

(۹) در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 2\hat{C}$ و خط BD نیمساز زاویه \hat{B} است. P را مرکز دایره‌ای می‌گیریم که بر ضلع

BC مماس است و همچنین بر دوائر محیطی مثلث‌های ABD و BCD مماس خارج است. ثابت کنید:



$$BP \perp AC$$

(۱۰) اگر A', B', C' به ترتیب منعکس‌های نقاط A, B, C به مرکز H - مرکز ارتفاعی مثلث ABC - و



مقدار ثابت k باشند ثابت کنید H مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است.

(۱۱) اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایره‌ی محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد، ثابت کنید خطی که از نقاط تماس آن با اضلاع می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محیطی داخلی (یا دایره‌ی محیطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.



(۱۲) قضیه فوئر باخ: نشان دهید دایره‌ی نه نقطه‌ای مثلث بر دایره‌ی محیطی داخلی (و دایره‌ی محیطی خارجی) مثلث مماس است.



(۱۳) فرض کنید ABC ، یک مثلث و Ω دایره محیطی آن باشد. دایره‌ای است که از نقاط B و C می‌گذرد و بر Ω عمود است. دایره Ω_b و Ω_c نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. دایره Ω_a و Ω_b یکدیگر را دوباره در C' قطع می‌کنند و به همین ترتیب نقاط A' و B' بدست می‌آیند. ثابت کنید شعاع دایره محیطی $A'B'C'$ برابر است با نصف شعاع Ω .



از مقدمات تا المپیاد
هندسه مسطحه

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

- (۱) زوایای B و D در چهارضلعی $ABCD$ ، برابر 135° است. عمودهای خارج شده از نقطه‌ی C بر اضلاع BC و DC ، امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کنند. دایره محیطی مثلث‌های ABD و AEF یکدیگر را در P قطع می‌کنند. نشان دهید: $\widehat{APC} = 90^\circ$ (مرحله دوم المیپاد ریاضی ۱۳۸۱)
- (۲) در چهارضلعی $ABCD$ ، دو ضلع AD و BC با هم برابرند. خط متغیری دو ضلع BC و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند به طوری که داریم $CE=AF$. این خط دو قطر AC و BD را نیز در نقاط P و Q قطع می‌کند. اگر محل تقاطع دو قطر AC و BD را K بنامیم نشان دهید که با تغییر خط مذکور، دایره محیطی مثلث KPQ همواره از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد. (المیپاد جهانی ریاضی سال ۲۰۰۵)
- (۳) ثابت کنید در مثلث ABC ، وسط ارتفاع AH و محل تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC و نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث با یکدیگر هم خطاند.
- (۴) فرض کنید دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D ، E و F به ترتیب بر اضلاع BC ، CA و AB مماس باشد. ثابت کنید O و I مراکز دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC بر خط اوپلر مثلث DEF قرار دارند.
- (۵) وتر AB از دایره‌ی (O) مفروض است. دو دایره (O_1) و (O_2) بر دایره‌ی (O) مماس داخل و بر پاره‌خط AB در نقطه‌ی C مماس می‌باشند. ثابت کنید که نسبت شعاع‌های دو دایره‌ی (O_1) و (O_2) مستقل از مکان نقطه C مقداری ثابت است.
- (۶) مسأله چاقوی کفاشی: فرض کنید C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. ثابت کنید شعاع دو دایره، که هر کدام هم بر دو دایره از دایره‌ی AB به قطرهای AB ، AC و BC و هم بر خط عمود بر AB که از C می‌گذرد، مماس است، با یکدیگر برابرند.
- (۷) نقطه‌ی E را در چهارضلعی محاطی $ABCD$ طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم: $\widehat{EAD} + \widehat{ECD} = \widehat{EBC} + \widehat{EDC} = 90^\circ$ اگر O مرکز دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ و F محل برخورد اقطار AC و AB باشد نشان دهید که نقاط O ، E و F هم‌خطاند.
- (۸) نیم‌دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. از نقطه‌ی M روی امتداد AB که $MA < MB$ ، قاطعی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در نقاط C و D قطع کند به طوری که $MC < MD$. دایره محیطی مثلث‌های OAC و OBD یکدیگر را در K قطع می‌کنند. ثابت کنید: $\widehat{OKM} = 90^\circ$.
- (۹) دایره محاطی مثلث ABC ، در نقاط D ، E و F بر اضلاع BC ، AC و AB مماس است. این دایره را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. نقطه‌ی M را به نقاط B و C وصل می‌کنیم تا دایره محاطی را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. اگر $AM = MD$ ، ثابت کنید: $PF \parallel QE$

۱۰) اوساط اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب A' ، B' و C' می نامیم. از رأس A عمودی بر $A'H$ رسم می کنیم تا ضلع مقابل را در A_1 قطع کند. اگر B_1 و C_1 را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم



نشان دهید سه نقطه A_1 ، B_1 و C_1 هم خطاند و این خط بر خط اویلر مثلث ABC عمود است.

۱۱) نشان دهید عمودهایی که در مرکز دایره محاطی مثلث بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می شوند، اضلاع



متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر OI عمود است قطع می کنند.

۱۲) AD ، BE و CF ارتفاع های مثلث ABC می باشند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، خطی موازی EF رسم می کنیم تا خط BC را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به طور مشابه تعریف می کنیم. ثابت کنید



نقاط A' ، B' و C' بر روی خطی که بر OH عمود است قرار دارند.

۱۳) H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و P نقطه دلخواهی در صفحه می باشد. ارتفاع AH و خط AP دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در A_1 و A_2 قطع می کنند. خط A_1A_2 را در نقطه A' قطع می کند. اگر B' و C' نیز به طور مشابه تعریف شوند ثابت کنید نقاط A' ، B' و C' بر خطی که بر PH عمود



است، واقع اند. P' مزدوج همزاویه نقطه P (مسأله ۴-۴) نسبت به مثلث ABC می باشد.

۱۴) خط l اضلاع مثلث ABC را در A' ، B' و C' قطع کرده است. پای عمودهای وارد از A ، B و C بر $A'H$ ، $B'H$ و $C'H$ را به ترتیب A'' ، B'' و C'' می نامیم. نشان دهید AA'' ، BB'' و CC''



روی خط عمودی که از H بر l رسم می شود هم رس اند.

منابع

- [۱] ای. ف. شاریگین، « مسأله‌هایی در هندسه‌ی مسطحه » ترجمه‌ی ارشک حمیدی، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ دوم ۱۳۷۹.
- [۲] ناتان آلتشیلر کورت، « هندسه‌ی مسطحه » ترجمه‌ی محمود دیانی، تهران، انتشارات فاطمی، چاپ دوم ۱۳۷۹.
- [۳] ولیدشتی، جاوید، « هندسه »
- [۴] ای. ام. یاگلم، « تبدیل‌های هندسی » جلد اول، ترجمه‌ی اسدا. . . کارشناس و عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۹.
- [۵] ای. ام. یاگلم، « تبدیل‌های هندسی » جلد دوم، ترجمه‌ی محمد باقری، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۹.
- [۶] اصلاح‌پذیر، بهمن، « المپیاد ریاضی : تبدیلات هندسی »، جلد اول، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ اول ۱۳۸۲.
- [۷] اصلاح‌پذیر، بهمن، « المپیاد ریاضی : تبدیلات هندسی »، جلد دوم، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ اول ۱۳۸۲.
- [۸] احمدلو، مهران؛ ارزاقی، محمدعلی، « هندسه در المپیادهای ریاضی ایران و جهان »، جلد اول، تهران، انتشارات خوشخوان، چاپ اول ۱۳۸۳.
- [۹] رستمی، محمدهاشم، « دایره المعارف هندسه »، جلد اول، تهران، انتشارات مدرسه، چاپ سوم ۱۳۸۲.
- [۱۰] رستمی، محمدهاشم، « دایره المعارف هندسه »، جلد دوم، تهران، انتشارات مدرسه، چاپ دوم ۱۳۸۲.
- [۱۱] محمودیان، عباد . . . « المپیاد ریاضی در ایران »؛ تهران، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم ۱۳۷۶.
- [۱۲] محمودیان، عباد . . . ملاحی کارای، کیوان؛ اخباریفر، مهران، « المپیاد ریاضی در ایران »، جلد دوم، تهران، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول ۱۳۷۹.
- [۱۳] مترجمین : آجرلو، امیر؛ خزایی، بهزاد، « مسایل پیشنهادی برای المپیادهای بین المللی ریاضی ۲۰۰۱-۱۹۹۵ »، تهران، انتشارات دانش‌پژوهان جوان، چاپ اول ۱۳۸۳.
- [۱۴] مترجم، محمد آبادی، مرتضی، « المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف ۱۹۹۵ »، تهران، انتشارات دانش‌پژوهان جوان، چاپ اول ۱۳۸۳.
- [۱۵] تی. آندرسکو، کی، کولایا، « المپیاد ریاضی در نقاط مختلف دنیا ۱۹۹۶ »، ترجمه‌ی بیاتی، محسن؛ سلماسیان، محسن، اصفهان، انتشارات فروغ ولایت، چاپ اول ۱۳۷۸.
- [۱۶] مترجمین : بهزادی، مهدی؛ زائری، محمد، « المپیادهای ریاضی گوشه و کنار جهان - ۱۹۹۸ »، تهران، انتشارات سلطان، چاپ اول ۱۳۸۰.
- [۱۷] انجمن استادان ریاضی بلژیک، « المپیادهای ریاضی بلژیک »، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات فاطمی.
- [۱۸] گروهی از ریاضیدانان شوروی، « برگزیده مسایل هندسه » ترجمه عادل ارشقی، مؤسسه خدمات فرهنگی رسا، چاپ اول ۱۳۷۰.
- [۱۹] ه. س. م. کوکس تیر، س. ل. گرتیرز، « بازآموزی و باز شناخت هندسه »، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدسه، چاپ پنجم ۱۳۶۹.
- [۲۰] دوره نشریه المپیاد ریاضی کوشیار.
- [۲۱] دوره نشریه دانش پژوه، باشگاه دانش پژوهان جوان
- [۲۲] حاجی زاده، نادر؛ کرد حسین؛ بازوی، حسین، « هندسه سال دوم »، انتشارات خوشخوان، ۱۳۸۱.
- [۲۳] حاجی زاده، نادر؛ بازوی، صادق، « هندسه ۲ »، انتشارات خوشخوان ۱۳۸۳.

- [۲۴] اخباریفر، مهران؛ حمیدی، ارشک؛ محسنی پور، شهرام، « هندسه ۱ » انتشارات فاطمی ۱۳۸۳.
- [۲۵] هندسه ۱ نظام جدید آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- [۲۶] هندسه ۲ نظام جدید آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- [۲۷] جمعی از ریاضیدانان شوروی، « مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف » ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فردوس.
- [۲۸] پ. گوسیا تنيكوف؛ س. رژنی چنكو، « جبر برداری » ترجمه پرویز شهریاری و ابراهیم عادل، انتشارات فاطمی ۱۳۶۹.
- [۲۹] راس هانسبرگر؛ « از اردوش تا کی‌یف » انتشارات فاطمی.
- [۳۰] آرتور انگل؛ « استراتژی‌های حل مسأله » انتشارات مبتکران.