

بسمه تعالی

تمرین‌های درس ریاضی عمومی (۱)، استاد درس: محفوظ رستم‌زاده

مشتق و کاربردهای آن

۱ - ضابطه‌ی $\frac{dy}{dx}$ و مقدار آن را به ازای نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

- (a) $y = x^2 \sin^2(x + \frac{1}{x+1})$, $x = 0$ (b) $y = \sin(\sin(\sin x))$, $x = \pi/2$
(c) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, $x = 0$ (d) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, $x = 1$
(e) $y^2 - xy + x^2 = 1$, $x = 1$ (f) $xy^2 + \sqrt{xy} = 2$, $x = 1$
(g) $y = \sin(x^2 + 1)$, $x = \cos(3t + \sqrt{t+1})$, $t = 0$
(h) $y = 1 + t^2$, $x = \frac{t}{1+t^2}$, $t = 2$

- ۲ - معادله‌ی خط مماس و قائم بر خم‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.
I. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$, $(x, y) = (2, 2)$
II. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(x, y) = (6, 2)$

- ۳ - به ازای چه مقداری از c خط مماس بر خم $y = c/(x+1)$ بر خط گذرنده از نقاط $(0, 1)$ و $(-1, 3)$ قائم است؟

- ۴ - اگر $f'(x) = \sin(x^2)$ و $y = f(\frac{2x-1}{x+1})$ ، مقدار dy/dx را بیابید.

۵- به ازای چه مقادیری از a و b تابع f در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ x^2 + ax + b & x \in R - Q \end{cases}$$

۶- صورت خطی توابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ و $g(x) = \frac{1}{1+\tan x}$ را در نقطه‌ی $x = 0$ به دست آورید.

۷- در هر یک از توابع زیر نقاط بحرانی، اکسترم‌های نسبی و مطلق، مجانب‌ها و محورهای تقارن، تقعر و تحدب و صعودی و نزولی بودن تابع را معین و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad g(x) = 2x + \frac{1}{x}, \quad h(x) = x + \sin x, \quad k(x) = 2 + 3x - x^3$$

$$l(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad m(x) = \cos x + \cos^2(x), \quad n(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad p(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

۸- می‌خواهیم باغچه‌ای به شکل یک قطاع مستدیری، یعنی قطعه‌ی از دایره با زاویه‌ی θ و شعاع r بسازیم. اگر مساحت آن ۵۰ متر مربع باشد و بخواهیم محیط آن مینی‌م شود، مقادیر θ و r را به دست آورید.

۹- می‌خواهیم از یک تکه مقوا به طول ۳۰ و عرض ۲۰ سانتی‌متریه جعبه‌ی باز شیرینی درست کنیم. برای این کار چهار مربع از گوشه‌ها می‌بریم و لبه‌ها را به بالا تا می‌کنیم. ابعاد جعبه با بیشترین حجم را بیابید.

۱۰- قرار است در کنار رودخانه‌ی مستقیمی با کشیدن حصار یک باغ مستطیلی شکل ایجاد کنیم. برای سه طرفی که به حصار نیاز دارد، ۷۰۰ متر نرده در اختیار است. مساحت بزرگترین زمینی را که می‌توان محصور کرد (البته به طور قانونی!!) چقدر است؟

۱۱ - از یک مخزن مخروطی شکل (رأس در پایین) با عمق ۱۰ متر و قطر دهانه‌ی ۸ متر، در هر دقیقه ۵ متر مکعب آب خارج می‌شود. وقتی عمق آب موجود در مخزن ۴ متر است، آب با چه سرعتی پایین می‌رود؟

۱۲ - یک بالن کروی شکل را با سرعت ۲۰ متر مکعب بر دقیقه از گاز پر می‌کنیم. فرض کنید فشار گاز ثابت می‌ماند. در لحظه‌ای که شعاع بالن ۰.۵ متر است، شعاع با چه سرعتی بزرگ می‌شود؟ مساحت سطح بالن چطور؟

۱۳ - وجود و تعداد ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را بررسی کنید.

روی بازه‌ی $(0, 1)$ ، I. $x^5 - 5x = 1$, II. $x + \tan x = 1$,

۱۴ - اگر $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x - 2)(2x - 1)$ ، آنگاه نشان دهید که $f'(x) = 0$ حداقل سه ریشه در بازه‌ی $(-2, 3)$ دارد.

۱۵ - روابط زیر را روی بازه‌ی داده شده اثبات کنید.

(i) $\sin x < x < \tan x$: $(0, 1)$ (ii) $\cos x > 1 - \frac{1}{4}x^2$, : $(0, \infty)$

۱۶ - برای تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

الف) ضابطه‌ی تابع f' را روی اعداد حقیقی تعیین کنید.
ب) آیا تابع f' در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟ چرا؟