

مقدمه‌ای بر تحلیل سریهای زمانی

مجتبی خزایی

فهرست مندرجات

۱	مقدمه	۱
۶	مدلها و روش‌های کلاسیک	۲
۶	سریهای زمانی غیر فصلی بدون روند	۱.۲
۷	روش میانگین متحرک ساده	۱.۱.۲
۹	روش هموارسازی نمایی ساده	۲.۱.۲
۱۲	سریهای زمانی غیر فصلی دارای روند خطی	۲.۲
۱۴	روش میانگین متحرک مرتبه دوم	۱.۲.۲
۱۵	روش هموارسازی نمایی مرتبه دوم	۲.۲.۲
۲۰	سریهای زمانی فصلی	۳.۲
۲۲	روش تجزیه کلاسیک	۱.۳.۲
۲۶	روش وینترز	۲.۳.۲
۳۲	تمرینات	۴.۲
۳۸	تعاریف و مفاهیم اساسی	۳
۳۸	سری زمانی و مشخصه‌های آن	۱.۳
۴۲	سریهای زمانی ایستا	۲.۳

۴۷	پیش‌بینی سریهای زمانی ایستا	۳.۳
۵۹	تابع خودهمبستگی جزئی	۴.۳
۶۲	برآورد میانگین، اتوکواریانس‌ها و خودهمبستگی‌های یک سری ایستا	۵.۳
۶۲	برآورد μ	۱.۵.۳
۶۵	برآورد $\rho(h)$ و $\gamma(h)$	۲.۵.۳
۶۸	برآورد ϕ_{hh}	۳.۵.۳
۷۰	تمرینات	۶.۳
۷۳	سریهای ARMA	۴
۷۴	فرآیندهای خطی کلی	۱.۴
۷۶	سریهای میانگین متحرک و اتورگرسیون مرتبه اول	۲.۴
۷۷	سریهای ARMA	۳.۴
۸۰	ACF و PACF سریهای اتورگرسیون	۴.۴
۸۷	ACF و PACF سریهای میانگین متحرک	۵.۴
۹۰	ACF و PACF سریهای ARMA	۶.۴
۹۶	پیش‌بینی سریهای ARMA	۷.۴
۱۰۲	تابع پیش‌بینی غائی و رفتار پیش‌بینی‌های یک سری ARMA	۸.۴
۱۰۶	تمرینات	۹.۴
۱۰۹	سریهای ARIMA	۵
۱۱۱	تبدیلات تثبیت‌کننده میانگین	۱.۵

۱۱۱	حذف روندهای قطعی	۱.۱.۵
۱۱۳	حذف روندهای تصادفی	۲.۱.۵
۱۱۴	مدلهای ARIMA	۲.۵
۱۱۶	مدلهای ARIMA با رانش	۳.۵
۱۱۸	پیش‌بینی سریهای ARIMA	۴.۵
۱۲۵	تابع پیش‌بینی غائی و رفتار پیش‌بینی‌های یک سری ARIMA	۵.۵
۱۲۹	تبدیلات تثبیت‌کننده واریانس	۶.۵
۱۳۱	تمرینات	۷.۵
۱۳۴	برآورد پارامترها	۶
۱۳۴	روش گشتاورها	۱.۶
۱۴۱	روش برگ	۲.۶
۱۴۴	روش هنان - ريسانن	۳.۶
۱۴۶	روش کمترین توانهای دوم شرطی	۴.۶
۱۵۳	روش بیشترین درست‌نمایی شرطی	۵.۶
۱۵۴	روش بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی	۶.۶
۱۶۳	تمرینات	۷.۶
۱۶۶	شناسایی مدل و ارزیابی مدل برازش شده	۷
۱۶۶	مراحل شناسایی مدل ARIMA	۱.۷

۱۶۸	استفاده از توابع SACF و SPACF در شناسایی مرتبه مدل	۲.۷
۱۷۳	تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه	۳.۷
۱۷۸	ملاکهای اطلاعاتی	۴.۷
۱۸۱	ارزیابی مدل برازش شده	۵.۷
۱۸۷	تمرینات	۶.۷
۱۹۱	مشاهدات دورافتاده و تغییر در سطح	۸
۱۹۲	انواع دورافتاده‌ها و اثرات آنها	۱.۸
۱۹۲	دورافتادهٔ جمعی	۱.۱.۸
۱۹۶	دورافتادهٔ تحولی	۲.۱.۸
۱۹۹	دورافتادهٔ انتقال سطح	۳.۱.۸
۲۰۲	دورافتادهٔ تغییر گذرا در سطح	۴.۱.۸
۲۰۴	شناسایی نقاط دورافتاده	۲.۸
۲۰۸	تحلیل سریهای زمانی شامل نقاط دورافتاده	۳.۸
۲۱۳	تمرینات	۴.۸
۲۱۷	سریهای فصلی	۹
۲۱۷	سریهای SARMA و SARIMA	۱.۹
۲۲۴	ACF و PACF سریهای SARMA	۲.۹
۲۲۹	مدلسازی سریهای فصلی	۳.۹
۲۳۵	تمرینات	۴.۹

۲۳۸

مراجع

۲۴۴

پیوست ۱: معادلات تفاضلی خطی

۲۴۷

پیوست ۲: سریها

۲۵۳

پیوست ۳: برنامه‌های رایانه‌ای

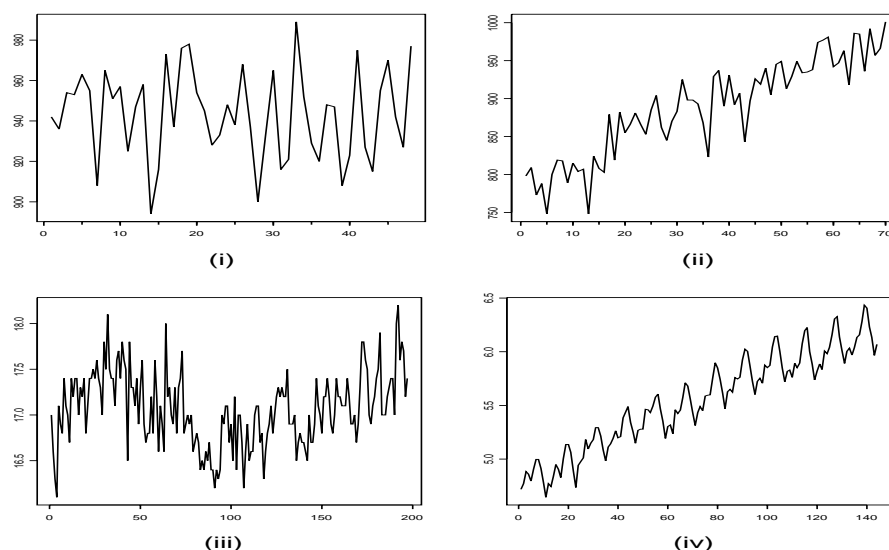
فصل ۱

مقدمه

سریهای زمانی مشاهداتی‌اند که در طول زمان جمع آوری می‌شوند. فراوانی چنین مشاهداتی تحلیل سریهای زمانی را به یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های علم آمار تبدیل کرده است.

به عنوان مثال، متوسط درجه حرارت، رطوبت یا سرعت باد که بسته به نیاز به طور روزانه، هفتگی یا ماهیانه ثبت می‌شوند، قیمت سهامی خاص یا شاخصی کلی در بازار بورس، مقدار تقاضا، تولید یا فروش محصولات یک شرکت، درآمد این شرکت و مبلغی که این شرکت بابت تبلیغات محصولات خود صرف می‌کند، تعداد توریستها و درآمد حاصل از این صنعت، مشخصه‌هایی از کیفیت کالای تولیدی مثل تعداد نقصها، طول عمر، میزان چسبندگی یا غلظت و غیره که در طی فرآیند ساخت اندازه‌گیری می‌شوند، نمونه‌هایی از سریهای زمانی هستند. غالباً زمان ثبت مشاهدات گسسته است (مثالهای فوق) و در بیشتر موارد فاصله زمانی بین مشاهدات متوالی ثابت است. اما این زمان می‌تواند پیوسته نیز باشد. به عنوان مثال وضعیتی را در نظر بگیرید که اشغال (1) یا عدم اشغال (0) شبکه رایانه‌ای به طور پیوسته‌ای ثبت می‌شود، یا دبی آب خروجی از یک منبع به طور پیوسته اندازه‌گیری می‌شود. در این کتاب سریهایی را مطالعه می‌کنیم که زمان ثبت گسسته با فواصل زمانی ثابت دارند.

هدف از تحلیل یک سری زمانی چیست؟ هر چند توصیف رفتار یک سری زمانی از لحاظ تغییرات موضعی و دراز مدت در آن، یا مطالعه وابستگی‌های موجود بین عناصر سری از بررسی‌های متداولی است که روی سریهای زمانی انجام می‌شود اما می‌توان گفت که مهمترین هدف از تحلیل یک سری زمانی پیش‌بینی مقادیر آینده آن است. در صورتی که با پیش از یک سری زمانی سرو کار داشته باشیم به این هدف مطالعه روابط بین این سریها را نیز می‌توان اضافه نمود. این روابط در صورت وجود علاوه بر اینکه به ما در رسیدن به پیش‌بینی‌های دقیق‌تر کمک می‌کنند در بحث کنترل رفتار یک سری با کنترلی که بر سریهای مرتبط با آن داریم نیز کاربرد دارند. در این کتاب با روشهایی برای تحلیل سریهای زمانی یک متغیره آشنا می‌شویم. خواننده علاقمند به تحلیل سریهای زمانی چند متغیره، توابع انتقال و کنترل



شکل ۱.۱: (i): سری فروش کنسرو (فصل دوم)، (ii): سری فروش لوازم صوتی تصویری (فصل دوم)، (iii): سری غلظت یک ماده شیمیایی (سری Se9 در پیوست ۲) و (iv): سری لگاریتم تعداد مسافران خطوط هوایی (سری Se2 در پیوست ۲).

می‌تواند به وی^۱ (۱۹۹۰)، براکول^۲ و دیویس^۳ (۱۹۹۶) و باکس^۴ و جنکینز^۵ (۱۹۷۶) مراجعه کند.

برای تحلیل یک سری زمانی و پیش‌بینی آینده آن چه باید کرد؟ بدیهی است لازمه اتخاذ هر تصمیمی در این مورد آشنایی با رفتار سری به عنوان تابعی از زمان است. ساده‌ترین راه برای این منظور رسم نمودار زمانی سری است. در شکل (۱.۱) نمودار چهار سری زمانی را رسم کرده‌ایم. نمودارها در این شکل و نمودارهای مشابه در این کتاب تنوع رفتار سریهای زمانی را نشان می‌دهند.

سوالی که مطرح می‌شود این است که از چه مدل‌هایی برای تبیین این گونه رفتارها می‌توان استفاده کرد؟ قبل از مطالعات باکس و جنکینز از اوایل دهه شصت قرن بیستم به بعد به خصوص کتاب برجسته آنها در سال (۱۹۷۶)، غالباً شکل ظاهری سری ملاک تعیین مدل قرار می‌گرفت و در ساختار مدل‌هایی که برای این منظور استفاده می‌شد توابعی از زمان برای بیان تغییرات دراز مدت و توابعی متناوب از زمان برای بیان تغییرات منظم در سطح سری اضافه می‌شد. به چنین مدل‌هایی مدل‌های کلاسیک می‌گوییم، به عنوان مثال از مدل‌های کلاسیک،

$$X_t = \beta_0 + \epsilon_t \quad (1.1)$$

^۱ Wei
^۲ Brockwell
^۳ Davis
^۴ Box
^۵ Jenkins

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t \quad (2.1)$$

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^6 [\beta_{j1} \cos(\frac{2\pi jt}{12}) + \beta_{j2} \sin(\frac{2\pi jt}{12})] + \epsilon_t, \quad \beta_{62} = 0 \quad (3.1)$$

که ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند، به ترتیب در مدل کردن سریهای (i)، (ii) و (iv) در شکل (۱.۱) می‌توان استفاده کرد. البته عدم وابستگی ϵ_t ها به هم که عدم وابستگی X_t را به همراه دارد از نقاط ضعف این مدلها است. استفاده کنندگان از این مدلها این ضعف را در پیش‌بینی‌های حاصل از این مدلها جبران کرده و پیش‌بین‌هایی مثل

$$\hat{X}_n(l) = \hat{\beta}_0(n) \quad (4.1)$$

$$\hat{X}_n(l) = \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)(n+l) \quad (5.1)$$

$$\hat{X}_n(l) = \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)(n+l) + \sum_{j=1}^6 \{ \hat{\beta}_{j1}(n) \cos[\frac{2\pi j(n+l)}{12}] + \hat{\beta}_{j2}(n) \sin[\frac{2\pi j(n+l)}{12}] \}, \quad \hat{\beta}_{62}(n) = 0 \quad (6.1)$$

را برای پیش‌بینی مقدار X_{n+l} پیشنهاد کرده‌اند. که در آنها برآوردهای $\hat{\beta}(n)$ در مبدأ پیش‌بینی n حساب شده و توسط روابط مناسبی در حضور مشاهده $n+1$ ام بهنگام می‌شوند. در فصل دوم با چند روش برای برآورد و بهنگام کردن این ضرایب آشنا می‌شویم. خواننده علاقمند می‌تواند کارهای حالت ^۱ (۱۹۵۷)، وینترز ^۲ (۱۹۶۰) و براون ^۳ (۱۹۶۲) را نیز مطالعه کند. در این روشها برآوردکننده‌های $\hat{\beta}(n)$ در پیش‌بین‌های فوق طوری تعریف می‌شوند که وزن بیشتری به مشاهدات جدیدتر نسبت دهند. با این کار پیش‌بین‌هایی حاصل می‌شوند که به مشاهدات جدیدتر وابستگی بیشتری دارند. این امر باعث می‌شود، این پیش‌بین‌ها به تغییرات در سطح سری سریعتر پاسخ دهند و در نتیجه از آنها در پیش‌بینی آینده سریهای نا ایستا نیز بتوان استفاده کرد. به عنوان مثال اگر این وزنها به طور نمایی نزول کنند از پیش‌بین (۴.۱) برای پیش‌بینی سریهای نا ایستایی مثل آنچه در نمودار (iii-۱.۱) دیده می‌شود نیز می‌توان استفاده کرد و همانطور که در فصل پنجم خواهیم دید با اینکار در مواردی (برای سریهای $IMA(1,1)$) پیش‌بینی‌هایی با کمترین توانهای دوم خطا به دست می‌آیند.

در مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک و تعمیم آنها یعنی مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته و مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته فصلی علاوه بر رفتار ظاهری سری وابستگی‌های موجود بین عناصر سری نیز در نظر گرفته شده است. هر چند قبل از مطالعات باکس و جنکینز، حالت‌های خاصی از این مدلها مثل مدل‌های اتورگرسیو توسط یول ^۴ (۱۹۲۷) و یا مدل میانگین متحرک توسط اسلاتسکی ^۵ (۱۹۲۷) مطالعه و مورد استفاده قرار گرفته است اما بواسطه کارهای جامع

^۱ Holt
^۲ Winters
^۳ Brown
^۴ Youl
^۵ Slutsky

باکس و جنکینز در راستای تعمیم این مدلها، چگونگی محاسبه پیش‌بینی‌های حاصل از آنها و مطالعه رفتار این پیش‌بینی‌ها به خصوص ارائه راه‌کارهایی نسبتاً کامل در استفاده عملی از این مدلها، آنها را به عنوان مدل‌های باکس و جنکینز می‌شناسیم. از مهمترین این تعمیم‌ها که توسط باکس و جنکینز صورت گرفته ارائه مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته برای سریهای نا ایستا و مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته فصلی برای سریهای نا ایستای فصلی است. در دسته دوم از این مدلها که منشأ آن مدل معروف به مدل خطوط هوایی باکس و جنکینز است، استفاده از تفاضل‌گیری فصلی این امکان را می‌دهد که به عنوان مثال مدل خطوط هوایی با تنها دو پارامتر منجر به پیش‌بینی‌هایی مشابه (۶.۱) با سیزده پارامتر شود (فصل نهم را ببینید).

در فرآیند مدل کردن یک سری چه به کمک مدل‌های کلاسیک چه مدل‌های باکس و جنکینز چرخه زیربایستی تکرار شود،

الف) شناسایی مدل (ب) برازش مدل (ج) ارزیابی مدل برازش شده

تا نهایتاً مدلی برای تبیین رفتار سری مشاهده شده و پیش‌بینی آینده آن مناسب تشخیص داده شود. هدف اصلی در این کتاب این است که در ابتدا خواننده به شناخت نسبتاً جامعی از مدل‌های باکس و جنکینز (فصول چهارم، پنجم و نهم) برسد. یعنی ساختار این مدلها، ساختار وابستگی در این مدلها، رفتار مصادیق حاصل از این مدلها، چگونگی محاسبه بهترین پیش‌بینی‌ها توسط این مدلها و رفتار این پیش‌بینی‌ها را بشناسد. سپس به این توانایی برسد که بتواند به کمک سری مشاهده شده و طی چرخه شناسایی، برازش و ارزیابی از بین مدل‌های باکس و جنکینز مدلی مناسب برای پیش‌بینی مقادیر آینده سری تشخیص دهد (فصول ششم، هفتم و نهم). البته در این راستا آشنایی با بعضی مفاهیم ضروری است که خواننده با آنها در فصل سوم آشنا می‌شود.

بجز فصل دوم، محور کلیه مطالب کتاب مدل‌های باکس و جنکینز است. در فصل دوم خلاصه‌ای از مدل‌های کلاسیک و روشهای هموارسازی، تجزیه کلاسیک و وینترز را آورده‌ایم. مطالعه این فصل به خواننده این فرصت را می‌دهد که قبل از درگیر شدن با مباحث تئوری فصول بعد، با روشهایی ساده و البته در بسیاری از موارد کارآمد آشنا شود. در فصل سوم ضمن ارائه تعریف رسمی سریهای زمانی با سریهای زمانی ایستا و نا ایستا توابع میانگین، واریانس، اتوکواریانس، خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی و برآوردکننده‌های آنها برای سریهای ایستا آشنا می‌شویم. علاوه بر این، در این فصل با بهترین پیش‌بین خطی و چگونگی محاسبه ضرایب آن آشنا می‌شویم. فصل چهارم را به معرفی خانواده مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک اختصاص داده‌ایم. در این فصل با این مدلها، چگونگی محاسبه مقادیر توابع اتوکواریانس، خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی و رفتار این توابع برای سریهای اتورگرسیو - میانگین متحرک آشنا می‌شویم. پیش‌بینی‌های حاصل از این مدلها و بحث در رفتار آنها از دیگر مباحث مهم فصل چهارم است. مباحث مشابهی برای سریهای اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته در فصل پنجم خواهیم داشت. در فصل ششم روشهایی برای برآورد پارامترهای مدل‌های فوق ارائه شده است. فصل هفتم را هم به مباحثی در شناسایی مدل و ارزیابی یک مدل برازش شده اختصاص داده‌ایم. مواردی چون اشتباه در اندازه‌گیری یا ثبت مشاهدات، وقوع پدیده‌هایی چون خشکسالی، سیل، جنگ،

صلح، انقلاب و غیره منجر به مشاهدات دورافتاده در سریهای زمانی می‌شوند. وجود چنین مشاهداتی مشکلاتی در روشهای معمول تجزیه و تحلیل سریهای زمانی بوجود می‌آورد. در فصل هشتم ضمن آشنایی با انواع دورافتاده‌ها با روشهایی برای مدل کردن و تحلیل سریهای زمانی در حضور مشاهدات دورافتاده آشنا می‌شویم. فصل نهم را به سریهای فصلی اختصاص داده و ضمن معرفی مدل‌های اتورگرسو - میانگین متحرک جمع بسته فصلی، با کاربرد این مدلها در مدل‌سازی و پیش‌بینی سریهای زمانی فصلی آشنا می‌شویم.

برای انجام محاسبات در این کتاب از نرم افزار S-PLUS استفاده می‌کنیم. S-PLUS یک زبان و محیط برنامه نویسی قوی برای تحلیل داده‌ها و رسم نمودارهای آماری است. توابع موجود در S-PLUS امکان تحلیل داده‌های آماری به روشهای معمول و پیشرفته را فراهم کرده‌اند. علاوه بر این، قابلیت برنامه نویسی ساده و اجرای سریع برنامه‌ها در این محیط، S-PLUS را به یکی از برنامه‌های جذاب و مورد علاقه آمارشناسان تبدیل کرده است. توابع داخلی S-PLUS برای انجام بعضی از محاسبات در این کتاب کفایت می‌کنند. اما در بسیاری از موارد که اینطور نبوده، از قابلیت برنامه نویسی در محیط S-PLUS استفاده کرده توابعی برای انجام اینگونه محاسبات تهیه کرده‌ایم. در نوشتن این برنامه‌ها که در پیوست ۳ آمده‌اند تا حد امکان سعی شده از روابط و الگوریتم‌های نظیرشان همان گونه که در متن کتاب آمده استفاده شود تا ضمن اینکه هدف اصلی یعنی انجام محاسبات را برآورده می‌کنند مثال‌هایی نیز برای خواننده علاقمند به یادگیری برنامه نویسی در محیط S-PLUS باشند. فرمت باز این برنامه‌ها این امکان را به کاربر می‌دهد که در صورت لزوم تغییرات مورد نیاز خود را نیز در برنامه یا خروجی آن اعمال کند.

فصل ۲

مدلها و روش‌های کلاسیک

در این فصل به معرفی اجمالی چند مدل ساده خواهیم پرداخت که از آنها می‌توان در بیان رفتار یک سری زمانی و پیش‌بینی آینده آن استفاده کرد. مدل‌هایی که با توجه به شکل ظاهری سری، در ساختارشان توابعی از زمان برای نشان دادن تغییرات دراز مدت سطح سری، یا توابعی متناوب برای بیان رفتارهای متناوب سری گنجانده شده است. هر چند این مدلها به دلایلی چون نادیده انگاشتن بعضی از جنبه‌های مهم سری‌های زمانی (که مهمترین آنها وابستگی‌های موجود بین عناصر سری است)، همچنین وجود مدلها و شیوه‌های بهتر تحلیل سریهای زمانی امروزه کمتر به عنوان ابراز اصلی تحلیل سریهای زمانی به کار گرفته می‌شوند، اما سادگی این مدلها و روشهای تجزیه و تحلیل مربوط به آنها، باعث گردیده همچنان مطلوبیت خود را حفظ کنند. در این فصل با مدلها و روشهای کلاسیک تحلیل سریهای زمانی غیر فصلی و فصلی در دو حالت بدون روند یا دارای روند خطی آشنا خواهیم شد. مطالب بیشتر در این موارد و تعمیم آنها را می‌توان در باورمن^۱ و همکاران (۲۰۰۵) و مونتگومری^۲ و همکاران (۱۹۹۰) یافت.

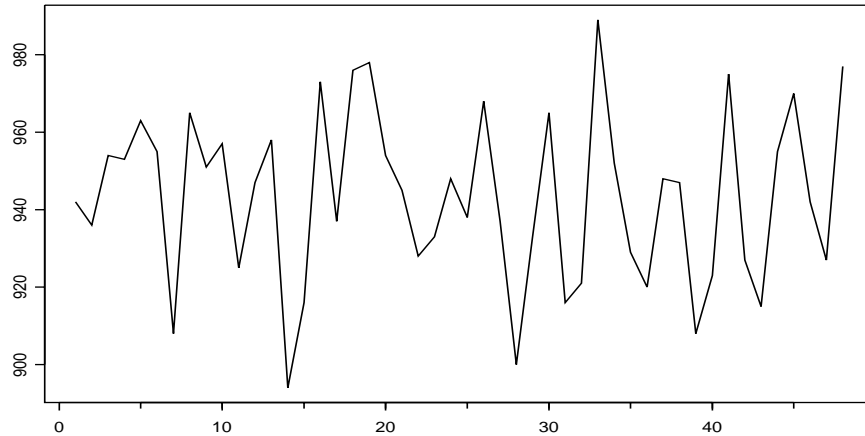
۱.۲ سریهای زمانی غیر فصلی بدون روند

شکل (۱.۲) فروش ماهیانه نوعی کنسرو در 48 ماه را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود مشاهدات حول خطی افقی نوسان می‌کنند و اینطور به نظر می‌رسد که تغییرات دراز مدت در سطح سری (روند^۳) وجود ندارد. ساده‌ترین مدلی که به عنوان مولد اینگونه مشاهدات می‌توان ارائه داد مدل زیر

^۱ Bowerman

^۲ Mont gomery

^۳ Trend



شکل ۱.۲: فروش ماهیانه نوعی کنسرو.

است

$$X_t = \mu + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

که در آن ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیروابسته‌ای با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. روشی ساده برای برآورد μ روش کمترین توانهای دوم عادی^۱ است که حاصل آن $\hat{\mu} = \bar{X}$ ، برآورد ما برای μ و پیش‌بینی آینده سری خواهد بود. متأسفانه در مدل و روش برآورد فوق از اینکه مشاهدات سری زمانی وابسته‌اند هیچگونه بهره‌ای نبرده‌ایم. حداقل بهره‌ای که از این اطلاع می‌توان برد، این است که در برآورد μ ارزش بیشتری به مشاهدات اخیر بدهیم، زیرا انتظار داریم این مشاهدات در تعیین رفتار آینده سری نقش بیشتری داشته باشند. بنابراین پیش‌بینی بهتری حاصل خواهد شد اگر μ را به روش کمترین توانهای دوم وزنی^۲ و اختصاص وزنه‌های بیشتر به مشاهدات اخیر برآورد کنیم. در اینجا دو مجموعه وزن را به کار خواهیم برد اولی منجر به روش میانگین متحرک ساده^۳ و دومی منجر به روش هموارسازی نمایی ساده^۴ برای برآورد μ و پیش‌بینی آینده سری خواهد شد.

۱.۱.۲ روش میانگین متحرک ساده

همانطور که اشاره شد در مدل (۱.۲) (و البته سایر مدل‌های کلاسیک) وابستگی‌های ذاتی موجود در یک سری زمانی در نظر گرفته نشده است. به همین دلیل این مدل در حالت کلی نمی‌تواند رفتار مشاهداتی مشابه آنچه در شکل (۱.۲) دیدیم را به خوبی بیان کند. اما اگر مدل (۱.۲) را کنار بگذاریم بلافاصله سؤالاتی چون، این وابستگی‌های ذاتی را چگونه می‌توان شناسایی کرد؟ مدل‌هایی که در ساختارشان این

^۱ Ordinary Least Squares

^۲ Wighted Least Squares

^۳ Simple Moving Average

^۴ Simple Exponential Smoothing

وابستگی‌ها لحاظ گردیده کدامند؟ و چگونه می‌توان آنها را به سری مشاهده شده برازش کرد؟ مطرح می‌گردند که باید به آنها پاسخ دهیم. پاسخ به این سوالات را به فصول بعد موقوف کرده در اینجا مدل ساده (۱.۲) را انتخاب و همانطور که اشاره شد برای جبران این مشکل روش برآورد کمترین توانهای دوم وزنی را بکار می‌بریم. اگر وزن مشاهده t ام را با w_t نشان دهیم، در صورتی که

$$w_t = \begin{cases} 0 & t = 1, 2, \dots, n-k \\ 1 & t = n-k+1, n-k+2, \dots, n \end{cases}$$

به عبارت دیگر به k مشاهده آخر منتهی به مشاهده n ام وزن 1 و به سایر مشاهدات وزن صفر اختصاص داده شود، مجموع توانهای دوم وزنی خطا و برآورد کننده وزنی μ عبارتند از:

$$f(\mu) = \sum_{t=1}^n w_t (X_t - \mu)^2 = \sum_{t=n-k+1}^n (X_t - \mu)^2, \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{t=n-k+1}^n X_t}{k}. \quad (2.2)$$

و پیش‌بینی ما از آینده سری نیز $\hat{\mu}$ یعنی میانگین k مشاهده اخیر خواهد بود. در حالت کلی اگر پیش‌بینی مقدار سری برای زمان $t = n+l$ در مبدأ n را با $\hat{X}_n(l)$ نشان دهیم، در اینجا $\hat{X}_n(l) = \hat{\mu}$. برای سری فروش کنسرو به ازای $k=5$ ، داریم $\hat{X}_{48}(l) = 954$ ، $l = 1, 2, \dots$.

$\hat{\mu}$ در (۲.۲) میانگین k مشاهده منتهی به مشاهده n ام سری زمانی است، آن را با M_n نشان می‌دهیم. با روابطی مشابه می‌توان $M_k, M_{k+1}, \dots, M_{n-1}$ را نیز تعریف کرد. به عنوان مثال $M_k = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{k}$ میانگین k مشاهده اول منتهی به مشاهده k است. سری M_k, M_{k+1}, \dots, M_n را سری میانگین متحرک ساده حاصل سری X_1, X_2, \dots, X_n می‌نامیم. با توجه به اینکه

$$M_t = \frac{\sum_{i=t-k+1}^t X_i}{k} = \frac{\sum_{i=t-k+1}^t (\mu + \epsilon_i)}{k} = \mu + \frac{\sum_{i=t-k+1}^t \epsilon_i}{k}, \quad (3.2)$$

$E(M_t) = \mu$ و $Var(M_t) = \sigma^2/k$ بنابراین سری میانگین متحرک ساده در مقایسه با سری اصلی دامنه نوسانات کمتری داشته و هموارتر است (تمرین ۱۳.۲ را نیز ببینید). به همین دلیل سری میانگین متحرک ساده را هموار شده سری اصلی نیز نامیده و از آن برای شناسایی بهتر روند استفاده می‌شود.

مثال (۱.۲): فروش ماهیانه نوعی کنسرو (بر حسب کارتن) برای 48 ماه در جدول (۱.۲) آمده است (نمودار ۱.۲ را نیز ببینید). میانگین‌های متحرک (به ازای $k=5$) و پیش‌بینی‌های گام بعد یعنی $\hat{X}_{t-1}(1) = M_{t-1}$ به ازای $t = 6, 7, \dots, 48$ به همراه خطای این پیش‌بینی‌ها در جدول (۱.۲) آمده‌اند. با توجه به اینکه $M_{48} = 954$ پیش‌بینی ما از آینده سری $\hat{X}_{48}(l) = 954$ است.

تابع $MOV.AVER1(data, k, l)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات روش میانگین متحرک ساده تهیه شده است. مقادیر جدول (۱.۲) از اجرای دستور $MOV.AVER1(data, 5, 1)$ حاصل شده‌اند.

مشکل استفاده از این روش تعیین مقدار k است، با بحثی که در ادامه خواهیم داشت این مشکل تا حدودی رفع می‌گردد. در انتخاب k بایستی به این نکته توجه داشت که با افزایش k سری میانگین متحرک هموارتر می‌شود. بنابراین اگر سطح سری مشاهده شده نوسانات کمی داشته باشد استفاده از k

t	X_t	M_t	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t	t	X_t	M_t	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t
1	942	—	—	—	25	938	938.4	941.6	-3.6
2	936	—	—	—	26	968	943.0	938.4	29.6
3	954	—	—	—	27	937	944.8	943.0	-6.0
4	953	—	—	—	28	900	938.2	944.8	-44.8
5	963	949.6	—	—	29	933	935.2	938.2	-5.2
6	955	952.2	949.6	5.4	30	965	940.6	935.2	29.8
7	908	946.6	952.2	-44.2	31	916	930.2	940.6	-24.6
8	965	948.8	946.6	18.4	32	921	927.0	930.2	-9.2
9	951	948.4	948.8	2.2	33	989	944.8	927.0	62.0
10	957	947.2	948.4	8.6	34	952	948.6	944.8	7.2
11	925	941.2	947.2	-22.2	35	929	941.4	948.6	-19.6
12	947	949.0	941.2	5.8	36	920	942.2	941.4	-21.4
13	958	947.6	949.0	9.0	37	948	947.6	942.2	5.8
14	894	936.2	947.6	-53.6	38	947	939.2	947.6	-0.6
15	916	928.0	936.2	-20.2	39	908	930.4	939.2	-31.2
16	973	937.6	928.0	45.0	40	923	929.2	930.4	-7.4
17	937	935.6	937.6	-0.6	41	975	940.2	929.2	45.8
18	976	939.2	935.6	40.4	42	927	936.0	940.2	-13.2
19	978	956.0	939.2	38.8	43	915	929.6	936.0	-21.0
20	954	963.6	956.0	-2.0	44	955	939.0	929.6	25.4
21	945	958.0	963.6	-18.6	45	970	948.4	939.0	31.0
22	928	956.2	958.0	-30.0	46	942	941.8	948.4	-6.4
23	933	947.6	956.2	-23.2	47	927	941.8	941.8	-14.8
24	948	941.6	947.6	0.4	48	977	954.2	941.8	35.2

جدول ۱.۲: سری هموار شده به روش میانگین متحرک ساده به ازای $k = 5$ ، پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها برای سری فروش کنسرو در مثال (۱.۲).

بزرگ منجر به برآورد دقیق‌تر برای μ خواهد شد. اما اگر سطح سری به طور موضعی تغییر کند، انتخاب مقدار کوچکتر برای k تطبیق سریع‌تر میانگینهای متحرک با تغییر سطح را ممکن می‌سازد (تمرین‌های ۷.۲ و ۹.۲ را ببینید).

۲.۱.۲ روش هموارسازی نمایی ساده

اگر در روش حداقل مربعات وزنی، وزنها را طوری اختیار کنیم که بر حسب مقدار ثابت β ($0 < \beta < 1$) به طور نمایی کاهش یابند به عبارت دیگر وزن منسوب به مشاهده t ام β^{n-t} باشد، آنگاه تابع مجموع مربعات وزنی خطا و برآوردکننده متناظرش برای μ عبارتند از:

$$f(\mu) = \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} (X_t - \mu)^2, \quad \hat{\mu} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^n} \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} X_t. \quad (۴.۲)$$

در مثال قبل به ازای $\beta = 0.1$ داریم $\hat{\mu} = 944$ و $\hat{X}_{48}(l) = 944$.

اگر $\hat{\mu}$ در (۴.۲) را برای تأکید به اینکه از مشاهدات $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ حاصل شده با $\hat{\mu}_n$ نشان دهیم، به کمک روابطی مشابه (۴.۲) می‌توان $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_{n-1}$ را نیز تعریف کرد. اما با کمی محاسبات جبری و به صورت زیر رابطه‌ای بازگشتی به دست می‌آید که در عمل از آن برای محاسبه $\hat{\mu}_t$ ها استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t &= \frac{(1-\beta)X_t + (1-\beta)\sum_{i=1}^{t-1}\beta^{t-i}X_i}{1-\beta^t} \\ &= \frac{(1-\beta)X_t + \beta(1-\beta)\sum_{i=1}^{t-1}\beta^{t-1-i}X_i}{1-\beta^t} \\ &= \frac{(1-\beta)X_t + \beta(1-\beta^{t-1})\hat{\mu}_{t-1}}{1-\beta^t},\end{aligned}$$

برای t های بزرگ $\beta^t \approx 0$ و اگر همانطور که مرسوم است قرار دهیم $\alpha = 1 - \beta$ و $S_t = \hat{\mu}_t$ آنگاه

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)S_{t-1}. \quad (5.2)$$

S_t را آماره هموارسازی نمایی ساده یا مرتبه اول، α را ثابت هموارسازی و سری S_1, S_2, \dots, S_n را سری هموار شده نمایی ساده حاصل از X_1, X_2, \dots, X_n می‌نامیم. در استفاده از (۵.۲) به مقدار S_0 که برآورد اولیه‌ای برای μ است نیاز داریم. معمولاً اولین مشاهده سری انتخاب خوبی برای S_0 است اما اگر مشاهداتی از گذشته سری در دسترس باشد میانگین آنها را برای S_0 اختیار می‌کنیم. ثابت هموارسازی پارامتر دیگری است که باید تعیین گردد. به منظور آشنایی با اثر این پارامتر بر S_n یعنی پیش‌بینی ما از آینده سری رابطه (۵.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}S_n &= \alpha X_n + (1 - \alpha)[\alpha X_{n-1} + (1 - \alpha)S_{n-2}] \\ &= \alpha X_n + \alpha(1 - \alpha)X_{n-1} + (1 - \alpha)^2 S_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \alpha X_n + \alpha(1 - \alpha)X_{n-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{n-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{n-1} X_1 + (1 - \alpha)^n S_0 \\ &= \alpha \sum_{t=0}^{n-1} (1 - \alpha)^t X_{n-t} + (1 - \alpha)^n S_0.\end{aligned} \quad (6.2)$$

مجموع ضرایب در ترکیب فوق یک است. پس S_n میانگین وزنی $S_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ است. با توجه به این که $0 < \alpha < 1$ ، ضرایب $\alpha, \alpha(1 - \alpha), \dots, \alpha(1 - \alpha)^{n-1}$ که سهم مشاهدات X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 را در تعیین مقدار S_n نشان می‌دهند، به‌طور نمایی بر حسب عمر مشاهدات تقلیل

می‌یابند. مقادیر بزرگ α میرایی سریع ضرایب و تقلیل اثر مشاهدات قدیمی‌تر را در برآورد سطح سری می‌یعنی S_n به همراه دارند. بر عکس برای α های کوچک S_n با مشاهدات تأثیرگذار بیشتری محاسبه می‌شود. بنابراین اگر سطح سری به طور موضعی تغییر کند با انتخاب α ی بزرگ وزن بیشتری به مشاهدات اخیر داده و این هم به نوبه خود پاسخ سریعتر S_n به تغییر سطح سری را به همراه دارد. برعکس اگر سطح سری خیلی متغیر نباشد مقادیر کوچک α مناسب خواهند بود (تمرین‌های ۸.۲ و ۱۰.۲ را ببینید). روش‌هایی تحلیلی برای اختیار S_0 و α را می‌توان در باورمن و همکاران (۲۰۰۵) یافت. در اینجا به روش مبتنی بر خطای پیش‌بینی گام بعد در تعیین مقدار α اشاره خواهیم کرد. اگر برای $t = 1, 2, \dots, n$ S_{t-1} را که در اینجا برای تاکید وابستگی اش به α با $S_{t-1}(\alpha)$ نشان می‌دهیم، برای پیش‌بینی X_t به کاربریم خطای پیش‌بینی گام بعد $e_t(\alpha) = X_t - \hat{X}_{t-1}(1) = X_t - S_{t-1}(\alpha)$ خواهد بود. میانگین توان دوم این خطاها (MSE^۱) یعنی،

$$MSE(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [e_t(\alpha)]^2, \quad (۷.۲)$$

را می‌توان ملاکی برای مقایسه عملکرد α های مختلف قرار داد و مقداری از α که $MSE(\alpha)$ را حداقل می‌کند در محاسبه پیش‌بینی‌ها به کار برد. چند ملاک نیکویی برازش دیگر که در تعیین مقدار α از آنها استفاده می‌شود عبارتند از میانگین قدر مطلق خطا (MAE^۲)، میانگین توانهای دوم درصد خطا (MSPE^۳) و میانگین قدر مطلق درصد خطا (MAPE^۴) و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} MAE(\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t(\alpha)| \\ MSPE(\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\frac{e_t(\alpha)}{X_t} \right]^2 \times 100\% \\ MAPE(\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{e_t(\alpha)}{X_t} \right| \times 100\% \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

مثال (۲.۲): سری فروش کنسرو در مثال (۱.۲) را در نظر بگیرید. به ازای $\alpha = 0.05$ و $S_0 = X_1 = 942$ با استفاده از (۵.۲)،

$$S_1 = 0.05X_1 + 0.95S_0 = 0.05 \times 942 + 0.95 \times 942 = 942$$

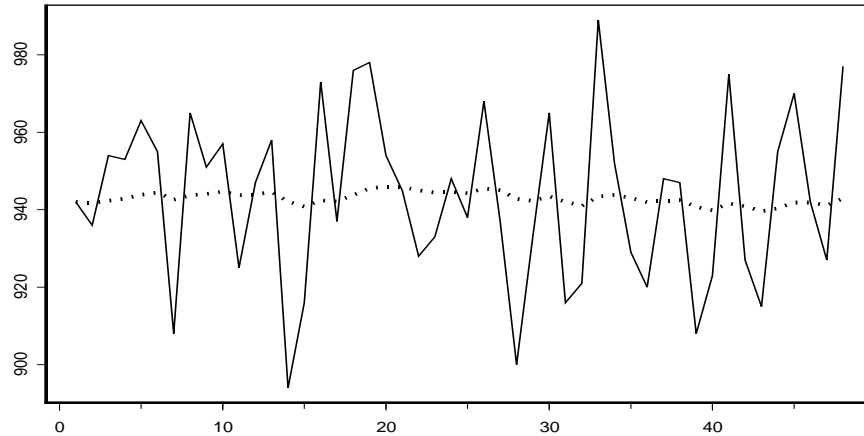
در نتیجه $\hat{X}_0(1) = 942$ و $e_1 = X_1 - \hat{X}_0(1) = 0$. سایر عناصر سری هموار شده همراه با پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها در جدول (۲.۲) آمده‌اند. شکل (۲.۲) سری هموار شده را به همراه سری اولیه نشان می‌دهد. با توجه به اینکه $S_{48} = 942.9$ پیش‌بینی ما از آینده سری برابر است با $\hat{X}_{48}(l) = 943$.

^۱ Mean Squared Error

^۲ Mean Absolute Error

^۳ Mean Square Percentage Error

^۴ Mean Absolute Percentage Error



شکل ۲.۲: سری فروش کنسرو و سری هموار شده حاصل از آن به روش هموارسازی نمایی به ازای $\alpha = 0.05$ (نقطه چین) در مثال (۲.۲).

جدول (۳.۲) مقادیر MAE ، $MSPE$ ، MSE و $MAPE$ را به ازای α های مختلف نشان می‌دهد (به ازای $S_0 = 942$). همانطور که ملاحظه می‌شود $\alpha = 0.05$ بهترین انتخاب است. برای انجام محاسبات در روش هموارسازی نمایی ساده از تابع $EXP.SMO1(data, \alpha, S_0, l)$ در پیوست ۳ به صورت $out < -EXP.SMO1(data, 0.05, 942, 1)$ استفاده شده است.

۲.۲ سریهای زمانی غیر فصلی دارای روند خطی

شکل (۳.۲) تعداد لوازم صوتی تصویری فروخته شده در طی ماه به مدت ۷۰ ماه در یک منطقه را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود نوسانات سری به تقریب در اطراف خطی غیرافقی صورت می‌گیرند. در چنین مواردی ساده‌ترین مدل برای بیان رفتار مشاهدات عبارتست از:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (9.2)$$

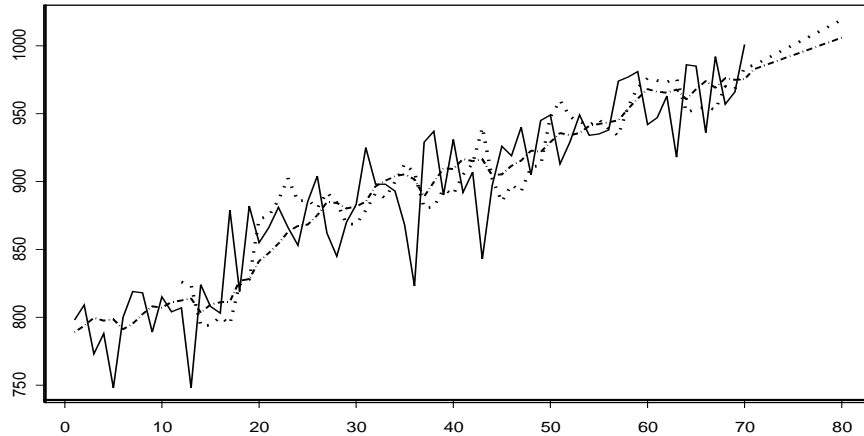
که ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته‌ای با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. برای برآورد β_0 و β_1 می‌توان از روش کمترین توانهای دوم وزنی مشابه بخش قبل استفاده کرد (مونتگومری و همکاران، ۱۹۹۰ را ببینید). اما در دو روش میانگین متحرک مرتبه دوم و هموارسازی نمایی مرتبه دوم که در ادامه با آنها آشنا می‌شویم خواهیم دید که استفاده از آماره‌های مناسب و روش گشتاورها منجر به برآوردکننده‌هایی برای β_0 و β_1 می‌شود که بواسطه روابط بازگشتی موجود، استفاده از آنها در عمل بسیار ساده‌تر است.

t	X_t	S_t	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t	t	X_t	S_t	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t
1	942	942.00	942.00	0.00	25	938	944.25	944.58	-6.58
2	936	941.70	942.00	-6.00	26	968	945.44	944.25	23.75
3	954	942.32	941.70	12.30	27	937	945.02	945.44	-8.44
4	953	942.85	942.32	10.69	28	900	942.77	945.02	-45.02
5	963	943.86	942.85	20.15	29	933	942.28	942.77	-9.77
6	955	944.41	943.86	11.14	30	965	943.41	942.28	22.72
7	908	942.59	944.41	-36.41	31	916	942.04	943.41	-27.41
8	965	943.71	942.59	22.41	32	921	940.99	942.04	-21.04
9	951	944.08	943.71	7.29	33	989	943.39	940.99	48.01
10	957	944.72	944.08	12.92	34	952	943.82	943.39	8.61
11	925	943.74	944.72	-19.72	35	929	943.08	943.82	-14.82
12	947	943.90	943.74	3.26	36	920	941.93	943.08	-23.08
13	958	944.61	943.90	14.10	37	948	942.23	941.93	6.07
14	894	942.08	944.61	-50.61	38	947	942.47	942.23	4.77
15	916	940.77	942.08	-26.08	39	908	940.75	942.47	-34.47
16	973	942.38	940.77	32.23	40	923	939.86	940.75	-17.75
17	937	942.11	942.38	-5.38	41	975	941.62	939.86	35.14
18	976	943.81	942.11	33.89	42	927	940.88	941.62	-14.62
19	978	945.52	943.81	34.19	43	915	939.59	940.88	-25.88
20	954	945.94	945.52	8.48	44	955	940.36	939.59	15.41
21	945	945.89	945.94	-0.94	45	970	941.84	940.36	29.64
22	928	945.00	945.89	-17.89	46	942	941.85	941.84	0.16
23	933	944.40	945.00	-12.00	47	927	941.11	941.85	-14.85
24	948	944.58	944.40	3.60	48	977	942.90	941.11	35.89

جدول ۲.۲: سری هموارشده به روش هموارسازی نمایی ساده به ازای $\alpha = 0.05$ و $S_0 = 942$ ، پیش بینی های گام بعد و خطای آنها برای سری مثال (۲.۲).

α	MSE	$MSPE$	MAE	$MAPE$
0.05	512.55	0.058	18.66	1.98
0.10	533.51	0.060	18.89	2.00
0.15	553.89	0.062	19.08	2.02
0.20	574.19	0.065	19.28	2.04
0.25	594.72	0.067	19.54	2.07
0.30	615.70	0.069	19.86	2.11

جدول ۳.۲: مقادیر ملاکهای نیکویی برازش برای سری مثال (۲.۲).



شکل ۳.۲: فروش لوازم صوتی تصویری و سریهای هموار شده به روش میانگین متحرک (نقطه چین) و هموارسازی نمایی (نقطه و خط) به همراه پیش‌بینی‌های حاصل از این روشها در مثالهای (۳.۲) و (۴.۲).

۱.۲.۲ روش میانگین متحرک مرتبه دوم

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n مشاهداتی از مدل (۹.۲) باشند، آماره‌های میانگین متحرک مرتبه اول و مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_n = \frac{X_n + X_{n-1} + \dots + X_{n-k+1}}{k}, \quad M_n^{(2)} = \frac{M_n + M_{n-1} + \dots + M_{n-k+1}}{k}. \quad (۱۰.۲)$$

امید ریاضی این آماره‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \frac{1}{k} \sum_{t=n-k+1}^n E(X_t) = \frac{1}{k} \sum_{t=n-k+1}^n (\beta_0 + \beta_1 t) \\ &= \beta_0 + \beta_1 n - \frac{k-1}{2} \beta_1. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} E(M_n^{(2)}) &= \frac{1}{k} \sum_{t=n-k+1}^n E(M_t) = \frac{1}{k} \sum_{t=n-k+1}^n \left(\beta_0 + \beta_1 t - \frac{k-1}{2} \beta_1 \right) \\ &= \beta_0 + \beta_1 n - (k-1) \beta_1. \end{aligned}$$

بنابراین برآوردکننده‌های گشتاوری β_0 و β_1 از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} M_n &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n - \frac{k-1}{2} \hat{\beta}_1(n) \\ M_n^{(2)} &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n - (k-1) \hat{\beta}_1(n) \end{cases}$$

که برای تأکید به اینکه توسط مشاهدات منتهی به زمان n محاسبه شده‌اند آنها را با $\hat{\beta}_0(n)$ و $\hat{\beta}_1(n)$ نشان داده‌ایم. این برآورد کننده‌ها عبارتند از:

$$\hat{\beta}_1(n) = \frac{2}{k-1}(M_n - M_n^{(2)}), \quad \hat{\beta}_0(n) = 2M_n - M_n^{(2)} - \hat{\beta}_1(n)n. \quad (11.2)$$

بنابراین پیش‌بینی حاصل از این روش برای X_{n+l} در مبدأ n عبارتست از:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(l) &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)(n+l) \\ &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n + \hat{\beta}_1(n)l \\ &= \hat{X}_n + \hat{\beta}_1(n)l, \end{aligned} \quad (12.2)$$

که در آن $\hat{X}_n = \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n = 2M_n - M_n^{(2)}$ و برآوردکننده‌ای نااریب برای $E(X_n)$ است. با توجه به تساویهای (۱۱.۲) این پیش‌بینی برحسب آماره‌های میانگین متحرک M_n و $M_n^{(2)}$ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{X}_n(l) = 2M_n - M_n^{(2)} + l\left(\frac{2}{k-1}\right)(M_n - M_n^{(2)}). \quad (13.2)$$

مثال (۳.۲): جدول (۴.۲) شامل فروش هفتگی لوازم صوتی تصویری شرکتی در یک منطقه است. در نمودار این سری (شکل ۳.۲) روندی تقریباً خطی مشاهده می‌شود. بنابراین مدل (۹.۲) را برای مدل کردن و پیش‌بینی آینده این سری انتخاب می‌کنیم. در جدول (۴.۲) میانگین‌های متحرک مرتبه اول و دوم (به ازای $k=6$) به همراه پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای این پیش‌بینی‌ها در مجموعه مشاهدات آمده‌اند. با توجه به اینکه $M_{70} = 972.8$ و $M_{70}^{(2)} = 963.6$ از (۱۳.۲)،

$$\begin{aligned} \hat{X}_{70}(l) &= 2 \times (972.8) - 963.6 + l\left(\frac{2}{6-1}\right)(972.8 - 963.6) \\ &= 982 + 3.68 \times l \end{aligned}$$

به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ مقادیر این پیش‌بینی‌ها در جدول (۵.۲) آمده و در نمودار (۳.۲) به همراه سری رسم شده‌اند.

محاسبات مثال فوق به کمک تابع $MOV.AVER2(data, k, l)$ در پیوست ۳ با اجرای دستور $MOV.AVER2(data, 6, 10)$ انجام شده است.

۲.۲.۲ روش هموارسازی نمایی مرتبه دوم

آماره‌های هموارسازی نمایی مرتبه اول و دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$S_n = \alpha X_n + (1 - \alpha)S_{n-1}, \quad S_n^{(2)} = \alpha S_n + (1 - \alpha)S_{n-1}^{(2)}. \quad (14.2)$$

t	X_t	M_t	$M_t^{(2)}$	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t	t	X_t	M_t	$M_t^{(2)}$	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t
1	798	-	-	-	-	36	823	884.2	886.9	906.5	-83.5
2	809	-	-	-	-	37	929	884.8	887.4	880.4	48.6
3	773	-	-	-	-	38	937	891.3	889.3	881.2	55.8
4	788	-	-	-	-	39	890	890.0	889.8	894.3	-4.3
5	748	-	-	-	-	40	931	896.3	890.1	890.2	40.8
6	800	786.0	-	-	-	41	892	900.3	891.2	905.0	-13.0
7	819	789.5	-	-	-	42	907	914.3	896.2	913.2	-6.2
8	818	791.0	-	-	-	43	843	900.0	898.7	939.7	-96.7
9	789	793.7	-	-	-	44	897	893.3	899.1	901.8	-4.8
10	815	798.2	-	-	-	45	926	899.3	900.6	885.3	40.7
11	804	807.5	794.3	-	-	46	919	897.3	900.8	897.5	21.5
12	807	808.7	798.1	826.0	-19.0	47	940	905.3	901.6	892.5	47.5
13	748	796.8	799.3	823.5	-75.5	48	905	905.0	900.1	910.5	-5.5
14	824	797.8	800.4	793.4	30.6	49	945	922.0	903.7	911.9	33.1
15	808	801.0	801.7	794.2	13.8	50	949	930.7	909.9	947.6	1.4
16	803	799.0	801.8	800.1	2.9	51	913	928.5	914.8	959.7	-46.7
17	879	811.5	802.5	795.1	83.9	52	929	930.2	920.3	947.7	-18.7
18	819	813.5	803.3	824.1	-5.1	53	949	931.7	924.7	944.0	5.0
19	882	835.8	809.8	827.8	54.2	54	934	936.5	929.9	941.5	-7.5
20	855	841.0	817.0	872.3	-17.3	55	935	934.8	932.1	945.7	-10.7
21	866	850.7	825.3	874.6	-8.6	56	938	933.0	932.4	938.7	-0.7
22	881	863.7	836.0	886.3	-5.3	57	974	943.2	934.9	933.8	40.2
23	866	861.5	844.4	902.4	-36.4	58	977	951.2	938.4	954.8	22.2
24	853	867.2	853.3	885.5	-32.5	59	981	956.5	942.5	969.1	11.9
25	885	867.7	858.6	886.6	-1.6	60	942	957.8	946.1	976.1	-34.1
26	904	875.8	864.4	880.3	23.7	61	947	959.8	950.3	974.3	-27.3
27	862	875.2	868.5	891.8	-29.8	62	963	964.0	955.4	973.3	-10.3
28	845	869.2	869.4	884.5	-39.5	63	918	954.7	957.3	976.0	-58.0
29	870	869.8	870.8	868.8	1.2	64	986	956.2	958.2	950.9	35.1
30	883	874.8	872.1	868.5	14.5	65	985	956.8	958.2	953.4	31.6
31	925	881.5	874.4	878.7	46.3	66	936	955.8	957.9	954.9	-18.9
32	898	880.5	875.2	891.5	6.5	67	992	963.3	958.5	953.0	39.0
33	898	886.5	877.1	888.0	10.0	68	957	962.3	958.2	970.1	-13.1
34	893	894.5	881.3	899.7	-6.7	69	966	970.3	960.8	968.1	-2.1
35	868	894.2	885.3	913.0	-45.0	70	1001	972.8	963.6	983.7	17.3

جدول ۴.۲: میانگین‌های متحرک مرتبه اول و دوم (به ازای $k = 6$) به همراه پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها برای سری مثال (۳.۲).

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}_{70}(l)$	986	989	993	997	1001	1004	1008	1012	1015	1019

جدول ۵.۲: پیش‌بینی‌های حاصل از روش میانگین متحرک مرتبه دوم به ازای $k = 6$ برای سری مثال (۲.۳).

در روابط فوق $0 < \alpha < 1$ ثابت هموارسازی نامیده می‌شود. با فرض اینکه X_1, X_2, \dots, X_n مشاهداتی از مدل (۹.۲) باشند و با توجه به تساوی (۶.۲)،

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \alpha \sum_{t=0}^{n-1} (1-\alpha)^t E(X_{n-t}) + (1-\alpha)^n E(S_0) \\ &= \alpha \sum_{t=0}^{n-1} (1-\alpha)^t (\beta_0 + \beta_1(n-t)) + (1-\alpha)^n E(S_0) \\ &= \alpha (\beta_0 + \beta_1 n) \sum_{t=0}^{n-1} (1-\alpha)^t - \alpha \beta_1 \sum_{t=0}^{n-1} t(1-\alpha)^t + (1-\alpha)^n E(S_0), \end{aligned}$$

برای n های بزرگ جمله آخر سمت راست را با صفر و مجموع‌های متناهی را با سریهای نامتناهی نظیرشان تقریب می‌کنیم؛ در اینصورت

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \alpha (\beta_0 + \beta_1 n) \sum_{t=0}^{\infty} (1-\alpha)^t - \alpha \beta_1 \sum_{t=0}^{\infty} t(1-\alpha)^t \\ &= \beta_0 + \beta_1 n - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1. \end{aligned}$$

به همین طریق می‌توان نشان داد

$$E(S_n^{(2)}) = E(S_n) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1 = \beta_0 + \beta_1 n - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1.$$

بنابراین برآوردکننده‌های گشتاوری β_0 و β_1 که آنها را با $\hat{\beta}_0(n)$ و $\hat{\beta}_1(n)$ نشان می‌دهیم از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند،

$$\begin{cases} S_n &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(n) \\ S_n^{(2)} &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)n - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(n) \end{cases}, \quad (15.2)$$

به سادگی می‌توان نشان داد

$$\hat{\beta}_1(n) = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_n - S_n^{(2)}), \quad \hat{\beta}_0(n) = S_n + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} - n\right) \hat{\beta}_1(n).$$

و در نتیجه پیش‌بینی X_{n+l} در مبدأ n عبارتست از:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(l) &= \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n)(n+l) \\ &= \hat{X}_n + \hat{\beta}_1(n)l.\end{aligned}$$

بر حسب S_n و $S_n^{(2)}$,

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(l) &= \left(2 + \frac{\alpha l}{1-\alpha}\right)S_n - \left(1 + \frac{\alpha l}{1-\alpha}\right)S_n^{(2)} \\ &= (2S_n - S_n^{(2)}) + \frac{\alpha l}{1-\alpha}(S_n - S_n^{(2)}).\end{aligned}\quad (۱۶.۲)$$

روش کار در هموارسازی نمایی مرتبه دوم مشابه هموارسازی نمایی ساده است به این ترتیب که با مقادیر تعیین شده α ، S_0 و $S_0^{(2)}$ آغاز کرده و به کمک X_1 مقدار آماره‌های هموارسازی نمایی S_1 و $S_1^{(2)}$ را به دست می‌آوریم. به همین ترتیب ادامه داده تا در انتها به کمک X_n و آنچه در مرحله قبل حاصل شده مقدار آماره‌های هموارسازی نمایی S_n و $S_n^{(2)}$ محاسبه گردند. اختصاص مقادیر اولیه S_0 و $S_0^{(2)}$ معمولاً به کمک معادلات (۱۵.۲) به ازای $n=0$ که منجر به روابط زیر بین S_0 ، $S_0^{(2)}$ ، $\hat{\beta}_0(0)$ و $\hat{\beta}_1(0)$ می‌گردد، صورت می‌گیرد.

$$\begin{cases} S_0 &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{\beta}_1(0) \\ S_0^{(2)} &= \hat{\beta}_0(0) - 2\frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{\beta}_1(0) \end{cases}\quad (۱۷.۲)$$

که $\hat{\beta}_0(0)$ و $\hat{\beta}_1(0)$ برآوردهای اولیه‌ای از شیب و عرض از مبدا هستند. اگر مشاهداتی قدیمی تراز آنچه می‌خواهیم تحلیل کنیم در دسترس باشد می‌توان با برازش خط رگرسیون کمترین توانهای دوم عادی به آنها عرض از مبدا و شیب حاصل را به جای $\hat{\beta}_0(0)$ و $\hat{\beta}_1(0)$ بکار برد. اگر چنین داده‌هایی در دسترس نباشد می‌توان از سری موجود برای این منظور استفاده کرد.

مثال (۴.۲): برای تحلیل سری مثال (۳.۲) به روش هموارسازی نمایی ابتدا با برازش خط رگرسیون کمترین توانهای دوم عادی به سری مشاهده شده برآوردهای اولیه $\hat{\beta}_0(0) = 785.58$ و $\hat{\beta}_1(0) = 2.88$ را به دست آورده (برای اینکار از دستورات $lm(data \sim Time)$ در $Time < -1 : 70$ استفاده کرده‌ایم). در (۱۷.۲) قرار می‌دهیم به ازای $\alpha = 0.1$ ، مقادیر اولیه $S_0 = 760$ و $S_0^{(2)} = 734$ به دست می‌آیند. با استفاده از این مقادیر اولیه و (۱۶.۲) پیش‌بینی X_1 یعنی،

$$\hat{X}_0(1) = (2 \times 760 - 734) + \frac{0.1}{0.9} \times (760 - 734) = 788.9$$

و خطای آن $e_1 = 9.1$ محاسبه می‌شوند. جدول (۶.۲) مقادیر آماره‌های هموارسازی نمایی مرتبه اول و دوم را نشان می‌دهد که به کمک مقادیر اولیه $S_0 = 760$ و $S_0^{(2)} = 734$ و $\alpha = 0.1$ و روابط (۱۴.۲) محاسبه شده‌اند. پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها نیز در این جدول آمده‌اند. مقادیر ملاک‌های نیکویی برازش MAE ، $MSPE$ ، MSE و $MAPE$ حاصل این انتخابهای اولیه ($S_0 = 760$ و $S_0^{(2)} = 734$) برای

t	X_t	S_t	$S_t^{(2)}$	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t	t	X_t	S_t	$S_t^{(2)}$	$\hat{X}_{t-1}(1)$	e_t
1	798	763.8	737.0	788.9	9.1	36	823	864.4	842.3	901.5	-78.5
2	809	768.3	740.1	793.6	15.4	37	929	870.9	845.1	889.0	40.0
3	773	768.8	743.0	799.7	-26.7	38	937	877.5	848.4	899.5	37.5
4	788	770.7	745.8	797.5	-9.5	39	890	878.7	851.4	909.9	-19.9
5	748	768.4	748.0	798.4	-50.4	40	931	884.0	854.7	909.1	21.9
6	800	771.6	750.4	791.1	8.9	41	892	884.8	857.7	916.5	-24.5
7	819	776.3	753.0	795.2	23.8	42	907	887.0	860.6	914.9	-7.9
8	818	780.5	755.7	802.3	15.7	43	843	882.6	862.8	916.3	-73.3
9	789	781.4	758.3	808.0	-19.0	44	897	884.0	864.9	904.6	-7.6
10	815	784.7	760.9	807.0	8.0	45	926	888.2	867.3	905.3	20.7
11	804	786.6	763.5	811.1	-7.1	46	919	891.3	869.7	911.5	7.5
12	807	788.7	766.0	812.4	-5.4	47	940	896.2	872.3	915.4	24.6
13	748	784.6	767.9	813.9	-65.9	48	905	897.1	874.8	922.7	-17.7
14	824	788.5	770.0	803.2	20.8	49	945	901.9	877.5	921.8	23.2
15	808	790.5	772.0	809.2	-1.2	50	949	906.6	880.4	928.9	20.1
16	803	791.8	774.0	811.0	-8.0	51	913	907.2	883.1	935.6	-22.6
17	879	800.5	776.6	811.5	67.5	52	929	909.4	885.7	934.0	-5.0
18	819	802.3	779.2	827.0	-8.0	53	949	913.4	888.5	935.7	13.3
19	882	810.3	782.3	828.0	54.0	54	934	915.4	891.2	941.0	-7.0
20	855	814.8	785.5	841.4	13.6	55	935	917.4	893.8	942.4	-7.4
21	866	819.9	789.0	847.2	18.8	56	938	919.4	896.4	943.6	-5.6
22	881	826.0	792.7	854.2	26.8	57	974	924.9	899.2	945.1	28.9
23	866	830.0	796.4	863.0	3.0	58	977	930.1	902.3	953.4	23.6
24	853	832.3	800.0	867.3	-14.3	59	981	935.2	905.6	961.0	20.0
25	885	837.6	803.8	868.2	16.8	60	942	935.9	908.6	968.1	-26.1
26	904	844.2	807.8	875.1	28.9	61	947	937.0	911.5	966.2	-19.2
27	862	846.0	811.6	884.7	-22.7	62	963	939.6	914.3	965.4	-2.4
28	845	845.9	815.0	884.2	-39.2	63	918	937.4	916.6	967.7	-49.7
29	870	848.3	818.4	880.2	-10.2	64	986	942.3	919.1	960.6	25.4
30	883	851.8	821.7	881.5	1.5	65	985	946.6	921.9	968.0	17.0
31	925	859.1	825.5	885.2	39.8	66	936	945.5	924.3	974.0	-38.0
32	898	863.0	829.2	896.5	1.5	67	992	950.1	926.8	969.1	22.9
33	898	866.5	832.9	900.5	-2.5	68	957	950.8	929.2	976.0	-19.1
34	893	869.1	836.6	903.8	-10.8	69	966	952.4	931.5	974.8	-8.8
35	868	869.0	839.8	905.3	-37.3	70	1001	957.2	934.1	975.5	25.5

جدول ۶.۲: مقادیر آماره های هموارسازی نمایی مرتبه اول و دوم به ازای $\alpha = 0.1$, $S_0 = 760$ و $S_0^{(2)} = 734$ به همراه پیش بینی های گام بعد و خطای آنها برای سری مثال (۴.۲).

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{X}_{70}(l)$	983	985	988	990	993	996	998	1001	1003	1006

جدول ۷.۲: پیش بینی های حاصل از روش هموارسازی نمایی مرتبه دوم به ازای $\alpha = 0.1$, $S_0 = 760$ و $S_0^{(2)} = 734$ برای سری مثال (۴.۲).

α	MSE	$MSPE$	MAE	$MAPE$
0.05	807.29	0.11	22.16	2.51
0.10	770.28	0.10	21.77	2.48
0.15	819.82	0.11	22.53	2.57
0.20	878.97	0.12	23.46	2.67
0.25	943.45	0.13	24.44	2.78
0.30	1013.19	0.13	25.50	2.90

جدول ۸.۲: مقادیر ملاک‌های نیکویی برازش برای سری مثال (۴.۲).

α های مختلف در جدول (۸.۲) آمده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود بهترین انتخاب همان $\alpha = 0.1$ است. باتوجه به اینکه $S_{70} = 957.2$ و $S_{70}^{(2)} = 934.1$ و (۱۶.۲) پیش‌بینی‌ها در مبدأ $n = 70$ عبارتند از:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{70}(l) &= (2 \times 957.2 - 934.1) + \frac{0.1 \times l}{1 - 0.1} \times (957.2 - 934.1) \\ &= 980.3 + 2.57 \times l.\end{aligned}$$

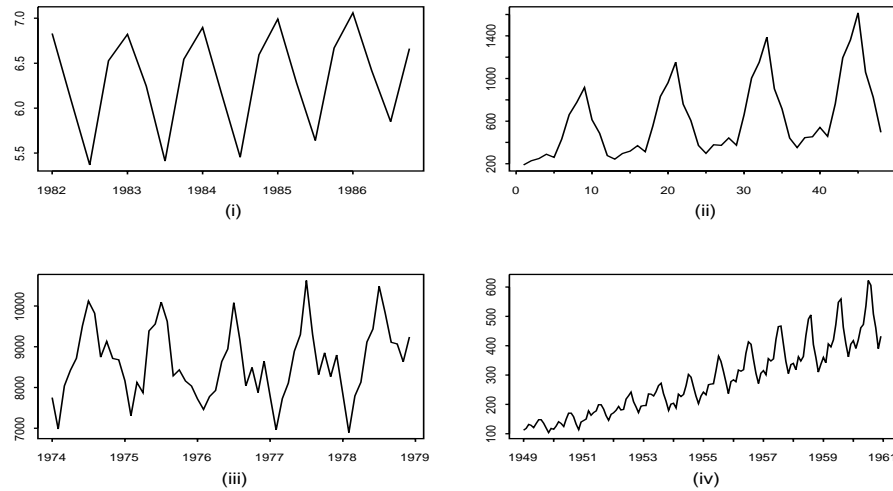
به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ مقادیر این پیش‌بینی‌ها در جدول (۷.۲) آمده و در نمودار (۳.۲) همراه سری رسم شده‌اند.

تابع $EXP.SMO2(data, \alpha, S_0, S_0^{(2)}, l)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات در روش هموارسازی نمایی مرتبه دوم تهیه شده است.

۳.۲ سریهای زمانی فصلی

بسیاری از سریهای زمانی تمایل به تکرار رفتاری منظم در دوره‌های زمانی با طول ثابت از خودشان نشان می‌دهند. این نوع سریها را سریهای زمانی فصلی^۱ می‌نامیم. معمولاً چنین رفتاری ناشی از تغییرات منظم تقویمی آب و هوا است. مثل سریهای متوسط بارندگی ماهیانه، متوسط درجه حرارت فصلی و فروش ماهیانه نوشیدنی‌ها. این رفتار می‌تواند ناشی از عادات یا سنن هم باشد مثل تعداد مسافران یا گردشگران در ماه‌های مختلف، مقدار زباله‌ای که در طول روز در یک شهر تولید می‌شود به دلیل تمایل برگزاری مهمانیها در آخر هفته‌ها بیشتر از سایر روزها خواهد بود یا در بعضی فرآیندهای تولیدی هنگام تغییر شیفتهای کاری تعداد نقائص در ارقام تولیدی افزایش می‌یابد. در شکل (۴.۲) چهار سری زمانی رسم شده‌اند، که عبارتند از (i): لگاریتم مصرف فصلی گاز در انگلیس (۱۹۸۶ - ۱۹۸۲)، لگاریتم بخشی از سری Se3 در پیوست ۲، (ii): فروش ماهیانه نوعی نوشابه، (iii): تعداد مرگهای ناشی از حوادث در طی یک ماه در آمریکا (۱۹۷۸ - ۱۹۷۴)، سری Se1 در پیوست ۲ و (iv): تعداد مسافران ماهیانه در پروازهای بین‌المللی خطوط هوایی انگلیس (۱۹۶۰ - ۱۹۴۹)، سری Se2 در پیوست ۲.

^۱ Seasonal Time Series



شکل ۴.۲: نمودارهای چهار سری فصلی.

آنچه در نظر اول توجه ما را به خود جلب می‌کند رفتار نسبتاً منظم و تکراری این سریها است. رفتاری که برای اولین سری در دوره‌ای شامل چهار واحد زمان و برای سایر سریها در دوره‌هایی شامل 12 واحد زمان تکرار می‌شوند، این دوره‌ها را دوره تناوب سری فصلی می‌نامیم. علاوه بر این سری تعداد مرگها بدون روند است اما در سایر سریها روندی خطی مشاهده می‌شود. در این بخش با مدل‌های کلاسیکی آشنا می‌شویم که در بیان رفتار و تجزیه و تحلیل چنین سریهایی می‌توان از آنها استفاده کرد. در ساخت این مدلها فرض بر این است که مقدار مورد انتظار سری در زمان t ($E(X_t)$) ترکیبی است از مقدار روند در این زمان (TR_t) و مقداری که اثر فصل متناظر با زمان t را نشان می‌دهد (S_t). اگر دوره تناوب سری d باشد طبیعی است که S_t بایستی تابعی متناوب با دوره تناوب d اختیار شود یعنی $S_t = S_{t-d}$. در سریهای فصلی مشابه (۴.۲-i) که دامنه نوسانات فصلی حول روند ثابت است این ترکیب می‌تواند مجموع مؤلفه‌های فوق باشد و

$$E(X_t) = TR_t + S_t \quad \text{یا} \quad X_t = TR_t + S_t + \epsilon_t \quad (18.2)$$

در سریهای فصلی مشابه (۴.۲-ii) به واسطه اینکه دامنه نوسانات فصلی متناسب با روند تغییر می‌کند مدل زیر پیشنهاد می‌شود.

$$E(X_t) = TR_t \times S_t \quad \text{یا} \quad X_t = TR_t \times S_t + \epsilon_t \quad (19.2)$$

که ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 اند. با توجه به متناوب بودن تابع S_t ، مجموع S_t ها در یک دوره تناوب مقداری ثابت است، در مدل اول فرض می‌کنیم $\sum_{t=1}^d S_t = 0$ و در دومی $\sum_{t=1}^d S_t = d$. مدل (۱۸.۲) به مدل کلاسیک جمعی و مدل (۱۹.۲) به مدل کلاسیک ضربی

معروفند. در ادامه این بخش با روش تجزیه کلاسیک^۱ و روش وینترز^۲ به منظور برآزش مدل‌های فوق و پیش‌بینی آینده سریهای فصلی بدون روند یا حداکثر دارای روند خطی آشنا می‌شویم.

۱.۳.۲ روش تجزیه کلاسیک

در این روش سری مشاهده شده، به شیوه‌ای که خواهیم آموخت به سریهایی شامل مؤلفه‌های مدل تجزیه می‌گردد. به کمک این سریها است که پارامترهای روند و اثرات فصلی (S_t ها) را به طور جداگانه برآورد می‌کنیم. سپس با گسترش روند برآزش شده به آینده و خاصیت متناوب بودن اثرات فصلی، آینده سری را پیش‌بینی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید سری مشاهده شده حاصل مدل کلاسیک جمعی $X_t = TR_t + S_t + \epsilon_t$ است که در آن $TR_t = \beta_0 + \beta_1 t$ ، $S_t = S_{t+d}$ ، ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته‌ای با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند.

اگر d فرد باشد و $d = 2q + 1$ سری جدید W_t را از روی X_t ها به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{1}{d}(X_{t-q} + X_{t-q+1} + \dots + X_t + \dots + X_{t+q-1} + X_{t+q}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q+1 \leq t \leq n-q. \end{aligned} \quad (20.2)$$

سری $W_{q+1}, W_{q+2}, \dots, W_{n-q}$ یک سری غیرفصلی، دارای روندی خطی مشابه روند X_t یعنی $\beta_0 + \beta_1 t$ با واریانسی کمتر است. زیرا،

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{1}{d} \sum_{j=-q}^q (\beta_0 + \beta_1(t+j) + S_{t+j} + \epsilon_{t+j}) \\ &= \frac{1}{d}(d(\beta_0 + \beta_1 t) + \beta_1 \sum_{j=-q}^q j + \sum_{j=-q}^q S_{t+j} + \sum_{j=-q}^q \epsilon_{t+j}) \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \frac{1}{d} \sum_{j=-q}^q \epsilon_{t+j}, \end{aligned}$$

و در نتیجه $E(W_t) = \beta_0 + \beta_1 t$ و $Var(W_t) = \sigma^2/d$.

اگر d زوج باشد و $d = 2q$ ، می‌توان نشان داد که W_t هایی که از رابطه زیر حاصل می‌شود چنین خصوصیتی دارند.

$$W_t = \frac{1}{d}(0.5X_{t-q} + X_{t-q+1} + \dots + X_t + \dots + X_{t+q-1} + 0.5X_{t+q}) \quad (21.2)$$

در واقع W_t در (۲۰.۲) یا (۲۱.۲) برآوردکننده اولیه‌ای از روند در زمان t است. اگر برای W_t ، $t = q+1, q+2, \dots, n-q$ را از X_t کم کنیم آنچه می‌ماند اثر فصل متناظر با t به همراه مقداری

^۱ Classical Decomposition Method

^۲ Winters Method

خطاست، سری جدید را با D_t نشان می‌دهیم. از سری D_t در برآورد اثرات فصلی استفاده خواهیم کرد. میانگین D_t های فوق متناظر با فصل j ام برآوردکننده اولیه‌ای برای S_j است. اگر آن را با \hat{S}_j^0 نشان دهیم چون $\sum_{j=1}^d \hat{S}_j^0$ لزوماً صفر نیست برآوردکننده نهایی با تصحیح \hat{S}_j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{S}_j = \hat{S}_j^0 - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d \hat{S}_l^0, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (22.2)$$

طبیعی است که برای $j > d$ ، تعریف کنیم $\hat{S}_j = \hat{S}_{j-d}$.

در گام بعد اثرات فصلی برآورد شده فوق را از X_t کم می‌کنیم تا سری $Y_t = X_t - \hat{S}_t$ حاصل شود. این سری Y_t که سری تعدیل شده فصلی^۱ نامیده می‌شود شامل روند و مقداری خطا است و از آن در برآورد پارامترهای روند استفاده خواهیم کرد. این کار معمولاً با برازش خط رگرسیون کمترین توانهای دوم عادی به مجموعه مشاهدات (t, Y_t) ، $t = 1, \dots, n$ انجام می‌شود، اگر $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ برآوردهای حاصل باشند، $\widehat{TR}_t = \hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$ و نهایتاً مدل برازش شده

$$\hat{X}_t = \widehat{TR}_t + \hat{S}_t = (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t) + \hat{S}_t, \quad (23.2)$$

به دست می‌آید. پیش‌بینی X_{n+l} در مبدأ n با گسترش این مدل برازش شده به آینده و به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\hat{X}_n(l) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times (n+l) + \hat{S}_{n+l}. \quad (24.2)$$

مثال (۵.۲): شکل (۵.۲-i) لگاریتم مصرف سه ماهه بنزین در انگلیس را برای سه ماهه اول سال ۱۹۸۲ تا سه ماهه آخر سال ۱۹۸۶ را نشان می‌دهد. این سری یک سری فصلی با دوره تناوب ۴ است و اینطور به نظر می‌رسد که مدل (۱۸.۲) با روندی خطی برای تحلیل این سری مناسب باشد. ابتدا W_t ها را با استفاده از (۲۰.۲) حساب می‌کنیم به عنوان مثال،

$$W_3 = \frac{1}{4}(0.5X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 0.5X_5) = 6.2$$

در نتیجه $D_3 = X_3 - W_3 = -0.836$ ، سایر مقادیر W_t و $D_t = X_t - W_t$ را محاسبه و در جدول (۹.۲) آورده‌ایم. D_t ها به تفکیک فصل نظیرشان در جدول (۱۰.۲) نیز آمده‌اند. \hat{S}_1^0 میانگین D_t های نظیر سه ماهه اول هر سال است یعنی،

$$\hat{S}_1^0 = \frac{1}{4}(0.575 + 0.637 + 0.638 + 0.586) = 0.609$$

^۱ Seasonal Adjusted Series

t	X_t	W_t	D_t	\hat{S}_t	Y_t	\hat{Y}_t	\hat{X}_t	e_t
1	6.830	—	—	0.612	6.218	6.157	6.769	0.061
2	6.094	—	—	-0.071	6.166	6.175	6.104	-0.009
3	5.368	6.204	-0.836	-0.819	6.187	6.193	5.374	-0.006
4	6.527	6.222	0.306	0.278	6.249	6.211	6.489	0.038
5	6.821	6.246	0.575	0.612	6.209	6.229	6.841	-0.019
6	6.245	6.254	-0.008	-0.071	6.316	6.246	6.175	0.070
7	5.412	6.265	-0.853	-0.819	6.231	6.264	5.445	-0.033
8	6.544	6.265	0.279	0.278	6.265	6.282	6.560	-0.016
9	6.897	6.260	0.637	0.612	6.285	6.300	6.912	-0.015
10	6.168	6.272	-0.104	-0.071	6.239	6.318	6.246	-0.079
11	5.454	6.290	-0.836	-0.819	6.273	6.335	5.516	-0.062
12	6.593	6.316	0.277	0.278	6.315	6.353	6.631	-0.038
13	6.991	6.353	0.638	0.612	6.379	6.371	6.983	0.008
14	6.282	6.386	-0.105	-0.071	6.353	6.389	6.317	-0.036
15	5.641	6.404	-0.763	-0.819	6.460	6.407	5.588	0.054
16	6.669	6.430	0.239	0.278	6.391	6.424	6.703	-0.034
17	7.060	6.473	0.586	0.612	6.448	6.442	7.054	0.005
18	6.419	6.499	-0.080	-0.071	6.490	6.460	6.389	0.030
19	5.850	—	—	-0.819	6.669	6.478	5.659	0.192
20	6.663	—	—	0.278	6.385	6.496	6.774	-0.111

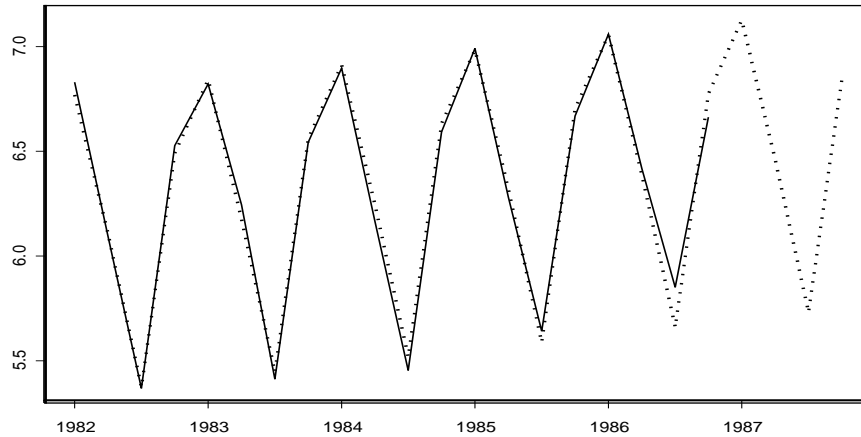
جدول ۹.۲: مؤلفه‌های حاصل از تجزیه سری مثال (۵.۲) به همراه سری برازش شده به روش تجزیه کلاسیک و خطاهای این برازش.

	1	2	3	4
1982	—	—	-0.836	0.306
1983	0.575	-0.008	-0.853	0.279
1984	0.637	-0.104	-0.836	0.277
1985	0.638	-0.105	-0.763	0.239
1986	0.586	-0.080	—	—
\hat{S}_j^0	0.609	-0.074	-0.822	0.275

جدول ۱۰.۲: برآورد اثرات فصلی برای سری مثال (۵.۲).

l	1	2	3	4
$\hat{X}_{20}(l)$	7.125	6.450	5.730	6.845

جدول ۱۱.۲: پیش‌بینی‌های حاصل از روش تجزیه کلاسیک برای سری مثال (۵.۲).



شکل ۵.۲: سری مثال (۵.۲)، سری برازش شده به روش تجزیه کلاسیک و پیش‌بینی‌های حاصل از آن.

سایر \hat{S}_j^0 ها نیز به همین ترتیب حساب شده و در جدول (۱۰.۲) آمده‌اند. مجموع این برآوردهای اولیه برابر -0.012 است. با استفاده از (۲۲.۲) برآوردهای نهایی اثرات فصلی را محاسبه کرده و در جدول (۹.۲) آورده‌ایم. در گام بعد سری تعدیل شده فصلی، $Y_t = X_t - \hat{S}_t$ را محاسبه و به کمک آن $\hat{\beta}_0 = 6.1395$ و $\hat{\beta}_1 = 0.0178$ و در نتیجه $\widehat{TR}_t = 6.1395 + 0.0178t$ را به دست می‌آوریم. در نتیجه مدل برازش شده عبارت است از،

$$\hat{X}_t = \widehat{TR}_t + \hat{S}_t = 6.1395 + 0.0178t + \hat{S}_t.$$

مقادیر برازش شده \hat{X}_t در مجموعه مشاهدات محاسبه و به همراه خطای برازش در جدول (۹.۲) آمده‌اند. اکنون به کمک تساوی (۲۴.۲) می‌توان پیش‌بینی‌ها را محاسبه کرد. این پیش‌بینی‌ها برای سال 1987 در جدول (۱۱.۲) آمده و در شکل (۵.۲) در ادامه سری رسم شده‌اند.

تابع $DEC.ADD(data, d, l)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات در روش تجزیه کلاسیک مدل جمعی تهیه شده است. برای انجام محاسبات در مثال (۵.۲) دستور $DEC.ADD(data, 4, 4)$ را اجرا کرده‌ایم.

مراحل انجام روش تجزیه کلاسیک برای برازش مدل کلاسیک ضربی (۱۹.۲) با اندکی تغییر مشابه مراحل فوق است. این تغییرات عبارتند از:

۱- در این حالت اثرات فصلی به کمک سری $R_t = \frac{X_t}{\hat{W}_t}$ ، $q + 1 \leq t \leq n - q$ برآورد می‌گردند. این کار با محاسبه میانگین R_t ها متناظر با فصل j ام (\hat{S}_j^0) و تصحیح مقادیر حاصل در این راستا که

مجموع آنها در یک دوره متناوب d شود، به صورت زیر انجام می شود.

$$\hat{S}_j = \frac{\hat{S}_j^0}{\sum_{l=1}^d \hat{S}_l^0} \times d, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (25.2)$$

برای $j > d$ ، نیز تعریف می کنیم $\hat{S}_j = \hat{S}_{j-d}$.

۲- سری تعدیل شده فصلی نیز از تقسیم X_t بر \hat{S}_t به دست می آید به عبارت دیگر $Y_t = X_t / \hat{S}_t$.

مدل برازش شده و پیش بینی حاصل از آن در این روش عبارتند از:

$$\hat{X}_t = \widehat{TR}_t \times \hat{S}_t = (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t) \times \hat{S}_t$$

و

$$\hat{X}_n(l) = (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times (n+l)) \times \hat{S}_{n+l} \quad (26.2)$$

تابع $DEC.MULT(data, d, l)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات روش تجزیه کلاسیک ضربی تهیه شده است.

مثال (۶.۲): سری فروش نوعی نوشابه در جدول (۱۲.۲) آمده و در نمودار (۶.۲) رسم شده است. این نمودار نشان می دهد که مدل (۱۹.۲) با روندی خطی برای مدل کردن و پیش بینی این سری مناسب است. جدول (۱۲.۲) شامل مراحل مختلف روش تجزیه کلاسیک برای این سری می باشد. مقادیر این جدول با اجرای دستور $DEC.MULT(data, 12, 12)$ در S-PLUS محاسبه شده اند. با اجرای این دستور برآوردهای کمترین توانهای دوم عادی عرض از مبدأ و شیب نیز محاسبه می شوند که به ترتیب برابرند با $\hat{\beta}_0 = 379.01$ و $\hat{\beta}_1 = 9.57$. در نتیجه مدل برازش شده به روش تجزیه کلاسیک برای این سری $\hat{X}_t = (379.01 + 9.57t)\hat{S}_t$ می باشد. با توجه به (۲۶.۲) پیش بینی ها در مبدأ $n = 48$ نیز برابرند با $\hat{X}_{48}(l) = (379.01 + 9.57(48+l))\hat{S}_{48+l}$. با اجرای دستور فوق این پیش بینی ها برای سال بعد نیز محاسبه می شوند (جدول ۱۳.۲).

۲.۳.۲ روش وینترز

هموارسازی روش دیگری است که در برازش مدل های کلاسیک و پیش بینی سری های فصلی به کار می رود. در این روش پارامترهای روند و اثرات فصلی به کمک روابط مناسب هموار می شوند. با استفاده از مقادیر هموار شده در زمان n ، مدل برازش شده در زمان n را به دست آورده و با گسترش این مدل به آینده پیش بینی ها را به دست می آوریم. به عنوان مثال در مدل ضربی با روند خطی اگر \hat{S}_n ، $\hat{\beta}_1(n)$ و $\hat{\beta}_0(n)$ مقادیر هموار شده اثرات فصلی و شیب و عرض از مبدأ در زمان n باشند آنگاه پیش بینی X_{n+l} در

t	X_t	W_t	R_t	\hat{S}_t	Y_t	\hat{Y}_t	\hat{X}_t	e_t
1	189	—	—	0.49	385.43	388.59	190.55	-1.55
2	229	—	—	0.60	383.78	398.16	237.58	-8.58
3	249	—	—	0.60	418.26	407.73	242.73	6.27
4	289	—	—	0.69	421.68	417.31	286.00	3.00
5	260	—	—	0.57	456.57	426.88	243.09	16.91
6	431	—	—	0.98	441.36	436.46	426.22	4.78
7	660	450.13	1.47	1.47	449.03	446.03	655.60	4.40
8	777	455.21	1.71	1.69	459.97	455.61	769.64	7.36
9	915	460.92	1.99	2.00	458.50	465.18	928.34	-13.34
10	613	467.21	1.31	1.30	470.62	474.76	618.39	-5.39
11	485	472.79	1.03	1.02	474.03	484.33	495.54	-10.54
12	277	480.21	0.58	0.61	457.22	493.91	299.23	-22.23
13	244	492.54	0.50	0.49	497.60	503.48	246.88	-2.88
14	296	507.29	0.58	0.60	496.06	513.05	306.14	-10.14
15	319	524.79	0.61	0.60	535.84	522.63	311.13	7.87
16	370	540.75	0.68	0.69	539.87	532.20	364.75	5.25
17	313	551.92	0.57	0.57	549.64	541.78	308.52	4.48
18	556	560.92	0.99	0.98	569.36	551.35	538.41	17.59
19	831	567.08	1.47	1.47	565.36	560.93	824.48	6.52
20	960	572.75	1.68	1.69	568.30	570.50	963.72	-3.72
21	1152	578.42	1.99	2.00	577.26	580.08	1157.63	-5.63
22	759	583.71	1.30	1.30	582.70	589.65	768.05	-9.05
23	607	589.29	1.03	1.02	593.27	599.23	613.09	-6.09
24	371	596.17	0.62	0.61	612.38	608.80	368.83	2.17
25	298	607.71	0.49	0.49	607.72	618.37	303.22	-5.22
26	378	622.96	0.61	0.60	633.49	627.95	374.70	3.30
27	373	640.83	0.58	0.60	626.55	637.52	379.53	-6.53
28	443	656.71	0.67	0.69	646.38	647.10	443.49	-0.49
29	374	667.25	0.56	0.57	656.76	656.67	373.95	0.05
30	660	674.67	0.98	0.98	675.86	666.25	650.61	9.39
31	1004	679.83	1.48	1.47	683.06	675.82	993.36	10.64
32	1153	684.88	1.68	1.69	682.55	685.40	1157.81	-4.81
33	1388	691.00	2.01	2.00	695.51	694.97	1386.92	1.08
34	904	698.42	1.29	1.30	694.02	704.55	917.71	-13.71
35	715	705.96	1.01	1.02	698.83	714.12	730.64	-15.64
36	441	713.67	0.62	0.61	727.92	723.69	438.44	2.56
37	352	725.83	0.48	0.49	717.85	733.27	359.56	-7.56
38	445	742.42	0.60	0.60	745.77	742.84	443.25	1.75
39	453	760.54	0.60	0.60	760.93	752.42	447.93	5.07
40	541	776.46	0.70	0.69	789.37	761.99	522.23	18.77
41	457	787.46	0.58	0.57	802.51	771.57	439.38	17.62
42	762	794.25	0.96	0.98	780.31	781.14	762.81	-0.81
43	1194	—	—	1.47	812.33	790.72	1162.23	31.77
44	1361	—	—	1.69	805.68	800.29	1351.90	9.10
45	1615	—	—	2.00	809.26	809.87	1616.20	-1.21
46	1059	—	—	1.30	813.02	819.44	1067.36	-8.36
47	824	—	—	1.02	805.36	829.01	848.20	-24.20
48	495	—	—	0.61	817.05	838.59	508.05	-13.05

جدول ۱۲.۲: مؤلفه‌های حاصل از تجزیه سری مثال (۶.۲) به همراه سری برازش شده به روش تجزیه کلاسیک و خطاهای این برازش.

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{X}_{48}(l)$	416	512	516	601	505	875	1331	1546	1845	1217	966	578

جدول ۱۳.۲: پیش‌بینی‌های حاصل از روش تجزیه کلاسیک برای سری مثال (۶.۲).

مبدأ n به کمک تساوی زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(l) &= (\hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n) \times (n+l)) \times \hat{S}_{n+l} \\ &= (\widehat{TR}_n + \hat{\beta}_1(n) \times l) \hat{S}_{n+l},\end{aligned}\quad (27.2)$$

که در آن $\widehat{TR}_n = \hat{\beta}_0(n) + \hat{\beta}_1(n) \times n$ وینترز (۱۹۶۰) روش هموارسازی را پیشنهاد کرد که در آن \hat{S}_t ، \widehat{TR}_t و $\hat{\beta}_1(t)$ توسط روابط

$$\widehat{TR}_t = \alpha \frac{X_t}{\hat{S}_{t-d}} + (1-\alpha)(\widehat{TR}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1)), \quad (28.2)$$

$$\hat{\beta}_1(t) = \beta(\widehat{TR}_t - \widehat{TR}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{\beta}_1(t-1), \quad (29.2)$$

$$\hat{S}_t = \gamma \frac{X_t}{\widehat{TR}_t} + (1-\gamma)\hat{S}_{t-d}, \quad (30.2)$$

بهنگام می‌شوند. در این روابط $0 < \alpha < 1$ ، $0 < \beta < 1$ و $0 < \gamma < 1$ ثابتهای هموارسازی نامیده می‌شوند. در رابطه (۲۸.۲)، $\frac{X_t}{\hat{S}_{t-d}}$ برآوردی از TR_t است که به محض مشاهده X_t محاسبه می‌گردد و $\widehat{TR}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1)$ برآورد دیگری از TR_t ، حاصل گسترش مدل برازش شده برای روند در زمان $t-1$ به زمان t است. پس \widehat{TR}_t در (۲۸.۲) میانگین وزنی این دو برآوردکننده است. تعابیر مشابهی نیز برای \hat{S}_t و $\hat{\beta}_1(t)$ می‌توان ارائه کرد.

وینترز شیوه‌ای هم برای تعیین برآوردهای اولیه \widehat{TR}_0 و $\hat{\beta}_1(0)$ و \hat{S}_{j-d} ، $j = 1, 2, \dots, d$ بدین شرح ارائه کرده است. اگر داده‌ها برای k دوره تناوب کامل در دسترس باشند ($n = k \times d$) و \bar{X}_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ میانگین مقادیر مشاهده شده در دوره i ام باشد، \widehat{TR}_0 و $\hat{\beta}_1(0)$ را به ترتیب عرض از مبدأ و شیب خط واصل بین نقاط $(\frac{d}{2}, \bar{X}_1)$ و $(n - \frac{d}{2}, \bar{X}_l)$ اختیار می‌کنیم یعنی،

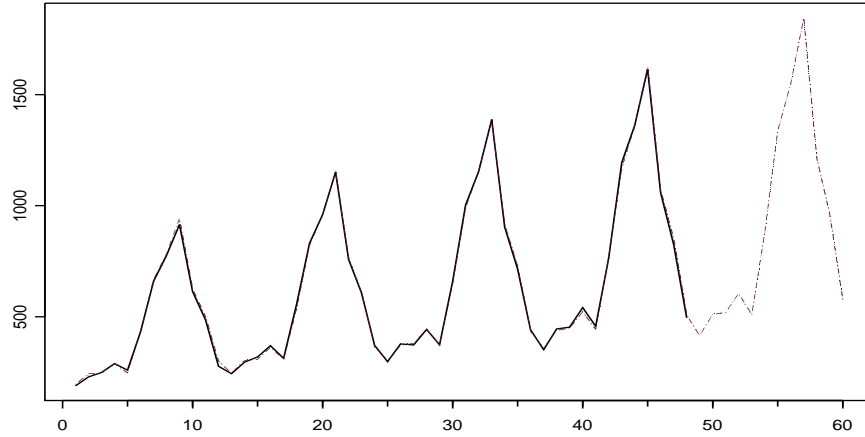
$$\hat{\beta}_1(0) = \frac{\bar{X}_l - \bar{X}_1}{n-d} = \frac{\bar{X}_l - \bar{X}_1}{(k-1)d}, \quad \widehat{TR}_0 = \bar{X}_1 - \frac{d}{2}\hat{\beta}_1(0). \quad (31.2)$$

برای محاسبه برآوردهای اولیه اثرات فصلی کمیت‌های زیر را محاسبه می‌کنیم

$$S_t^0 = \frac{X_t}{\bar{X}_i + (j - \frac{d+1}{2})\hat{\beta}_1(0)}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (32.2)$$

در رابطه فوق j فصل و i دوره متناظر با زمان t است و با توجه به اینکه

$$t = j + (i-1)d, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, d$$



شکل ۶.۲: سری فروش نوشابه، سری هموار شده به روش وینترز و پیش‌بینی‌های حاصل از آن.

تعیین می‌گردند. مخرج کسر (۳۲.۲) برآوردی از \widehat{TR}_t است که از خط ماربر نقطه میانی دوره i ام با شیب $\hat{\beta}_1(0)$ حاصل می‌شود. پس با توجه به ساختار مدل کلاسیک ضربی، $S_t^0 = S_{j+(i-1)d}^0$ ها به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ برآورد کننده‌هایی از S_j اند. وینترز میانگین اینها یعنی $\overline{S_j^0} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_{j+(i-1)d}^0$ را بعد از تصحیح، در این راستا که مجموعشان برابر d شود به عبارت دیگر،

$$\hat{S}_{j-d} = \frac{\overline{S_j^0}}{\sum_{l=1}^d \overline{S_l^0}} \times d, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (۳۳.۲)$$

را به عنوان برآورد کننده‌های اولیه اثرات فصلی پیشنهاد کرد. پیشنهادی دیگر این است که هموارسازی را از زمان $t = d + 1$ شروع کرده و به کمک روابط زیر مقادیر اولیه را برای استفاده در (۲۸.۲)، (۲۹.۲) و (۳۰.۲) به دست آورد.

$$\hat{\beta}_1(d) = \frac{\overline{X}_t - \overline{X}_1}{n - d}, \quad \widehat{TR}_d = \overline{X}_1 + \frac{d}{2} \hat{\beta}_1(d).$$

$$\hat{S}_t = \frac{X_t}{(\widehat{TR}_d - \hat{\beta}_1(d) \times (d - t))}, \quad t = 1, 2, \dots, d.$$

در این کتاب و تابع $WINTERS(data, d, \alpha, \beta, \gamma, l)$ در پیوست ۳ که برای انجام محاسبات روش وینترز تهیه شده است مقادیر حاصل از روابط (۳۱.۲) را برای \widehat{TR}_0 و $\hat{\beta}_1(0)$ و برآورد اثرات فصلی حاصل از روش تجزیه کلاسیک را به عنوان مقادیر اولیه اثرات فصلی اختیار کرده‌ایم.

مثال (۷.۲): سری فروش نوشابه در مثال (۶.۲) را در نظر بگیرید. مشاهدات برای $k = 4$ دوره کامل موجودند و $\overline{X}_4 = 769.15$ و $\overline{X}_1 = 447.83$ در نتیجه $\hat{\beta}_1(0) = 9.69$ و $\widehat{TR}_0 = 389.72$. برای $j = 1, 2, \dots, 12$ ، قرار می‌دهیم $\hat{S}_{j-12} = \hat{S}_j$ که همان مقادیر حاصل از روش تجزیه کلاسیک در

t	X_t	\widehat{TR}_t	$\widehat{\beta}_1(t)$	\widehat{S}_t	\widehat{X}_t	e_t
1	189	398.01	9.55	0.49	195.85	-6.85
2	229	405.18	9.31	0.59	243.19	-14.19
3	249	414.86	9.35	0.60	246.75	2.25
4	289	423.96	9.32	0.68	290.73	-1.73
5	260	435.61	9.55	0.57	246.73	13.27
6	431	444.78	9.52	0.98	434.71	-3.71
7	660	453.77	9.46	1.47	667.74	-7.74
8	777	462.90	9.43	1.69	782.51	-5.51
9	915	470.95	9.29	1.99	942.61	-27.61
10	613	479.28	9.20	1.30	625.54	-12.54
11	485	487.03	9.05	1.02	499.78	-14.78
12	277	492.19	8.66	0.60	300.54	-23.54
13	244	500.69	8.65	0.49	244.82	-0.82
14	296	508.27	8.54	0.59	302.31	-6.31
15	319	518.67	8.72	0.60	307.92	11.08
16	370	528.67	8.85	0.69	361.26	8.74
17	313	538.47	8.95	0.57	307.57	5.43
18	556	549.66	9.17	0.98	534.16	21.84
19	831	559.54	9.24	1.47	820.53	10.47
20	960	568.77	9.24	1.69	960.21	-0.21
21	1152	578.09	9.25	1.99	1150.46	1.54
22	759	586.98	9.21	1.30	763.65	-4.65
23	607	596.06	9.20	1.02	608.36	-1.36
24	371	606.41	9.31	0.60	364.08	6.92
25	298	615.14	9.26	0.49	300.88	-2.88
26	378	625.76	9.39	0.59	369.91	8.09
27	373	634.04	9.28	0.60	379.65	-6.65
28	443	643.52	9.30	0.69	441.62	1.38
29	374	652.80	9.30	0.57	374.14	-0.14
30	660	663.28	9.42	0.98	648.43	11.57
31	1004	673.72	9.52	1.47	988.86	15.14
32	1153	683.22	9.52	1.69	1153.42	-0.42
33	1388	693.19	9.56	1.99	1378.97	9.03
34	904	702.04	9.49	1.30	913.22	-9.22
35	715	710.47	9.39	1.02	725.91	-10.91
36	441	721.06	9.51	0.60	433.75	7.25
37	352	729.60	9.41	0.49	356.69	-4.69
38	445	740.08	9.52	0.59	438.67	6.33
39	453	750.54	9.61	0.60	447.35	5.65
40	541	762.92	9.89	0.69	521.97	19.03
41	457	775.27	10.13	0.57	442.89	14.11
42	762	784.55	10.05	0.98	770.42	-8.42
43	1194	796.25	10.21	1.47	1169.66	24.34
44	1361	806.44	10.21	1.69	1361.38	-0.38
45	1615	816.07	10.15	1.99	1626.59	-11.59
46	1059	825.17	10.05	1.30	1072.68	-13.68
47	824	832.57	9.78	1.02	850.93	-26.93
48	495	840.15	9.56	0.60	508.33	-13.33

جدول ۱۴.۲: مقادیر هموار شده روند، شیب و اثرات فصلی حاصل از روش وینترز برای سری فروش نوشابه (مثال ۷.۲).

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{X}_{48}(l)$	414	511	519	605	510	880	1338	1547	1844	1214	960	576

جدول ۱۵.۲: پیش‌بینی‌های حاصل از روش وینترز برای سری فروش نوشابه (مثال ۷.۲).

جدول (۱۲.۲) اند. جدول (۱۴.۲) مقادیر هموار شده \widehat{TR}_t ، $\widehat{\beta}_1(t)$ و \widehat{S}_t را به ازای $\alpha = \beta = \gamma = 0.1$ نشان می‌دهد. با توجه به اینکه $\widehat{TR}_{48} = 840.15$ و $\widehat{\beta}_1(48) = 9.56$ و (۲۷.۲) پیش‌بینی‌ها در مبدأ $n = 48$ عبارتند از $\widehat{X}_{48}(l) = (840.15 + 9.56t)S_{48+l}$. پیش‌بینی‌های حاصل برای سال بعد در جدول (۱۵.۲) آمده و در نمودار (۶.۲) در ادامه سری رسم شده‌اند.

۴.۲ تمرینات

۱.۲- جدول زیر فروش ماهیانه (بر حسب ده هزار دلار) یک شرکت داروسازی را از ژانویه ۱۹۹۴ تا دسامبر ۱۹۹۷ را نشان می‌دهد. نمودار زمانی این سری را رسم کنید. با استفاده از روش میانگین متحرک ساده با $k = 5$ ، سری هموار شده و پیش‌بینی‌هایی برای سه ماه اول سال ۱۹۹۸ به دست آورید.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1994	24.0	24.5	25.2	25.0	23.8	25.5	26.0	26.7	25.1	25.6	23.8	24.0
1995	26.3	25.6	26.1	23.9	23.2	24.5	26.1	23.0	27.2	25.8	25.7	26.3
1996	24.7	24.4	26.0	23.2	22.8	24.3	24.4	25.6	25.8	22.1	26.3	28.4
1997	25.3	24.5	25.8	23.0	26.6	22.5	27.3	26.5	25.0	25.3	23.5	25.1

فروش ماهیانه یک شرکت داروسازی.

۲.۲- پیش‌بینی‌های تمرین قبل را با استفاده از روش هموارسازی نمایی ساده به ازای $\alpha = 0.1$ به دست آورید.

۳.۲- تقاضای ماهیانه برای نوعی قطعه یدکی به مدت پنج سال در جدول زیر آمده. با استفاده از روش میانگین متحرک مرتبه دوم با $k = 7$ ، سری هموار شده و پیش‌بینی‌هایی برای سه ماه اول سال ششم به دست آورید.

سال	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
اول	260	251	235	234	287	314	304	310	272	330	315	330
دوم	327	320	282	250	285	335	330	290	285	265	251	278
سوم	347	339	312	274	285	318	326	331	335	310	325	355
چهارم	391	412	349	365	399	361	380	394	368	359	374	418
پنجم	429	448	420	442	457	477	443	410	399	424	468	480

تقاضای ماهیانه برای نوعی قطعه یدکی.

۴.۲- پیش‌بینی‌های تمرین قبل را با استفاده از روش هموارسازی نمایی مرتبه دوم به ازای $\alpha = 0.15$ به دست آورید.

۵.۲- در مثال (۱.۲) فرض کنید فروش کنسرو در زمان $t = 19$ به اشتباه به جای ۹۷۸، ۱۰۷۸ ثبت شده باشد.

الف) نمودار زمانی سری جدید را رسم کنید.

ب) پیش‌بینی‌های گام بعد را برای سری جدید به ازای $k = 3$ و $k = 7$ به دست آورید.

ج) این پیش‌بینی‌ها را به همراه مشاهدات رسم کرده و پاسخ آنها به این مشاهده دور افتاده را تشریح کنید.

۶.۲- در مثال (۲.۲) فرض کنید بر اثر تبلیغات انجام شده فروش این کنسرو از زمان $t = 25$ به بعد 100 واحد افزایش یافته است. سری جدید را با اضافه کردن 100 واحد به مشاهدات 25 تا 48 به دست آورید.

الف) نمودار زمانی سری جدید را رسم کنید.

ب) پیش‌بینی‌های گام بعد را برای سری جدید به ازای $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.15$ و $S_0 = 942$ به دست آورید.

ج) این پیش‌بینی‌ها را به همراه مشاهدات رسم کرده و پاسخ آنها به این تغییر سطح را تشریح کنید.

۷.۲- فرض کنید روش میانگین متحرک ساده را برای پیش‌بینی سری (۱.۲) به کار می‌بریم. همچنین فرض کنید در زمان T میانگین سری به سطح جدید $\mu^* = \mu + w$ منتقل شده ولی در زمان $T + 1$ به سطح اولیه خود برگردد. نشان دهید

$$E(M_t) = \begin{cases} \mu & t \leq T - 1 \\ \mu + \frac{w}{k} & T \leq t \leq T + k - 1 \\ \mu & t \geq T + k \end{cases}$$

تغییر k چه تأثیری بر تطبیق سری هموار شده با این تغییر ناگهانی در سطح دارد.

۸.۲- فرض کنید روش هموارسازی نمایی ساده را برای پیش‌بینی سری (۱.۲) به کار می‌بریم. همچنین فرض کنید در زمان T میانگین سری به سطح جدید $\mu^* = \mu + w$ منتقل شده ولی در زمان $T + 1$ به سطح اولیه خود برگردد. نشان دهید

$$E(S_t) = \begin{cases} \mu & t \leq T - 1 \\ \mu + \alpha w (1 - \alpha)^{t-T} & t \geq T \end{cases}$$

(فرض کنید $E(S_0) = \mu$). تغییر α چه تأثیری بر تطبیق سری هموار شده با این تغییر ناگهانی در سطح دارد.

۹.۲- فرض کنید روش میانگین متحرک ساده را برای پیش‌بینی سری (۱.۲) به کار می‌بریم. همچنین فرض کنید در زمان T میانگین سری به سطح جدید $\mu^* = \mu + w$ منتقل شده و در همین سطح

باقی بماند. نشان دهید

$$E(M_t) = \begin{cases} \mu & t \leq T-1 \\ \mu + \frac{w(t-T+1)}{k} & T \leq t \leq T+k-2 \\ \mu^* & t \geq T+k-1 \end{cases}$$

(فرض کنید $E(S_0) = \mu$). تغییر k چه تأثیری بر تطبیق سری هموار شده با این تغییر دائمی در سطح دارد.

۱۰.۲- فرض کنید روش هموارسازی نمایی ساده را برای پیش‌بینی سری (۱.۲) به کار می‌بریم. همچنین فرض کنید در زمان T میانگین سری به سطح جدید $\mu^* = \mu + w$ منتقل شده و در همین سطح باقی بماند. نشان دهید

$$E(S_t) = \begin{cases} \mu & t \leq T-1 \\ \mu^* - w(1-\alpha)^{t-T+1} & t \geq T \end{cases}$$

تغییر α چه تأثیری بر تطبیق سری هموار شده با این تغییر دائمی در سطح دارد.

۱۱.۲- اگر $e_t = X_t - M_{t-1}$ خطای پیش‌بینی گام بعد حاصل از روش میانگین متحرک ساده برای سری (۱.۲) باشد، نشان دهید

(الف)

$$E(e_t) = 0, \quad \text{Var}(e_t) = \frac{k+1}{k}\sigma^2$$

(ب) در صورتی که $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ها، نشان دهید

$$M_{t-1} \pm Z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

یک پیش‌بینی فاصله‌ای با ضریب $100(1-\alpha)$ درصد برای X_t است.

(ج) در مثال (۱.۲) برای X_{49} یک پیش‌بینی فاصله‌ای ۹۵ درصدی بسازید. از $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{n-1}$ برای برآورد σ^2 استفاده کنید (برآوردکننده‌های بهتری را می‌توان در فصل هشتم کتاب مونتگومری و همکاران، ۱۹۹۰ یافت).

۱۲.۲- اگر $e_t = X_t - S_{t-1}$ خطای پیش‌بینی گام بعد حاصل از روش هموارسازی نمایی ساده برای سری (۱.۲) باشد، نشان دهید

(الف)

$$E(e_t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Var}(e_t) = \frac{2}{2-\alpha}\sigma^2$$

ب) در صورتی که $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ها، نشان دهید

$$S_{t-1} \pm Z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{2}{2-\alpha}}$$

یک پیش‌بینی فاصله‌ای (تقریبی) با ضریب $(1-\alpha)100$ درصد برای X_t است.

ج) در مثال (۲.۲) برای X_{49} یک پیش‌بینی فاصله‌ای ۹۵ درصدی بسازید.

۱۳.۲- نشان دهید ضریب همبستگی بین میانگین‌های متحرک M_t و M_{t+h} برابر است با

$$\begin{cases} 1 - \frac{|h|}{k} & h < k \\ 0 & h \geq k \end{cases}$$

(این همبستگی‌های مثبت باعث می‌شوند نوسانات سری میانگین متحرک ساده در مقایسه با سری اولیه تقلیل یابد.)

۱۴.۲- سری Se1 در پیوست ۲ را به روش تجزیه کلاسیک تحلیل کرده و پیش‌بینی‌هایی برای سال ۱۹۷۹ به دست آورید.

۱۵.۲- سری Se2 در پیوست ۲ را

الف) به روش تجزیه کلاسیک تحلیل کرده و پیش‌بینی‌هایی برای سال ۱۹۶۱ به دست آورید.

ب) به روش وینترز با $\alpha = \beta = \gamma = 0.1$ تحلیل کرده و پیش‌بینی‌هایی برای سال ۱۹۶۱ به دست آورید.

۱۶.۲- مدل $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \sin(\frac{2\pi t}{12}) + \beta_3 \cos(\frac{2\pi t}{12}) + \beta_4 t \sin(\frac{2\pi t}{12}) + \beta_5 t \cos(\frac{2\pi t}{12}) + \epsilon_t$ را که $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ها و مستقلند، در نظر بگیرید.

الف) ۴۸ مشاهده از توزیع $N(0, 100)$ شبیه‌سازی کنید (در S-PLUS از دستور $eps < -rnorm(48, 0, 10)$ استفاده کنید).

ب) با استفاده از مشاهدات (الف) به عنوان مصدیق ϵ_t و به ازای $\beta_2 = 10, \beta_0 = 100$ ، $\beta_3 = -20$ و $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ از مدل فوق ۴۸ مشاهده شبیه‌سازی کنید (در S-PLUS دستورات $Time < -1 : 48$ و

$$data < -100 + 10 * \sin(2 * pi * Time / 12) - 20 * \cos(2 * pi * Time / 12) + eps$$

را وارد کنید). نمودار سری شبیه‌سازی شده را رسم کنید.

ج) با استفاده از ۳۶ مشاهده اول و روش تجزیه کلاسیک، پیش‌بینی‌هایی برای X_{36+l} به ازای $l = 1, 2, \dots, 12$ به دست آورید. مجموع توان‌های دوم خطای این پیش‌بینی‌ها را حساب کنید.

(د) با برازش یک مدل رگرسیونی به روش کمترین توانهای دوم عادی (در S-PLUS دستورات $Time < -1 : 36$ و

$$Time < -1 : 36; V1 < -\sin(2 * pi * Time/12);$$

$$V2 < -\cos(2 * pi * Time/12); lm(data \sim V1 + V2)$$

را وارد کنید). پیش‌بینی‌هایی برای X_{36+l} به ازای $l = 1, 2, \dots, 12$ به دست آورید. مجموع توان‌های دوم خطای این پیش‌بینی‌ها را حساب کرده با آنچه در (ج) به دست آوردید مقایسه کنید.

(ه) قسمت‌های (ب) و (ج) و (د) را به ازای مجموعه پارامترهای زیر تکرار کنید

$$\text{الف) } \beta_0 = 100, \beta_1 = 2, \beta_2 = 10, \beta_3 = -20, \beta_4 = \beta_5 = 0$$

$$\text{ب) } \beta_0 = 100, \beta_1 = 5, \beta_4 = 2, \beta_5 = -1, \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$\text{ج) } \beta_0 = 100, \beta_1 = 5, \beta_2 = 10, \beta_3 = -20, \beta_4 = 2, \beta_5 = -1$$

۱۷.۲- با برازش مدل رگرسیونی تمرین (۱۶.۲) به سری تمرین (۱۵.۲) پیش‌بینی‌های سال ۱۹۶۱ را به این روش به دست آورید.

۱۸.۲- آماره‌های W_t, S_t, M_t و W_t که در این فصل با آنها آشنا شدیم حالت‌های خاصی از صافی‌های خطی^۱ اند. در واقع یک صافی خطی ترکیبی خطی از عناصر سری زمانی است و از کاربردهای آن به تقلیل خطاهای تصادفی (مثل S_t, M_t) یا حذف اثرات غیرتصادفی (مثل حذف اثرات فصلی به کمک صافی W_t ، در واقع این صافی یک روند خطی را بدون تغییر از خود عبور داده ولی اثرات فصلی را حذف می‌کند) برای شناسایی بهتر روند می‌توان اشاره کرد. فرض کنید $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \epsilon_t$ باشد و ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند.

الف) تعریف می‌کنیم $U_t = \sum_{i=-2}^2 a_i X_{t+i}$ که $a_0 = \frac{17}{35}, a_1 = a_{-1} = \frac{12}{35}, a_2 = a_{-2} = -\frac{3}{35}$ امید ریاضی و واریانس U_t و ضریب همبستگی U_t و U_{t+1} را حساب کنید.

ب) تعریف می‌کنیم $V_t = \sum_{i=-3}^3 b_i X_{t+i}$ که $b_0 = \frac{7}{21}, b_1 = b_{-1} = \frac{6}{21}, b_2 = b_{-2} = -\frac{6}{21}$ ، امید ریاضی و واریانس V_t و ضریب همبستگی V_t و V_{t+1} را حساب کنید.

ج) هر دو صافی فوق عبارت درجه دوم را بدون تغییر عبور داده‌اند، کدامیک اینکار را بهتر انجام می‌دهند.

^۱ Linear Filters

۱۹.۲- فرض کنید $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + S_t + \epsilon_t$ که ϵ_t ها متغیرهای تصادفی غیر وابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 و S_t تابعی متناوب با دوره تناوب 3 باشد به طوریکه $\sum_{t=1}^3 S_t = 0$. امید ریاضی و واریانس سری هموار شده $Y_t = \sum_{i=-2}^2 a_i X_{t+i}$ که $a_0 = \frac{3}{9}, a_1 = a_{-1} = \frac{4}{9}, a_2 = a_{-2} = -\frac{1}{9}$ را بیابید.

۲۰.۲- نشان دهید:

الف) یک صافی خطی، چند جمله‌ای $P_d(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$ را بدون تغییر عبور می‌دهد به عبارت دیگر $P_d(t) = \sum_i a_i P_d(t+i)$ اگر و تنها اگر ضرایب در معادلات زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \sum_i a_i = 1 \\ \sum_i i^r a_i = 0 \quad r = 1, 2, \dots, d \end{cases}$$

ب) صافی $\sum_{i=-7}^7 a_i X_{t+i}$ با ضرایب $a_0 = \frac{74}{320}, a_1 = a_{-1} = \frac{67}{320}, a_2 = a_{-2} = \frac{46}{320}, a_3 = a_{-3} = \frac{21}{320}, a_4 = a_{-4} = \frac{3}{320}, a_5 = a_{-5} = -\frac{5}{320}, a_6 = a_{-6} = -\frac{6}{320}, a_7 = a_{-7} = -\frac{3}{320}$ چند جمله‌ای درجه سوم را بدون تغییر عبور می‌دهد. این صافی به صافی میانگین متحرک پانزده نقطه‌ای اسپنسر^۱ معروف است.

^۱ Spencer

فصل ۳

تعاریف و مفاهیم اساسی

به طور ضمنی یک سری زمانی را دنباله‌ای از مشاهدات تعریف کردیم که در زمانهایی معلوم ثبت شده‌اند. برای پیشبرد اهداف نظری و کاربردی در تحلیل آماری سریهای زمانی نیاز به تعریف رسمی‌تری از یک سری زمانی داریم. با این تعریف در بخش (۱.۳) آشنا می‌شویم و با استناد به آن بعضی از شاخص‌های یک سری زمانی مثل توابع میانگین، واریانس، اتوکواریانس و خودهمبستگی را تعریف می‌کنیم. سریهای زمانی را می‌توان به دو دسته ایستا و نایستا تفکیک کرد، در بخش (۲.۳) ضمن آشنایی با این مفاهیم با سریهای ایستای کوواریانس که نقش محوری در ادامه مطالب این کتاب دارند نیز آشنا می‌شویم. بخش (۳.۳) را به پیش‌بینی مقادیر یک سری ایستای کوواریانس اختصاص داده‌ایم. در این بخش با بهترین پیش‌بین خطی و چگونگی محاسبه ضرایب آن آشنا خواهیم شد. یکی دیگر از شاخصه‌های یک سری زمانی تابع خودهمبستگی جزئی آن است که در بخش (۴.۳) تعریف می‌شود. در عمل میانگین، مقادیر توابع اتوکواریانس، خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی نامعلومند و بایستی به کمک مشاهدات برآورد شوند. با برآوردکننده‌های معمول برای این پارامترها و توزیع‌های مجانبی آنها در (۵.۳) آشنا می‌شویم.

۱.۳ سری زمانی و مشخصه‌های آن

در تحلیل سریهای زمانی ماهیت تصادفی صفت مورد مطالعه منجر به این می‌شود که در هر لحظه از زمان (t) آنچه دیده شده یا دیده خواهد شد را بتوان مقداری از یک متغیر تصادفی (X_t) تصور کرد. پس یک سری زمانی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف (۱.۳): یک سری زمانی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی چون $\{X_t, t \in T\}$ است.

هر چند در این تعریف مجموعه اندیس گذار T می‌تواند زیر مجموعه دلخواهی از اعداد حقیقی باشد اما در این کتاب T را مجموعه اعداد طبیعی یا حداکثر مجموعه اعداد صحیح اختیار می‌کنیم. در این حالات به ترتیب می‌توان نوشت $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ یا $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ اما در ادامه غیر از مواردی که نیاز به

تأکید باشد یک سری را به شکل $\{X_t\}$ نشان می‌دهیم. اگر فضای نمونه‌ای متناظر با این متغیرهای تصادفی باشد برای $\omega \in \Omega$ ، $X_t(\omega)$ تابعی از زمان روی T است که به آن یک مصداق^۱ از سری زمانی $\{X_t\}$ می‌گوییم. بنابراین آنچه را که قبل از این به عنوان یک سری زمانی تعریف کرده بودیم، یعنی مجموعه‌ای از مشاهدات که در زمانهایی معلوم ثبت گردیده‌اند، در واقع بخشی از یک مصداق سری زمانی $\{X_t\}$ است (البته در ادامه به همین بخش نیز مصداقی از سری می‌گوییم). از مطالب فوق چنین برمی‌آید که یک سری زمانی در واقع فرآیندی تصادفی است. پس مدل احتمالی نظیر سری زمانی $\{X_t\}$ مشابه آنچه در بحث فرآیندهای تصادفی دیده‌ایم توسط خانواده توزیعهای توأم با بعد متناهی یعنی خانواده‌ای شامل توزیعهای

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = P(\{\omega : X_{t_1}(\omega) \leq x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n\})$$

به ازای $n = 1, 2, \dots$ و هر انتخابی از t_1, \dots, t_n در T تعیین می‌گردد.

در تحلیل سریهای زمانی به ندرت با چنین توزیعهایی سرو کار پیدا خواهیم کرد. معمولاً اطلاع از وجود و مقادیر گشتاورها بخصوص گشتاورهای اول و دوم در بسیاری از موارد کفایت می‌کند. به عنوان مثال در همین فصل (بخش ۳.۳) خواهیم دید اگر پیش‌بینی‌ها را به پیش‌بینی‌های خطی محدود کنیم به کمک این گشتاورها می‌توان بهترین پیش‌بین خطی را به دست آورد. در تعریف زیر با بعضی از مشخصه‌های مهم سریهای زمانی آشنا می‌شویم که به کمک این گشتاورها تعریف می‌شوند.

تعریف (۲.۳): با فرض اینکه سری زمانی $\{X_t\}$ دارای گشتاورهای اول و دوم متناهی باشد (به طور معادل $E(X_t^2) < \infty, \forall t$ ،

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E(X_t), \quad t \in T \\ \sigma_X^2(t) &= \text{Var}(X_t) = E(X_t - \mu_X(t))^2, \quad t \in T \\ C_X(t, s) &= \text{Cov}(X_t, X_s) = E(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s)), \quad t, s \in T \\ R_X(t, s) &= \frac{C_X(t, s)}{\sigma_X(t)\sigma_X(s)}, \quad t, s \in T \end{aligned}$$

به ترتیب تابع میانگین، تابع واریانس، تابع اتوکواریانس (ACVF)^۲ و تابع خودهمبستگی (ACF)^۳ $\{X_t\}$ نامیده می‌شوند.

در صورتی که نیاز به تأکید نباشد زیر نویس X را در نمایش ضابطه توابع فوق حذف می‌کنیم.

در مثالهای زیر با چند سری زمانی و مشخصه‌های آنها آشنا خواهیم شد.

مثال (۱.۳): اگر $\{X_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی غیر وابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشد آنگاه

$$\mu(t) = 0, \quad \text{Var}(X_t) = \sigma^2, \quad C(t, s) = \begin{cases} \sigma^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}, \quad R(t, s) = \begin{cases} 1 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

^۱ Realization

^۲ Autocovariance Function

^۳ Autocorrelation Function

چنین دنباله‌ای را سری نوفه سفید^۱ (خطای محض^۲ یا تحول^۳) نامیده و می‌نویسم $\{X_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. سریهای نوفه سفید نقش زیادی در ساختار سریهای زمانی مهمتر بازی می‌کنند. مثال (۲.۳): اگر $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و $X_t = \mu + Z_t + \theta Z_{t-1}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$\mu(t) = \mu + E(Z_t) + \theta E(Z_{t-1}) = \mu,$$

$$Var(X_t) = Var(Z_t) + \theta^2 Var(Z_{t-1}) = (1 + \theta^2)\sigma^2,$$

و

$$\begin{aligned} C(t, s) &= Cov(\mu + Z_t + \theta Z_{t-1}, \mu + Z_s + \theta Z_{s-1}) \\ &= Cov(Z_t, Z_s) + \theta Cov(Z_t, Z_{s-1}) + \theta Cov(Z_{t-1}, Z_s) + \theta^2 Cov(Z_{t-1}, Z_{s-1}) \\ &= \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & t = s \\ \theta\sigma^2 & |t - s| = 1 \\ 0 & |t - s| \geq 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

و

$$R(t, s) = \begin{cases} 1 & t = s \\ \frac{\theta}{1 + \theta^2} & |t - s| = 1 \\ 0 & |t - s| \geq 2 \end{cases} .$$

سری $\{X_t\}$ در این مثال را سری میانگین متحرک^۴ مرتبه اول با میانگین μ می‌نامیم. شکل (۱.۳) مصادیقی از سری میانگین متحرک مرتبه اول را نشان می‌دهد.

مثال (۳.۳): با فرض اینکه A و B متغیرهای تصادفی غیروابسته‌ای با میانگین صفر و واریانس‌های σ_A^2 و σ_B^2 هستند سری زمانی $\{X_t\}$ را به صورت $X_t = A \cos wt + B \sin wt$ تعریف می‌کنیم. در اینصورت

$$\mu(t) = E(A) \cos wt + E(B) \sin wt = 0,$$

$$Var(X_t) = \sigma_A^2 \cos^2(wt) + \sigma_B^2 \sin^2(wt),$$

$$C(t, s) = E[(A \cos wt + B \sin wt)(A \cos ws + B \sin ws)]$$

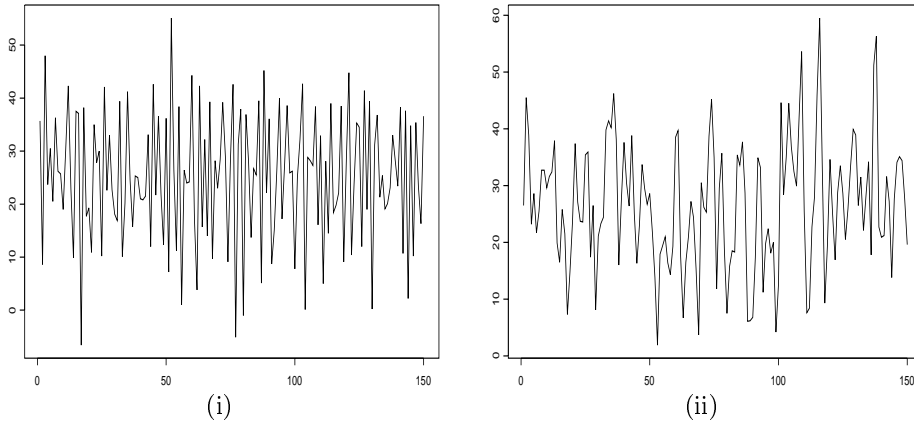
$$= \sigma_A^2 \cos wt \cos ws + \sigma_B^2 \sin wt \sin ws.$$

^۱ White Noise

^۲ Pure Error

^۳ Innovation

^۴ Moving Average



شکل ۱.۳: مصادیقی از سری میانگین متحرک مرتبه اول با میانگین ۲۵ و $\theta = -0.6$ (i) و $\theta = 0.6$ (ii): $Z_t \sim N(0, 100)$ وقتی $\theta = 0.6$.

در حالت خاصی که $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$,

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2, \quad C(t, s) = \sigma^2 \cos w(t - s), \quad R_X(t, s) = \cos w(t - s).$$

مثال (۴.۳): فرض کنید $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ سری $\{X_t\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 \\ X_2 &= Z_1 + Z_2 \\ &\vdots \\ X_t &= Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_t \end{aligned}$$

به عبارت دیگر $X_0 = 0$ و برای $t = 1, 2, \dots$ $X_t = X_{t-1} + Z_t$. سری $\{X_t\}$ سری قدم زدن تصادفی^۱ نامیده می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\mu(t) = 0, \quad \text{Var}(X_t) = t\sigma^2,$$

$$C(t, s) = \min(t, s)\sigma^2,$$

$$R(t, s) = \frac{\min(t, s)}{\sqrt{ts}} = \sqrt{\frac{\min(t, s)}{\max(t, s)}}.$$

^۱ Random Walk

۲.۳ سریهای زمانی ایستا

همانطور که اشاره شد در تحلیل سری زمانی $\{X_t\}$ معمولاً بخشی از یک مصداق این سری در اختیار ما است. در صورتی که خواص سری زمانی $\{X_t\}$ در گذر زمان تغییر نکند انتظار داریم که اطلاعات حاصل از این بخش را بتوان در برآورد مشخصه‌های $\{X_t\}$ و پیش‌بینی آینده آن به کار برد. یک سری زمانی با این مطلوبیت که خواصش با انتقال زمان تغییر نکند را سری ایستا^۱ می‌نامیم. در ادامه با دو نوع ایستایی آشنا خواهیم شد.

تعریف (۳.۳): سری $\{X_t\}$ را اکیداً ایستا^۲ (یا ایستای قوی^۳) می‌گوییم هر گاه برای هر n و k بردارهای تصادفی $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ و $(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})'$ هم توزیع باشند یعنی:

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}}(x_1, \dots, x_n),$$

به عبارت دیگر توزیعهای توأم n بعدی تحت انتقال زمان پایا باشند.

مثال (۵.۳): هر دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع، یک سری زمانی اکیداً ایستا است. فرض کنید $\{X_t\}$ چنین دنباله‌ای باشد در این صورت،

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n F_{X_{t_i}}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n F_{X_{t_i+k}}(x_i) \\ &= F_{X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

مثال (۶.۳): سری $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ را که در آن کلیه توزیعهای توأم با بعد متناهی، نرمال هستند را سری گاوسی^۴ می‌نامند. اگر $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ گاوسی باشد و قرار دهیم

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)', \quad \mathbf{X}_{n, \mathbf{t}} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})', \quad \mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)', \quad \boldsymbol{\mu}_{n, \mathbf{t}} = (\mu_{t_1}, \dots, \mu_{t_n})',$$

و

$$\mathbf{\Gamma}_{n, \mathbf{t}} = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \cdots & C(t_1, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \cdots & C(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_2) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

^۱ Stationary

^۲ Strictly Stationary

^۳ Strongly Stationary

^۴ Gaussian Series

آنگاه چگالی (توأم) $X_{n,t}$ عبارت است از

$$f_{X_{n,t}}(x_n; \mu_{n,t}, \Gamma_{n,t}) = (2\pi)^{-n/2} |\Gamma_{n,t}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_n - \mu_{n,t})' \Gamma_{n,t}^{-1} (x_n - \mu_{n,t})\right\}. \quad (۱.۳)$$

و در صورتی که برای هر عدد طبیعی n و اعداد صحیح k و t_1, t_2, \dots, t_n

$$(i) : \mu_{n,t} = \mu_{n,t+k} \quad \text{و} \quad (ii) : \Gamma_{n,t} = \Gamma_{n,t+k} \quad (۲.۳)$$

این چگالی با چگالی بردار تصادفی $X_{n,t+k}$ یکی است و سری گاوسی اکیداً ایستا است. شرط (i) در (۲.۳) معادل این است که برای هر عدد صحیح $t, \mu_t = \mu$ و شرط (ii) معادل این است که برای اعداد صحیح k و t و s ، $C(t, s) = C(t+k, s+k)$ و اگر در این تساوی وقتی $t \geq s$ قرار دهیم $k = -s$ و وقتی $t < s$ قرار دهیم $k = -t$ این شرط معادل می‌شود با اینکه $C(t, s) = g(|t-s|)$ یا $C(t, s) = \gamma(t-s)$ که $\gamma(\cdot)$ تابعی زوج است. بنابراین سری گاوسی ایستا است در صورتی که تابع میانگینش ثابت و تابع اتوکواریانسش تابعی از فاصله زمانی t و s باشد.

همانطور که اشاره شد گشتاورها بخصوص گشتاورهای مرتبه اول و دوم در مطالعه و تجزیه و تحلیل سریهای زمانی نقش مهمی ایفا می‌کنند. در نوع ضعیفتری از ایستایی که در زیر تعریف می‌شود این گشتاورها را ملاک قرار داده و فرض می‌کنیم که بردار میانگین و ماتریس کوواریانس بردار تصادفی $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$ با انتقال زمان تغییر نکند. به عبارت دیگر،

تعریف (۴.۳): سری $\{X_t\}$ را ایستای کوواریانس^۱ (یا ایستای ضعیف^۲) می‌گوییم هرگاه برای هر $t, E(X_t^2) < \infty$ و تابع میانگین $\{X_t\}$ ثابت و تابع اتوکواریانسش تابعی از فاصله زمانی باشد. یعنی

$$\mu_X(t) = \mu \quad \text{و} \quad C_X(t, t+h) = g_X(|h|) = \gamma_X(h).$$

$\gamma_X(h)$ در تعریف فوق اتوکواریانس $\{X_t\}$ در تأخیر^۳ h نامیده می‌شود. خودهمبستگی در تأخیر h را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

بدیهی است در صورتی که $\{X_t\}$ ایستای کوواریانس باشد $Var(X_t) = \gamma(0)$ مقداری ثابت است. در تعاریف فوق اگر نیاز به تأکید نباشد زیرنویس X را حذف می‌کنیم.

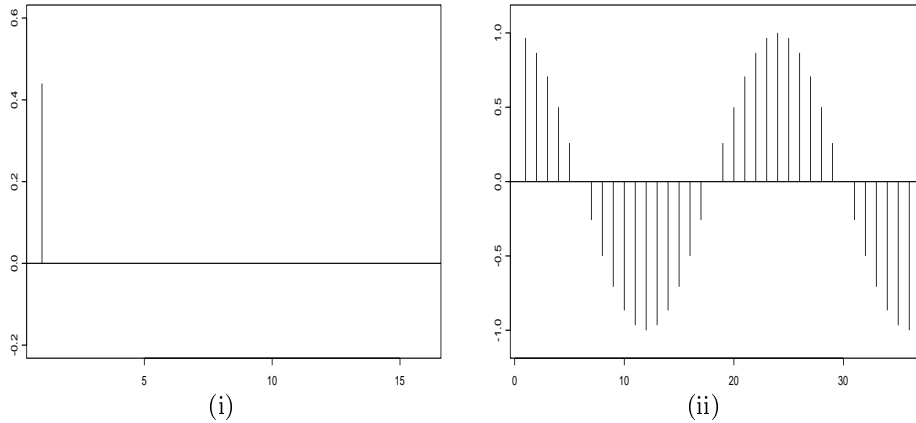
هر دو تابع $\rho(h)$ و $\gamma(h)$ توابعی زوج‌اند و مقادیرشان به ازای $h \geq 0$ مورد توجه است. معمولاً مقادیر $\rho(h)$ را به ازای $h \geq 0$ توسط نموداری میله‌ای که خودهمبستگی نگار^۴ نامیده می‌شود نشان می‌دهیم. مثالهای (۱.۳)، (۲.۳) و (۳.۳) وقتی $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ نمونه‌هایی از سریهای ایستای کوواریانس هستند.

^۱ Covariance Stationary

^۲ Weakly Stationary

^۳ Lag

^۴ Correlogram



شکل ۲.۳: (i) خودهمبستگی نگارسری میانگین متحرک مرتبه اول به ازای $\theta = 0.6$. (ii): خودهمبستگی نگارسری مثال (۳.۳)، $w = \pi/12$.

برای سری میانگین متحرک مرتبه اول (مثال ۲.۳) توابع اتوکواریانس و خودهمبستگی عبارتند از:

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & h = 0 \\ \theta\sigma^2 & h = 1 \\ 0 & h \geq 2 \end{cases}, \quad \rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & h = 1 \\ 0 & h \geq 2 \end{cases}$$

به عنوان مثال وقتی $\theta = -0.6$ ، $\rho(1) = -0.44$. همانطور که در شکل (۱.۳-i) نیز مشاهده می‌شود است این همبستگی منفی نوسانات سریع مشاهدات در اطراف میانگین را به همراه دارد. در حالی که برای $\theta = 0.6$ ، $\rho(1) = 0.44$. این همبستگی مثبت همراهی مشاهدات، در تأخیر یک را به همراه دارد به عبارت دیگر اگر مشاهده‌ای مقداری بیشتر از میانگین داشته باشد چند مشاهده بعدی نیز از آن تبعیت می‌کنند و همانطور که در شکل (۱.۳-ii) نیز دیده می‌شود برای این سریها گشتهای حول میانگین طولانی‌ترند. برای سری مثال (۳.۳)،

$$\gamma(h) = \sigma^2 \cos wh, \quad \rho(h) = \cos(wh).$$

خودهمبستگی نگار این دو سری در شکل (۲.۳) رسم شده‌اند.

مثال (۷.۳): فرض کنید $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty} \sim WN(0, \sigma^2)$ ، تعریف می‌کنیم

$$X_t = \begin{cases} c_0 Z_0 & t = 0 \\ cX_{t-1} + Z_t & t = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (۳.۳)$$

نشان می‌دهیم سری $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ ایستای کوواریانس است اگر و تنها اگر $|c| < 1$. برای این کار توجه کنید که وقتی $t \geq 1$ داریم

$$X_t = Z_t + cZ_{t-1} + \dots + c^{t-1}Z_1 + c^t X_0. \quad (۴.۳)$$

پیمادی از (۴.۳) این است که برای $s > t$ ، $Cov(X_t, Z_s) = 0$ ، حال فرض کنید $|c| \geq 1$ و $\{X_t\}$ ایستای کوواریانس باشد. برای $t \geq 1$ داریم

$$Var(X_t) = c^2 Var(X_{t-1}) + Var(Z_t) + 2cCov(X_{t-1}, Z_t) \implies \gamma(0)(1 - c^2) = \sigma^2,$$

که خلاف فرض $\gamma(0) > 0$ است. حال فرض کنید $|c| < 1$ ، از تعریف $\{X_t\}$ در (۳.۳) داریم $E(X_0) = 0$ و $Var(X_0) = c_0^2 \sigma^2$ و برای $t = 1, 2, \dots$ از (۴.۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$E(X_t) = 0$$

و

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= (1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2t-2})\sigma^2 + c^{2t}c_0^2\sigma^2 \\ &= \left(\frac{1 - c^{2t}}{1 - c^2} + c^{2t}c_0^2\right)\sigma^2. \end{aligned}$$

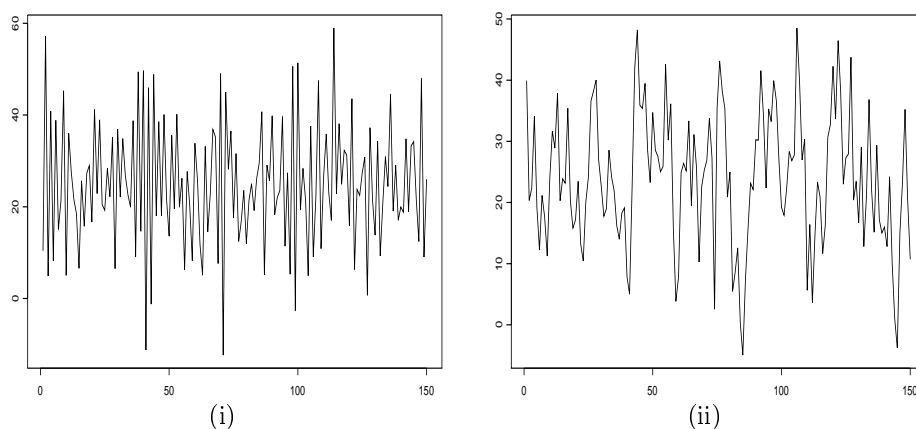
در نتیجه برای هر t ، $Var(X_t) = Var(X_0)$ اگر و تنها اگر $c_0 = (1 - c^2)^{-1/2}$. به ازای این مقدار c_0 ، $\gamma(0) = \sigma^2(1 - c^2)^{-1}$ و

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= Cov(Z_t + cZ_{t-1} + \dots + c^{t-1}Z_1 + c^tX_0, \\ &\quad Z_{t+h} + cZ_{t+h-1} + \dots + c^hZ_t + c^{h+1}Z_{t-1} + \dots + c^{t+h-1}Z_1 + c^{t+h}X_0) \\ &= \sigma^2(c^h + c^{h+2} + c^{h+4} + \dots + c^{h+2t-2}) + c^{2t+h}\sigma^2(1 - c^2)^{-1} \\ &= \sigma^2c^h(1 - c^{2t})(1 - c^2)^{-1} + c^{2t+h}\sigma^2(1 - c^2)^{-1} \\ &= \sigma^2c^h(1 - c^2)^{-1}. \end{aligned}$$

که تابعی است از تأخیر h و سری $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ ایستای کوواریانس است.

نکته قابل ذکر اینکه هر سری اکیداً ایستا لزوماً ایستای کوواریانس نیست. دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع دارای توزیع کوشی گویای این مطلب است. اما هر سری اکیداً ایستا $\{X_t\}$ با شرط $E(X_t^2) < \infty$ ایستای کوواریانس نیز خواهد بود. از طرفی بدیهی است از اینکه یک سری ایستای کوواریانس است نمی‌توان اکیداً ایستا بودن آن را نتیجه گرفت. البته فرآیندهای گاوسی (مثال ۶.۳) یک استثنا هستند. چون در این کتاب با سریهای ایستا فقط از نوع ایستای کوواریانس سروکار داریم از این به بعد چنین سریهایی را ایستا می‌نامیم. ایستایی نقش محوری در مدل سازی سریهای زمانی دارد. در فصل بعد با خانواده بزرگی از مدل‌های پارامتری یعنی مدل‌های اتورگرسیو- میانگین متحرک (ARMA^۱) که می‌تواند مبین رفتار سریهای زمانی ایستا و مولد چنین سریهایی باشند آشنا خواهیم شد. تنوع عناصر این خانواده به گونه‌ای است که رفتارهای متنوعی را که توابع اتوکوواریانس سریهای ایستا می‌توانند از خود بروز دهند به خوبی پوشش می‌دهند. از طرفی بسیاری از سریهای زمانی نا ایستا با

^۱ AutoRegressive-Moving Average



شکل ۳.۳: مصادیقی از سری اتورگرسیو مرتبه اول با میانگین ۲۵ و $\phi = -0.6$: (i) و $\phi = 0.6$: (ii) وقتی $Z_t \sim N(0, 100)$.

تبدیلاتی ساده به یک سری ایستا تبدیل می‌شوند (فصل ۵ را ببینید) و در نتیجه روشهای مدل‌بندی و برازش و پیش‌بینی سریهای ایستا را می‌توان برای سری تبدیل شده نیز بکار برد. قبلاً در این فصل با سری میانگین متحرک مرتبه اول از اعضای خانواده سریهای ARMA آشنا شده‌ایم، در مثال زیر عضو دیگری از این خانواده را معرفی می‌کنیم.

مثال (۸.۳): سری $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ که

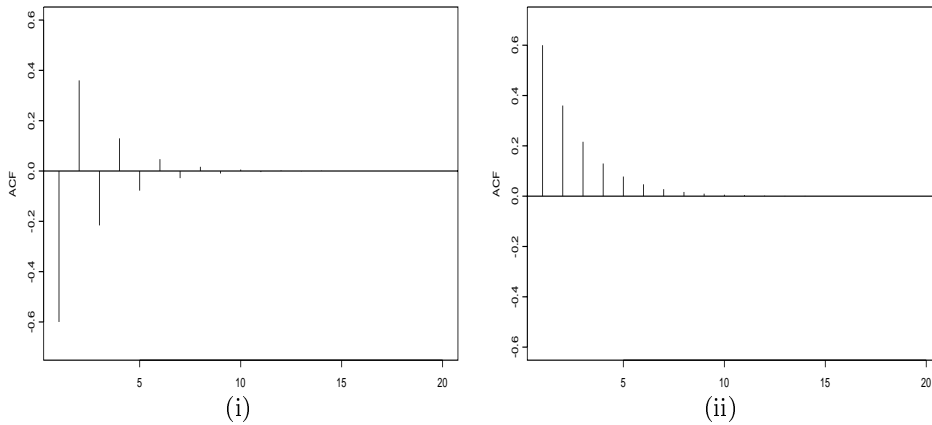
$$X_t = \mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad (5.3)$$

و به ازای $s < t$ ، $Cov(X_s, Z_t) = 0$ است، سری اتورگرسیو مرتبه اول با میانگین μ نامیده می‌شود. شکل (۳.۳) مصادیقی از این سری را نشان می‌دهد. در بخش (۲.۴) خواهیم دید که این سری به ازای $|\phi| < 1$ ایستا است. با اطلاع از ایستایی $\{X_t\}$ محاسبه تابع اتوکواریانس به کمک (۵.۳) ساده است در واقع

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= Var(X_t) = Var(\mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t) \\ &= \phi^2 Var(X_{t-1}) + 2\phi Cov(X_{t-1}, Z_t) + Var(Z_t) = \phi^2 \gamma_X(0) + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

و برای $h \geq 1$

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(\mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t, X_{t-h}) \\ &= \phi Cov(X_{t-1}, X_{t-h}) + Cov(Z_t, X_{t-h}) \\ &= \phi \gamma(h-1) + 0 \\ &= \phi^h \gamma(0), \end{aligned}$$



شکل ۳.۴: خودهمبستگی نگار سری اتورگرسیو مرتبه اول، (i): $\phi = -0.6$. (ii): $\phi = 0.6$.

و در نتیجه

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2 \phi^h}{1 - \phi^2}. \quad (۷.۳)$$

تابع خودهمبستگی این سری نیز عبارت است از:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (۸.۳)$$

که نمودار آن در شکل (۴.۳) به ازای $\phi = 0.6$ و $\phi = -0.6$ رسم شده است.

۳.۳ پیش‌بینی سریهای زمانی ایستا

یکی از مهمترین اهداف تحلیل سریهای زمانی پیش‌بینی آینده سری است. در این بخش به چگونگی پیش‌بینی مقدار X_{n+l} به ازای $l = 1, 2, \dots$ با استفاده از مقادیر X_1, X_2, \dots, X_n از یک سری ایستای $\{X_t\}$ با میانگین و تابع اتوکواریانس معلوم μ و $\gamma(\cdot)$ خواهیم پرداخت. بدین منظور پیش‌بین‌های خطی یعنی $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)' \in \mathbb{R}^{n+1}$ را مد نظر قرار داده و بهترین پیش‌بین خطی به این معنی که امید ریاضی توان دوم خطای پیش‌بینی را حداقل کند با $P_n X_{n+l} = a_0 + a_1 X_n + \dots + a_n X_1$ نشان می‌دهیم. ضرایب این پیش‌بین یعنی $(a_0, a_1, \dots, a_n)'$ ، نقطه مینیمم تابع زیراند،

$$f(a_0^*, \dots, a_n^*) = E(X_{n+l} - P_n X_{n+l})^2 = E(X_{n+l} - a_0^* - a_1^* X_n - \dots - a_n^* X_1)^2,$$

و از حل معادلات زیر به دست می آیند.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial a_j^*} \right|_{(a_0^*, \dots, a_n^*)' = (a_0, \dots, a_n)'} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

به طور معادل

$$E[X_{n+l} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i X_{n+1-i}] = 0 \quad (9.3)$$

$$E[(X_{n+l} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i X_{n+1-i})X_{n+1-j}] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10.3)$$

از معادله (۹.۳)،

$$a_0 = \mu(1 - \sum_{i=1}^n a_i),$$

و اگر در مجموعه معادلات (۱۰.۳) قرار دهیم، این معادلات به صورت زیر در می آیند

$$E[(X_{n+l} - \mu) - \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu)] X_{n+1-j} = 0,$$

به طور معادل

$$\gamma(l+j-1) - \sum_{i=1}^n a_i \gamma(i-j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

با استفاده از نمادهای ماتریسی این معادلات به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\Gamma_n \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\gamma}_n(l), \quad (11.3)$$

که در آن

$$\mathbf{a}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)', \quad \boldsymbol{\gamma}_n(l) = (\gamma(l), \gamma(l+1), \dots, \gamma(n+l-1))'$$

و

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix} = [\gamma(i-j)]_{\substack{i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n}}$$

و با تقسیم طرفین (۱۱.۳) بر $\gamma(0)$ ،

$$\boldsymbol{\rho}_n \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\rho}_n(l), \quad (12.3)$$

که در آن

$$\rho_n = [\rho(i-j)]_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}, \quad \rho_n(l) = (\rho(l), \rho(l+1), \dots, \rho(n+l-1))'$$

بنابر این بهترین پیش بین خطی X_{n+l} به کمک X_1, X_2, \dots, X_n عبارت است از:

$$P_n X_{n+l} = \mu + \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu), \quad (13.3)$$

که در آن a_i ها از حل معادله (۱۱.۳) یا (۱۲.۳) حاصل می شود.

بلافاصله از (۹.۳) نتیجه می گیریم خطای این پیش بینی یعنی $e_n(l) = X_{n+l} - P_n X_{n+l}$ دارای امید ریاضی صفر است. به عبارت دیگر پیش بین $P_n X_{n+l}$ برای X_{n+l} نا اریب است. واریانس خطای این پیش بینی عبارتست از:

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_n(l)) &= E(X_{n+l} - P_n X_{n+l})^2 \\ &= E[(X_{n+l} - \mu) - \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu)]^2 \\ &= E(X_{n+l} - \mu)^2 - 2E[(X_{n+l} - \mu) \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E[(X_{n+1-i} - \mu)(X_{n+1-j} - \mu)] \\ &= \gamma(0) - 2 \sum_{i=1}^n a_i \gamma(l+i-1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(i-j) \\ &= \gamma(0) - 2\mathbf{a}'_n \boldsymbol{\gamma}_n(l) + \mathbf{a}'_n \Gamma_n \mathbf{a}_n = \gamma(0) - 2\mathbf{a}'_n \boldsymbol{\gamma}_n(l) + \mathbf{a}'_n \boldsymbol{\gamma}_n(l) \\ &= \gamma(0) - \mathbf{a}'_n \boldsymbol{\gamma}_n(l) = \gamma(0)(1 - \mathbf{a}'_n \boldsymbol{\rho}_n(l)). \end{aligned} \quad (14.3)$$

مثال (۹.۳): فرض کنید $\{X_t\}$ سری اتورگرسیو مرتبه اول با میانگین μ و $|\phi| < 1$ باشد. در این حالت معادله (۱۲.۳) به صورت زیر در می آید

$$\begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^l \\ \phi^{l+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi^{n+l-1} \end{bmatrix}$$

جواب این معادله $(\phi^l, 0, \dots, 0)' = (\phi^l, 0, \dots, 0)'$ است. در (۱۳.۳) قرار می دهیم

$$P_n X_{n+l} = \mu + \phi^l (X_n - \mu). \quad (15.3)$$

l	$P_{100}X_{100+l}$	$Var(e_{100}(l))$	$P_{100}X_{100+l} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(e_{100}(l))}$
1	12.80	25	(3, 22.6)
2	11.96	37.25	(-0.04, 23.96)
3	11.37	43.25	(-1.52, 24.26)

جدول ۱.۳: پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای سری مثال (۹.۳).

واریانس خطای این پیش‌بینی، با استفاده از (۱۴.۳) برابر است با

$$Var(e_n(l)) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} (1 - \phi^l \rho(l)) = \frac{\sigma^2(1-\phi^{2l})}{1-\phi^2}. \quad (۱۶.۳)$$

فرض کنید $X_{99} = 12.5, X_{100} = 14, \dots$ مشاهدات یک سری اتورگرسیو مرتبه اول با $\mu = 10, \phi = 0.7, \sigma^2 = 25$ باشند در این صورت $P_{100}X_{100+l} = 10 + 0.7^l(14 - 10)$ و $Var(e_{100}(l)) = 25(1 - 0.7^{2l})/(1 - 0.7^2)$ به ازای $l = 1, 2, 3$ این پیش‌بینی‌ها به همراه واریانس خطایشان در جدول (۱۶.۳) آمده‌اند. در صورتی که $\{X_t\}$ یک سری گاوسی باشد،

$$e_n(l) = X_{n+l} - P_n X_{n+l} \sim N(0, Var(e_n(l))).$$

در نتیجه

$$Z = \frac{X_{n+l} - P_n X_{n+l}}{\sqrt{Var(e_n(l))}} \sim N(0, 1),$$

یک کمیت محوری است که در ساخت پیش‌بینی‌های فاصله‌ای از آن استفاده می‌کنیم. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$P_n X_{n+l} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{Var(e_n(l))}, \quad (۱۷.۳)$$

یک پیش‌بین فاصله‌ای با ضریب اطمینان $100 \times (1 - \alpha)$ درصد برای X_{n+l} است. این پیش‌بینی‌های فاصله‌ای با ضریب اطمینان 95 درصد برای سری مثال (۹.۳) در جدول (۱۶.۳) آمده‌اند.

مثال (۱۰.۳): در مثال (۳.۳) دیدیم که سری $X_t = A \cos wt + B \sin wt$ وقتی که $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ ایستا با $\mu = 0$ و $\rho(h) = \cos wh$ است. برای $n = 1$ و $P_1 X_2 = a_1 X_1$ از (۱۲.۳) و $a_1 = \rho(1) = \cos w$ بنابراین

$$P_1 X_2 = (\cos w) X_1$$

با واریانس خطای پیش‌بینی

$$Var(e_1(1)) = \sigma^2 - (\cos w)(\sigma^2 \cos w) = \sigma^2 \sin^2 w.$$

برای $n = 2$ ، $P_2 X_3 = a_1 X_2 + a_2 X_1$ که

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w \\ \cos w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w \\ \cos 2w \end{bmatrix}$$

از حل این معادله $a_1 = 2 \cos w$ و $a_2 = -1$ حاصل می‌شوند. پس

$$P_2 X_3 = (2 \cos w) X_2 - X_1,$$

با واریانس خطای پیش‌بینی

$$\text{Var}(e_2(1)) = \sigma^2 \left[1 - (2 \cos w, -1) \begin{pmatrix} \cos w \\ \cos 2w \end{pmatrix} \right] = 0$$

یعنی خطای پیش‌بینی X_3 توسط X_1, X_2 (با احتمال 1) صفر است و $X_3 = P_2 X_3$. برای $n = 3$ ، $P_3 X_4 = a_1 X_3 + a_2 X_2 + a_3 X_1$ اما در این حالت $|\Gamma_3| = 0$ و Γ_3 عکس پذیر نیست و تعداد جوابهای معادلات (۱۲.۳) نامتناهی است. یکی از این جوابها $a_1 = 2 \cos w, a_2 = -1, a_3 = 0$ است که به ازای آن

$$X_4 = P_3 X_4 = (2 \cos w) X_3 - X_2.$$

و از (۱۴.۳)، $\text{Var}(e_3(1)) = 0$. چنین سری زمانی که آینده آن توسط گذشته‌اش بدون خطای پیش‌بینی می‌شود را سری تعیینی^۱ می‌نامیم. در این مثال هر مصداق توسط مقادیر B, A معین می‌گردند و دو نقطه از یک مصداق برای تعیین مقادیر B, A کفایت می‌کند.

همانطور که در مثال قبل دیدیم Γ_n لزوماً عکس‌پذیر نیست و معادلات (۱۲.۳) ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشند. در ادامه خواهیم دید که به ازای کلیه جوابهای (۱۲.۳)، $P_n X_{n+l}$ منحصر بفرد است. برای این منظور فرض کنید $\{a_i^{(1)}, i = 0, 1, \dots, n\}$ و $\{a_i^{(2)}, i = 0, 1, \dots, n\}$ دو جواب (۱۲.۳) بوده و Z اختلاف بین پیش‌بینی‌های نظیر این دو جواب باشد یعنی

$$Z = (a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} X_{n+1-i}) - (a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} X_{n+1-i}) = (a_0^{(1)} - a_0^{(2)}) + \sum_{i=1}^n (a_i^{(1)} - a_i^{(2)}) X_{n+1-i}$$

کافی است نشان دهیم $E(Z) = \text{Var}(Z) = 0$. اما Z اختلاف بین خطاهای پیش‌بینی X_{n+l} نیز هست،

$$\begin{aligned} Z &= (X_{n+l} - a_0^{(2)} - \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} X_{n+1-i}) - (X_{n+l} - a_0^{(1)} - \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} X_{n+1-i}) \\ &= e_n^{(2)}(l) - e_n^{(1)}(l), \end{aligned}$$

با توجه به (۹.۳) امید ریاضی هر دو عبارت سمت راست صفراند پس $E(Z) = 0$. از طرفی

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) = E \left[Z(e_n^{(2)}(l) - e_n^{(1)}(l)) \right]$$

^۱ Deterministic

$$\begin{aligned}
&= (a_0^{(1)} - a_0^{(2)})E(e_n^{(2)}(l) - e_n^{(1)}(l)) + \sum_{i=1}^n (a_i^{(1)} - a_i^{(2)})E[e_n^{(2)}(l) - e_n^{(1)}(l)] X_{n+1-i} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

در تساوی آخر از $E[e_n^{(j)}(l)X_{n+1-i}] = 0$ که همان (۱۰.۳) است استفاده کرده‌ایم.

مثال (۱۱.۳): در صورتی که سری ایستای $\{X_t\}$ گاوسی با میانگین μ و تابع اتوکواریانس $\gamma(\cdot)$ باشد، می‌توان ثابت کرد،

$$P_n X_{n+l} = E[X_{n+l}|X_1, X_2, \dots, X_n]. \quad (۱۸.۳)$$

به عنوان مثال سری (۳.۳) را به ازای $|c| < 1$ و $c_0 = (1 - c^2)^{-1/2}$ در نظر گرفته فرض می‌کنیم برای هر $t, Z_t \sim N(0, \sigma^2)$ در این صورت $\{X_t\}$ یک سری گاوسی ایستا است. برای $l \geq 1$ در (۳.۳) به جای t قرار می‌دهیم $n+l$ و از طرفین امید ریاضی شرطی می‌گیریم. با استفاده از خواص امید ریاضی شرطی

$$\begin{aligned}
P_n X_{n+l} &= E[cX_{n+l-1} + Z_{n+l}|X_1, X_2, \dots, X_n] \\
&= cE[X_{n+l-1}|X_1, X_2, \dots, X_n] + E[Z_{n+l}|X_1, X_2, \dots, X_n] \\
&= cP_n X_{n+l-1} = c^2 P_n X_{n+l-2} = \dots \\
&= c^l X_n.
\end{aligned}$$

در تساوی‌های فوق $E[Z_{n+l}|X_1, X_2, \dots, X_n] = 0$ که نتیجه‌ای از استقلال Z_{n+l} و X_1, X_2, \dots, X_n است.

برای سری دلخواه $\{X_t\}$ تساوی (۱۸.۳) لزوماً برقرار نیست (تمرین ۱۰.۳ را ببینید). اما همانطور که خواهیم دید در حالت کلی می‌توان نوشت

$$P_n X_{n+l} = P[X_{n+l}|X_1, X_2, \dots, X_n]. \quad (۱۹.۳)$$

که در آن عملگر P خواصی مشابه عملگر امید ریاضی شرطی دارد که از آنها می‌توان در محاسبه ساده‌تر پیش‌بینی‌ها مانند مثال قبل استفاده کرد.

با عملگر P که در اینجا به آن عملگر (بهترین) پیش‌بینی خطی می‌گوییم در حالتی عمومی آشنا می‌شویم. فرض کنید Y و W_1, W_2, \dots, W_n متغیرهایی تصادفی دارای گشتاورهای مرتبه اول و دوم متنهای و معلوم باشند و $P[Y|W_1, W_2, \dots, W_n] = a_0 + a_1 W_1 + a_2 W_2 + \dots + a_n W_n$ بهترین پیش‌بین خطی Y به کمک W_1, W_2, \dots, W_n باشد که امید ریاضی مربع خطای پیش‌بینی را حداقل می‌کند. به سادگی می‌توان نشان داد که a_0, a_1, \dots, a_n جواب معادلات زیرند.

$$\begin{cases} E[Y - P[Y|W_1, W_2, \dots, W_n]] = 0 \\ E[(Y - P[Y|W_1, W_2, \dots, W_n])W_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (۲۰.۳)$$

به طور معادل

$$P[Y|W_1, W_2, \dots, W_n] = \mu_Y + \sum_{j=1}^n a_j (W_j - \mu_{W_j}), \quad (۲۱.۳)$$

که $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ جواب معادله زیر است

$$\Gamma a = \gamma, \quad (22.3)$$

که در آن

$$\gamma = (Cov(Y, W_1), Cov(Y, W_2), \dots, Cov(Y, W_n))',$$

و

$$\Gamma = [Cov(W_i, W_j)].$$

بعلاوه واریانس خطای این پیش‌بینی عبارت است از:

$$E[(Y - P[Y|W_1, W_2, \dots, W_n])^2] = Var(Y) - a'\gamma. \quad (23.3)$$

با توجه به مطالب فوق عملگر بهترین پیش‌بینی خطی P را عملگری تعریف می‌کنیم که حاصل اعمال آن بر Y, W_1, W_2, \dots, W_n ترکیبی خطی از $1, W_1, W_2, \dots, W_n$ است که در معادلات (۲۰.۳) صدق می‌کند. در صورتی که U و V متغیرهای تصادفی دارای گشتاورهای اول و دوم متنهایی و $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ مقادیری ثابت باشند. با استفاده از این تعریف خواص زیر را برای این عملگر می‌توان ثابت کرد.

$$P[\alpha_1 U + \alpha_2 V + \beta | W_1, W_2, \dots, W_n] = \alpha_1 P[U | W_1, W_2, \dots, W_n] + \alpha_2 P[V | W_1, W_2, \dots, W_n] + \beta. \quad (24.3)$$

$$P\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i W_i | W_1, W_2, \dots, W_n\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i. \quad (25.3)$$

$$P[U | W_1, W_2, \dots, W_n] = E(U) \quad \text{آنگاه} \quad Cov(U, W_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (26.3)$$

P_n حالت خاصی از P به ازای $(W_1, W_2, \dots, W_n)' = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)'$ و $Y = X_{n+l}$ است، پس کلیه خواص P را دارد.

مثال (۱۲.۳): با استفاده از عملگر P_n و خواص فوق، نتایج مثال (۹.۳) به سادگی حاصل می‌شوند کافی است در $X_t = \mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t$ قرار دهیم $t = n+l$ ($l \geq 1$) و عملگر P_n را بر طرفین تساوی حاصل اعمال کنیم.

$$\begin{aligned} P_n X_{n+l} &= P_n(\mu + \phi(X_{n+l-1} - \mu) + Z_{n+l}) \\ &= \mu + \phi(P_n X_{n+l-1} - \mu) + P_n Z_{n+l} \\ &= \mu + \phi(P_n X_{n+l-1} - \mu) = \mu + \phi^2(P_n X_{n+l-2} - \mu) = \dots \\ &= \mu + \phi^l(P_n X_n - \mu) \\ &= \mu + \phi^l(X_n - \mu). \end{aligned}$$

t	X_t	$P_5 Z_t$	$P_5 X_{t+1} = 0.5 P_5 Z_t$
0	-	0	0
1	-7.25	-7.25	-3.62
2	-10.31	-6.69	-3.34
3	2.50	5.84	2.92
4	-13.18	-16.11	-8.05
5	0.67	8.72	4.36(4.3618)

جدول ۲.۳: محاسبه $P_5 X_6$ برای سری میانگین متحرک در مثال (۱۳.۳).

مثال (۱۳.۳): سری میانگین متحرک مرتبه اول با میانگین صفر و $|\theta| < 1$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $t = n + l$ و P_n را اعمال می‌کنیم

$$P_n X_{n+l} = P_n Z_{n+l} + \theta P_n Z_{n+l-1},$$

برای $l \geq 2$ با استناد به خاصیت (۲۶.۳) هر دو عبارت سمت راست صفرند و در نتیجه $P_n X_{n+l} = 0$ اما برای $l = 1$,

$$P_n X_{n+1} = \theta P_n Z_n.$$

برای محاسبه (در واقع تقریب) $P_n Z_n$ توجه می‌کنیم که برای هر t , $Z_t = X_t - \theta Z_{t-1}$ و در نتیجه

$$P_n Z_t = X_t - \theta P_n Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (۲۷.۳)$$

اگر قرار دهیم $P_n Z_0 = 0$ ، با استفاده از رابطه بازگشتی (۲۷.۳) و نهایتاً $P_n X_{n+1} = \theta P_n Z_n$ حساب می‌شود. مراحل انجام این کار به کمک ۵ مشاهده از سری میانگین متحرک مرتبه اول با پارامترهای $\theta = 0.5$ و $\sigma^2 = 100$ در جدول (۲.۳) آمده است. در مثال (۱۵.۳) با روشی برای محاسبه مقدار دقیق $P_5 X_6$ آشنا خواهیم شد و خواهیم دید که تقریب فوق کاملاً به مقدار واقعی (4.3611) نزدیک است.

در صورتی که $\{X_t\}$ یک سری ایستا با میانگین μ باشد، اگر قرار دهیم $Y_{n+l} = X_{n+l} - \mu$ و P_n را بر طرفین اعمال می‌کنیم

$$P_n Y_{n+l} = P_n X_{n+l} - \mu \Rightarrow P_n X_{n+l} = P_n Y_{n+l} + \mu,$$

که در آن $P_n Y_{n+l}$ بهترین پیش بین خطی Y_{n+l} به صورت ترکیب خطی Y_1, Y_2, \dots, Y_n است. به عبارت دیگر بهترین پیش بین خطی X_{n+l} با یافتن بهترین پیش بین خطی برای Y_{n+l} و اضافه کردن μ به آن حاصل می‌شود. بنابراین در مباحث نظری پیش بینی سریهای زمانی ایستا بدون اینکه از کلیت کاسته باشیم فرض می‌کنیم $\mu = 0$.

برای یک سری زمانی ایستا با میانگین صفر و تابع اتوکواریانس معلوم $\gamma(\cdot)$ همانطور که دیدیم ضرایب بهترین پیش‌بین خطی X_{n+l} بر حسب X_1, X_2, \dots, X_n از حل معادله (۱۲.۳) به دست می‌آیند. اما پیدا کردن جواب (۱۲.۳) بخصوص برای n های بزرگ معمولاً پر زحمت است. از طرفی به محض اضافه شدن مشاهده جدید این عمل دوباره باید تکرار شود. در چنین مواردی روابط بازگشتی می‌توانند چاره ساز باشند. در ادامه با دو الگوریتم آشنا خواهیم شد که روابط بازگشتی موجود در این الگوریتم‌ها امکان محاسبه بازگشتی ضرایب $P_n X_{n+1}$ را به کمک نتایج حاصل از محاسبه $P_{n-1} X_n$ فراهم می‌کند.

الگوریتم دوربین - لوینسون

به منظور تأکید بر وابستگی ضرایب $P_n X_{n+1}$ به n در الگوریتم دوربین - لوینسون^۱ می‌نویسیم $\phi'_n X_n = \phi_{n1} X_n + \dots + \phi_{nn} X_1 = P_n X_{n+1}$ که در آن $\phi_n = (\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn})'$ و $X_n = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)'$ معادله (۱۱.۳) به ازای $l = 1$ با این نمادگذاری جدید به صورت $\Gamma_n \phi_n = \gamma_n$ که $\gamma_n = (\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n))'$ نوشته می‌شود. همچنین واریانس خطای پیش‌بینی X_{n+1} را با v_n نشان می‌دهیم، یعنی $v_n = \text{Var}(e_n(1)) = \gamma(0) - \phi'_n \gamma_n$

قضیه (۱.۳) الگوریتم دوربین - لوینسون: اگر $\{X_t\}$ یک سری ایستا با میانگین صفر و تابع اتوکواریانس $\gamma(\cdot)$ باشد آنگاه برای $n \geq 2$ و $\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn}$ در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$\phi_{nn} = \left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \right] v_{n-1}^{-1} \quad (28.3)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n2} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \phi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{nn} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \phi_{n-1,n-2} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad (29.3)$$

$$v_n = v_{n-1} (1 - \phi_{nn}^2) \quad (30.3)$$

که $v_0 = \gamma(0)$ و $\phi_{11} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$.

اثبات: کافی است نشان دهیم ϕ_n حاصل از این الگوریتم به ازای هر n جواب معادله (۱۱.۳) است. برای $n = 2$ این کار ساده است، فرض کنید برای $n = k$ داریم $\Gamma_k \phi_k = \gamma_k$ و ϕ_{k+1} توسط (۲۸.۳) و (۲۹.۳) حاصل شده باشد اگر قرار دهیم، $\gamma_k^{(r)} = (\gamma(k), \gamma(k-1), \dots, \gamma(1))'$ و $\phi_k^{(r)} = (\phi_{kk}, \phi_{k,k-1}, \dots, \phi_{k,1})'$ با این نمادهای جدید (۲۸.۳) به شکل $\phi_{k+1,k+1} = [\gamma(k+1) - \gamma_k^{(r)'} \phi_k^{(r)}] v_k^{-1}$

^۱ Durbin - Levinson Algorithm

و $v_k = \gamma(0) - \gamma_k^{(r)'} \phi_k^{(r)}$ نوشته می‌شوند. بنابراین

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+1} \phi_{k+1} &= \begin{bmatrix} \Gamma_k & \gamma_k^{(r)} \\ \gamma_k^{(r)'} & \gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k - \phi_{k+1,k+1} \phi_k^{(r)} \\ \phi_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_k \phi_k - \phi_{k+1,k+1} \Gamma_k \phi_k^{(r)} + \phi_{k+1,k+1} \gamma_k^{(r)} \\ \gamma_k^{(r)'} \phi_k - \phi_{k+1,k+1} \gamma_k^{(r)'} \phi_k^{(r)} + \gamma(0) \phi_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_k \phi_k \\ \gamma_k^{(r)'} \phi_k - \phi_{k+1,k+1} v_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_k \\ \gamma(k+1) \end{bmatrix} = \gamma_{k+1} \end{aligned}$$

در تساویهای فوق از $\Gamma_k \phi_k^{(r)} = \gamma_k^{(r)}$ که پیامد $\Gamma_k \phi_k = \gamma_k$ است استفاده کرده‌ایم. اما اثبات تساوی (۳۰.۳)،

$$\begin{aligned} v_n &= \gamma(0) - \phi_n' \gamma_n \\ &= \gamma(0) - [(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n-1}) \gamma_{n-1} + \phi_{nn} \gamma(n)] \\ &= \gamma(0) - [(\phi_{n-1} - \phi_{nn} \phi_{n-1}^{(r)})' \gamma_{n-1}] - \phi_{nn} \gamma(n) \\ &= \gamma(0) - \phi_{n-1}' \gamma_{n-1} + \phi_{nn} \phi_{n-1}^{(r)'} \gamma_{n-1} - \phi_{nn} \gamma(n) \\ &= (\gamma(0) - \phi_{n-1}' \gamma_{n-1}) - \phi_{nn} (\gamma(n) - \phi_{n-1}^{(r)'} \gamma_{n-1}) \\ &= v_{n-1} - \phi_{nn}^2 v_{n-1} \\ &= v_{n-1} (1 - \phi_{nn}^2). \end{aligned}$$

مثال (۱۴.۳): چگونگی استفاده از این الگوریتم در پیش‌بینی سری اتورگرسیو مرتبه اول را در این مثال خواهیم دید. ابتدا فرض می‌کنیم $\mu = 0$ برای شروع داریم، $v_0 = \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ و $\phi_{11} = \rho(1) = \phi$ پس $P_1 X_2 = \phi X_1$ و $v_1 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} (1 - \phi^2) = \sigma^2$ با استفاده از (۲۸.۳)، (۲۹.۳) و (۳۰.۳)،

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= (\gamma(2) - \phi_{11} \gamma(1)) v_1^{-1} = 0, \\ \phi_{21} &= \phi_{11} - \phi_{22} \phi_{11} = \phi_{11} = \phi \end{aligned}$$

و

$$v_2 = v_1 (1 - \phi_{22}) = v_1 = \sigma^2.$$

پس $P_2 X_3 = \phi X_2$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که

$$\phi_{nn} = \phi_{n,n-1} = \dots = \phi_{n,2} = 0, \quad \phi_{n1} = \phi, v_n = \sigma^2,$$

در نتیجه $P_n X_{n+1} = \phi X_n$. در صورتی که $\mu \neq 0$ تعریف می‌کنیم $Y_t = X_t - \mu$ در نتیجه $P_n X_{n+1} = \mu + \phi(X_n - \mu)$ و $P_n Y_{n+1} = \phi Y_n = \phi(X_n - \mu)$

الگوریتم تحولها

تا اینجا $P_n X_{n+1}$ را به صورت ترکیب خطی از X_1, X_2, \dots, X_n نوشتیم. در ادامه ابتدا نشان می‌دهیم که $P_n X_{n+1}$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از تحولها یا همان خطاهای پیش‌بینی گام بعد نیز نوشت، سپس با الگوریتم تحولها^۱ آشنا می‌شویم که رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه ضرایب این ترکیب خطی ارائه می‌دهد. تحول t ام را به صورت $U_t = X_t - P_{t-1} X_t$ تعریف کرده و برای $n \geq 1$ قرار می‌دهیم، $U_{n+1} = (U_1, U_2, \dots, U_{n+1})'$ و $X_{n+1} = (X_1, X_2, \dots, X_{n+1})'$ در نتیجه می‌توان نوشت

$$U_{n+1} = A_{n+1} X_{n+1},$$

که در آن

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_{22} & -\phi_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\phi_{n,n} & -\phi_{n,n-1} & -\phi_{n,n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

درمیان A_{n+1} مساوی 1 و ماتریس A_{n+1} عکس پذیر است. معکوس A_{n+1} را با C_{n+1} نشان می‌دهیم این ماتریس نیز پایین مثلثی است. اگر عناصر آنرا با θ_{ij} نشان دهیم

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{n,n} & \theta_{n,n-1} & \theta_{n,n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

حال اگر قرار دهیم $\widehat{X}_{n+1} = (P_0 X_1, P_1 X_2, \dots, P_n X_{n+1})'$ آنگاه

$$\widehat{X}_{n+1} = X_{n+1} - U_{n+1} = C_{n+1} U_{n+1} - U_{n+1} = \Theta_{n+1} U_{n+1}, \quad (31.3)$$

که

$$\Theta_{n+1} = C_{n+1} - I_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{n,n} & \theta_{n,n-1} & \theta_{n,n-2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

تساوی (31.3) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$P_n X_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{nj} U_{n+1-j} & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (32.3)$$

^۱ Innovations Algorithm

که برای هر $n, P_n X_{n+1}$ را به صورت ترکیب خطی تحولاتها تا زمان n ارائه می‌دهد. الگوریتم تحولاتها چگونگی محاسبه و بهنگام کردن ضرایب این ترکیب خطی را نشان می‌دهد. برای اثبات این قضیه براکول و دیویس (۱۹۹۱) را ببینید.

قضیه (۲.۳) الگوریتم تحولاتها: اگر $\{X_t\}$ یک سری ایستا با میانگین صفر و تابع اتوکواریانس $\gamma(\cdot)$ باشد آنگاه ضرایب $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \dots, \theta_{nn}$ و v_n در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} v_0 &= \gamma(0) \\ \theta_{n,n-k} &= v_k^{-1} (\gamma(n-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j), \quad 0 \leq k < n \\ v_n &= \gamma(0) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{aligned}$$

مثال (۱۵.۳): برای سری میانگین متحرک مرتبه اول که $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$, $\gamma(1) = \theta\sigma^2$ و $\gamma(h) = 0$ برای $h \geq 2$ ، استفاده از الگوریتم فوق منجر به روابط زیر می‌شود

$$\begin{aligned} \theta_{nj} &= 0, \quad 2 \leq j \leq n \\ \theta_{n1} &= v_{n-1}^{-1} \theta \sigma^2, \\ v_n &= [1 + \theta^2 - v_{n-1}^{-1} \theta^2 \sigma^2] \sigma^2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$P_n X_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} U_{n+1-j} = \theta_{n1} U_n = \theta_{n1} (X_n - P_{n-1} X_n).$$

نتایج فوق را برای محاسبه $P_5 X_6$ در مثال (۱۳.۳) به کار برده و مراحل انجام این کار را در جدول (۳.۳) آورده‌ایم.

می‌توان نشان داد که برای $t > s$, $Cov(U_t, X_s) = 0$ است. از این خاصیت و خواص عملگر P_n استفاده کرده رابطه‌ای مشابه (۳۲.۳) برای محاسبه $P_n X_{n+l}$ برای l های بزرگتر یا مساوی ۲ به دست می‌آوریم. برای این منظور از (۲۶.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$P_n(U_{n+l}) = P_n(X_{n+l} - P_{n+l-1} X_{n+l}) = 0, \quad l \geq 1 \quad (۳۳.۳)$$

با استفاده از (۲۴.۳) در تساوی فوق و (۳۲.۳)،

$$P_n X_{n+l} = P_n(P_{n+l-1} X_{n+l}) = P_n \left[\sum_{j=1}^{n+l-1} \theta_{n+l-1,j} U_{n+l-j} \right]$$

t	X_t	$P_{t-1}X_t$	U_t	v_t	θ_{t1}
0	-	-	-	125	-
1	-7.25	0	-7.25	105	0.40
2	-10.31	-2.9	-7.41	101	0.48
3	2.50	-3.53	6.03	100	0.49
4	-13.18	2.98	-16.16	100	0.50
5	0.67	-8.06	8.73	100	0.50
6	-	4.36(4.3611)	-	-	-

جدول ۳.۳: محاسبه $P_5 X_6$ برای سری میانگین متحرک مرتبه اول (مثال ۱۵.۳).

با استفاده مجدد از (۲۴.۳) در تساوی فوق و با توجه به (۳۳.۳) و (۲۵.۳) نتیجه می‌شود

$$P_n X_{n+l} = \sum_{j=l}^{n+l-1} \theta_{n+l-1,j} U_{n+l-j}. \quad (34.3)$$

که $P_n X_{n+l}$ را به صورت ترکیب خطی تحولاتی 1 تا n با ضرایب حاصل از الگوریتم تحولات نشان می‌دهد. رابطه‌ای هم برای محاسبه واریانس خطای پیش‌بینی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_n(l)) &= E(X_{n+l} - P_n X_{n+l})^2 = E(X_{n+l}^2) - E[(P_n X_{n+l})^2] \\ &= \gamma(0) - \sum_{j=l}^{n+l-1} \theta_{n+l-1,j}^2 v_{n+l-j-1}. \end{aligned} \quad (35.3)$$

در تساویهای فوق از اینکه $E[(X_{n+l} - P_n X_{n+l})P_n X_{n+l}] = 0$ و پیامد آن $E(X_{n+l}P_n X_{n+l}) = E[(P_n X_{n+l})^2]$ استفاده کرده‌ایم.

مثال (۱۶.۳): با توجه به نتایج مثال (۱۵.۳) برای سری میانگین متحرک مرتبه اول ضرایب $\theta_{n+l-1,j}$ در (۳۴.۳) و (۳۵.۳) به ازای $l \geq 2$ صفرند و در نتیجه برای $l \geq 2$ ، $P_n X_{n+l} = 0$ و $\text{Var}(e_n(l)) = \gamma(0)$.

۴.۳ تابع خودهمبستگی جزئی

با تابع خودهمبستگی و نقش آن در پیش‌بینی آشنا شدیم. در فصل بعد با اهمیت این تابع در شناسایی سریهای ARMA نیز آشنا خواهیم شد. تابع خودهمبستگی جزئی (PACF)^۱ که در این بخش معرفی می‌گردد مکملی برای تابع خودهمبستگی در راستای شناسایی سریهای ARMA بخصوص سریهای AR و MA است. برای یک سری زمانی ایستا خودهمبستگی در تاخیر h وابستگی خطی بین X_1 و X_{h+1} را می‌سنجد. اما همبستگی‌های موجود بین این دو متغیر با سایر عناصر

^۱ Partial Autocorrelation Function

سری، مقدار وابستگی در تأخیر h را تحت تأثیر قرار می‌دهد. انتظار داریم حداقل با حذف اثرات خطی عناصر بین این دو یعنی X_2, X_3, \dots, X_h از X_1 و X_{1+h} قبل از محاسبه خود همبستگی بتوان به میزان خالصتری از وابستگی خطی بین X_1 و X_{h+1} رسید. با این مقدمه و با توجه به اینکه نزدیکترین ترکیب خطی X_2, X_3, \dots, X_h به X_1 و X_{h+1} به ترتیب $P[X_1|X_2, X_3, \dots, X_h]$ و $P[X_{h+1}|X_2, X_3, \dots, X_h]$ هستند، خودهمبستگی جزئی در تأخیر h را برای هر $h \geq 2$ ضریب همبستگی بین $X_{h+1} - P[X_{h+1}|X_2, X_3, \dots, X_h]$ و $X_1 - P[X_1|X_2, X_3, \dots, X_h]$ تعریف می‌کنیم.

تعریف (۵.۳): خودهمبستگی جزئی در تأخیر h را با $\alpha(h)$ نشان داده و برای $h \geq 2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha(h) = \rho(X_{h+1} - P[X_{h+1}|X_2, X_3, \dots, X_h], X_1 - P[X_1|X_2, X_3, \dots, X_h]). \quad (۳۶.۳)$$

و برای $h = 1$ ، تعریف می‌کنیم $\alpha(1) = \rho(1)$.

مثال (۱۷.۳): اگر $\{X_t\}$ یک سری اتورگرسیو مرتبه اول ایستا باشد، $\alpha(1) = \rho(1) = \phi$. برای $h \geq 2$ به سادگی می‌توان نشان داد، $P[X_1|X_2, X_3, \dots, X_h] = \mu + \phi(X_2 - \mu)$ و $P[X_{h+1}|X_2, X_3, \dots, X_h] = \mu + \phi(X_h - \mu)$ در نتیجه

$$\alpha(h) = \rho(X_{h+1} - \mu - \phi(X_h - \mu), X_1 - \mu - \phi(X_2 - \mu)) = \rho(Z_{h+1}, X_1 - \mu - \phi(X_2 - \mu)) = 0, \quad h \geq 2.$$

محاسبه مقدار PACF در تأخیر h به کمک (۳۶.۳) معمولاً ساده نیست. در ادامه با دو روش دیگر آشنا می‌شویم. ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha(h) = \phi_{hh}$ که ضریب X_1 در $P_h X_{h+1}$ است در نتیجه برای محاسبه آن می‌توان از الگوریتم دوربین - لوینسون استفاده کرد. برای این منظور قرار می‌دهیم $\mathbf{X}_{h,2} = (X_h, X_{h-1}, \dots, X_2)'$ ، با استفاده از نمادهای به کار رفته در الگوریتم دوربین - لوینسون

$$P[X_{h+1}|\mathbf{X}_{h,2}] = \phi'_{h-1} \mathbf{X}_{h,2},$$

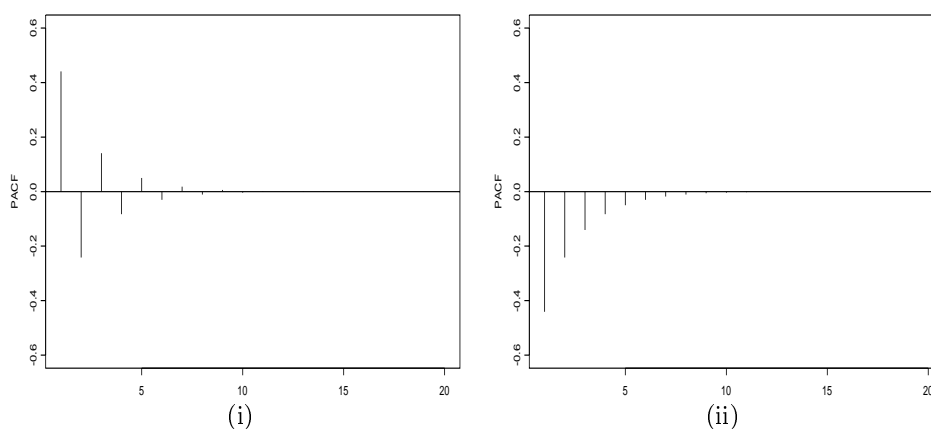
$$\text{Var}(X_{h+1} - P[X_{h+1}|\mathbf{X}_{h,2}]) = \gamma(0) - \phi'_{h-1} \gamma_{h-1} = v_{h-1}.$$

$$P[X_1|\mathbf{X}_{h,2}] = \phi_{h-1}^{(r)'} \mathbf{X}_{h,2},$$

$$\text{Var}(X_1 - P[X_1|\mathbf{X}_{h,2}]) = \gamma(0) - \phi_{h-1}^{(r)'} \gamma_{h-1}^{(r)} = v_{h-1}.$$

پس

$$\alpha(h) = \frac{\text{Cov}(X_{h+1} - P[X_{h+1}|\mathbf{X}_{h,2}], X_1 - P[X_1|\mathbf{X}_{h,2}])}{\sqrt{\text{Var}(X_{h+1} - P[X_{h+1}|\mathbf{X}_{h,2}]) \text{Var}(X_1 - P[X_1|\mathbf{X}_{h,2}])}}$$



شکل ۵.۳: نمودار خود همبستگی های جزئی سری میانگین متحرک مرتبه اول، (i): $\theta = 0.6$ و (ii): $\theta = -0.6$.

$$\begin{aligned}
 &= v_{h-1}^{-1} \left[Cov(X_{h+1}, X_1) - Cov(X_{h+1}, \phi_{h-1}^{(r)'} \mathbf{X}_{h,2}) \right. \\
 &\quad \left. - Cov(X_1, \phi_{h-1}' \mathbf{X}_{h,2}) + Cov(\phi_{h-1}' \mathbf{X}_{h,2}, \phi_{h-1}^{(r)'} \mathbf{X}_{h,2}) \right] \\
 &= v_{h-1}^{-1} (\gamma(h) - \phi_{h-1}^{(r)'} \gamma_{h-1} - \phi_{h-1}' \gamma_{h-1}^{(r)} + \phi_{h-1}' \Gamma_{h-1} \phi_{h-1}^{(r)}) \\
 &= v_{h-1}^{-1} (\gamma(h) - \phi_{h-1}' \gamma_{h-1}^{(r)}) \\
 &= \phi_{hh}.
 \end{aligned} \tag{۳۷.۳}$$

از اینجا به بعد خود همبستگی جزئی در تأخیر h را با ϕ_{hh} نشان می دهیم. از طرفی ϕ_{hh} ضریب X_1 در $P_h X_{h+1}$ و آخرین عنصر بردار ϕ_h ، جواب معادله $\rho_h \phi_h = \rho_h(1)$ است. بنابراین اگر Γ_h عکس پذیر باشد با استناد به قاعده کرامر تساوی زیر برای محاسبه ϕ_{hh} به دست می آید.

$$\phi_{hh} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_h \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}^{-1}. \tag{۳۸.۳}$$

مثال (۱۸.۳): برای سری میانگین متحرک مرتبه اول

$$\begin{aligned}
 \phi_{11} &= \rho_1 = \frac{\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\theta(1 - \theta^2)}{1 - \theta^4} \\
 \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0 - \frac{\theta^2}{(1 + \theta^2)^2}}{1 - \frac{\theta^2}{(1 + \theta^2)^2}} = \frac{-\theta^2}{1 + \theta^2 + \theta^4} = \frac{-\theta^2(1 - \theta^2)}{1 - \theta^6}
 \end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$\phi_{hh} = -\frac{(-\theta)^h(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(h+1)}}, \quad h \geq 1 \quad (۳۹.۳)$$

نمودار این تابع به ازای $\theta = 0.6$ و $\theta = -0.6$ در شکل (۵.۳) نشان داده شده است.

۵.۳ برآورد میانگین، اتوکواریانس ها و خودهمبستگی های یک سری ایستا

در این بخش با برآوردکننده های معمول μ و $\gamma(h)$ و $\rho(h)$ و ϕ_{hh} برای یک سری ایستا و بعضی از خواص آنها آشنا می شویم.

۱.۵.۳ برآورد μ

برآوردکننده معمول برای μ برآوردکننده گشتاوری آن یعنی $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ است. این برآوردکننده نا اریب و دارای واریانس زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Cov}(\bar{X}_n, \bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) = \frac{1}{n^2} \sum_{h=-n+1}^{n-1} (n-|h|)\gamma(h) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right)\gamma(h) = \frac{1}{n} [\gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right)\gamma(h)] \\ &= \frac{\gamma(0)}{n} \left[1 + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right)\rho(h)\right]. \end{aligned} \quad (۴۰.۳)$$

به عنوان مثال برای سری میانگین متحرک مرتبه اول این واریانس برابر است با

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{(1+\theta^2)\sigma^2}{n} \left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\theta}{1+\theta^2}\right]. \quad (۴۱.۳)$$

از قضیه زیر می توان در تقریب $\text{Var}(\bar{X}_n)$ استفاده کرد.

قضیه (۳.۳): اگر $\{X_t\}$ یک سری ایستا با تابع اتوکواریانس $\gamma(\cdot)$ باشد به طوری که $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}(\bar{X}_n) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) = \gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h). \quad (۴۲.۳)$$

اثبات: با توجه به (۴۰.۳)،

$$\begin{aligned} n\text{Var}(\bar{X}_n) &= \gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) \gamma(h) \\ &= \gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) - 2 \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} \gamma(h), \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\text{Var}(\bar{X}_n) = \gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} \gamma(h).$$

بنابراین کافی است نشان دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} \gamma(h) = 0$. فرض کنید $\epsilon > 0$ ، با توجه به اینکه $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ عدد طبیعی N وجود دارد به طوری که

$$\sum_{h=N+1}^{\infty} |\gamma(h)| < \epsilon/2,$$

و اگر $n > N + 1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} \gamma(h) \right| &\leq \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} |\gamma(h)| \\ &= \sum_{h=1}^N \frac{h}{n} |\gamma(h)| + \sum_{h=N+1}^{n-1} \frac{h}{n} |\gamma(h)| \\ &< \sum_{h=1}^N \frac{h}{n} |\gamma(h)| + \sum_{h=N+1}^{n-1} |\gamma(h)| \\ &< \sum_{h=1}^N \frac{h}{n} |\gamma(h)| + \epsilon/2 \end{aligned}$$

اما جمله اول در عبارت آخر نیز به صفر میل می کند پس برای ϵ مفروض می توان M را طوری اختیار کرد که برای $n > M$ این جمله نیز کمتر از $\epsilon/2$ باشد، نهایتاً برای $n > \max(N, M)$

$$\left| \sum_{h=1}^n \frac{h}{n} \gamma(h) \right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{n-1} \frac{h}{n} \gamma(h) = 0$ و اثبات کامل می شود.

اولین نتیجه از قضیه فوق این است که اگر $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ ، برای n های بزرگ

$$\text{Var}(\bar{X}_n) \approx \frac{1}{n} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) = \frac{1}{n} (\gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h)) = \frac{\gamma(0)}{n} (1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \rho(h)). \quad (۴۳.۳)$$

به عنوان مثال برای سری اتورگرسیو مرتبه اول

$$\text{Var}(\bar{X}_n) \approx \frac{\sigma^2}{n(1-\phi^2)} \left(1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \phi^h\right) = \frac{\sigma^2}{n(1-\phi)^2}.$$

نتیجه‌ای دیگر از قضیه (۳.۳) این است که اگر $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X}_n) = 0$.
به عبارت دیگر \bar{X}_n برآوردکننده‌ای سازگار برای μ است. در قضیه زیر سازگاری \bar{X}_n تحت شرط کلی تری ثابت می‌شود.

قضیه (۴.۳): اگر $\{X_t\}$ یک سری ایستا با تابع خودهمبستگی $\rho(\cdot)$ باشد به طوری که $\lim_{h \rightarrow \infty} \rho(h) = 0$ آنگاه \bar{X}_n برآوردکننده‌ای سازگار برای μ است. اثبات را به عنوان تمرین بعهده خواننده می‌گذاریم.

به عنوان مثال تابع خودهمبستگی سریهای میانگین متحرک و اتورگرسیو مرتبه اول (در حالت کلی سریهای ARMA) دارای خاصیت فوق هستند و برای این سریها \bar{X}_n برآوردکننده‌ای سازگار برای μ است.

برای استنباط درباره μ توزیع \bar{X}_n ضروری است. اگر سری زمانی گاوسی باشد، این توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس (۴۰.۳) است. برای بسیاری از سریهای زمانی (بخصوص برای سریهای ARMA) وقتی n بزرگ است \bar{X}_n به تقریب نرمال با میانگین μ و واریانس (۴۳.۳) است. در صورت معلوم بودن تابع $\gamma(\cdot)$ ، این نتایج مستقیماً در آزمون فرض یا ساخت فاصله اطمینان برای μ مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال فاصله اطمینان $(1-\alpha) \times 100$ درصد برای μ را می‌توان از روابط زیر به دست آورد.

$$\bar{X}_n \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}$$

چون معمولاً $\gamma(h)$ ها معلوم نیستند برای استفاده از این فاصله اطمینان برآوردی از $\text{Var}(\bar{X}_n)$ را به جای آن به کار می‌بریم. برآوردکننده‌هایی که معمولاً به کار می‌روند عبارتند از:

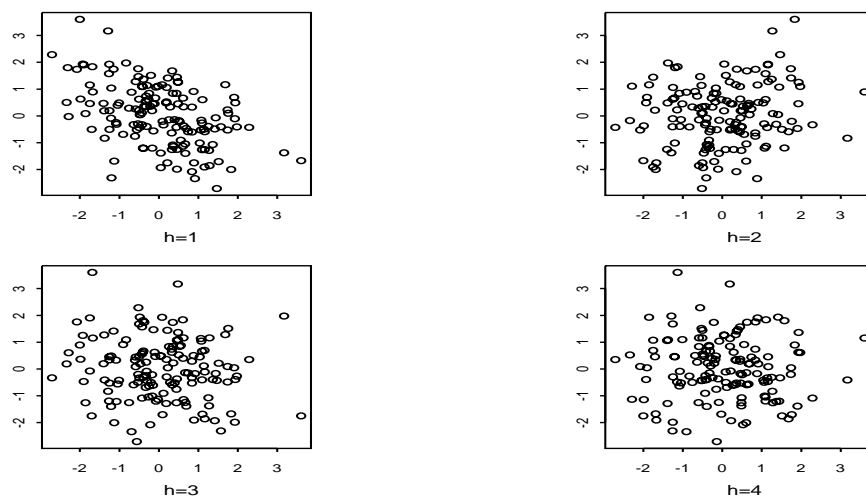
$$\widehat{\text{Var}}(\bar{X}_n) = \frac{\hat{\gamma}(0)}{n} \left[1 + 2 \sum_{h=1}^K \left(1 - \frac{h}{n}\right) \hat{\rho}(h)\right],$$

یا

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{X}_n) = \frac{\hat{\gamma}(0)}{n} \left(1 + 2 \sum_{h=1}^K \hat{\rho}(h)\right),$$

که در آنها $\hat{\gamma}(0)$ و $\hat{\rho}(h)$ برآوردکننده‌های واریانس و خودهمبستگی در تأخیر h اند که در ادامه با آنها آشنا می‌شویم. K نیز طوری اختیار می‌شود که از آنجا به بعد $\hat{\rho}(h)$ ها اختلاف معنی‌داری با صفر نداشته باشند. اما در این کتاب و به پیروی از براکول و دیویس (۱۹۹۴) از تقریب زیر استفاده می‌کنیم،

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{X}_n) = \frac{\hat{\gamma}(0)}{n} \left[1 + 2 \sum_{h=1}^K \left(1 - \frac{h}{K}\right) \hat{\rho}(h)\right], \quad (44.3)$$



شکل ۶.۳: نمودار پراکنش سری مشاهده شده در شکل (۱.۳-i)، در تأخیرهای $h = 1, 2, 3, 4$.

که در آن $K = [\sqrt{n}]$ بزرگترین عدد صحیح کمتر از \sqrt{n} است. متأسفانه هیچیک از این برآوردکننده‌ها حافظ دامنه^۱ نیستند به عبارت دیگر مقادیر منفی نیز برای آنها محتمل است اما این احتمال برای آخرین برآوردکننده کمتر از دو تایی دیگر است. (تمرین ۲۰.۳ را ببینید).

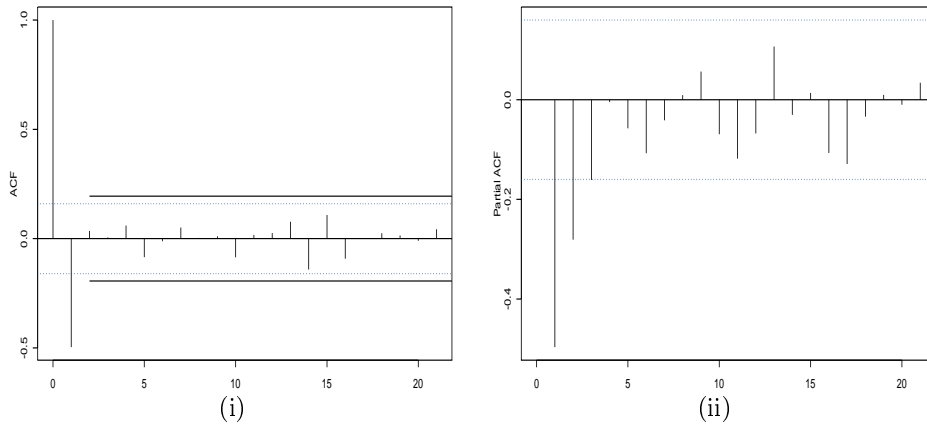
مثال (۱۹.۳): برای سری شکل (۳.۳-ii)، $\bar{X}_{150} = 24.02$ و $\hat{\gamma}(0) = 119.295$ با استفاده از (۴۴.۳) به ازای $K = 12$ و $\hat{\rho}(h)$ ها در جدول (۵.۳)، $\widehat{Var}(\bar{X}_{150}) = 1.641$ و در نتیجه یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای μ عبارت است از $24.02 \pm 1.96\sqrt{1.641}$ یعنی (21.51, 26.53).

۲.۵.۳ برآورد $\rho(h)$ و $\gamma(h)$

شکل (۶.۳-i) نمودار پراکنش (X_t, X_{t+1}) ، $t = 1, 2, \dots, 149$ را برای سری شکل (۱.۳-i) نشان می‌دهد. همانطور که انتظار داریم این نمودار به خوبی بیانگر وابستگی (منفی) در تأخیر ۱ این سری است. سایر نمودارها در شکل (۶.۳) نیز عدم وابستگی در تأخیرهای ۲، ۳، ۴ را منعکس می‌کنند (این نمودارها با استفاده از دستور `lag.plot(data, lags = 4, layout = c(2, 2))` در S-PLUS رسم شده‌اند). در حالت کلی به کمک اطلاعات حاصل از زوجهای (X_t, X_{t+h}) ، $t = 1, 2, \dots, n-h$ است که $\gamma(h)$ و $\rho(h)$ را برآورد می‌کنیم. برای این منظور از میان برآوردکننده‌های مختلف برآوردکننده‌های زیر را ترجیح می‌دهیم.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}). \quad (۴۵.۳)$$

^۱ Range Preservative



شکل ۷.۳: (i): خودهمبستگی‌های نمونه و (ii): خودهمبستگی‌های جزئی نمونه برای سری مثال (۲۰.۳).

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}. \quad (۴۶.۳)$$

به کمک این فرمول‌ها $\hat{\gamma}(h)$ و $\hat{\rho}(h)$ را به ازای $h = 0, 1, \dots, n-1$ می‌توان محاسبه نمود. اما با افزایش h تعداد زوج‌هایی که در (۴۵.۳) و (۴۶.۳) دخالت دارند کاهش می‌یابد (برای $h = n-1$ فقط یک زوج) بنابراین برای h های بزرگ (۴۵.۳) و (۴۶.۳) برآوردکننده‌های مطلوبی نیستند. برای کاربردهای عملی بنا به توصیهٔ باکس و جنکینز (۱۹۷۶) برآوردکننده‌های فوق به ازای $h \leq n/4$ و برای حداقل ۵۰ مشاهده مفید خواهند بود. $\hat{\gamma}(h)$ و $\hat{\rho}(h)$ به ترتیب تابع اتوکواریانس نمونه و خودهمبستگی نمونه در تأخیر h نامیده می‌شوند و به عنوان توابعی از h به ترتیب تابع اتوکواریانس نمونه (SACVF) و تابع خودهمبستگی نمونه (SACF) نامیده می‌شوند.

مثال (۲۰.۳): برای سری مشاهده شده در شکل (۱.۳-i) چند اتوکواریانس نمونه و خودهمبستگی نمونه محاسبه و در جدول (۴.۳) آمده‌اند. همچنین نمودار (۷.۳-i) خودهمبستگی‌های نمونه این سری تا تأخیر ۲۱ را نشان می‌دهد.

توزیع دقیق $\hat{\gamma}(h)$ و $\hat{\rho}(h)$ حتی برای سریهای زمانی ساده بسیار پیچیده است. اما برای فرآیندهای خطی کلی بویژه سریهای ARMA برای n های بزرگ ثابت می‌شود که توزیع $(\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(l))'$ تقریباً نرمال با بردار میانگین $(\rho(1), \dots, \rho(l))'$ و ماتریس کواریانس $n^{-1}W$ است (فولر^۱ (۱۹۷۶) یا بارتلت^۲ (۱۹۴۶) را ببینید). که عناصر W از فرمول بارتلت یعنی

$$W_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{ \rho(k+i)\rho(k+j) + \rho(k-i)\rho(k+j) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(k) - 2\rho(i)\rho(k)\rho(k+j) - 2\rho(j)\rho(k)\rho(k+i) \}.$$

^۱ Fuller

^۲ Bartlett

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\gamma}(h)$	147.01	-73.01	5.15	0.81	8.76	-12.50	-1.74	7.42	.45
$\hat{\rho}(h)$	-	-0.497	0.035	0.006	0.060	-0.085	0.012	0.051	0.003
$\hat{\phi}_{hh}$	-	-0.497	-0.281	-0.161	-0.005	-0.057	-0.107	-0.041	0.009
h	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\hat{\gamma}(h)$	1.53	-12.54	2.52	3.70	11.39	-20.85	15.90	-13.55	0.32
$\hat{\rho}(h)$	0.010	-0.085	0.017	0.025	0.078	-0.142	0.108	-0.092	0.002
$\hat{\phi}_{hh}$	0.057	-0.069	-0.118	-0.068	0.107	-0.030	0.014	-0.107	-0.129

جدول ۴.۳: اتوکواریانس‌ها، خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی نمونه برای سری مثال (۲۰.۳).

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \{ \rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k) \} \times \{ \rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k) \} \quad (۴۷.۳)$$

محاسبه می‌شوند. بویژه برای h های کوچک یا متوسط

$$\hat{\rho}(h) \approx N(\rho(h), n^{-1}W_{hh})$$

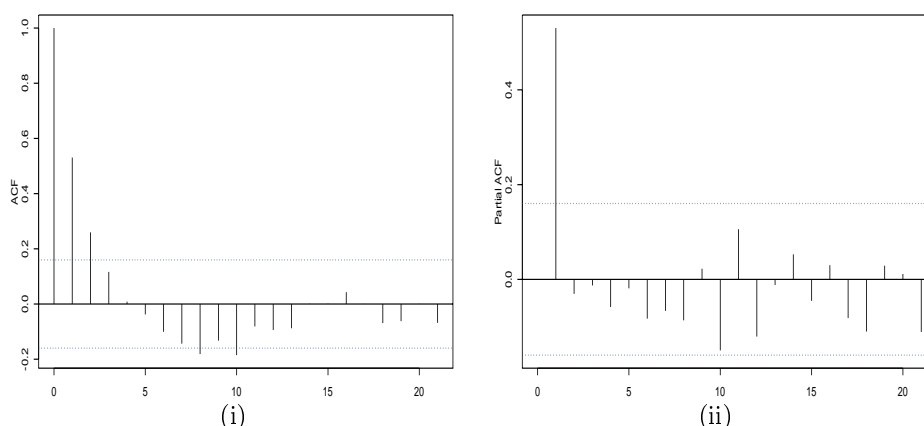
که

$$W_{hh} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \rho(k+h) + \rho(k-h) - 2\rho(h)\rho(k) \}^2.$$

در حالت خاصی که $\{X_t\}$ نوفه سفید باشد، $W_{ij} = 0$ ، $i \neq j$ و $W_{hh} = 1$ در نتیجه $\hat{\rho}(h)$ ها متغیرهای تصادفی به تقریب مستقل و هم توزیع با توزیع $N(0, \frac{1}{n})$ هستند. از این نتایج در آزمون این فرض که، سری مشاهده شده مصداقی از نوفه سفید است می‌توان استفاده کرد. به این ترتیب که اگر سری مشاهده شده مصداقی از نوفه سفید باشد انتظار داریم که برای k ای متوسط و $h = 1, 2, \dots, k$ ها اختلاف معنی داری با صفر نداشته باشند. به عبارت دیگر فرضهای $H_{0,h} : \rho(h) = 0$ را به ازای $h = 1, 2, \dots, k$ نتوان رد کرد. برای آزمون فرض $H_{0,h}$ از آماره آزمون $\sqrt{n}\hat{\rho}(h)$ که توزیع تقریبی نرمال استاندارد دارد استفاده می‌کنیم. در سطح معنی داری α هرگاه $|\sqrt{n}\hat{\rho}(h)| > z_{\alpha/2}$ یا به طور معادل $|\hat{\rho}(h)| > \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$ فرض $H_{0,h}$ رد می‌شود. با اضافه کردن حدود $(-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})$ به نمودار خودهمبستگی‌های نمونه می‌توان آزمون فرضهای $H_{0,h} : \rho(h) = 0$ را با سرعت بیشتری انجام داد. خطوط نقطه چین در نمودار (۷.۳-i) این حدود را به ازای $\alpha = 0.05$ نشان می‌دهند، چون $\hat{\rho}(1)$ خارج این حدود قرار گرفته فرض صفر بودن $\rho(1)$ و در نتیجه (فرض مصداقی از) نوفه سفید بودن سری مثال (۲۰.۳) رد می‌شود.

به سادگی می‌توان نشان داد برای سریهایی که خودهمبستگی آنها از تاخیر q به بعد صفر است (سریهای میانگین متحرک مرتبه q)،

$$W_{hh} = 1 + 2(\rho(1)^2 + \rho(2)^2 + \dots + \rho(q)^2) = V(q), \quad h \geq q + 1.$$



شکل ۳.۸: (i): خودهمبستگی‌های نمونه و (ii): خودهمبستگی‌های جزئی نمونه برای سری مثال (۳.۱.۳).

بنابر این برای چنین سریهایی وقتی $h \geq q + 1$,

$$\hat{\rho}(h) \approx N(\rho(h), n^{-1}V(q))$$

از طرفی چون $\rho(h)$ ها معلوم نیستند در تقریب فوق به جای $V(q)$ از برآورد آن،

$$\hat{V}(q) = 1 + 2(\hat{\rho}(1)^2 + \hat{\rho}(2)^2 + \dots + \hat{\rho}(q)^2), \quad h \geq q + 1$$

استفاده می‌کنیم. از این توزیع تقریبی و آماره $\sqrt{n}\hat{\rho}(h)\hat{V}(q)^{-1/2}$ در آزمون فرض اینکه خودهمبستگی‌ها از q به بعد صفراند یا خیر استفاده می‌کنیم. این کار را با اضافه کردن حدود $\pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{V}(q)}$ به نمودار خودهمبستگی نمونه انجام می‌دهیم. برای سری مثال (۳.۰.۳) اینطور به نظر می‌رسد که $q = 1$ است (البته می‌دانیم که اینطور است)، برای آزمون این فرض حدود $\pm 0.194 = \pm \frac{z_{0.025}}{\sqrt{150}} \sqrt{1 + 2(0.497)^2}$ خطوط پررنگ (به همراه خودهمبستگی‌های نمونه در شکل (۳.۳-i) رسم شده‌اند. همانطور که انتظار داشتیم از تأخیر 1 به بعد $\hat{\rho}(h)$ ها اختلاف معنی داری با صفر ندارند.

بیشتر نرم افزارهای آماري به همراه خودهمبستگی نگار نمونه حدود $\pm z_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ را نیز رسم می‌کنند (مثل نمودارهای ۳.۳-i و ۳.۸-i که توسط S-PLUS رسم شده‌اند) و همانطور که دیدیم به کمک این حدود نوفه سفید بودن سری را می‌توان آزمون کرد.

۳.۵.۳ برآورد ϕ_{hh}

برآوردکننده معمول ϕ_{hh} ، از قرار دادن اتوکواریانس‌های نمونه (خودهمبستگی‌های نمونه) به جای اتوکواریانس‌ها (خودهمبستگی‌ها) در روابطی که برای محاسبه ϕ_{hh} به کار بردیم، مثل الگوریتم دوربین - لوینسون یا تساوی (۳.۸.۳) به دست می‌آید.

h	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\rho}(h)$	0.531	0.260	0.116	0.009	-0.038	-0.101	-0.144	-0.182
$\hat{\phi}_{hh}$	0.531	-0.031	-0.013	-0.059	-0.019	-0.083	-0.067	-0.087
h	9	10	11	12	13	14	15	16
$\hat{\rho}(h)$	-0.133	-0.185	-0.081	-0.094	-0.088	0.001	0.001	0.043
$\hat{\phi}_{hh}$	0.023	-0.150	0.106	-0.121	-0.012	0.053	-0.045	0.030

جدول ۵.۳: خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی سری مثال (۲۱.۳).

خودهمبستگی‌های جزئی نمونه در تأخیرهای 1 تا 17 مربوط به سری شکل (۱.۳-i) که از قرار دادن $\hat{\gamma}(h)$ ‌ها در الگوریتم دوربین - لوینسون حاصل شده‌اند در جدول (۴.۳) آمده‌اند. نمودار (۷.۳-ii) این خودهمبستگی‌های جزئی را نشان می‌دهد.

مثال (۲۱.۳): جدول (۵.۳) شامل خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی نمونه مربوط به سری شکل (۳.۳-ii) در تأخیرهای 1 تا 16 است. نمودار (۸.۳-ii) خودهمبستگی‌های جزئی نمونه این سری را تا تأخیر 21 نشان می‌دهد.

کوئن اوپلی^۱ (۱۹۴۶) نشان داد که برای سربهایی که خودهمبستگی جزئی آنها از تأخیر p به بعد همگی صفراند (سربهای اتورگرسیو مرتبه p) $\hat{\phi}_{hh}$ ‌ها از تأخیر p به بعد دارای توزیع مجانبی زیراند

$$N\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad h \geq p + 1$$

از این توزیع تقریبی می‌توان برای آزمون فرض اینکه ϕ_{hh} ‌ها برای $h \geq p + 1$ صفراند استفاده کرد. برای انجام این کار در مثال (۲۱.۳)، حدود $\pm z_{\alpha/2} / \sqrt{n}$ به ازای $\alpha = 0.05$ را به نمودار خودهمبستگی‌های جزئی نمونه این سری اضافه کرده‌ایم (نمودار ii-۸.۳). همانطور که انتظار داشتیم از تأخیر 1 به بعد $\hat{\phi}_{hh}$ ‌ها اختلاف معنی داری با صفر ندارند.

تابع $acf(data, lag.max, type)$ از توابع S-PLUS را برای محاسبه اتوکواریانس‌ها، خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی نمونه و رسم نمودار آنها به کار می‌بریم. شناسه‌های $type = "covariance"$ و $type = "correlation"$ و $type = "partial"$ به ترتیب برای محاسبه اتوکواریانس‌ها، خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی به کار می‌روند و $lag.max = l$ تأخیری را تعیین می‌کند (l) که تا آن تأخیر این مقادیر محاسبه می‌شوند.

^۱ Quenouille

۶.۳ تمرینات

۱.۳- فرض کنید $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ، توابع میانگین، واریانس، اتوکواریانس و خودهمبستگی سریهای زیر را پیدا کنید.

الف) $X_t = Z_t + 0.4Z_{t-1} - 0.5Z_{t-2}$

ب) $X_t = 2 + 3t + Z_t + 0.5Z_{t-1}$

ج) $X_t = c_t Z_t$ که $\{c_t\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است.

د) $X_t = Z_t Z_{t-1}$ ، با فرض اینکه Z_t ها مستقلند.

ه) $X_t = Z_t + Z_{t-1}^2 + 2Z_{t-2}$ ، با فرض اینکه Z_t ها نرمالند.

و) $X_t = \sin[2\pi(\frac{t}{4} + \omega)]$ که ω دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ است.

ز) $X_t = \sum_{i=0}^k [A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)]$ که $\omega_i \in [0, \pi]$ ها مقادیری ثابت و A_i و B_i ها متغیرهای تصادفی غیروابسته با میانگین صفر و واریانس σ_i^2 هستند.

۲.۳- در مثال (۱۰.۳) نشان دهید $P_3 X_4 = (2 \cos \omega) X_3 - X_2$.

۳.۳- خواص (۲۴.۳)، (۲۵.۳) و (۲۶.۳) عملگر بهترین پیش‌بینی خطی را ثابت کنید.

۴.۳- فرض کنید $\{X_t\}$ سری اتورگرسیو مرتبه اول با میانگین μ و $|\phi| < 1$ باشد. مطلوبست:

الف) $P[X_1 | X_2, X_3, \dots, X_n]$

ب) $P[X_0 | X_1, X_2, \dots, X_n]$

ج) $P[X_j | X_1, X_2, \dots, X_n]$ برای $j \leq -1$.

د) $P[X_j | X_t; 1 < t < n, t \neq j]$

۵.۳- بهترین برآورد خطی مقدار گم شده X_2 را به کمک مشاهدات X_1, X_3 از یک سری اتورگرسیو مرتبه اول بیابید. واریانس خطای این برآورد را نیز به دست آورید.

۶.۳- بهترین برآورد خطی مقدار گم شده X_2 را به کمک مشاهدات X_1, X_3 از یک سری میانگین متحرک مرتبه اول بیابید. واریانس خطای این برآورد را نیز به دست آورید.

۷.۳- فرض کنید X_1, X_2, X_4, X_5 مشاهدات یک سری میانگین متحرک مرتبه اول باشند. مطلوبست

الف) بهترین برآورد خطی مقدار گم شده X_3 به کمک مشاهدات X_1, X_2 .

ب) بهترین برآورد خطی مقدار گم شده X_3 به کمک مشاهدات X_4, X_5 .

ج) بهترین برآورد خطی مقدار گم شده X_3 به کمک مشاهدات X_1, X_2, X_4, X_5 .

۸.۳- در مثال (۱۳.۳) نشان دهید، $n, 2, \dots, 1$ ، $Z_0 P_n (-\theta)^t + (-\theta)^{j-1} X_{t-j+1}$ ؛ $t = 1, 2, \dots, n$ ، $P_n Z_t = \sum_{j=1}^t$

۹.۳- فرض کنید X و Y متغیرهایی تصادفی اند به طوریکه $E(Y) = \mu$ و $E(Y^2) < \infty$.

الف) نشان دهید ثابت c که $E(Y - c)^2$ را حداقل می کند $c = \mu$ است.

ب) نشان دهید $f(X)$ که $E[(Y - f(X))^2 | X]$ را حداقل می کند $f(X) = E(Y | X)$ است.

ج) نشان دهید $f(X)$ که $E[(Y - f(X))^2]$ را حداقل می کند $f(X) = E(Y | X)$ است. $f(X)$ پیش بین کمترین توانهای دوم خطای Y بر حسب X (یا رگرسیون Y روی X) نامیده می شود.

۱۰.۳- فرض کنید $Y = X^2 + Z$ که X و Z متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. پیش بین کمترین توانهای دوم خطای Y بر حسب X را بیابید. بهترین پیش بین خطی Y بر حسب X را بیابید. واریانس خطای این دو پیش بین را مقایسه کنید.

۱۱.۳- فرض کنید $\{X_t\}$ یک سری ایستا است و نشان دهید $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ که

$$E[(X_{n+l} - f(X_1, X_2, \dots, X_n))^2]$$

را حداقل می کند $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = E[X_{n+l} | X_1, X_2, \dots, X_n]$ است. $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ پیش بین کمترین توانهای دوم خطای X_{n+l} بر حسب X_1, X_2, \dots, X_n نامیده می شود.

۱۲.۳- تساوی (۱۸.۳) را ثابت کنید.

۱۳.۳- الگوریتم دوربین - لوینسون را برای محاسبه ضرایب $P_n X_{n+1}$ ، سری میانگین متحرک مرتبه اول به ازای $n = 2, 3, 4$ به کار ببرید.

۱۴.۳- الگوریتم تحولاتها را برای محاسبه ضرایب $P_n X_{n+1}$ ، سری اتورگرسیون مرتبه اول به ازای $n = 2, 3, 4$ به کار ببرید.

۱۵.۳- اگر $\{X_t\}$ یک سری ایستا و $\{U_t\}$ سری تحولاتها نظیر آن باشد نشان دهید

الف) برای $t > s$ ، $Cov(U_t, X_s) = 0$. (راهنمایی: به معادلات (۱۰.۳) به ازای $l = 1$ دقت کنید.)

ب) برای $t \neq s$ ، $Cov(U_t, U_s) = 0$.

۱۶.۳- فرض کنید $\{X_t\}$ میانگین متحرک مرتبه اول باشد.

(الف) به طور مستقیم و با حل معادله $\rho_n \phi_n = \rho_n(1)$ ضرایب $P_n X_{n+1} = \phi_{n1} X_n + \dots + \phi_{nn} X_1$ را به دست آورید. (راهنمایی: با حل معادلات از پایین به بالا، نشان دهید برای $1 \leq j < n$ ، $\phi_{n,n-j} = (-\theta)^{-j} (1 + \theta^2 + \dots + \theta^{2j}) \phi_{nn}$ و در اولین معادله قرار دهید.)

(ب) نشان دهید $v_n = \sigma^2 \left(\frac{1 - \theta^{2n+4}}{1 - \theta^{2n+2}} \right)$.

۱۷.۳- فرض کنید $\{X_t\}$ میانگین متحرک مرتبه اول با $|\theta| < 1$ باشد. با استفاده از تمرین قبل نشان دهید، $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{n,1} = \theta$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sigma^2$.

۱۸.۳- به کمک پنج مشاهده 14.1, 16.7, 17.2, 13.9, 15.4 از سری اتورگرسیو مرتبه اول گاوسی با $\phi = 0.7$ و $\sigma^2 = 4$ ، یک فاصله اطمینان 95 درصد برای μ بسازید.

۱۹.۳- $\bar{X} = 23.7$ میانگین مصداقی به طول 100 از سری میانگین متحرک مرتبه اول گاوسی با $\theta = 0.7$ و $\sigma^2 = 4$ ، یک فاصله اطمینان 95 درصد برای μ بسازید.

۲۰.۳- برای سری شکل (i-۱.۳)، $\bar{X}_{150} = 25.14$ است.

(الف) با شناختی که از مدل مولد این سری دارید و تساوی (۴۱.۳)، $Var(\bar{X})$ را حساب کنید.

(ب) با استفاده از تقریب (۴۴.۳) به ازای $K = 12$ و جدول (۴.۳)، $Var(\bar{X})$ را برآورد کرده و یک فاصله اطمینان 95 درصد برای μ بسازید.

(ج) به ازای $K = 10$ ، $\widehat{Var}(\bar{X})$ را از روابط بخش (۱.۵.۳) حساب کنید.

۲۱.۳- مقادیر اتوکواریانسها و خودهمبستگیها و خودهمبستگیهای جزئی سری Se10 در پیوست ۲ را تا تأخیر 25 حساب کنید. فرض اینکه خودهمبستگیهای نمونه‌ای از تأخیر دو به بعد اختلاف معنی داری با صفر ندارند را در سطح $\alpha = 0.05$ آزمون کنید.

۲۲.۳- مقادیر اتوکواریانسها و خودهمبستگیها و خودهمبستگیهای جزئی مجذور سری Se8 در پیوست ۲ را تا تأخیر 25 حساب کنید. فرض اینکه خودهمبستگیهای جزئی نمونه‌ای از تأخیر دو به بعد اختلاف معنی داری با صفر ندارند را در سطح $\alpha = 0.05$ آزمون کنید.

۲۳.۳- برای سری میانگین متحرک مرتبه اول نشان دهید $W_{11} = 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4$.

۲۴.۳- برای سری اتورگرسیو مرتبه اول نشان دهید

$$W_{ii} = \frac{(1 - \phi^{2i})(1 + \phi^2)}{1 - \phi^2} - 2i\phi^{2i}, \quad i \geq 1.$$

۲۵.۳- نشان دهید $\sum_{h=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}(h) = 0$ که $\hat{\gamma}(h)$ ها خودهمبستگیهای نمونه‌ای، مصداقی به طول n از یک سری است.

فصل ۴

سریهای ARMA

در این فصل با خانواده مدلهای اتورگرسیو - میانگین متحرک (ARMA) به منظور مدلسازی سریهای زمانی ایستا آشنا خواهیم شد. ساختارهای متنوع وابستگی که در رفتار توابع خود همبستگی و خود همبستگی جزئی عناصر این خانواده متبلور می‌شوند امکان تبیین رفتار یک سری مشاهده شده توسط عضوی از این خانواده را افزایش می‌دهد. به علاوه اگر، $\gamma(\cdot)$ تابع اتوکوواریانس یک سری ایستا باشد به طوری که $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ آنگاه برای هر $k \in N$ یک سری ARMA با تابع اتوکوواریانس $\gamma^*(\cdot)$ می‌توان یافت به طوری که برای $h = 0, 1, 2, \dots, k$ $\gamma^*(h) = \gamma(h)$ به تعبیری این نوع سریهای ایستا را می‌توان توسط سریهای ARMA تقریب کرد. از دیگر مزایای این مدلها ساختار خطی آنها است که علاوه بر سادگی در بسیاری از محاسبات، امکان استفاده بهینه از نتایج بحث پیش بینی‌های خطی (بخش ۳.۳) را نیز به همراه دارد. چون خانواده مدلهای ARMA زیر مجموعه‌ای از فرآیندهای خطی کلی‌اند در این فصل ابتدا با این فرآیندها و بعضی از خواصشان در بخش (۱.۴) آشنا می‌شویم. در بخش (۴.۲) و قبل از تعریف رسمی سببیت و عکس پذیری یک سری ARMA با این مفاهیم برای سریهای اتورگرسیو مرتبه اول و میانگین متحرک مرتبه اول آشنا می‌شویم. بخش (۳.۴) را به تعریف رسمی سریهای ARMA، سببیت و عکس پذیری آنها اختصاص داده‌ایم. با روشهایی برای محاسبه مقادیر توابع ACF و PACF و رفتار این توابع برای سریهای اتورگرسیو در بخش (۴.۴) برای سریهای میانگین متحرک در بخش (۵.۴) و در حالت کلی برای سریهای مخلوط در بخش (۶.۴) آشنا می‌شویم. در ادامه این فصل به بحث در پیش‌بینی سریهای ARMA خواهیم پرداخت. نوع جدیدی از پیش‌بینی‌ها و بهترین آنها برای سریهای ARMA را در بخش (۷.۴) معرفی می‌کنیم. طبیعی است اطلاع از رفتار پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARMA می‌تواند سطح توقع ما از این مدل را تعیین کرده و تا حدودی راهنمای ما در بکار بردن این مدل باشد. در بخش (۸.۴) ضمن معرفی تابع پیش‌بینی غائی که رفتار نهایی این پیش‌بینی‌ها را نشان می‌دهد، در رفتار این پیش‌بینی‌ها بحث می‌کنیم.

۱.۴ فرآیندهای خطی کلی

والد^۱ (۱۹۳۸) ثابت کرده است که هر سری ایستا را می‌توان به دو سری غیر وابسته تجزیه کرد. یکی از این سریها تعیینی (مثال ۱۰.۳ را ببینید) و دیگری یک فرآیند خطی کلی^۲ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف (۱.۴): فرآیند $\{X_t\}$ را خطی کلی (با میانگین صفر) گوئیم هرگاه سری نوفه سفید $\{Z_t\}$ و دنباله^۳ به طور مطلق جمع‌پذیر $\{\psi_j\}$ ، (یعنی $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$) از اعداد حقیقی، موجود باشند به طوریکه

$$X_t = \cdots + \psi_{-1}Z_{t+1} + \psi_0Z_t + \psi_1Z_{t-1} + \psi_2Z_{t-2} + \cdots = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}. \quad (1.4)$$

فرآیند $\{X_t\}$ را خطی کلی با میانگین μ گوئیم هرگاه $\{X_t - \mu\}$ فرآیند خطی کلی باشد. با تعریف عملگر پس‌برنده^۳ B ، به طوریکه $BZ_t = Z_{t-1}$ و استفاده از پیامد آن یعنی $B^j Z_t = Z_{t-j}$ تساوی (۱.۴) را می‌توان به صورت $X_t = \psi(B)Z_t$ نوشت که در آن $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$ عملگر خطی یا صافی خطی^۴ این فرآیند نامیده می‌شود. بنابر این، به تعبیری فرآیند خطی کلی $\{X_t\}$ حاصل عبور سری نوفه سفید $\{Z_t\}$ از صافی خطی $\psi(B)$ است. سری $\{Z_t\}$ را ورودی به این صافی و سری $\{X_t\}$ را خروجی می‌نامیم. شرط به طور مطلق جمع‌پذیر بودن ضرایب این صافی علاوه بر اینکه برای هر t همگرایی (در میانگین مرتبه دوم و با احتمال یک) سری سمت راست در (۱.۴) را تضمین می‌کند، شرطی کافی برای ایستایی سری $\{X_t\}$ است (فولر ۱۹۷۶ را ببینید). قضیه زیر ایستایی سری خروجی را در حالت کلی‌تری که سری ورودی یک سری ایستای دلخواه $\{Y_t\}$ است بیان کرده، رابطه‌ای نیز بین توابع اتوکواریانس $\{X_t\}$ و $\{Y_t\}$ ارائه می‌دهد.

قضیه (۱.۴): اگر $\{Y_t\}$ یک سری زمانی ایستا با میانگین صفر و تابع اتوکواریانس $\gamma_Y(\cdot)$ باشد و $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < \infty$ آنگاه سری زمانی $X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j Y_{t-j}$ ایستا با میانگین صفر و تابع اتوکواریانس $\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h+k-j)$ است. نتیجه‌ای از این قضیه در حالت خاصی که $\{Y_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ ، این است که اگر $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < \infty$ آنگاه فرآیند خطی کلی ایستا است و

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k \psi_{k+h}. \quad (2.4)$$

^۱ Wold

^۲ General Linear Processes

^۳ Back Shift Operator

^۴ Linear Filter

مثال (۱.۴): سری میانگین متحرک مرتبه اول $\{X_t\}$ (مثال ۲.۳)، یک فرآیند خطی کلی با ضرایب

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \theta & j = 1 \\ 0 & \text{سایر } j \text{ ها} \end{cases}$$

و صافی $\psi(B) = 1 + \theta B$ است. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه (۱.۴) سری $\{X_t\}$ برای هر مقدار θ ایستا است. به علاوه از رابطه (۲.۴)،

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2) & h = 0 \\ \sigma^2\theta & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases} .$$

قبلاً در مثال (۲.۳) به روشی دیگر این اتوکواریانس‌ها را محاسبه کرده بودیم. روشی دیگر برای محاسبه اتوکواریانس‌های فرآیند خطی کلی استفاده از تابع مولد اتوکواریانس است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف (۲.۴): اگر $\gamma(h), h = 0, 1, 2, \dots$ اتوکواریانس‌های سری ایستای $\{X_t\}$ باشند، تابع مولد این اتوکواریانس‌ها را با $\gamma_X(B)$ نشان داده و به صورت

$$\gamma_X(B) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h)B^h, \quad (۳.۴)$$

تعریف می‌کنیم.

در صورتی که $\{X_t\}$ یک فرآیند خطی کلی با صافی $\psi(B)$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\gamma_X(B) = \sigma^2 \psi(B) \psi(B^{-1}), \quad (۴.۴)$$

برای این منظور

$$\begin{aligned} \gamma_X(B) &= \sigma^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j \psi_{j+h} \right) B^h = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_j \psi_i B^{i-j} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i B^i \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j B^{-j} = \sigma^2 \psi(B) \psi(B^{-1}). \end{aligned}$$

که در تساوی اول از (۲.۴) و در تساوی دوم از تغییر شماره‌دهنده $i = j + h$ استفاده کرده‌ایم. به عنوان مثال تابع مولد اتوکواریانس‌های سری میانگین متحرک مرتبه اول عبارت است از

$$\gamma_X(B) = \sigma^2(1 + \theta B)(1 + \theta B^{-1}) = \sigma^2(\theta B^{-1} + (1 + \theta^2)B^0 + \theta B).$$

از مقایسه با (۳.۴)، $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$ ، $\gamma(1) = \sigma^2\theta$ ، و برای $h \geq 2$ ، $\gamma(h) = 0$ به دست می‌آیند.

۲.۴ سریهای میانگین متحرک و اتورگرسیو مرتبه اول

تا اینجا نکات زیادی دربارهٔ دوسری میانگین متحرک و اتورگرسیو مرتبه اول آموخته‌ایم. در این بخش ضمن تکمیل بعضی از این نکات با مفاهیم سببیت^۱ و عکس پذیری^۲ این سریها نیز آشنا خواهیم شد. مفاهیمی که در بخش بعد آنها را برای سریهای ARMA تعمیم خواهیم داد. در مثال (۸.۳) سری اتورگرسیو مرتبه اول $\{X_t\}$ با میانگین صفر را جواب معادلهٔ تفاضلی $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$ که در آن $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ تعریف کردیم. در آنجا ادعا کرده بودیم که به ازای $|\phi| < 1$ سری اتورگرسیو مرتبهٔ اول ایستا است. صحت این ادعا را به کمک قضیه (۱.۴) ثابت می‌کنیم. برای این منظور

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + Z_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} \\ &= \dots = Z_t + \phi Z_{t-1} + \dots + \phi^{k-1} Z_{t-k+1} + \phi^k X_{t-k}, \end{aligned}$$

وقتی $|\phi| < 1$ است با افزایش k عبارت آخر به صفر میل می‌کند و در نتیجه $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$. که نشان می‌دهد $\{X_t\}$ یک فرآیند خطی کلی با ضرایب به طور مطلق جمعپذیر $\{\phi^j\}$ و در نتیجه ایستا است. از اظهارات فوق نباید اینطور استنباط شود که وقتی $|\phi| > 1$ سری ایستایی صادق در معادلهٔ $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$ وجود ندارد بلکه بر عکس در این حالت $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j}$ جواب ایستای این معادله است زیرا

$$\begin{aligned} \phi X_{t-1} + Z_t &= -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j+1} Z_{t-1+j} + Z_t = -\sum_{j=2}^{\infty} \phi^{-j+1} Z_{t-1+j} \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j} = X_t. \end{aligned}$$

ایستایی این جواب نیز از قضیهٔ (۱.۴) نتیجه می‌شود. اما جواب اخیر به دلیل وابستگی X_t به Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots در مدل سازی سریهای زمانی مطلوبیتی ندارد. بر عکس به ازای $|\phi| < 1$ ، اینکه می‌توان X_t را به صورت ترکیب خطی از مقادیر حال و گذشته سری نوفهٔ سفید نوشت کاربردهای نظری و عملی زیادی دارد. در چنین وضعیتی سری اتورگرسیو مرتبه اول را سببی و $X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j Z_{t-j}$ را نمایش سببی $\{X_t\}$ می‌نامیم. پس شرط $|\phi| < 1$ پیامدی بیش از ایستایی دارد و آن امکان نوشتن $\{X_t\}$ به شکل سببی است. می‌توان نشان داد در صورتی که $|\phi| = 1$ باشد سری ایستایی وجود ندارد که در معادلهٔ تفاضلی $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$ صدق کند (تمرین ۸.۴). پس طبیعی است که در تعریف سری اتورگرسیو مرتبه اول ϕ را به $|\phi| < 1$ محدود کنیم.

می‌دانیم سری میانگین متحرک مرتبه اول $\{X_t\}$ که توسط رابطهٔ $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ تعریف می‌شود فارغ از مقدار θ ایستا است. اما در تحلیل سریهای زمانی علاقهٔ ما به اینکه بتوان Z_t را به صورت ترکیب خطی از مقادیر حال و گذشته $\{X_t\}$ نوشت منجر به محدودیتی بر θ خواهد شد. مشابه آنچه برای سری

^۱ Causality

^۲ Invertibility

اتورگرسیو مرتبه اول دیدیم می‌توان نشان داد به ازای $|\theta| < 1$ چنین نمایشی با ضرایب $(-\theta)^j$ وجود دارد. در چنین وضعیتی سری میانگین متحرک مرتبه اول را عکس پذیر و $Z_t = \sum_{j=0}^{+\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$ را نمایش معکوس $\{X_t\}$ می‌نامیم.

۳.۴ سریهای ARMA

سریهای ARMA که از ترکیب جملات اتورگرسیو و میانگین متحرک حاصل می‌شوند غالباً با مرتبه‌ای پایین (p و q کوچک) می‌توانند رفتار بسیاری از سریهای زمانی را که مشاهده می‌کنیم تبیین کنند. این سریها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف (۳.۴): سری ایستای $\{X_t\}$ صادق در معادله تفاضلی،

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad (5.4)$$

که $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ است را سری اتورگرسیو - میانگین متحرک از مرتبه (p, q) نامیده و به اختصار می‌نویسیم $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$. سری $\{X_t\}$ را $ARMA(p, q)$ با میانگین μ گوئیم هرگاه $\{X_t - \mu\} \sim ARMA(p, q)$ باشد.

مدل (۵.۴) نیز مدل ARMA ی مرتبه (p, q) نامیده می‌شود. با استفاده از عملگر پسبرنده می‌توان این مدل را به شکل

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)Z_t, \quad (6.4)$$

نوشت. که در آن عملگرهای $\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ و $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ به ترتیب عملگرهای اتورگرسیو مرتبه p و میانگین متحرک مرتبه q نامیده می‌شوند. اگر نیاز به تأکید نباشد معمولاً زیر نویسهای p و q را در $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ نمی‌نویسیم.

در صورتی که $\theta(B) = 1$ ، $q = 0$ ، باشد مدل ARMA به صورت زیر در می‌آید

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t \quad \text{یا} \quad \phi(B)X_t = Z_t,$$

در این حالت سری $\{X_t\}$ را سری اتورگرسیو (محض) مرتبه p نامیده و می‌نویسیم $\{X_t\} \sim AR(p)$. در صورتی که $\phi(B) = 1$ ، $p = 0$ ، باشد سری $\{X_t\}$ را سری میانگین متحرک (محض) مرتبه q نامیده و می‌نویسیم $\{X_t\} \sim MA(q)$ در این حالت مدل ARMA به صورت زیر در می‌آید.

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} = \theta(B)Z_t.$$

ثابت می‌شود که معادله (۵.۴) دارای جواب ایستا و منحصر بفرد $\{X_t\}$ است اگر و تنها اگر معادله $\phi(B) = 0$ در صورتی که B متغیری مختلط در نظر گرفته شود ریشه‌ای روی دایره واحد نداشته باشد. به

عبارت دیگر برای هر عدد مختلط B با نرم یک $\phi(B) \neq 0$. این شرط برای مدل $AR(1)$ معادل این است که $|\phi| \neq 1$ باشد.

در بخش قبل با مفاهیم سببیت و عکس پذیری سریهای $AR(1)$ و $MA(1)$ آشنا شدیم. در اینجا با تعریف سببیت و عکس پذیری سریهای $ARMA(p, q)$ و شرایط لازم و کافی برای آنها آشنا می‌شویم. تعریف (۴.۴): سری ARMA ی، $\{X_t\}$ را (نسبت به $\{Z_t\}$) سببی گوییم هر گاه دنباله به طور مطلق جمع پذیر $\{\psi_j\}$ موجود باشد به طوری که برای هر t ,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi(B)Z_t.$$

در صورتی که B را متغیری مختلط فرض کنیم شرط لازم و کافی برای سببیت $\{X_t\}$ آن است که ریشه‌های $\phi(B) = 0$ خارج دایره واحد باشند. در این صورت ضرایب $\{\psi_j\}$ از تساوی $\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ یا $\psi(B)\phi(B) = \theta(B)$ محاسبه می‌شوند (برای اثبات براکول و دیویس (۱۹۹۱) را ببینید). بدیهی است که سریهای $MA(q)$ فارغ از مقادیر $\theta_j, j = 1, 2, \dots, q$ سببی‌اند و

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_j = \theta_j \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad \psi_j = 0, \quad j > q.$$

تعریف (۵.۴): سری ARMA ی، $\{X_t\}$ را (نسبت به $\{Z_t\}$) عکس پذیر گوییم هر گاه دنباله به طور مطلق جمع پذیر $\{\pi_j\}$ موجود باشد به طوری که برای هر t ,

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \pi(B)X_t.$$

شرط لازم و کافی برای عکس پذیری $\{X_t\}$ این است که ریشه‌های $\theta(B) = 0$ خارج دایره واحد باشند. در این صورت ضرایب $\{\pi_j\}$ از $\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}$ یا $\pi(B)\theta(B) = \phi(B)$ محاسبه می‌شوند (برای اثبات براکول و دیویس (۱۹۹۱) را ببینید).

بدیهی است که سریهای $AR(p)$ فارغ از مقادیر $\phi_j, j = 1, 2, \dots, p$ عکس پذیراند و

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_j = -\phi_j \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad \pi_j = 0, \quad j > p.$$

در مدل سازی سریهای زمانی ایستا طبیعی است که خانواده مدل های ARMA را به مدل های عکس پذیر و سببی محدود کنیم.

مثال (۲.۴): فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(1, 1)$ یعنی جواب معادله

$$\phi_1(B)X_t = \theta_1(B)Z_t,$$

با $\phi_1(B) = 1 - \phi B$ و $\theta_1(B) = 1 + \theta B$ باشد. بدیهی است در صورتی که $|\phi| < 1$ این سری سببی و در صورتی که $|\theta| < 1$ عکس پذیر خواهد بود. اگر $|\phi| < 1$ باشد برای محاسبه ضرایب $\{\psi_j\}$ در نمایش

سببی $\{X_t\}$ از تساوی $\psi(B)\phi_1(B) = \theta_1(B)$ به ترتیب زیر استفاده می‌کنیم.

$$(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1 - \phi B) = 1 + \theta B$$

$$\Rightarrow \psi_0 + (\psi_1 - \psi_0 \phi)B + (\psi_2 - \psi_1 \phi)B^2 + \dots + (\psi_j - \psi_{j-1} \phi)B^j + \dots = 1 + \theta B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 = \theta + \phi \\ \psi_j - \phi \psi_{j-1} = 0, \quad j \geq 2 \Rightarrow \psi_j = \phi^{j-1}(\theta + \phi), \quad j \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه نمایش سببی $\{X_t\}$ عبارت است از:

$$X_t = Z_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j}.$$

این تساوی نشان می‌دهد که سری $ARMA(1,1)$ حاصل عبور سری نوفه سفید از یک صافی خطی با ضرایب به طور نمایی میرا است.

ضرایب $\{\pi_j\}$ در نمایش معکوس $\{X_t\}$ از تساوی $\pi(B)\theta_1(B) = \phi_1(B)$ و مشابه بالا محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 \\ \pi_1 = -(\phi + \theta) \\ \pi_j + \theta \pi_{j-1} = 0, \quad j \geq 2 \Rightarrow \pi_j = -(-\theta)^{j-1}(\phi + \theta), \quad j \geq 2 \end{cases}$$

و در نتیجه نمایش معکوس $\{X_t\}$ عبارت است از:

$$Z_t = X_t - (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{j-1} X_{t-j}.$$

مثال (۳.۴): سری $ARMA(1,2)$ ی زیر را در نظر بگیرید

$$(1 + 0.7B)X_t = (1 + 1.5B + 0.7B^2)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,1).$$

با توجه به اینکه $\phi = -0.7$ سری $\{X_t\}$ سببی است. از طرفی معادله $1 + 1.5B + 0.7B^2 = 0$ دو ریشه مختلط $1.07 \pm 0.53i$ دارد که نرم آنها $\sqrt{(1.07)^2 + (0.53)^2} = 1.19$ بزرگتر از یک و این ریشه‌ها خارج دایره واحد قرار دارند در نتیجه این سری عکس پذیر است. برای محاسبه ضرایب نمایش سببی $\{X_t\}$ با استفاده از تساوی $\psi(B)\phi(B) = \theta(B)$ داریم،

$$(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1 + 0.7B) = 1 + 1.5B + 0.7B^2,$$

در نتیجه

$$\begin{array}{cccccc} \psi_0 & +\psi_1 B & +\psi_2 B^2 & +\psi_3 B^3 & +\dots & \\ +0.7\psi_0 B & +0.7\psi_1 B^2 & +0.7\psi_2 B^3 & +\dots & = & 1 + 1.5B + 0.7B^2, \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 = 0.8 \\ \psi_2 = 0.14 \\ \psi_j + 0.7\psi_{j-1} = 0, \quad j \geq 3 \Rightarrow \psi_j = (-0.7)^{j-2}\psi_2, \quad j \geq 3 \end{cases}$$

برای محاسبه ضرایب نمایش معکوس $\{X_t\}$ با استفاده از تساوی $\pi(B)\theta(B) = \phi(B)$ داریم،

$$(\pi_0 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots)(1 + 1.5B + 0.7B^2) = 1 + 0.7B,$$

در نتیجه

$$\begin{array}{cccccc} \pi_0 & +\pi_1 B & +\pi_2 B^2 & +\pi_3 B^3 & +\dots & \\ & +1.5\pi_0 B & +1.5\pi_1 B^2 & +1.5\pi_2 B^3 & +\dots & \\ & & +0.7\pi_0 B^2 & +0.7\pi_1 B^3 & +\dots & = 1 + 0.7B, \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 1 \\ \pi_1 = -0.8 \\ \pi_j + 1.5\pi_{j-1} + 0.7\pi_{j-2} = 0, \quad j \geq 2 \end{cases}$$

این ضرایب به ازای $j = 0, 1, \dots, 9$ محاسبه و در جدول (۱.۴) آمده‌اند.

برای تشخیص سببیت و عکس‌پذیری یک سری ARMA و محاسبه ضرایب مربوطه تابع $CAUS.INV(\phi, \theta, l)$ در پیوست ۳ تهیه شده است. در این تابع $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ و $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ بردارهای شامل پارامترهای اتورگرسیو و میانگین متحرک هستند. به عنوان مثال برای محاسبه ضرایب در جدول (۱.۴) می‌توان از دستور $CAUS.INV(-0.7, c(1.5, 0.7), 9)$ استفاده کرد.

در تعریفی که در مثال (۸.۳) از سری اتورگرسیو مرتبه اول ارائه شد فرض کردیم برای هر $t < s$ ، $Cov(X_t, Z_s) = 0$ است. نکته قابل توجه این است که، در واقع این عدم وابستگی پیامدی از سببیت بودن این سری است و در حالت کلی می‌توان ثابت کرد (تمرین ۱۰.۴) که اگر سری ARMA ی $\{X_t\}$ سببی باشد برای هر $t < s$ ، $Cov(X_t, Z_s) = 0$.

۴.۴ ACF و PACF سریهای اتورگرسیو

در بررسی حالت خاص $p = 2$ با بعضی نکات آشنا خواهیم شد که به ما در درک بهتر نتایج حاصل برای حالت کلی $AR(p)$ کمک می‌کنند. در این حالت مدل به صورت $\phi_2(B)X_t = Z_t$ که $\phi_2(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ یا $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$ نوشته می‌شود. سببیت این سری به ریشه‌های معادله $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ بستگی دارد. می‌توان نشان داد این ریشه‌ها خارج دایره واحد قرار دارند هرگاه پارامترهای مدل یعنی ϕ_1, ϕ_2 در نامساویهای زیر صدق کنند،

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ψ_j	1	0.80	0.14	-0.098	0.069	-0.048	0.034	-0.024	0.017	-0.012
π_j	1	-0.80	0.50	-0.190	-0.065	0.231	-0.300	0.289	-0.223	0.133

جدول ۱.۴: ضرایب نمایش سببی و نمایش معکوس سری $(1 + 0.7B)X_t = (1 + 1.5B + 0.7B^2)Z_t$ به ازای $j = 0, 1, \dots, 9$.

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases} .$$

به سادگی می‌توان نشان داد که ضرایب نمایش سببی یعنی ψ_j ها از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \phi_1, \quad \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2}, \quad j \geq 2.$$

برای محاسبه $\gamma(h)$ های یک سری $AR(2)$ ی سببی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \text{Var}(X_t) = \text{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t) \\ &= \phi_1^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \phi_2^2 \text{Var}(X_{t-2}) + 2\phi_1\phi_2 \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) + \text{Var}(Z_t) \\ &= (\phi_1^2 + \phi_2^2)\gamma(0) + 2\phi_1\phi_2\gamma(1) + \sigma^2, \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

در تساویهای فوق از عدم وابستگی Z_t به X_{t-1} و X_{t-2} استفاده کرده‌ایم. برای $h = 1$

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= E(X_{t-1}X_t) = E[X_{t-1}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t)] \\ &= \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1), \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

با حل دستگاه معادلات شامل (۷.۴) و (۸.۴)،

$$\gamma(0) = \frac{(1 - \phi_2)\sigma^2}{(1 - \phi_2)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) - 2\phi_2\phi_1^2} = \left(\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2}\right) \frac{\sigma^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}, \quad (۹.۴)$$

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0)}{1 - \phi_2} = \left(\frac{\phi_1}{1 + \phi_2}\right) \frac{\sigma^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}. \quad (۱۰.۴)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \gamma(h) = E(X_{t-h}X_t) &= E[X_{t-h}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t)] \\ &= \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2), \quad h \geq 1 \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

با وجود $\gamma(0)$ و $\gamma(1)$ سایر $\gamma(h)$ از این رابطه بازگشتی محاسبه می‌شوند. بدیهی است که با داشتن $\gamma(h)$ ها و تساوی $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ ، $\rho(h)$ ها نیز حساب می‌شوند. می‌توان $\rho(h)$ ها را مستقیماً حساب کرد برای اینکار طرفین (۱۱.۴) را بر $\gamma(0)$ تقسیم می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2), \quad h \geq 1 \quad (12.4)$$

به ازای $h=1$ و $h=2$ ،

$$\begin{cases} \rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1) \\ \rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2 \end{cases}$$

از حل این دستگاه

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \quad \rho(2) = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2},$$

به دست می‌آیند. سایر $\rho(h)$ ها را نیز به طور بازگشتی از تساوی (۱۲.۴) محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه ϕ_{hh} ها با استفاده از تساوی (۳۸.۳) داریم

$$\phi_{11} = \rho(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = \phi_2$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \phi_1 + \phi_2 \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \phi_1 \rho(1) + \phi_2 \\ \rho(2) & \rho(1) & \phi_1 \rho(2) + \phi_2 \rho(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

برای $h > 3$ نیز، ستون آخر دترمینان در صورت کسر (۳۸.۳) ترکیب خطی سایر ستون ها خواهد بود و در نتیجه برای $h \geq 3$ ، $\phi_{hh} = 0$. مثال (۴.۴): برای سری

$$X_t = 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1)$$

با استفاده از (۹.۴) و (۱۰.۴)،

$$\gamma(0) = 1.212, \quad \gamma(1) = 0.454$$

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(h)$	1.212	0.455	0.379	0.205	0.137	0.082	0.052	0.032	0.020	0.012
$\rho(h)$	1	0.375	0.312	0.169	0.113	0.068	0.043	0.026	0.017	0.010
ϕ_{hh}	—	0.375	0.20	0	0	0	0	0	0	0

جدول ۲.۴: اتوکواریانس‌ها، خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی سری اتورگرسیو مرتبه دوم با پارامترهای $(\phi_1, \phi_2)' = (0.3, 0.2)'$ و $\sigma^2 = 1$.

سایر $\gamma(h)$ ‌ها نیز از (۱۱.۴) به ازای $\phi_1 = 0.3$ و $\phi_2 = 0.2$ محاسبه می‌شوند. این اتوکواریانس‌ها تا تأخیر $h = 9$ محاسبه و در جدول (۲.۴) آمده‌اند. با تقسیم این $\gamma(h)$ ‌ها به $\gamma(0) = 1.212$ ، $\rho(h)$ را نیز محاسبه کرده در این جدول آورده‌ایم. خودهمبستگی‌های جزئی در این جدول نیز با استفاده از روابط فوق محاسبه شده‌اند.

نمودار خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی سری مثال قبل به همراه این نمودارها برای سه مدل اتورگرسیو مرتبه دوم دیگر تا تأخیر $h = 20$ در شکل (۱.۴) رسم شده‌اند. همگرایی مقادیر $\rho(h)$ به صفر به صورت نمایی یا موجی سینوسی که در شکل (۱.۴) دیده می‌شود رفتاری عمومی است که ACF سریهای $AR(2)$ سببی از خود نشان می‌دهند. این رفتار از اینجا ناشی می‌شود که معادله (۱۲.۴) در واقع یک معادله تفاضلی است. به عبارت دیگر تابع خودهمبستگی سری $AR(2)$ جواب معادله تفاضلی همگن $\phi_2(B)\rho(h) = 0$ است. همانطور که در پیوست ۱ آمده است جواب این معادله تفاضلی به ریشه‌های معادله کمکی $\phi_2(B) = 0$ بستگی دارد. در حالت کلی اگر ریشه‌ها حقیقی باشند، جواب معادله یعنی $\rho(h)$ ترکیب خطی دو تابع نمایی میرا است و در صورتی که ریشه‌ها مختلط باشند نمودار $\rho(h)$ یک موج سینوسی میرا را نشان خواهد داد. به عنوان مثال برای سری $X_t = 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + Z_t$ در مثال قبل این ریشه‌ها عبارتند از $B_1 = -3.11$ و $B_2 = 1.61$ در نتیجه

$$\rho(h) = a_1(-0.322)^h + a_2(0.622)^h, \quad h \geq 1$$

که نشان می‌دهد $\rho(h)$ ترکیب خطی دو تابع نمایی میرا است. با پیدا کردن ضرایب a_1 و a_2 می‌توان ضابطه صریحی برای $\rho(h)$ پیدا کرد، اینکار را با اعمال شرایط اولیه $\rho(0) = 1$ و $\rho(1) = 0.375$ انجام می‌دهیم، در اینصورت

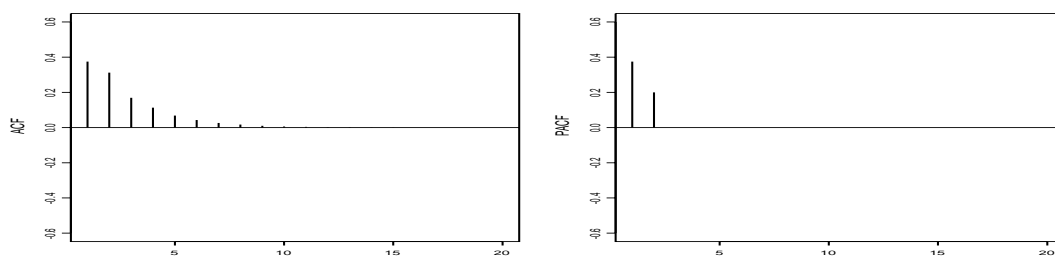
$$\begin{cases} \rho(0) = a_1 + a_2 = 1 \\ \rho(1) = -0.322a_1 + 0.622a_2 = 0.375 \end{cases}$$

در نتیجه $a_2 = 0.813$ و $a_1 = 0.187$ و

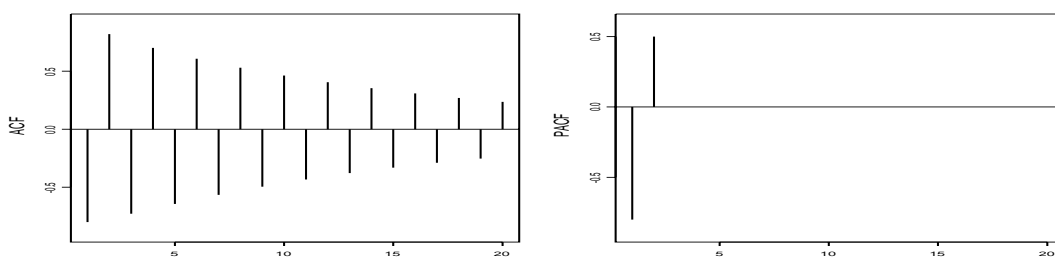
$$\rho(h) = 0.187(-0.322)^h + 0.813(0.622)^h, \quad h \geq 0.$$

در حالت کلی می‌توان ضابطه صریحی برای $\rho(h)$ بر حسب h با حل معادله تفاضلی $\phi_2(B)\rho(h) = 0$ به دست آورد. برای این منظور عکس ریشه‌های معادله کمکی $\phi_2(B) = 0$ را با G_1 و G_2 نشان می‌دهیم.

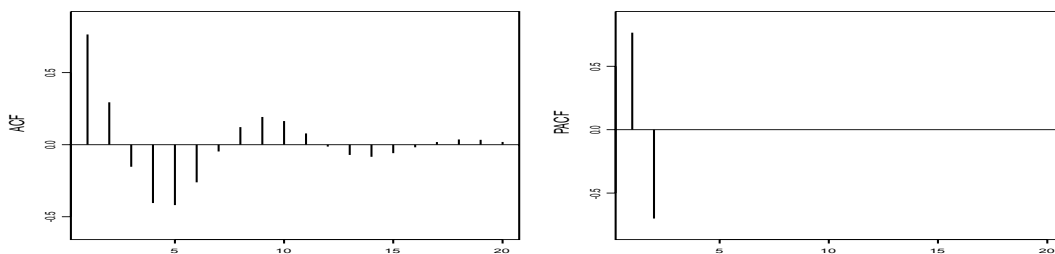
شکل ۱.۴: نمودارهای ACF و PACF چهار مدل اتورگرسیو مرتبه دوم با پارامترهای
 (i) $(\phi_1, \phi_2)' = (0.3, 0.2)'$ ، (ii) $(\phi_1, \phi_2)' = (-0.4, 0.5)'$ ، (iii) $(\phi_1, \phi_2)' = (1.3, -0.7)'$ و (iv) $(\phi_1, \phi_2)' = (-1.5, -0.7)'$.



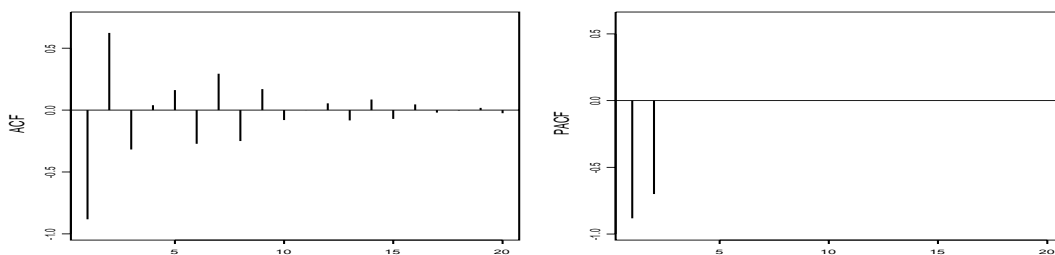
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

در صورتی که G_1 و G_2 حقیقی باشند و $G_1 \neq G_2$ جواب عمومی عبارت است از

$$\rho(h) = a_1(G_1)^h + a_2(G_2)^h, \quad h \geq 1$$

با محاسبه a_1 و a_2 از حل دستگاه

$$\begin{cases} \rho(0) = 1 = a_1 + a_2 \\ \rho(1) = a_1 G_1 + a_2 G_2 \end{cases}$$

و با توجه به اینکه $\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2}$ (تساوی دوم از اینکه $G_1 + G_2 = \phi_1$ و $G_1 \times G_2 = -\phi_2$) نتیجه می‌شود).

$$\rho(h) = \frac{(1-G_2^2)G_1^{h+1} - (1-G_1^2)G_2^{h+1}}{(G_1-G_2)(1+G_1G_2)}, \quad h \geq 0.$$

اگر $G_1 = G_2$ به عبارت دیگر معادله $\phi_2(B) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد آنگاه

$$\rho(h) = a_1\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^h + a_2 h \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^h = \left(1 + \frac{1+\phi_2}{1-\phi_2} h\right) \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^h, \quad h \geq 0.$$

و در صورتی که ریشه‌های $\phi_2(B) = 0$ مختلط باشد و $G_2 = re^{-i\theta}$ و $G_1 = re^{i\theta}$ آنگاه

$$\rho(h) = a_1 r^h \cos(h\theta) + a_2 r^h \sin(h\theta),$$

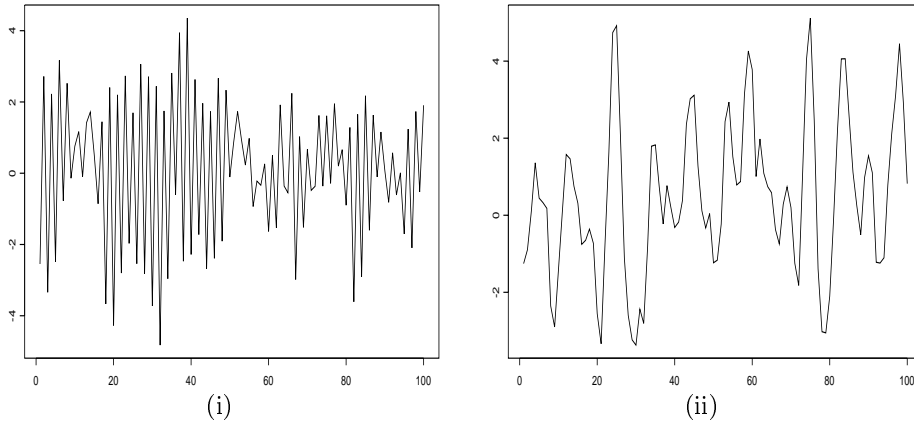
که $a_1 = 1$ و $a_2 = \frac{\rho(1)-r \cos \theta}{r \sin \theta}$. با توجه به اینکه $\rho(1) = \frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2} = \frac{2r \cos \theta}{1+r^2}$ اگر تعریف کنیم $\cot \omega = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right) \cot \theta$ زیرا به دست می‌آوریم.

$$\rho(h) = r^h \frac{\sin(h\theta + \omega)}{\sin \omega}, \quad h \geq 0.$$

در انتهای بحث برای آشنایی با مصادیق سریهای $AR(2)$ مصادیق شبیه سازی شده‌ای از این سری به ازای $\phi_1 = -0.4, \phi_2 = 0.5, \sigma^2 = 1$ و $\phi_1 = 1.3, \phi_2 = -0.7, \sigma^2 = 1$ در شکل (۲.۴-i) و (۲.۴-ii) رسم شده‌اند. این شبیه‌سازیها با استفاده از تابع $arma.sim(model = list(ar = c(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)), n)$ از توابع S-PLUS انجام شده است. برای مدل اول $\rho(1)$ منفی است که منجر به نوسانات سریع در سری شکل (۲.۴-i) شده است. از طرفی سایر خود همبستگی‌ها به تناوب تغییر علامت می‌دهند که اینهم به نوبه خود بر شدت این نوسانات افزوده است. برای مدل دوم که اولین خودهمبستگی مثبت است همراهی مشاهدات و تشکیل گشتهایی حول صفر را در شکل (۲.۴-ii) مشاهده می‌کنیم. علاوه بر این وابستگی‌های زیاد در تأخیر 4 و 5 منجر به گشتهایی تقریباً متناوب در این شکل شده است.

حال فرض کنید $\{X_t\}$ یک سری اتورگرسیو مرتبه p سببی است. برای محاسبه خود همبستگی‌های این سری ابتدا توجه می‌کنیم که برای $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_{t-h}X_t) = E[X_{t-h}(\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t)] \\ &= \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) + E(X_{t-h}Z_t) \end{aligned} \quad (13.4)$$



شکل ۲.۴: مصادیقی از سری اتورگرسیو مرتبه دوم به ازای (i) $\phi_1 = -0.4, \phi_2 = 0.5, \sigma^2 = 1$ و (ii) $\phi_1 = 1.3, \phi_2 = -0.7, \sigma^2 = 1$.

$\{X_t\}$ سببی است پس برای $h \geq 1$ ، $E(X_{t-h}Z_t) = 0$ و در نتیجه

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \dots + \phi_p\gamma(h-p), \quad h \geq 1$$

با تقسیم طرفین بر $\gamma(0)$ ،

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \dots + \phi_p\rho(h-p), \quad h \geq 1 \quad (14.4)$$

به ازای $h = 1, 2, \dots, p$ معادلات زیر حاصل خواهند شد،

$$\begin{cases} \rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \dots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho(p) = \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \dots + \phi_p \end{cases}$$

از حل این معادلات که به معادلات یول - واکر^۱ معروفند $\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(p)$ را به دست می آوریم. سایر $\rho(h)$ ها نیز به طور بازگشتی از معادله (۱۴.۴) محاسبه می شوند. برای محاسبه $\gamma(0)$ و با توجه به اینکه

$$E(X_t Z_t) = E[(\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t)Z_t] = E(Z_t^2) = \sigma^2,$$

^۱ Yule-Walker Equations

از معادله (۱۳.۴) به ازای $h = 0$ داریم $\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2$. با تقسیم طرفین این تساوی بر $\gamma(0)$ و حل معادله حاصل بر حسب $\gamma(0)$ ،

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \dots - \phi_p\rho(p)}. \quad (15.4)$$

برای بحث در رفتار ACF یک سری $AR(p)$ توجه می‌کنیم که این تابع جواب معادله تفاضلی همگن (۱۴.۴) یا به طور معادل جواب $\phi_p(B)\rho(h) = 0$ است. بنابراین در حالت کلی ACF یک سری $AR(p)$ ترکیبی خطی از توابع نمایی میرا، متناظر با ریشه‌های حقیقی $\phi_p(B) = 0$ و امواج سینوسی میرا متناظر با ریشه‌های مختلط معادله $\phi_p(B) = 0$ است.

برای سریهای اتورگرسیو مرتبه اول و مرتبه دوم دیدیم که خودهمبستگی‌های جزئی به ترتیب از تأخیر یک و از تأخیر دو به بعد همگی صفراند. در حالت کلی برای یک سری اتورگرسیو مرتبه p می‌توان نشان داد که ϕ_{hh} ها از تأخیر p به بعد همگی صفرند. برای اینکار با اعمال عملگر بهترین پیش بین خطی بر طرفین تساوی $X_{h+1} = \phi_1 X_h + \phi_2 X_{h-1} + \dots + \phi_p X_{h-p+1} + Z_{h+1}$ بهترین پیش بین خطی برای X_{h+1} به صورت زیر حاصل می‌شود.

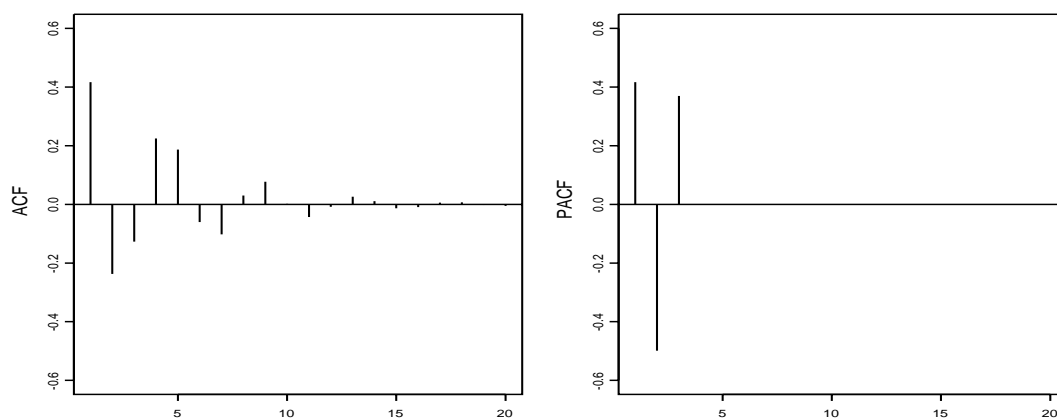
$$P_h X_{h+1} = \phi_1 X_h + \phi_2 X_{h-1} + \dots + \phi_p X_{h+1-p},$$

با توجه به اینکه خود همبستگی جزئی h ام ضریب X_1 در تساوی فوق است بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که برای $h > p$ ، $\phi_{hh} = 0$. سایر خود همبستگی‌های جزئی یعنی $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{pp}$ نیز از روشهای معمول محاسبه می‌شوند.

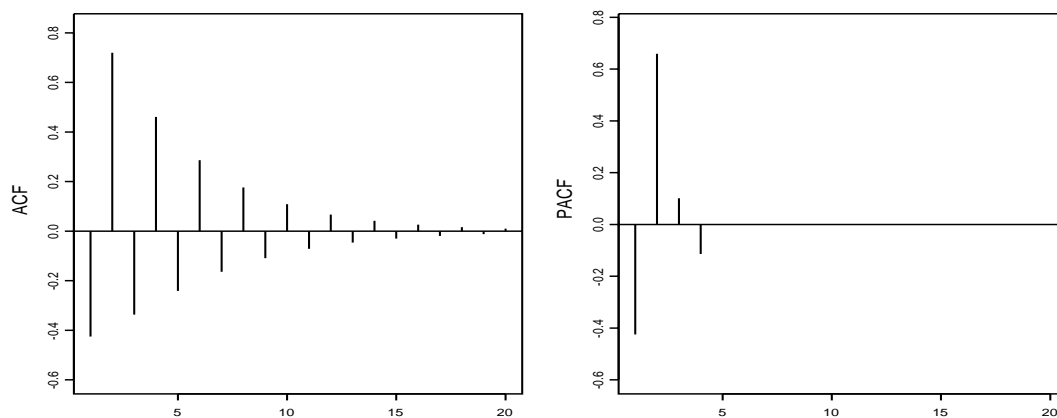
تابع $ACF.PACF(\phi, \theta, \sigma^2, l, PLOT)$ در پیوست ۳ برای محاسبه مقادیر توابع ACVF، ACF و PACF و رسم نمودار آنها برای یک سری ARMA ی سببی و عکس پذیر تهیه شده است. به عنوان مثال نمودارهای شکل (۳.۴) که ACF و PACF یک سری $AR(3)$ با پارامترهای $\phi_1 = 0.81, \phi_2 = -0.73, \phi_3 = 0.37$ و $\sigma^2 = 1$ را نشان می‌دهند با استفاده از دستور $ACF.PACF(c(.81, -.73, .37), 0, 1, 20, T)$ رسم شده‌اند. برای این سری معادله $\phi_3(B) = 0$ یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط دارد. نمودارهای شکل (۴.۴) نیز که با استفاده از دستور $ACF.PACF(c(-.2, .75, .077, -.114), 0, 1, 20, T)$ رسم شده‌اند این توابع را برای یک سری $AR(4)$ نشان می‌دهند که برای آن ریشه‌های $\phi_4(B) = 0$ حقیقی و مجزا هستند.

۵.۴ ACF و PACF سریهای میانگین متحرک

در حالت خاصی که $q = 2$ است این سری توسط معادله $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} = \theta_2(B)Z_t$ که $\theta_2(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2$ تعریف می‌شود. این سری برای هر مقدار θ_1 و θ_2 سببی است. اما در



شکل ۳.۴: نمودار ACF و PACF یک سری اتورگرسیو مرتبه سه با پارامترهای $\phi_1 = 0.81$ ، $\phi_2 = -0.73$ و $\phi_3 = 0.37$.



شکل ۴.۴: نمودار ACF و PACF یک سری اتورگرسیو مرتبه چهار با پارامترهای $\phi_1 = -0.2$ ، $\phi_2 = 0.75$ ، $\phi_3 = 0.077$ و $\phi_4 = -0.114$.

صورتی عکس پذیر است که ریشه‌های $\theta_2(B) = 0$ خارج دایره واحد باشند به طور معادل

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_1 > -1 \\ \theta_2 - \theta_1 > -1 \\ -1 < \theta_2 < 1 \end{cases} .$$

برای محاسبه اتوکواریانس‌های سری $MA(2)$ در اینجا از تابع مولد اتوکواریانس‌ها استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma^2(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)(1 + \theta_1 B^{-1} + \theta_2 B^{-2}) \\ &= \sigma^2(\theta_2 B^{-2} + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) B^{-1} + (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) B^0 + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) B^1 + \theta_2 B^2), \end{aligned}$$

از مقایسه این تساوی با (۳.۴) نتیجه می‌شود

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & h = 0 \\ \sigma^2(\theta_1 + \theta_1 \theta_2) & h = 1 \\ \sigma^2 \theta_2 & h = 2 \\ 0 & h \geq 3 \end{cases} .$$

و با تقسیم بر $\gamma(0)$

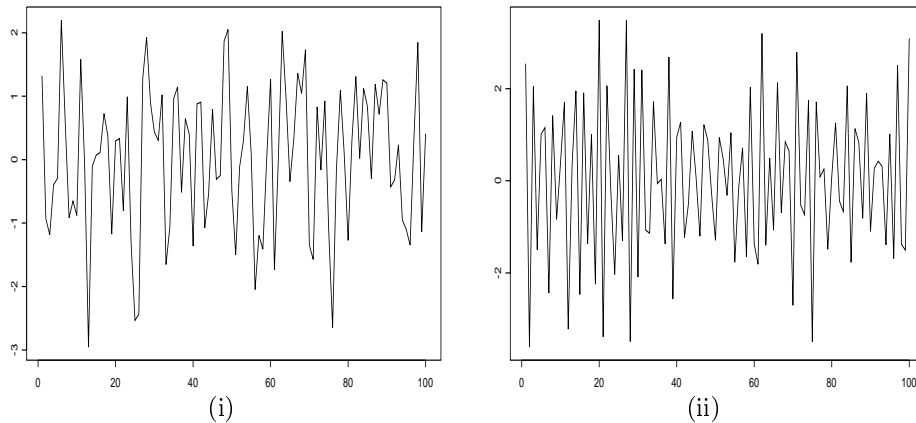
$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & h = 1 \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & h = 2 \\ 0 & h \geq 3 \end{cases} .$$

شکل (۵.۴) مصادیق شبیه سازی شده‌ای از این سری به ازای $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = -0.5, \sigma^2 = 1$ و $\theta_1 = -1.3, \theta_2 = 0.7, \sigma^2 = 1$ را نشان می‌دهد. برای این شبیه سازی‌ها از تابع $arima.sim(model = list(ma = -c(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)), n)$ استفاده کرده‌ایم. در این تابع برای معرفی مدل از ضریب منفی استفاده کرده‌ایم زیرا پارامترهای میانگین متحرک در این کتاب قرینه این پارامترها در S-PLUS هستند. بنابراین در استفاده از توابع داخلی S-PLUS به این نکته توجه داشته باشید.

خود همبستگی‌های جزئی سری $MA(2)$ را می‌توان به هر یک از روشهای معمول محاسبه کرد. فرمولی که بتوان توسط آن مقادیر ϕ_{hh} را به طور صریح بر حسب h و پارامترهای مدل بیان کرد پیچیده خواهد بود. اما همانطور که در شکل (۶.۴) دیده می‌شود رفتار این تابع بسیار شبیه رفتار تابع خود همبستگی سری $AR(2)$ است و بسته به ریشه‌های معادله $\theta_2(B) = 0$ تحت تسلط توابع نمایی یا امواج سینوسی به صفر همگرا می‌شود.

در حالت کلی که $\{X_t\} \sim MA(q)$ است، برای محاسبه $\gamma(h)$ ها علاوه بر روشهایی که در حالات خاص $MA(1)$ و $MA(2)$ بکار بردیم از اینکه $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$ یک فرآیند خطی کلی است و تساوی (۴.۴) نیز می‌توان استفاده کرد، در اینصورت

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} & 0 \leq h \leq q \\ 0 & h > q \end{cases}, \quad (16.4)$$



شکل ۵.۴: مصادیقی از سری میانگین متحرک مرتبه دو به ازای (i): $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = -0.5, \sigma^2 = 1$ و (ii): $\theta_1 = -1.3, \theta_2 = 0.7, \sigma^2 = 1$.

که در آن $\theta_0 = 1$. بخصوص برای $h = 0$,

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2, \quad (17.4)$$

و در نتیجه

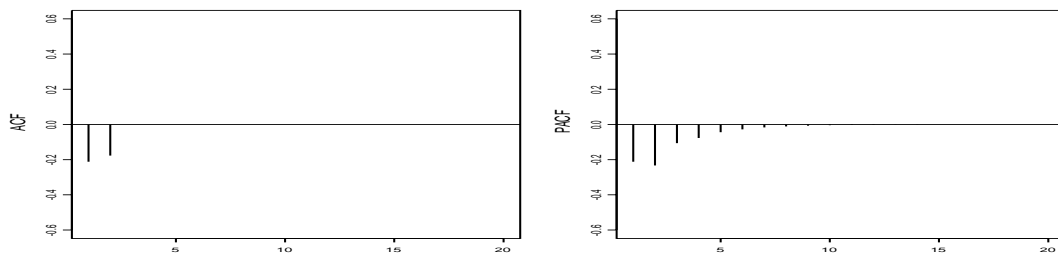
$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2} & 0 \leq h \leq q \\ 0 & h > q \end{cases}. \quad (18.4)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود این خودهمبستگی‌ها از تأخیر q به بعد همگی صفراند. تابع خودهمبستگی جرتی سری $MA(q)$ نیز بسته به ریشه‌های $\theta_q(B) = 0$ ، تحت تسلط ترکیبی از توابع نمایی یا امواج سینوسی به صفر میل می‌کند. شکل‌های (۷.۴) و (۸.۴) نمودار این توابع را برای یک سری میانگین متحرک مرتبه سه و یک سری میانگین متحرک مرتبه چهار نشان می‌دهد. این نمودارها به ترتیب با استفاده از دستورات $ACF.PACF(0, c(-.81, .73, -.37), 1, 20, T)$ و $ACF.PACF(0, c(.2, -.75, -.077, .114), 1, 20, T)$ رسم شده‌اند.

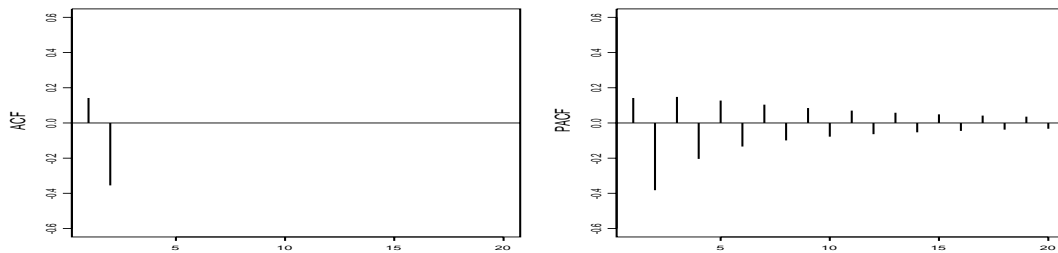
۶.۴ ACF و PACF سریهای ARMA

با حالت خاصی که $\{X_t\}$ یک سری ARMA ی سببی و عکس پذیر از مرتبه $(1, 1)$ است در مثال (۲.۴) آشنا شدیم. شکل (۹.۴) مصادیقی از این سری را به ازای $\phi = 0.5, \theta = -0.4, \sigma^2 = 1$ و $\phi = -0.5, \theta = -0.4, \sigma^2 = 1$ (برای این شبیه سازی‌ها

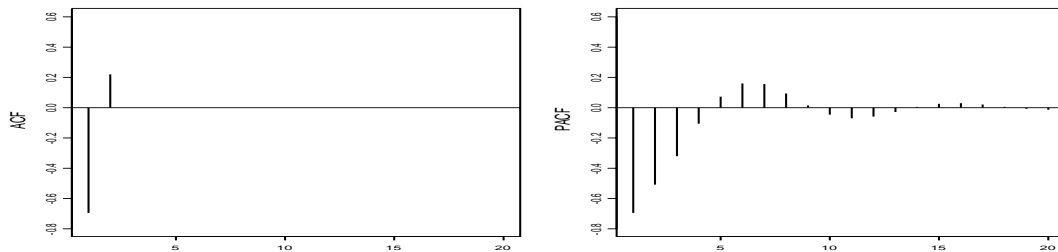
شکل ۶.۴: نمودارهای ACF و PACF چهار مدل میانگین متحرک مرتبه دو با پارامترهای (i):
 (ii) $(\theta_1, \theta_2)' = (-0.3, -0.2)'$, (iii) $(\theta_1, \theta_2)' = (0.4, -0.5)'$, (iv) $(\theta_1, \theta_2)' = (1.5, 0.7)'$
 و (v) $(\theta_1, \theta_2)' = (-1.3, 0.7)'$



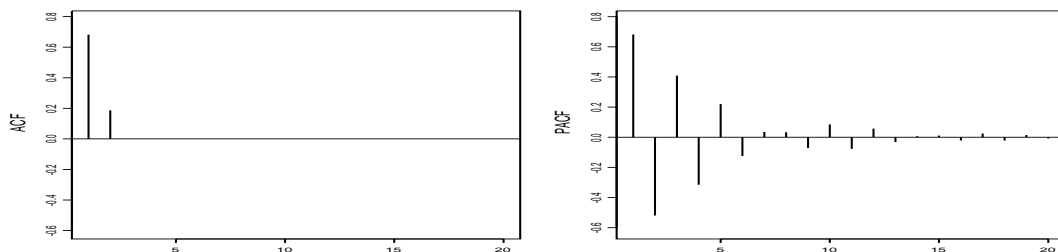
(i)



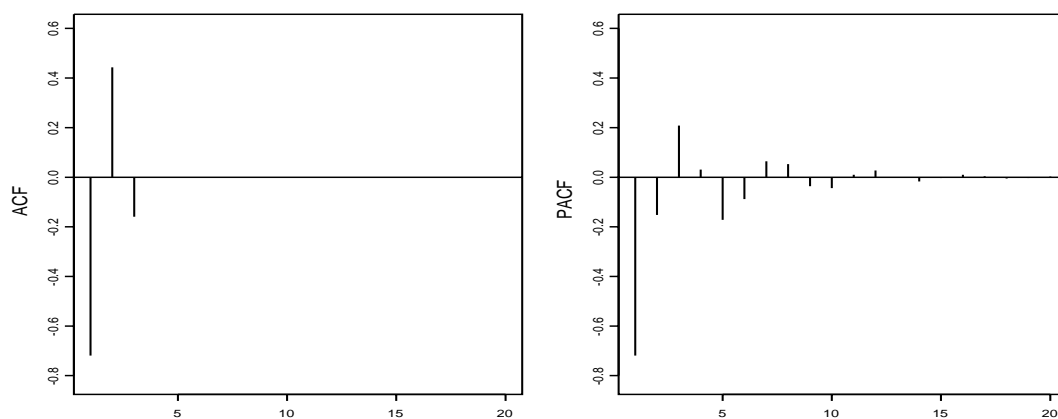
(ii)



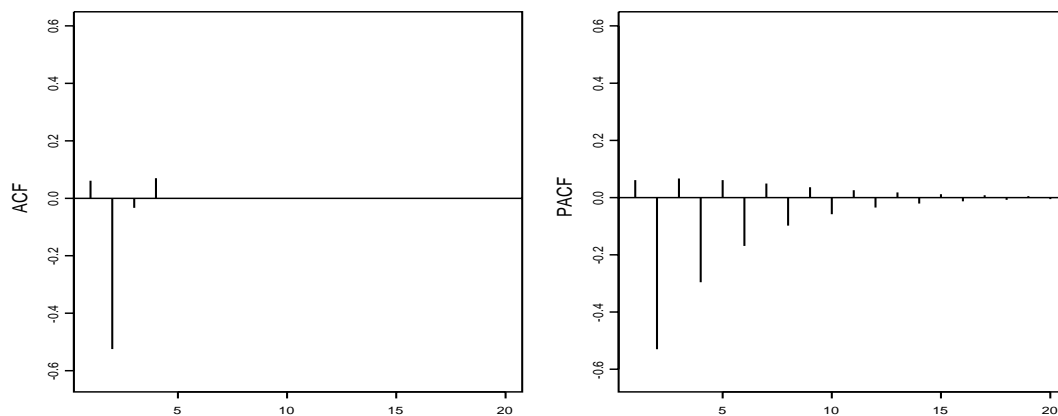
(iii)



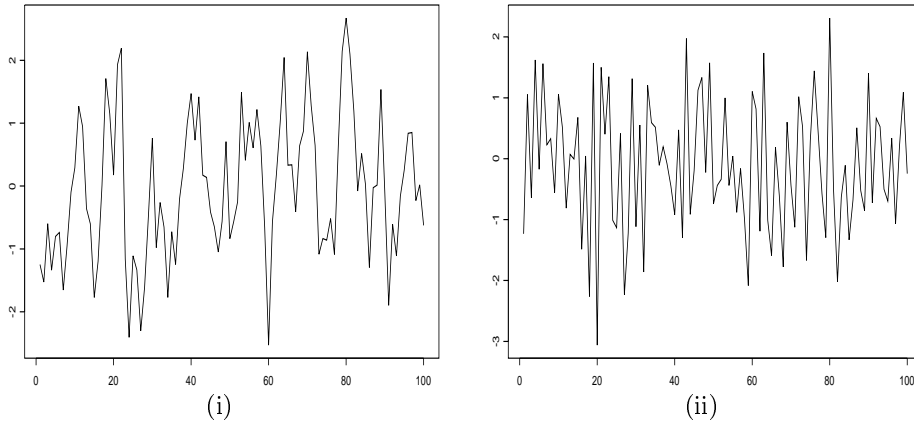
(iv)



شکل ۷.۴: نمودار ACF و PACF یک سری میانگین متحرک مرتبه سه با پارامترهای $\theta_1 = 0.81$ ، $\theta_2 = -0.73$ و $\theta_3 = 0.37$.



شکل ۸.۴: نمودار ACF و PACF یک سری میانگین متحرک مرتبه چهار با پارامترهای $\theta_1 = -0.2$ ، $\theta_2 = 0.75$ ، $\theta_3 = 0.077$ و $\theta_4 = -0.114$.



شکل ۹.۴: مصادیقی از سری $ARMA(1,1)$ به ازای (i) $\phi = 0.5$ و $\theta = -0.4$ ، $\sigma^2 = 1$ و (ii) $\phi = -0.5$ و $\theta = -0.4$ ، $\sigma^2 = 1$.

از تابع $arima.sim(model = list(ar = c(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p), ma = -c(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)), n)$ استفاده کرده ایم.

برای محاسبه اتوکواریانس‌های این سری طرفین $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$ را در X_{t-h} ضرب کرده و امید ریاضی می‌گیریم،

$$\gamma(h) = \phi E(X_{t-h} X_{t-1}) + E(X_{t-h} Z_t) + \theta E(X_{t-h} Z_{t-1}),$$

و با توجه به اینکه

$$E(X_{t-h} Z_t) = \begin{cases} 0 & h \geq 1 \\ E[(\phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}) Z_t] = \sigma^2 & h = 0 \end{cases},$$

و

$$E(X_{t-h} Z_{t-1}) = \begin{cases} 0 & h \geq 2 \\ \sigma^2 & h = 1 \\ \sigma^2(\phi + \theta) & h = 0 \end{cases},$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \phi \gamma(1) + \sigma^2 + \sigma^2 \theta (\phi + \theta) = \phi \gamma(1) + \sigma^2 (1 + \theta(\phi + \theta)) \\ \gamma(1) &= \phi \gamma(0) + \theta \sigma^2 \\ \gamma(h) &= \phi \gamma(h-1) \quad h \geq 2. \end{aligned} \quad (19.4)$$

از دو معادله اول

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \sigma^2 \left(\theta + \phi \frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2} \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 - \phi^2} \right)\end{aligned}$$

و

$$\gamma(0) = \sigma^2 \left(\frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2} \right)$$

محاسبه می‌شوند، سایر $\gamma(h)$ ها نیز از تساوی (۱۹.۴) به طور بازگشتی محاسبه می‌شوند. برای بررسی رفتار ACF سری $ARMA(1,1)$ ، از تقسیم طرفین (۱۹.۴) بر $\gamma(0)$ برای $h \geq 2$ نتیجه می‌شود

$$\rho(h) = \phi \rho(h-1) = \phi^{h-1} \rho(1),$$

که

$$\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}.$$

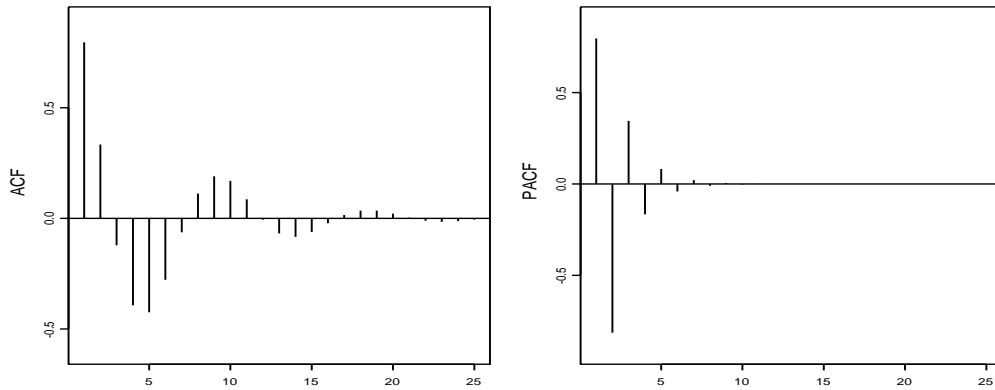
بنابراین تابع خود همبستگی سری $ARMA(1,1)$ با شروع از مقدار اولیه $\rho(1)$ در تأخیر $h = 1$ به طور نمائی و با ضریب ϕ شروع به کاهش می‌کند. چنین رفتاری را از تابع خود همبستگی سری $AR(1)$ دیده بودیم با این تفاوت که در آنجا این نزول از مقدار اولیه 1 در تأخیر صفر شروع شده بود. مشابه با سری اتورگرسیو مرتبه اول در صورتی که ϕ مثبت باشد این نزول هموار و در صورتی که ϕ منفی باشد همراه با نوسان است. اما اینکه این کاهش از مقادیر مثبت یا منفی آغاز شود بستگی به علامت $\rho(1)$ به طور معادل علامت $\phi + \theta$ دارد. اگر $\phi > -\theta$ کاهش نمایی با مقدار مثبت و اگر $\phi < -\theta$ با مقدار منفی آغاز خواهد شد. خود همبستگی‌های جزئی این سری نیز تحت سلطه یک تابع نمایی به صفر میل می‌کنند. برای بحث در چگونگی این همگرایی باکس و جنکینز (۱۹۷۶) را ببینید.

در حالت کلی وقتی $\{X_t\}$ یک سری $ARMA(p, q)$ سببی و عکس پذیر است برای محاسبه اتوکواریانس‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \phi_1 E(X_{t-h} X_{t-1}) + \dots + \phi_p E(X_{t-h} X_{t-p}) + \\ &E(X_{t-h} Z_t) + \theta_1 E(X_{t-h} Z_{t-1}) + \dots + \theta_q E(X_{t-h} Z_{t-q}),\end{aligned}\quad (20.4)$$

با توجه به اینکه برای $0 \leq h \leq q$ و $0 \leq i \leq q$

$$E(X_{t-h} Z_{t-i}) = \begin{cases} E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j-h} \times Z_{t-i}) = \psi_{i-h} \sigma^2 & i = h, h+1, \dots, q \\ 0 & i < h \end{cases},$$



شکل ۴.۱۰: نمودار ACF و PACF سری $ARMA(2,1)$ با پارامترهای $\phi_1 = 1.3$ ، $\phi_2 = -0.7$ و $\theta = 0.5$.

به ازای $h = 0, 1, \dots, q$ می‌توان نوشت

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) + \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h}, \quad (21.4)$$

که $\theta_0 = 1$ و برای $h \geq q+1$ ،

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) \quad (22.4)$$

از $m = \max(p+1, q+1)$ معادله اول (۲۱.۴) و (۲۲.۴)، $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(m-1)$ را محاسبه کرده سایر $\gamma(h)$ ها را به طور بازگشتی از تساوی (۲۲.۴) به دست می‌آوریم. برای بحث در رفتار $\rho(h)$ ها توجه می‌کنیم که تابع خودهمبستگی جواب معادله تفاضلی $\phi_p(B)\rho(h) = 0$ ، $h \geq q+1$ است. در نتیجه $\rho(h)$ ها به صورت ترکیبی خطی از عبارات نمایی میرا و امواج سینوسی میرا به صفر همگرا می‌شوند. رفتاری مشابه از تابع خودهمبستگی جرئی این سریها دیده می‌شود.

مثال (۵.۴): فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(2,1)$ سببی و عکس پذیر است. از (۲۱.۴) به ازای $h = 1$ و $h = 0$

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma^2(1 + \theta(\theta + \phi_1))$$

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) + \sigma^2 \theta$$

و از (۲۲.۴) به ازای $h = 2$,

$$\gamma(2) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0)$$

از حل این معادلات

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \frac{\sigma^2[(1+\theta^2)(1-\phi_2)+2\theta\phi_1]}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} \\ \gamma(1) &= \frac{\sigma^2[(\phi_1+\theta)(1+\phi_1\theta)-\theta\phi_2^2]}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} \\ \gamma(2) &= \frac{\sigma^2\{\phi_1[(1+\theta^2)(1-\phi_2)+2\theta\phi_1]+\phi_2[(\phi_1+\theta)(1+\phi_1\theta)-\theta\phi_2^2]\}}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}\end{aligned}$$

در صورتی که $\sigma^2 = 1$ و $\theta = 0.5$, $\phi_2 = -0.7$, $\phi_1 = 1.3$

$$\gamma(0) = 9.51, \quad \gamma(1) = 7.57, \quad \gamma(2) = 3.18$$

سایر $\gamma(h)$ ها نیز از رابطه بازگشتی (۲۲.۴) به دست می آیند. خودهمبستگی ها و خودهمبستگی های جزئی نیز به طور معمول محاسبه می شوند. نمودار این توابع در شکل (۱۰.۴) رسم شده اند.

۷.۴ پیش بینی سریهای ARMA

در بخش (۳.۳) با چگونگی پیش بینی آینده سری ایستای $\{X_t\}$ به کمک مشاهدات تا زمان n یعنی X_1, X_2, \dots, X_n آشنا شدیم. بدیهی است که اگر $\{X_t\}$ یک سری ARMA ی سببی با پارامترهای معلوم باشد، هر دو الگوریتم دوربین - لوینسون و تحولها را برای محاسبه پیش بینی گام بعد یعنی $P_n X_{n+1}$ می توان به کار برد. اما همانطور که در بخش (۳.۳) دیدیم عدم وابستگی تحولهای آینده به X_1, X_2, \dots, X_n محاسبه $P_n X_{n+l}$ را به ازای $l > 1$ به کمک الگوریتم تحولها و تساوی (۳۴.۳) به سادگی امکان پذیر می ساخت. برای انجام محاسبات در استفاده از این تساوی تابع $FORE.INN(data, \phi, \theta, \sigma^2, l)$ در پیوست ۳ تهیه شده است. اگر مشاهدات X_1, X_2, \dots, X_n از مدل $ARMA(p, q)$ با پارامترهای معلوم در دست باشند به کمک این تابع علاوه بر پیش بینی های مورد نظر و واریانس خطای آنها، مقادیر تحولها به ازای $t = 1, 2, \dots, n$ نیز محاسبه می شوند.

مثال (۶.۴): با استفاده از دستور $FORE.INN(data, .5, -.4, 1, 5)$ برای سری Se4 در پیوست ۲ (سری نمودار i-۹.۴)، پنج پیش بینی نخست در مبدأ $n = 100$ و واریانس خطای آنها را محاسبه و در جدول (۳.۴) آورده ایم.

در ادامه این بخش با شیوه دیگری برای پیش بینی سریهای ARMA آشنا خواهیم شد. دیدیم که عنصر t ام یک سری ARMA ی سببی را می توان به صورت ترکیب خطی از عناصر حال و گذشته سری نوفه سفید متناظرش یعنی $\{Z_s : s \leq t\}$ نوشت. برای پیش بینی X_{n+1} این نکته توجه ما را به پیش بین هایی به صورت ترکیب خطی از $\{Z_s : s \leq n\}$ جلب می کند. به عبارت دقیقتر پیش بین هایی به

l	1	2	3	4	5
$\tilde{P}_n X_{n+l}$	-0.058	-0.028	-0.014	-0.006	-0.004
$Var(e_n(l))$	1	1.010	1.012	1.013	1.013

جدول ۳.۴: پیش‌بینی‌ها و واریانس خطای آنها برای سری مثال (۶.۴).

شکل $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^* Z_{t-j}$ ، با ضرایب به طور مطلق جمع‌پذیر $\{\psi_j^*\}$. ضرایب بهترین پیش‌بین از این نوع، به این معنی که امید ریاضی توان دوم خطای پیش‌بینی را حداقل کنند به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$\begin{aligned} E(X_{n+l} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^* Z_{n-j})^2 &= E[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{n+l-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^* Z_{n-j}]^2 \\ &= E[\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j Z_{n+l-j} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{j+l} - \psi_j^*) Z_{n-j}]^2 \\ &= Var[\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j Z_{n+l-j} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{j+l} - \psi_j^*) Z_{n-j}] \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 + \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{j+l} - \psi_j^*)^2, \end{aligned}$$

که وقتی برای هر $j \geq 0$ ، $\psi_j^* = \psi_{j+l}$ است حداقل می‌گردد. بنابراین بهترین پیش‌بین خطی بر حسب $\{Z_s : s \leq n\}$ برای X_{n+l} که آنرا با $\tilde{P}_n X_{n+l}$ نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+l} Z_{n-j} = \sum_{j=l}^{\infty} \psi_j Z_{n+l-j} \quad (23.4)$$

این پیش‌بین نااریب است زیرا خطای این پیش‌بینی یعنی

$$\tilde{e}_n(l) = X_{n+l} - \tilde{P}_n X_{n+l} = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j Z_{n+l-j}, \quad (24.4)$$

دارای امید ریاضی صفر است. بعلاوه

$$Var(\tilde{e}_n(l)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2. \quad (25.4)$$

تساوی (۲۳.۴) هر چند در کسب نتایج فوق بسیار مفید بود، اما به دلیل مشاهده نشدن Z_t ها برای محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ مطلوب نیست. برای این منظور در صورتی که عکس پذیر باشد معمولاً از تساویهای زیر استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{P}_n X_{n+l-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} X_{n+1-j}. \quad (26.4)$$

این تساویها را در حالتی که عناصر سری نوفه سفید مستقلند ثابت می‌کنیم. در این حالت داریم

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = E[X_{n+l} | Z_s; s \leq n]. \quad (27.4)$$

زیرا

$$\begin{aligned} E[X_{n+l} | Z_s; s \leq n] &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{n+l-j} | Z_s; s \leq n\right] \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \psi_j Z_{n+l-j} + \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j E[Z_{n+l-j} | Z_s; s \leq n] \\ &= \tilde{P}_n X_{n+l} + \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j E[Z_{n+l-j}] = \tilde{P}_n X_{n+l}. \end{aligned}$$

در تساویهای فوق از $E[Z_{n+l-j} | Z_s; s \leq n] = E[Z_{n+l-j}] = 0$ استفاده کرده‌ایم. حال اگر $\{X_t\}$ عکس پذیر باشد،

$$Z_{n+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{n+l-j} = X_{n+l} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+l-j}$$

از طرفین این تساوی امید ریاضی شرطی به شرط $\{Z_s : s \leq n\}$ می‌گیریم

$$E[Z_{n+l} | Z_s; s \leq n] = E[X_{n+l} | Z_s; s \leq n] + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j E[X_{n+l-j} | Z_s; s \leq n],$$

با توجه به استقلال Z_t ها سمت چپ این تساوی صفر است، با استفاده از (27.4) در سمت راست

$$0 = \tilde{P}_n X_{n+l} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{P}_n X_{n+l-j}$$

در نتیجه

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{P}_n X_{n+l-j}.$$

که همان تساوی اول در (27.4) است. در ادامه هر جا که نیاز باشد \tilde{P}_n را عملگری تصور می‌کنیم که خواصی مشابه امید ریاضی شرطی (در واقع مشابه عملگر P_n) دارد. محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ به کمک تساوی فوق به طور بازگشتی و به ترتیب زیر انجام می‌شود. برای $l = 1$ نتیجه می‌شود،

$$\tilde{P}_n X_{n+1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+1-j}. \quad (28.4)$$

برای $l = 2$,

$$\tilde{P}_n X_{n+2} = -\pi_1 \tilde{P}_n X_{n+1} - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{n+2-j}. \quad (29.4)$$

والی آخر.

مثال (۷.۴): فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(1,1)$ سببی و عکس‌پذیر باشد، در مثال (۲.۴) نشان دادیم

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1, & \pi_j &= -(-\theta)^{j-1}(\phi + \theta), & j &\geq 1 \\ \psi_0 &= 1, & \psi_j &= \phi^{j-1}(\phi + \theta), & j &\geq 1 \end{aligned}$$

در نتیجه از (۲۸.۴)،

$$\tilde{P}_n X_{n+1} = (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{j-1} X_{n+1-j}.$$

و از (۲۹.۴)

$$\tilde{P}_n X_{n+2} = (\phi + \theta) \tilde{P}_n X_{n+1} + (\phi + \theta) \sum_{j=2}^{\infty} (-\theta)^{j-1} X_{n+2-j}.$$

واریانس خطای این پیش‌بینی‌ها نیز با استفاده از (۲۵.۴) به ترتیب عبارتند از:

$$Var(\tilde{e}_n(1)) = \sigma^2, \quad Var(\tilde{e}_n(2)) = \sigma^2(1 + (\phi + \theta)^2).$$

سایر پیش‌بینی‌ها نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند. بعلاوه

$$Var(\tilde{e}_n(l)) = \sigma^2 \left[1 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=1}^{l-1} \phi^{2j-2} \right] = \sigma^2 \left[1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} (1 - \phi^{2l-2}) \right],$$

که نشان می‌دهد واریانس خطای این پیش‌بینی‌ها در حالی که با افزایش l افزایش می‌یابد به مقدار حدی $\gamma(0) = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} \right)$ میل می‌کند.

در عمل با توجه به اینکه فقط X_1, X_2, \dots, X_n مشاهده می‌شوند سریهای نامتناهی در محاسبه مقادیر $\tilde{P}_n X_{n+l}$ توسط سریهای متناهی نظیرشان تقریب می‌شوند. به عنوان مثال از $-\sum_{j=1}^n \pi_j X_{n+1-j}$ برای تقریب $\tilde{P}_n X_{n+1}$ استفاده می‌شود. هر چند برای سریهای عکس‌پذیر، همگرایی سریع π_j ها به صفر منجر به تقریب‌هایی خوب به کمک تعداد جمله کمتری می‌شود.

مثال (۸.۴): در مثال (۷.۴) فرض کنید $\phi = 0.5$, $\theta = -0.4$ و $\sigma^2 = 1$ باشند، ضرایب π_j برای این سری در جدول (۴.۴) آمده‌اند. در این جدول چند مشاهده آخر سری شکل (۹.۴-i) نیز آمده است. به کمک این مشاهدات

$$\tilde{P}_{100} X_{101} \approx 0.1 X_{100} + 0.04 X_{99} + 0.016 X_{98} + 0.006 X_{97} + 0.003 X_{96} + 0.001 X_{95} = -0.058$$

j	1	2	3	4	5	6	7
π_j	-0.100	-0.040	-0.016	-0.006	-0.003	-0.001	0.000
t	100	99	98	97	96	95	94
X_t	-0.62	0.02	-0.23	0.85	0.84	0.25	-0.16

جدول ۴.۴: π_j ها و چند مشاهده آخر سری مثال (۸.۴).

و

$$\tilde{P}_{100}X_{102} \approx 0.1\tilde{P}_{100}X_{101} + 0.04X_{100} + 0.016X_{99} + 0.006X_{98} + 0.003X_{97} + 0.001X_{96} = -0.029$$

که هر دو تا سه رقم اعشار با مقادیر حاصل از 100 مشاهده برابرند. در تساوی دوم (۲۶.۴)، $\tilde{P}_n X_{n+l}$ به صورت ترکیب خطی از $\{X_s : s \leq n\}$ نوشته شده است. ضرایب این ترکیب خطی را می‌توان به ترتیب زیر تعیین کرد. برای $l = 1$ از (۲۸.۴) داریم

$$\pi_j^{(1)} = -\pi_j, \quad j \geq 1$$

برای $l = 2$ با توجه به (۲۹.۴)،

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n X_{n+2} &= \pi_1 \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+1-j} - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{n+2-j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\pi_1 \pi_j - \pi_{j+1}) X_{n+1-j}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\pi_j^{(2)} = \pi_1 \pi_j - \pi_{j+1}, \quad j \geq 1$$

به همین ترتیب رابطه کلی زیر تشخیص داده می‌شود.

$$\pi_j^{(l)} = -(\pi_{j+l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \pi_i \pi_j^{(l-i)}), \quad j \geq 1, \quad l \geq 2. \quad (30.4)$$

مثال (۹.۴): در ادامه مثال قبل این ضرایب را به ازای $l = 1, 2, 3$ محاسبه و در جدول (۵.۴) آورده‌ایم (این ضرایب را به کمک تابع $COEF.FORE(\phi, \theta, n, l)$ در پیوست ۳ حساب کرده‌ایم). به کمک این ضرایب و برای $l = 3$

$$\tilde{P}_{100}X_{103} \approx 0.025X_{100} + 0.01X_{99} + 0.004X_{98} + 0.002X_{97} + 0.001X_{96} = -0.014.$$

j	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_j^{(1)}$	0.100	0.040	0.016	0.006	0.003	0.001	0.000
$\pi_j^{(2)}$	0.050	0.020	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
$\pi_j^{(3)}$	0.025	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000

جدول ۵.۴: ضرایب $\pi_j^{(l)}$ برای سری مثال (۹.۴).

l	$\tilde{P}_{100} X_{100+l}$	$Var(\tilde{\epsilon}_{100}(l))$	$\tilde{P}_{100} X_{100+l} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\tilde{\epsilon}_{100}(l))}$
1	-0.058	1	(-2.018, 1.902)
2	-0.029	1.010	(-1.999, 1.941)
3	-0.014	1.0125	(-1.986, 1.958)

جدول ۶.۴: پیش‌بینی‌های فاصله‌ای برای سری مثال (۱۰.۴).

برای محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ ها می‌توان از تابع $FORECAST(data, \phi, \theta, \sigma^2, l)$ در پیوست ۳ استفاده کرد.

در صورتی که $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ سببی و عکس‌پذیر باشد و سری نوفه سفید نظیرش گاوسی باشد آنگاه

$$\tilde{\epsilon}_n(l) = X_{n+l} - \tilde{P}_n X_{n+l} = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j Z_{n+l-j} \sim N(0, \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2).$$

در نتیجه

$$Z = \frac{X_{n+l} - \tilde{P}_n X_{n+l}}{\sigma \sqrt{\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2}} \sim N(0, 1),$$

یک کمیت محوری است که به کمک آن، پیش‌بین فاصله‌ای با ضریب اطمینان $(1 - \alpha) \times 100$ درصد برای X_{n+l} به شکل

$$\tilde{P}_n X_{n+l} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2}, \quad (31.4)$$

حاصل می‌شود.

مثال (۱۰.۴): با استفاده از نتایج مثالهای (۸.۴) و (۹.۴) و با توجه به اینکه $\psi_0 = 1, \psi_1 = 0.100, \psi_2 = 0.050$ پیش‌بینی‌های فاصله‌ای با ضریب اطمینان 95 درصد برای X_{n+l} به ازای $l = 1, 2, 3$ را محاسبه و در جدول (۶.۴) آورده‌ایم.

۸.۴ تابع پیش‌بینی غائی و رفتار پیش‌بینی‌های یک سری ARMA

در بخش قبل با چگونگی محاسبهٔ پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARMA آشنا شدیم. در این بخش با تابعی آشنا می‌شویم که مقادیرش از زمانی به بعد $(q-p)$ به بعد برابر $\tilde{P}_n X_{n+l}$ است. از این تابع که تابع پیش‌بینی غائی^۱ نامیده می‌شود در بررسی رفتار پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARMA استفاده می‌کنیم.

اگر $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ سببی باشد، برای $t = n+l$ می‌توان نوشت،

$$X_{n+l} - \phi_1 X_{n+l-1} - \cdots - \phi_p X_{n+l-p} = Z_{n+l} + \theta_1 Z_{n+l-1} + \cdots + \theta_q Z_{n+l-q},$$

با اعمال \tilde{P}_n بر طرفین این تساوی

$$\tilde{P}_n X_{n+l} - \phi_1 \tilde{P}_n X_{n+l-1} - \cdots - \phi_p \tilde{P}_n X_{n+l-p} = \tilde{P}_n Z_{n+l} + \theta_1 \tilde{P}_n Z_{n+l-1} + \cdots + \theta_q \tilde{P}_n Z_{n+l-q},$$

برای $l \geq q+1$ سمت راست عبارت فوق صفر است بنابراین

$$\tilde{P}_n X_{n+l} - \phi_1 \tilde{P}_n X_{n+l-1} - \cdots - \phi_p \tilde{P}_n X_{n+l-p} = 0, \quad l \geq q+1$$

یعنی برای $l \geq q+1$ جواب معادلهٔ تفاضلی $\phi_p(B)\tilde{P}_n X_{n+l} = 0$ می‌دانیم که جواب عمومی چنین معادله‌ای (پیوست ۲ را ببینید) به شکل زیر است،

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} F_1(l) + C_2^{(n)} F_2(l) + \cdots + C_p^{(n)} F_p(l), \quad (۳۲.۴)$$

که در آن توابع $F_1(l), F_2(l), \dots, F_p(l)$ بسته به ریشه‌های $\phi_p(B) = 0$ توابع نمایی میرا یا امواج سینوسی میرا هستند. ضرایب ثابت در $\tilde{P}_n(l)$ را با $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_p^{(n)}$ نشان داده‌ایم تا بر وابستگی آنها به مبدأ پیش‌بینی یعنی n تأکید کرده باشیم. این p ضریب را طوری تعیین می‌کنیم که شرایط اولیه

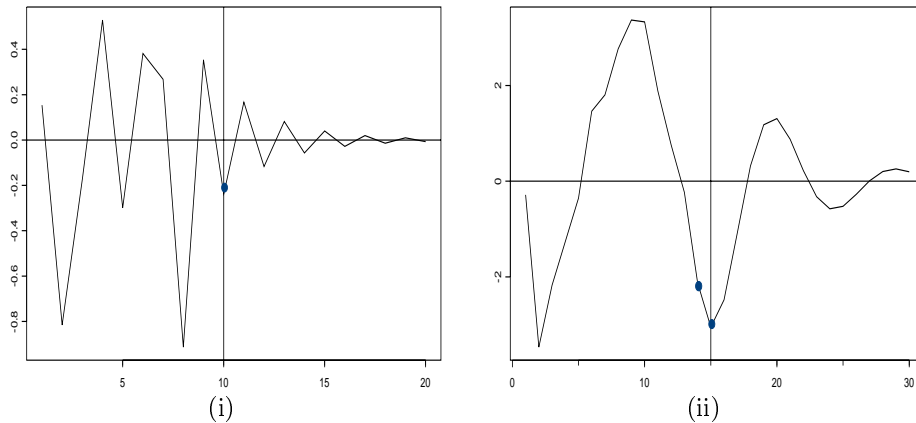
$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}, \quad l = q, q-1, \dots, q-p+1 \quad (۳۳.۴)$$

برقرار باشند. به عبارت دیگر نمودار تابع $\tilde{P}_n(l)$ (نسبت به مبدأ n) از نقاط

$$(q, \tilde{P}_n X_{n+q}), (q-1, \tilde{P}_n X_{n+q-1}), \dots, (q-p+1, \tilde{P}_n X_{n+q-p+1})$$

نیز بگذرد. در این صورت تابع $\tilde{P}_n(l)$ را تابع پیش‌بینی غائی در مبدأ n می‌نامیم. لفظ غائی به این دلیل به کار می‌رود که ضابطهٔ تابع $\tilde{P}_n(l)$ (وقتی $q > p$ است) فقط برای $l \geq q-p+1$ مقدار پیش‌بینی‌ها را به دست می‌دهد. از این تابع می‌توان در بررسی رفتار پیش‌بینی‌های حاصل از یک سری ARMA به خوبی استفاده کرد. با توجه به اینکه تابع پیش‌بینی غائی جواب یک معادلهٔ تفاضلی خطی است که ریشه

^۱ Eventual



شکل ۱۱.۴: (i): تابع پیش‌بینی غائی سری $AR(1)$ وقتی $\phi < 0$. (ii): تابع پیش‌بینی غائی سری $AR(2)$ وقتی ریشه‌های $\phi_2(B) = 0$ مختلط اند.

های معادله کمکی آن خارج دایره واحد قرار دارند، بلافاصله نتیجه می‌شود که $\lim_{l \rightarrow +\infty} \tilde{P}_n(l) = 0$ است. یعنی پیش‌بینی‌های حاصل از یک سری ARMA ی سببی با افزایش l به صفر (میانگین سری) همگرا می‌شوند. چگونگی این همگرایی به ریشه‌های معادله $\phi_p(B) = 0$ بستگی دارد و در حالت کلی ترکیبی از جملات نمایی میرا و امواج سینوسی میرا است.

مثال (۱۱.۴): سریهای اتورگرسیو، ابتدا فرض کنید $\{X_t\} \sim AR(1)$ سببی است در این صورت برای $l \geq 1$

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} \phi^l,$$

$C_1^{(n)}$ را طوری پیدا می‌کنیم که (۳۳.۴) به ازای $l = 0$ برقرار باشد به عبارت دیگر

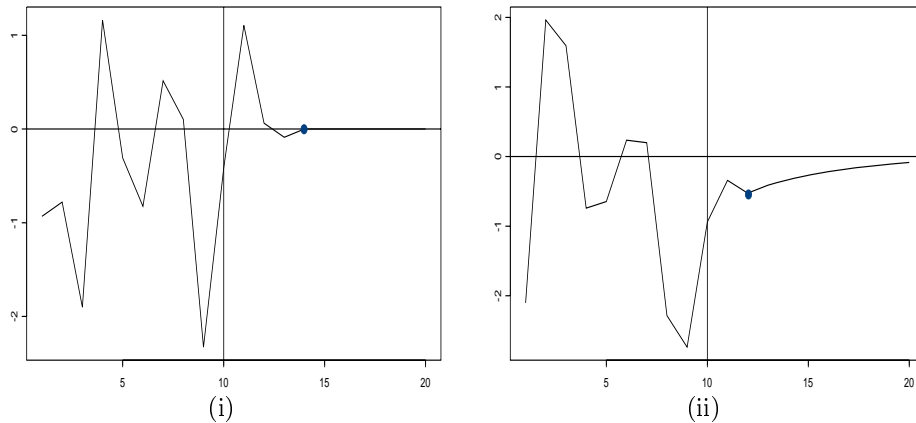
$$\tilde{P}_n(0) = \tilde{P}_n X_n \Rightarrow C_1^{(n)} = X_n$$

بنابر این تابع پیش‌بینی غائی سری $AR(1)$ عبارت است از

$$\tilde{P}_n(l) = \phi^l X_n. \quad (34.4)$$

و برای $l \geq 0$ $\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}$ همانطور که از (۳۴.۴) پیدا است پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل اتورگرسیو مرتبه اول با شروع از مقدار اولیه X_n در زمان $l = 0$ به طور نمایی به صفر همگرا می‌شوند. به عبارت دیگر نمودار تابع $\tilde{P}_n(l)$ از نقطه $(0, X_n)$ (نسبت به مبدأ n) گذشته و به طور نمایی به صفر همگرا می‌شود. این وضعیت وقتی $\phi < 0$ است در شکل (۱۱.۴-i) نشان داده شده است. حال فرض کنید $\{X_t\} \sim AR(2)$ در این صورت برای $l \geq 1$

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} F_1(l) + C_2^{(n)} F_2(l),$$



شکل ۱۲.۴: (i): تابع پیش بینی غائی سری $MA(3)$. (ii): تابع پیش بینی غائی سری $ARMA(1,2)$. $(\phi > 0)$.

$C_1^{(n)}$ و $C_2^{(n)}$ را می‌توان طوری پیدا کرد که (۳۳.۴) به ازای $l = -1$ و $l = 0$ برقرار باشد و مشابه بحثی که در بخش (۴.۴) داشتیم ضابطه صریحی برای $\tilde{P}_n(l)$ به دست آورد. اما برای بحث در رفتار این تابع نیازی به یافتن چنین ضابطه‌ای نیست و در حالت کلی می‌توان گفت که نمودار این تابع در حالی که از نقاط $(0, X_n)$ و $(-1, X_{n-1})$ می‌گذرد به صفر همگرا می‌شود. اگر ریشه‌های $\phi_2(B) = 0$ حقیقی باشند این همگرایی به طور نمایی و اگر مختلط باشند به صورت موجی سینوسی خواهد بود. شکل (۱۱.۴-ii) نمودار $\tilde{P}_n(l)$ را برای یک سری $AR(2)$ وقتی ریشه‌های $\phi_2(B) = 0$ مختلط اند نشان می‌دهد. در حالت کلی که $\{X_t\} \sim AR(p)$ سببی باشد، تابع پیش‌بینی غائی در حالی که از نقاط $(0, X_n), (-1, X_{n-1}), \dots, (-p+1, X_{n-p+1})$ می‌گذرد به صورت ترکیبی از عبارات نمایی و امواج سینوسی به صفر همگرا می‌شود.

در نگاهی اجمالی به تعریف تابع پیش‌بینی غائی ممکن است اینطور به نظر برسد که فقط عبارت اتورگرسیو مدل است که تکلیف این تابع را روشن می‌کند. اما همانطور که دیدیم تابع پیش‌بینی غائی طی دو مرحله تعیین می‌شود. در مرحله اول ضابطه عمومی یعنی (۳۲.۴) تعیین می‌شود، که عبارت میانگین متحرک مدل در اینجا نقشی ندارد و مرحله دوم تعیین ضرایب $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_p^{(n)}$ است (به تعبیری دیگر تعیین دامنه‌ای که روی آن مقادیر این تابع برابر پیش‌بینی‌ها باشد) که وابسته به عبارت میانگین متحرک مدل است.

مثال (۱۲.۴): سریهای میانگین متحرک، فرض کنید $\{X_t\} \sim MA(q)$ است در اینصورت $\tilde{P}(l) = 0$ ، که روی دامنه $l \geq q+1$ مقادیرش با پیش‌بینی‌ها یکی است. بنابراین در تفسیر رفتار پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل میانگین متحرک مرتبه q ، می‌توان گفت مقادیر q پیش‌بینی اول بستگی به مشاهدات و پارامترهای مدل دارند، اما سایر پیش‌بینی‌ها برابر صفراند. شکل (۱۲.۴-۱) نمودار تابع پیش‌بینی غائی یک سری $MA(3)$ را نشان می‌دهد.

مثال (۱۳.۴): فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(1,2)$ سببی و عکس‌پذیر باشد، در اینصورت برای

$$l \geq 3$$

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} \phi^l, \quad (۳۵.۴)$$

که $C_1^{(n)}$ با توجه به (۳۳.۴) به ازای $l = 2$ برابر است با $\frac{\tilde{P}_n X_{n+2}}{\phi^2}$ و در نتیجه

$$\tilde{P}_n(l) = \phi^{l-2} \tilde{P}_n X_{n+2},$$

و به ازای $l \geq 2$ $\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}$ به عبارت دیگر مقادیر دوپیش‌بینی نخست با توجه به مقادیر مشاهدات و پارامترهای مدل تعیین می‌گردند و تابع ضابطه‌ای خاص نیستند اما به محض تعیین مقدار $\tilde{P}_n X_{n+2}$ سایر پیش‌بینی‌ها با شروع از مقدار اولیه $\tilde{P}_n X_{n+2}$ به طور نمایی به صفر میل می‌کنند. نمودار این تابع به ازای $\phi > 0$ در شکل (۱۲.۴-ii) رسم شده است. حال اگر قرار دهیم $\theta_2 = 0$ ، به عبارت دیگر $\{X_t\} \sim ARMA(1, 1)$ باشد ضابطه تابع پیش‌بینی غائی همان (۳۵.۴) است اما در این حالت

$$C_1^{(n)} = \frac{\tilde{P}_n X_{n+1}}{\phi} \text{ و در نتیجه}$$

$$\tilde{P}_n(l) = \phi^{l-1} \tilde{P}_n X_{n+1},$$

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}, \quad l \geq 1 \text{ و به ازای}$$

۹.۴ تمرینات

۱.۴ - کدامیک از سریهای ARMA ی زیر سببی و کدامیک عکس پذیراند.

$$(1 - 1.2B + 0.4B^2)X_t = (1 + 0.7B)Z_t \quad (\text{الف})$$

$$(1 + 0.8B)(1 - 0.4B)(1 + 0.6B)X_t = (1 + 0.7B)Z_t \quad (\text{ب})$$

$$(1 + 0.8B)X_t = (1 + 0.5B - 0.6B^2)Z_t \quad (\text{ج})$$

$$(1 - 0.5B + 0.6B^2)X_t = (1 - 1.5B)Z_t \quad (\text{د})$$

۲.۴ - الف) برای سریهای سببی در تمرین (۱.۴) پنج ψ_j اول را حساب کنید.

ب) برای سریهای عکس پذیر در تمرین (۱.۴) پنج π_j اول را حساب کنید.

جواب خود را با استفاده از تابع $CAUS.INV$ کنترل کنید.

۳.۴ - در تمرین (۱.۴) فرض کنید $\{Z_t\} \sim WN(0,1)$

الف) برای سریهای سببی و عکس پذیر پنج $\gamma(h)$ و $\rho(h)$ اول را حساب کنید. جواب خود را با استفاده از تابع $ACF.PACF$ کنترل کنید.

ب) برای این سریها با حل معادله تفاضلی مربوطه ضابطه صریحی برای $\rho(h)$ به دست آورید.

۴.۴ - برای سری اتورگرسیو مرتبه چهار $X_t = (1 - \phi B^4)Z_t$ ، با $|\phi| < 1$ ، فرم سببی و تابع خودهمبستگی $\{X_t\}$ را بیابید.

۵.۴ - برای سری میانگین متحرک مرتبه چهار $X_t = (1 + \theta B^4)Z_t$ ، با $|\theta| < 1$ ، فرم معکوس و تابع خودهمبستگی $\{X_t\}$ را بیابید.

۶.۴ - با توجه به مقدار تابع مولد اتوکوواریانس های یک فرآیند خطی کلی به ازای $B = 1$ و تقریب (۴۳.۳) نشان دهید $Var(\bar{X}) \approx \frac{\sigma^2}{n} (\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j)^2$. برای سریهای $AR(1)$ و $MA(1)$ این تقریب را با نتایج بخش (۱.۵.۳) مقایسه کنید.

۷.۴ - نشان دهید سری $AR(2)$ سببی است هرگاه

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases} .$$

۸.۴- نشان دهید معادله $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$ در صورتی که $|\phi| = 1$ باشد جواب ایستا ندارد. (راهنمایی: فرض کنید $\{X_t\}$ ایستا باشد و عبارتی برای $Var(X_t - \phi^k X_{t-k})$ یافته از آن به تناقض برسید).

۹.۴- با توجه به اینکه برای یک سری ARMA ی سببی و عکس پذیر $\pi(B)\psi(B) = 1$ نشان دهید که برای $j \geq 1$

$$\psi_j = -\left(\sum_{i=1}^j \pi_i \psi_{j-i}\right), \quad \pi_j = -\left(\sum_{i=1}^j \psi_i \pi_{j-i}\right)$$

۱۰.۴- برای یک سری ARMA ی سببی نشان دهید که برای $t < s$, $Cov(X_t, Z_s) = 0$.

۱۱.۴- برای یک سری ARMA ی سببی و عکس پذیر نشان دهید که

$$\phi_p(B)\psi_j = 0, \quad j \geq \max(p, q + 1)$$

و

$$\theta_q(B)\pi_j = 0, \quad j \geq \max(p + 1, q)$$

و در رفتار ضرایب $\{\psi_j\}$ و $\{\pi_j\}$ بحث کنید.

۱۲.۴- با استفاده از تابع *arima.sim* مصادیقی به طول $n = 100$ از مدل‌های (i) و (ii) در شکل (۲.۴) شبیه سازی کنید. با استفاده از تابع *FORE.INN* پیش‌بینی‌های $P_{100}X_{100+l}$ و واریانس خطای آنها را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ حساب کنید. با استفاده از تابع *FORECAST* پیش‌بینی‌های $\tilde{P}_{100}X_{100+l}$ و واریانس خطای آنها را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ حساب کنید. با رسم یک شکل این پیش‌بینی‌ها را به دنبال مشاهدات نشان دهید.

۱۳.۴- با اضافه کردن 10 واحد به مصادیق تمرین قبل مصادیقی از سریهایی با میانگین 10 بسازید. برای این سریها $P_{100}X_{100+l}$ و $\tilde{P}_{100}X_{100+l}$ را محاسبه کنید.

۱۴.۴- تمرین (۱۲.۴) را برای مدل‌های شکل‌های (۵.۴) و (۹.۴) تکرار کنید.

۱۵.۴- سری Se8 در پیوست ۲ تعداد سالانه لکه‌های خورشیدی از سال ۱۷۰۰ تا سال ۱۷۸۳ را نشان می‌دهد. مدل جدول (۳.۶) را در نظر گرفته برای سری $Y_t = \sqrt{X_t}$ ، $\tilde{P}_{84}Y_{84+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ یافته و با استفاده از (۳.۱.۴) پیش‌بینی‌های فاصله‌ای 95 را برای Y_{84+l} به دست آورید. با استفاده از این نتایج پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای 95 درصدی برای X_{84+l} ، $l = 1, 2, \dots, 10$ را به دست آورده آنها را در ادامه سری رسم کنید.

۱۶.۴- سری Se11 در پیوست ۲ تعداد سالانه پوستهای Lyrix (نوعی گریه وحشی) فروخته شده توسط شرکت Hudson's Bay در کانادا را برای سالهای ۱۸۵۷ تا ۱۹۱۱ نشان می‌دهد. با استفاده از مدل جدول (۳.۶) برای 10 سال بعد این سری پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای 95 درصدی را به دست آورده و آنها را در ادامه سری رسم کنید.

۱۷.۴ - برای سریهای سببی و عکس پذیر در تمرین (۱.۴) ضابطهٔ عمومی تابع پیش‌بینی غائی را یافته در رفتار پیش‌بینی‌ها بحث کنید.

۱۸.۴ - در تمرین (۱۵.۴) تابع پیش‌بینی غائی را یافته در رفتار پیش‌بینی‌ها بحث کنید.

۱۹.۴ - در تمرین (۱۶.۴) تابع پیش‌بینی غائی را یافته در رفتار پیش‌بینی‌ها بحث کنید.

۲۰.۴ - برای یک سری سببی و عکس پذیر نشان دهید

$$\pi_j^{(l)} = -\sum_{i=1}^l \psi_{l-i} \pi_{i+j-1} \quad (\text{الف})$$

$$\pi_j^{(l)} = \pi_{j+1}^{(l-1)} - \psi_{l-1} \pi_j \quad (\text{ب})$$

(راهنمایی (الف): ابتدا نشان دهید $\tilde{P}_n X_{n+l} = \tilde{P}_{n+l-1} X_{n+l} - \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j Z_{n+l-j}$ سپس طرفین تساوی را بر حسب $\{X_t; t \leq n\}$ بنویسید.)

۲۱.۴ - الف) نشان دهید ضریب همبستگی بین خطاهای پیش‌بینی در مبداهای مختلف عبارت است از

$$\rho(\tilde{e}_n(l), \tilde{e}_{n-j}(l)) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=j}^{l-1} \psi_i \psi_{i-j}}{\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2} & 0 \leq j < l \\ 0 & j \geq l \end{cases}$$

ب) نشان دهید ضریب همبستگی بین خطاهای پیش‌بینی در مبدأ مشترک عبارت است از

$$\rho(\tilde{e}_n(l), \tilde{e}_n(l+j)) = \frac{\sum_{i=0}^{l-1} \psi_j \psi_{i+j}}{[(\sum_{h=0}^{l-1} \psi_h^2)(\sum_{k=0}^{l+j-1} \psi_k^2)]^{1/2}}$$

۲۲.۴ - الف) فرمول $\tilde{P}_{n+1} X_{n+l+1} = \tilde{P}_n X_{n+l+1} + \psi_l \tilde{e}_n(1)$ را برای بهنگام کردن پیش‌بینی‌ها ثابت کنید.

ب) برای سری مثالهای (۸.۴) و (۹.۴) فرض کنید $X_{101} = -0.1$ مشاهده شود با استفاده از این فرمول $\tilde{P}_{101} X_{102}$ و $\tilde{P}_{101} X_{103}$ را حساب کنید.

۲۳.۴ - مشاهدات $26.38, 24.70, 23.08, 22.10, 23.01, 24.78, 25.16, 26.30, 27.36, 25.66$... ده مشاهدهٔ آخر مصداقی به طول $n = 65$ از سری $ARMA(2, 1)$ با پارامترهای $\phi_1 = 1.3, \phi_2 = -0.7, \mu = 25, \theta = -0.4$ و $\sigma^2 = 1$ هستند. $\tilde{P}_{65} X_{65+l}$ را به ازای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ به همراه واریانس خطای این پیش‌بینی‌ها و پیش‌بینی‌های فاصله‌ای 95 برای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ X_{65+l} به دست آورید. فرض کنید $X_{66} = 25.2$ مشاهده شود با استفاده از تمرین قبل $\tilde{P}_{66} X_{66+l}$ را به ازای $l = 1, 2, 3, 4$ حساب کنید.

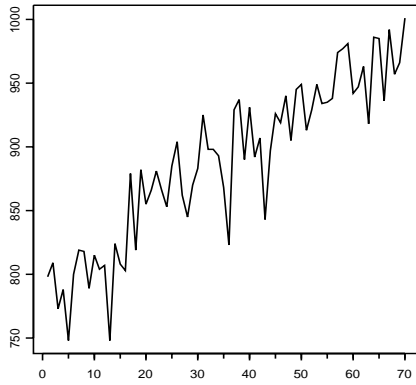
فصل ۵

سریهای ARIMA

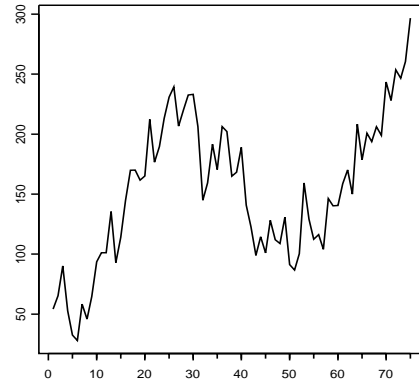
طبیعی است که یک سری فاقد هر یک از شرایط ایستایی در تعریف (۴.۳) را نا ایستا بنامیم. بررسی حالات مختلفی که از نبود یک یا چند شرط ایستایی حاصل می‌شوند، از تنوع رفتار توابع میانگین و اتوکوواریانس سریهای نا ایستا حکایت دارد. به عنوان نمونه می‌توان به سریهای نا ایستا در مثال‌های فصل سوم و تمرین (۱.۳) اشاره کرد. اما در عمل و در مقایسه با مصادیق سریهای ایستا که تمایل به نوسان حول سطحی ثابت با دامنه‌ای ثابت دارند، تغییر در سطح یا دامنه نوسانات از مشخصه‌های مصادیق سریهای نا ایستا است (سریهای شکل (۱.۵) را ببینید). البته موارد استثنائی چون مثال (۳.۳) که در آن مصادیق در دو حالت ایستا و نا ایستا غیرقابل شناسایی‌اند نیز وجود دارند. در مدل سازی و تجزیه و تحلیل سریهای زمانی نا ایستا این دو وجه بارز سریهای نا ایستا است که مورد توجه قرار می‌گیرد. معمولاً در تحلیل چنین سریهایی ابتدا با استفاده از تبدیلات مناسب آنها را به سریهایی با میانگین و واریانس ثابت تبدیل کرده سپس از مدلها و روشهای تحلیل سریهای ایستا استفاده می‌کنیم. در این فصل با این تبدیلات آشنا می‌شویم. در بخش (۱.۵) با تبدیلاتی به منظور رسیدن به میانگین ثابت و در بخش (۶.۵) با تبدیلاتی برای رسیدن به واریانس ثابت آشنا می‌شویم. در عمل بسیاری از سریهای زمانی نا ایستایی را که مشاهده می‌کنیم بجز تغییرات تصادفی در میانگین، رفتارشان در بخشهای مختلف خیلی شبیه یکدیگر است. در بخش (۲.۵) با مدلهایی که می‌توانند مولد چنین سریهایی باشند یعنی مدلهای اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته ARIMA^۱ آشنا می‌شویم. در بخش (۳.۵) مدلهای ARIMA با رانش^۲ را تعریف کرده با مصادیق این مدلها نیز آشنا می‌شویم. بخشهای (۴.۵) و (۵.۵) را به چگونگی پیش‌بینی آینده یک سری ARIMA و بحث در رفتار پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARIMA اختصاص داده‌ایم.

^۱ Autoregressive Integrated Moving Average

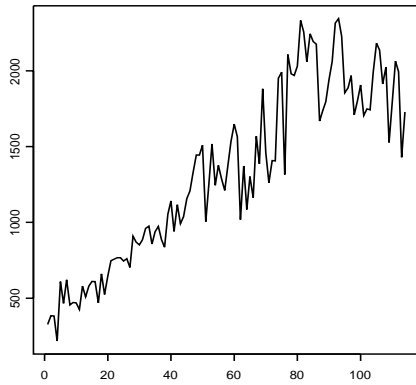
^۲ Drift



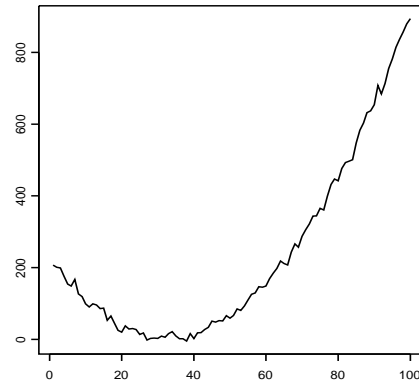
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

شکل ۱.۵: مصادیق چهار سری نایستا، (i): سری فروش کنسرو در مثال (۱.۲)، (iii): تولید سالانه توتون در آمریکا (۱۸۷۱-۱۹۷۹)، (ii) و (iv): سریهای شبیه سازی شده.

۱.۵ تبدیلات تثبیت کننده میانگین

در این بخش به بررسی سریهای نا ایستایی می پردازیم که میانگین آنها تابعی از زمان است. اگر این تابع را روند بنامیم، در یک تقسیم بندی کلی می توان روندها را به دو دسته قطعی^۱ و تصادفی^۲ تقسیم بندی کرد. به عنوان مثال اگر $\{Y_t\}$ یک سری ایستا باشد و $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Y_t$ آنگاه سری نا ایستای $\{X_t\}$ دارای روندی خطی است. مصادیق این سری تمایل به نوسان حول خط $\beta_0 + \beta_1 t$ دارند و این رفتار در کل مصداق حفظ می گردد. هرگاه چنین رفتاری، حاکی از نوسان حول تابعی از زمان در کل مصداق (با توجه به اینکه تنها بخشی از آن را می بینیم)، تشخیص داده شود گویای وجود روندی قطعی است. در غیر اینصورت، تغییرات بدون الگوی خاص که در سطح مصداقی از یک سری نا ایستا دیده شود معرف روندی تصادفی است. به عنوان مثال اگر نمودار (۱.۵-ii) را برای تشخیص نوع روند بررسی کنیم مشاهدات اولیه روندی خطی را پیشنهاد می کنند اما همین که تعداد مشاهدات افزایش پیدا می کند نظرممان به چند جمله ای درجه دوم جلب می گردد. همین طور که مشاهدات افزایش می یابند تشخیص ما نیز تغییر می کند به طوریکه هیچ تضمینی نمی توان داد تشخیصی که به کمک بخشی از مصداق داده ایم در ادامه مصداق تغییر نکند (در واقع این سری مصداقی از قدم زدن تصادفی است). چنین تردیدی برای سریهای شکل (۱.۵-i) و شکل (۱.۵-iv) به مراتب کمتر است و از بررسی این دو نمودار به ترتیب روندهای قطعی به صورت خطی و درجه دوم را می توان تشخیص داد. در صورت وجود روند چه قطعی و چه تصادفی برای رسیدن به یک سری ایستا باید این روند حذف گردد.

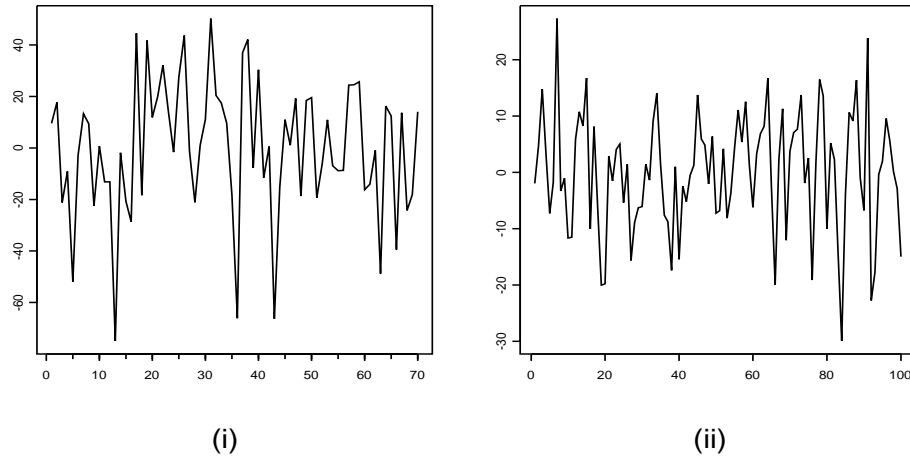
۱.۱.۵ حذف روندهای قطعی

بدیهی است که بدون اطلاعات اضافی درباره سری $\{X_t\}$ و فقط به کمک یک مصداق، تشخیص تابع روند عموماً امکان پذیر نیست. عموماً چنین تشخیصی که با بررسی یک مصداق انجام می شود تقریبی خواهد بود. از طرفی چون معمولاً چند جمله ایها تقریبهای خوبی از توابع مختلف فراهم می کنند غالباً از آنها برای تقریب روند استفاده می شود. در هر صورت اگر فرم تابعی روند معلوم باشد یا توسط یک چند جمله ای تقریب گردد پارامترهایی موجودند که بایستی برآورد شوند. برای برآورد این پارامترها می توان از روش کمترین توانهای دوم عادی استفاده کرد. اگر تشخیص مناسب باشد مانده های حاصل از این برازش یک سری ایستا خواهد بود.

مثال (۱.۵): از برازش مدل رگرسیونی خطی ساده، به سری فروش کنسرو در شکل (۱.۵-i) نتیجه می شود $\hat{X}_t = 785.56 + 2.88t$ ، (این مدل با اجرای دستورات $lm(data \sim Time)$ در $Time < -1 : 70$ در S-PLUS به دست آمده). مانده های حاصل از این برازش یعنی $X_t - \hat{X}_t$ ، (که با اجرای دستور $resid(lm(data \sim Time))$ در S-PLUS محاسبه شده اند). که در شکل (۲.۵-i) رسم شده اند مصداقی از یک سری ایستا را نشان می دهد.

^۱ Deterministic Trend

^۲ Random Trend



شکل ۲.۵: مانده‌های حاصل از برازش مدل‌های رگرسیونی به سری مثال (۱.۵)، نمودار (i) و سری مثال (۲.۵)، نمودار (ii).

مثال (۲.۵): از برازش مدل رگرسیونی $X_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \epsilon_t$ به سری شکل (۱.۵-iv)، (سری Se5 در پیوست ۲) نتیجه می‌شود $\hat{X}_t = 221.76 - 13.09t + 0.2t^2$. مانده‌های حاصل از این برازش که در شکل (۲.۵-ii) رسم شده‌اند مصداقی از یک سری ایستا را نشان می‌دهد. در صورتی که روند چندجمله‌ای باشد، روشی ساده‌تر برای حذف آن تفاضل‌گیری است. بدین منظور عملگر تفاضل‌گیری مرتبه اول، ∇ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t. \quad (1.5)$$

و برای هر عدد طبیعی d عملگر تفاضل‌گیری مرتبه d ام، ∇^d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (-1)^i X_{t-i}. \quad (2.5)$$

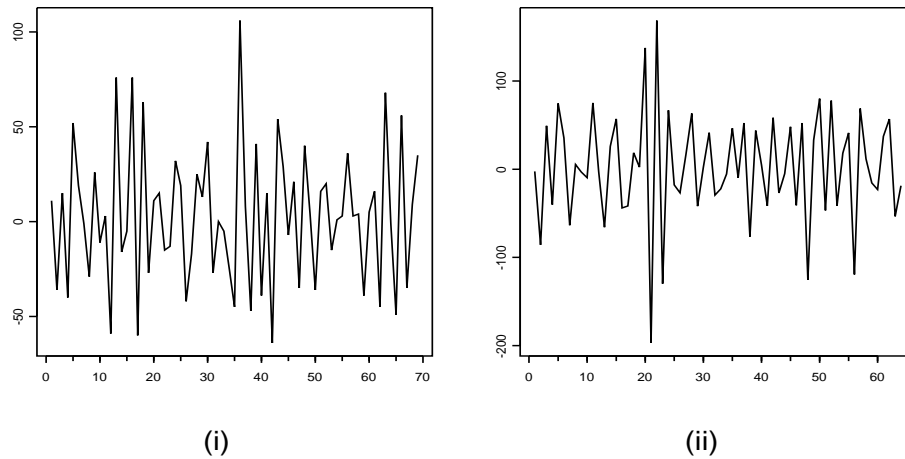
دو خاصیت مهم تفاضل‌گیری که برای تبدیل یک سری نا ایستا با روند چندجمله‌ای به یک سری ایستا بدون روند، این تبدیل را کارآمد کرده‌است، عبارتند از:

$$1 - \text{اگر } P_d(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d \text{ آنگاه } \nabla^d P_d(t) = d! a_d.$$

$$2 - \text{اگر } \{Y_t\} \text{ یک سری ایستا باشد آنگاه } \{\nabla^d Y_t\} \text{ نیز ایستا است.}$$

اثبات این دو خاصیت را به عهده خواننده می‌گذاریم. بنابراین اگر $X_t = P_d(t) + Y_t$ و $\{Y_t\}$ یک سری ایستا باشد آنگاه سری $\{\nabla^d X_t = d! a_d + \nabla^d Y_t\}$ یک سری ایستا با میانگین $d! a_d$ خواهد بود.

مثال (۳.۵): نمودار سری شکل (۱.۵-i) بعد از یک بار تفاضل‌گیری در شکل (۳.۵-i) رسم شده است. این نمودار مصداقی از یک سری ایستا را نشان می‌دهد.



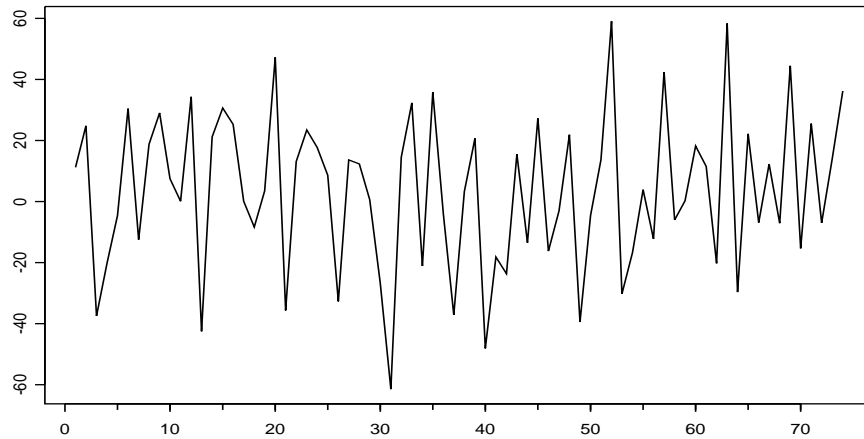
شکل ۳.۵: (i): نمودار سری (۱.۵-i) بعد از یک بار تفاضل گیری. (ii): نمودار سری (۱.۵-iv) بعد از دو بار تفاضل گیری.

مثال (۴.۵): نمودار سری شکل (۱.۵-iv) بعد از دو بار تفاضل گیری در شکل (۳.۵-i) رسم شده است. این نمودار مصداقی از یک سری ایستا را نشان می دهد. عمل تفاضل گیری را با استفاده از تابع $diff(data, diff = d)$ در S-PLUS می توان انجام داد.

۲.۱.۵ حذف روندهای تصادفی

با تفاضل گیری به عنوان تبدیلی مؤثر در حذف روندهای چندجمله ای آشنا شدیم. این تبدیل در حذف روندهای تصادفی، بخصوص وقتی رفتار موضعی این روند در گذر زمان چندان تغییر نکند نیز بسیار کارآمد است. به عنوان مثال نمودار (۴.۵) که حاصل تفاضل گیری مرتبه اول از سری شکل (۱.۵-ii) است، تأثیر این تبدیل را نشان می دهد. سریهای نا ایستایی از این نوع که بعد از تفاضل گیری تبدیل به یک سری ایستا می شوند در عمل زیاد دیده می شوند، با مدل های مناسب این نوع سریها در بخش (۲.۵) آشنا می شویم.

کارآمد بودن تفاضل گیری در حذف هر دو نوع روند قطعی و تصادفی، محاسبات ساده در مقایسه با برازش روند قطعی و درگیر نشدن با خطاهای حاصل از برآورد پارامترها، از مزایای تفاضل گیری اند که ما را به استفاده از این روش تشویق می کنند. نکته مهم دیگر اینکه تشخیص قطعی یا تصادفی بودن روند با نگاه به یک مصداق کار ساده ای نیست. از طرفی خطر تشخیص غلط نیز کم نیست، به عنوان مثال امکان تشخیص نادرست چندجمله ای درجه سوم در شکل (۱.۵-iii) وجود دارد. برازش این چندجمله ای به عنوان روند قطعی پیش بینی هایی تولید می کند که بدون کران افزایش می یابند که دور از واقعیت است (این سری مصداقی از قدم زدن تصادفی است). همانطور که در بخش (۳.۵) خواهیم دید در مدل هایی که بر اساس تفاضل گیری برای سریهای نا ایستا ساخته می شوند (مدل های ARIMA) امکان تشخیص



شکل ۴.۵: نمودار سری (iii-۱.۵) بعد از یک بار تفاضل‌گیری.

قطعی یا تصادفی بودن روند با حل یک مسئله آزمون فرض وجود دارد.

۲.۵ مدل‌های ARIMA

در بخش قبل سریهای ناایستایی را دیدیم که با تفاضل‌گیری از مرتبه‌ای مناسب به سریهای ایستایی تبدیل شدند. سوالی که مطرح می‌کنیم این است که چه مدل‌هایی می‌توانند مولد این نوع سریهای نا ایستا باشند؟ پاسخ این سوال را با دقت در سری شکل (iii-۱.۵) که مصداقی از قدم زدن تصادفی است می‌توان یافت. در مثال (۴.۳) دیدیم که سری قدم زدن تصادفی توسط مدل $X_t = X_{t-1} + Z_t$ تعریف می‌شود که در آن $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ است. این مدل را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = Z_t,$$

مدلی که بیان می‌کند تفاضل مرتبه اول $\{X_t\}$ نه تنها ایستا بلکه نوفه سفید (یا $ARMA(0, 0)$) است. در حالت کلی سریهای ناایستایی که بعد از تفاضل‌گیری از مرتبه d به سری ایستایی از نوع $ARMA(p, q)$ تبدیل می‌شوند به سریهای اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته (ARIMA) معروفند. باکس و جنکینز (۱۹۷۶) این نوع ناایستایی را ناایستایی همگن نامیدند.

تعریف (۱.۵): سری ناایستای $\{X_t\}$ صادق در معادله تفاضلی

$$\phi_p(B)\nabla^d X_t = \theta_q(B)Z_t, \quad (۳.۵)$$

را که در آن $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ عملگرهای اتورگرسیو عکس‌پذیر مرتبه p و میانگین متحرک سببی مرتبه q هستند سری اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته از مرتبه (p, d, q) نامیده و می‌نویسیم $\{X_t\} \sim ARIMA(p, d, q)$.

در حالت خاصی که $p = 0$ ، $\{X_t\}$ را سری میانگین متحرک جمع بسته مرتبه (d, q) نامیده و می‌نویسیم $\{X_t\} \sim IMA(d, q)$. و در حالت خاصی که $q = 0$ ، $\{X_t\}$ را سری اتورگرسیو جمع بسته مرتبه (p, d) نامیده و می‌نویسیم $\{X_t\} \sim ARI(p, d)$.
با ضرب عملگرهای سمت چپ مدل (۳.۵) به مدل $ARMA(p + d, q)$ تبدیل می‌شود به عبارت دیگر می‌توان نوشت،

$$\phi_{p+d}^*(B)X_t = \theta_q(B)Z_t, \quad (۴.۵)$$

که در آن $\phi_{p+d}^*(B) = (1 - B)^d \phi_p(B)$ عملگر اتورگرسیو تعمیم یافته نامیده می‌شود. یعنی مدل $ARIMA(p, d, q)$ همان مدل $ARMA(p + d, q)$ است که در آن معادله $\phi_{p+d}^*(B) = 0$ ریشه یک دارد. به عنوان مثال مدل $ARIMA(1, 1, 1)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\phi_2^*(B)X_t = (1 + \theta B)Z_t,$$

$$\text{که } \phi_2^*(B) = (1 - B)(1 - \phi B) = (1 - (1 + \phi)B + \phi B^2)$$

همچنین بدیهی است هرگاه $\{X_t\} \sim ARIMA(p, d, q)$ باشد و قرار دهیم $W_t = \nabla^d X_t$ آنگاه $\{W_t\} \sim ARMA(p, q)$.

در ادامه این بخش با بحث در حالت خاص $d = 1$ چگونگی بوجود آمدن یک سری ARIMA توسط سری ARMA ی نظیرش (که دلیل نامگذاری این نوع سریها نیز هست) را خواهیم دید و در رفتار مصادیق این نوع سریها بحث خواهیم کرد. در مثال (۴.۳) دیدیم که اگر مبدأ زمان $t = 0$ و مقدار اولیه $X_0 = 0$ اختیار شوند عنصر t ام سری قدم زدن تصادفی را می‌توان از جمع بستن عناصر سری نوفه سفید نظیرش از زمان 1 تا t به دست آورد. در حالت کلی عنصر t ام یک سری ARIMA را می‌توان از جمع بستن عناصر سری ARMA ی نظیرش از یک مبدأ دلخواه تا زمان t به دست آورد. در حالت خاص $d = 1$ ، فرض کنید این مبدأ n_0 و مقدار اولیه X_{n_0} باشد در اینصورت از تساوی $\nabla X_t = W_t$ داریم

$$X_t = X_{t-1} + W_t = \dots = X_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^t W_i, \quad t > n_0 \quad (۵.۵)$$

X_{n_0} نقش سطح یا میانگین اولیه را دارد و فارغ از این سطح اولیه X_t از جمع بستن عناصر سری ARMA ی نظیرش حاصل شده است.

برای بحث در رفتار مصادیق سریهای $ARIMA(p, 1, q)$ ابتدا فرض می‌کنیم $\{X_t\}$ قدم زدن تصادفی در مثال (۴.۳) است. برای این سری $E(X_t) = 0$ ، بنابراین انتظار نوسان حول صفر را داریم اما خودهمبستگی‌های نزدیک به یک برای تأخیرهای کوچک، همراهی عناصر سری و تشکیل گشتهای طولانی را به همراه دارد. از طرفی افزایش واریانس X_t ها این امکان را می‌دهد که فاصله مشاهدات تا صفر نیز زیاد باشد. وضعیتی مشابه برای سایر سریهای $ARIMA(p, 1, q)$ وجود دارد به عنوان مثال برای

سری $IMA(1, 1)$ که $W_t = \nabla X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ از (۵.۵) داریم $E(X_t) = X_{n_0}$ و

$$\begin{aligned} X_t &= X_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^t (Z_i + \theta Z_{i-1}) \\ &= X_{n_0} + Z_t + (1 + \theta)Z_{t-1} + \cdots + (1 + \theta)Z_{n_0+1} + \theta Z_{n_0}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$Var(X_t) = (1 + (1 + \theta)^2(t - n_0 - 1))\sigma^2.$$

و برای $h \geq 1$

$$C(t, t-h) = (1 + \theta + (1 + \theta)^2(t - h - n_0 - 1))\sigma^2.$$

و

$$R(t, t-h) = \frac{1 + \theta + (1 + \theta)^2(t - n_0 - h - 1)}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-h})}} \approx \sqrt{\frac{t - n_0 - h - 1}{t - n_0 - 1}},$$

که برای h های کوچک و متوسط وقتی n_0 به اندازه کافی از t دور اختیار شده باشد،

$$R(t, t-h) \approx 1.$$

در نتیجه مصادیق این سری رفتاری کم و بیش شبیه قدم زدن تصادفی دارند (شکل ۵.۵ را ببینید). چنین رفتاری برای مصادیق سریهای ARIMA به ازای $d > 1$ نیز مشاهده می شود با این تفاوت که با افزایش d سری هموارتر می شود (شکل ۶.۵ را ببینید). برای شبیه سازی این مصادیق از دستور `arima.sim(model = list(ndiff = d, ar = phi, ma = -theta), n)` در S-PLUS استفاده کرده ایم.

۳.۵ مدل های ARIMA با رانش

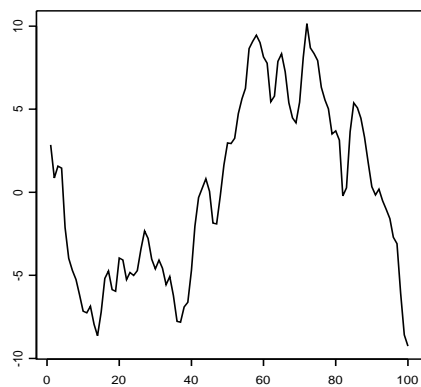
با اضافه کردن مقدار ثابت θ_0 به (۳.۵)، مدل

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B)Z_t, \quad (6.5)$$

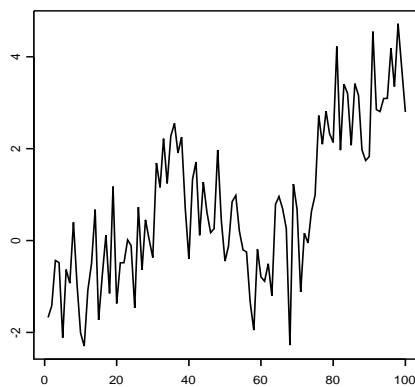
حاصل می شود که به آن مدل $ARIMA(p, d, q)$ با رانش θ_0 می گوئیم. همانطور که در ادامه خواهیم دید اثر θ_0 در دو حالت $d = 0$ و $d \geq 1$ بر $\{X_t\}$ و مصادیقش کاملاً متفاوت است. حالتی که $d = 0$:

اگر $\{X_t\}$ یک سری $ARMA(p, q)$ با میانگین μ باشد آنگاه

$$(X_t - \mu) - \phi_1(X_{t-1} - \mu) - \cdots - \phi_p(X_{t-p} - \mu) = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

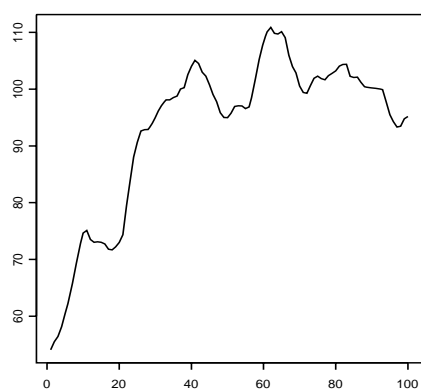


(i)

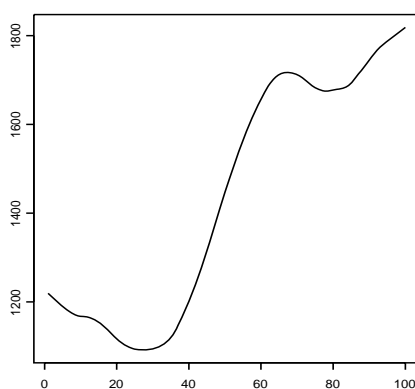


(ii)

شکل ۵.۵: مصادیقی از مدل $IMA(1,1)$ به ازای (i) $\theta = 0.7, \sigma^2 = 1$ و (ii) $\theta = -0.7, \sigma^2 = 1$.



(i)



(ii)

شکل ۶.۵: مصادیقی از مدل $ARI(d,1)$ به ازای (i) $d = 1, \phi = 0.7, \sigma^2 = 1$ و (ii) $d = 2, \phi = 0.7, \sigma^2 = 1$.

در نتیجه

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

از مقایسه این تساوی با (۶.۵) رابطه زیر بین θ_0 و μ تشخیص داده می‌شود،

$$\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) \quad (۷.۵)$$

پس در این حالت $\theta_0 \neq 0$ معادل است با $\mu \neq 0$. به عبارت دیگر اضافه کردن مقدار θ_0 به سمت راست مدل $ARMA(p, q)$ معادل اضافه کردن میانگین $\mu = \theta_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ به سری است. حالتی که $d \geq 1$:

با توجه به اینکه در این حالت $\{W_t = \nabla^d X_t\} \sim ARMA(p, q)$ ، از حالت $d = 0$ نتیجه می‌شود که $\mu_W = \theta_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$. بنابراین اضافه کردن مقدار θ_0 به سمت راست مدل $ARIMA(p, d, q)$ معادل اضافه کردن μ_W به سری $\{W_t\}$ است. برای بررسی اثر وجود θ_0 بر سری $\{X_t\}$ حالت خاص $d = 1$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت با استفاده از (۵.۵) نسبت به مبدأ n_0 داریم

$$\begin{aligned} E(X_t) &= X_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^t E(W_i) = X_{n_0} + (t - n_0)\mu_W \\ &= X_{n_0} + (t - n_0) \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}. \end{aligned}$$

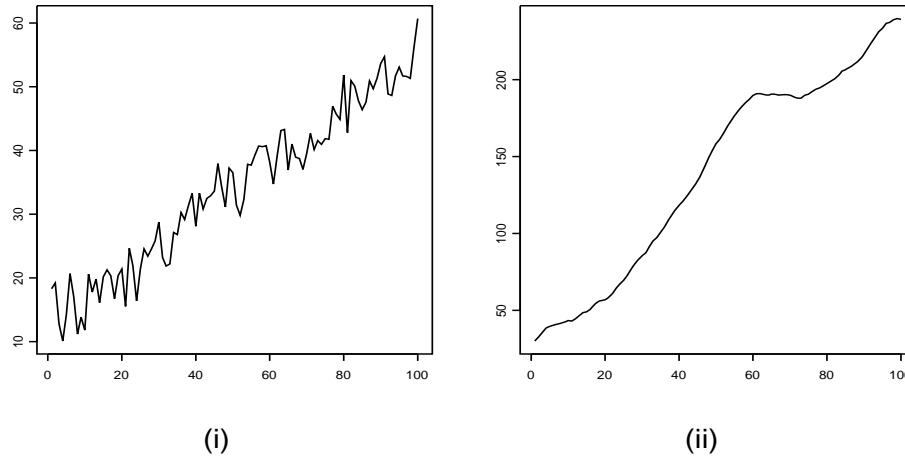
که نشان می‌دهد میانگین $\{X_t\}$ تابعی خطی با شیب غیر تصادفی $\theta_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ است. بخصوص برای سریهای $IMA(1, q)$ این شیب همان θ_0 است. بنابراین در مصادیق مدل (۶.۵) به ازای $d = 1$ روند خطی قطعی کاملاً مشهود است. این وضعیت در سریهای شبیه سازی شده شکل (۷.۵) کاملاً مشهود است. چگونگی این شبیه سازی‌ها در تمرین (۴.۵) آمده است.

در حالت کلی وقتی $d \geq 1$ ، وجود θ_0 معادل وجود یک روند چند جمله‌ای درجه d است که در آن عبارت درجه d ام غیر تصادفی است. بنابراین از مدل (۶.۵) می‌توان برای مدل سازی سریهایی مشابه سریهای شکل (۱.۵-i) و (۱.۵-iv) نیز استفاده کرد. وقتی $d \geq 1$ ، از مطالب فوق نتیجه می‌شود $\theta_0 \neq 0$ (به طور معادل $\mu_W \neq 0$) معادل وجود روندی قطعی است. بنابراین در مواجهه با یک مصداق، روندهای مشکوک به تصادفی یا قطعی را می‌توان با آزمون فرض $H_0: \mu_W = 0$ در مقابل $H_1: \mu_W \neq 0$ آزمون کرد (مثال‌های فصل ششم را ببینید).

۴.۵ پیش‌بینی سریهای ARIMA

در این بخش با چگونگی محاسبه پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARIMA با و بدون رانش آشنا خواهیم شد. در صورتی که $\theta_0 = 0$ باشد از تساوی (۲.۵) داریم،

$$X_t = W_t - \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} (-1)^i X_{t-i},$$



شکل ۷.۵: (i): مصداقی از مدل $IMA(1,1)$ با رانش $\theta_0 = 0.5$ به ازای $\sigma^2 = 10$ ، $\theta = -0.7$. (ii): مصداقی از مدل $ARI(1,1)$ با رانش $\theta_0 = 0.5$ به ازای $\sigma^2 = 1$ ، $\phi = 0.7$.

اگر قرار دهیم $t = n + l$ و P_n را بر طرفین اعمال کنیم (برای بحث دقیقتر به براکول و دیویس () مراجعه کنید) آنگاه

$$P_n X_{n+l} = P_n W_{n+l} - \sum_{i=1}^l \binom{l}{i} (-1)^i P_n X_{n+l-i}. \quad (8.5)$$

با توجه به اینکه $\{W_t\}$ یک سری $ARMA(p, q)$ با میانگین صفر است با استفاده از روشهای فصل سوم $P_n W_{n+l}$ ها را محاسبه کرده و $P_n X_{n+l}$ را به طور بازگشتی از (۸.۵) به دست می آوریم.

مثال (۵.۵): $X_{99} = 94.8$ ، $X_{100} = 95.2$ دو مشاهده آخر سری شکل (۶.۵-i) هستند. این سری مصداقی است از مدل $(1 - 0.7B)(1 - B)X_t = Z_t$ ، که $\{Z_t\}$ نوفه سفید گاوسی با واریانس یک است. بنابراین از (۸.۵) داریم،

$$\begin{aligned} P_{100} X_{100+l} &= P_{100} W_{100+l} + P_{100} X_{100+l-1} \\ &= (0.7)^l \times W_{100} + P_{100} X_{99+l} \end{aligned} \quad (9.5)$$

اما $W_{100} = X_{100} - X_{99} = 0.4$ پس برای $l = 1$

$$P_{100} X_{101} = 0.7 \times 0.4 + 95.2 = 95.48$$

و برای $l = 2$

$$P_{100} X_{102} = (0.7)^2 \times 0.4 + 95.48 = 95.68$$

والی آخر. در این مثال به سادگی می توان یک ضابطه صریح بر حسب l برای محاسبه این پیش بینی ها به دست آورد. برای این منظور از رابطه بازگشتی (۹.۵) داریم

$$P_{100} X_{100+l} = (0.7)^l \times W_{100} + P_{100} X_{99+l}$$

$$\begin{aligned}
&= ((0.7)^l + (0.7)^{l-1} + \dots + 0.7)W_{100} + X_{100} \\
&= \frac{0.7(1 - (0.7)^l)}{1 - 0.7}(X_{100} - X_{99}) + X_{100} \\
&= 96.13 - 0.93 \times (0.7)^l.
\end{aligned}$$

مثال (۶.۵): سری شکل (۵.۵-i) را در نظر بگیرید. این سری مصدافی از مدل $IMA(1,1)$ با $\theta = 0.7$ و $\sigma^2 = 1$ است. برای محاسبه $P_{100}X_{100+l}$ به ازای $l = 1, 2, 3$ با استفاده از دستور

`FORE.INN(diff(data), 0, .7, 1, 3)$FORECAST`

مقادیر $P_{100}W_{101} = -0.295$, $P_{100}W_{102} = 0$, $P_{100}W_{103} = 0$ را حساب می‌کنیم. با استفاده از (۸.۵) به ازای $l = 1$ و با توجه به اینکه $X_{100} = -9.263$

$$P_{100}X_{101} = P_{100}W_{101} + X_{100} = -9.559$$

برای $l = 2$

$$P_{100}X_{102} = P_{100}W_{102} + P_{100}X_{101} = -9.559$$

برای $l = 3$

$$P_{100}X_{103} = P_{100}W_{103} + P_{100}X_{102} = -9.559.$$

حال فرض کنید $\{X_t\}$ یک سری $ARIMA(p, d, q)$ با رانش θ_0 است. تعریف می‌کنیم $W_t = W_t - \mu_W$ که $W_t' = W_t - \mu_W$ و در (۸.۵) قرار می‌دهیم نتیجه $W_t = W_t' + \mu_W$ می‌شود

$$\begin{aligned}
P_n X_{n+l} &= P_n (W_{n+l}' + \mu_W) - \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} (-1)^i P_n X_{n+l-i} \\
&= P_n W_{n+l}' + \mu_W - \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} (-1)^i P_n X_{n+l-i}, \quad (10.5)
\end{aligned}$$

که در آن $\{W_t'\}$ یک سری $ARMA(p, q)$ با میانگین صفر است. بنابراین به کمک روشهای فصل سوم $P_n W_{n+l}'$ ها را محاسبه کرده و $P_n X_{n+l}$ ها را به طور بازگشتی از (۱۰.۵) محاسبه می‌کنیم. مثال (۷.۵): سری شکل (۷.۵-ii) را که مصدافی است از

$$(1 - B)(1 - 0.7B)X_t = 0.5 + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

در نظر بگیرید. برای این سری $\mu_W = 5/3$ و $W'_t = W_t - 5/3$. بخصوص با توجه به اینکه $X_{100} = 239.16$ و $X_{99} = 239.75$ ، $W'_{100} = -2.257$. بنابراین از (۱۰.۵) داریم

$$\begin{aligned} P_{100}X_{100+l} &= P_{100}W'_{100+l} + \mu_W + P_{100}X_{100+l-1} \\ &= (0.7)^l \times (-2.257) + \frac{5}{3} + P_{100}X_{100+l-1} \end{aligned}$$

برای $l = 1$ ،

$$P_{100}X_{101} = 0.7 \times (-2.257) + \frac{5}{3} + X_{100} = 239.25$$

برای $l = 2$ ،

$$P_{100}X_{102} = (0.7)^2 \times (-2.257) + \frac{5}{3} + P_{100}X_{101} = 239.81$$

و الی آخر. در حالت کلی می‌توان نشان داد،

$$\begin{aligned} P_{100}X_{100+l} &= \frac{0.7(1 - (0.7)^l)}{1 - 0.7} W'_{100} + \frac{5}{3}l + X_{100} \\ &= 233.894 + \frac{5}{3}l + 7.523 \times (0.7)^{l+1}. \end{aligned}$$

با توجه به (۴.۵)، و اینکه $\{X_t\}$ یک سری $ARMA(p+d, q)$ عکس پذیر است، $\tilde{P}_n X_{n+l}$ را می‌توان از روابط (۲۶.۴) به دست آورد که در اینجا π_j ها از تساوی $\pi(B)\theta_q(B) = \phi_{p+d}^*(B) = \phi_p(B)(1-B)^d$ و $\pi_j^{(l)}$ ها مثل قبل از (۳۰.۴) محاسبه می‌شوند. در اینجا هر چند $\{X_t\}$ سببی نیست اما می‌توان نشان داد، مثل حالت سببی $Var(\tilde{e}_n(l)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$ که در اینجا ψ_j ها از تساوی $\psi(B)\phi_p(B)(1-B)^d = \theta_q(B)$ به دست می‌آیند (وگمن^۱ ۱۹۸۵ یا وی ۱۹۹۰ را ببینید).
مثال (۸.۵): فرض کنید $\{X_t\} \sim IMA(1, 1)$ و $|\theta| < 1$ ، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_j = -(-\theta)^{j-1}(1+\theta), \quad j \geq 1$$

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_j = (1+\theta), \quad j \geq 1$$

بنابراین $\tilde{P}_n X_{n+1}$ و واریانس خطای نظیرش عبارتند از،

$$\tilde{P}_n X_{n+1} = (1+\theta) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{j-1} X_{n+1-j}, \quad Var(\tilde{e}_n(1)) = \sigma^2.$$

برای $l = 2$ ،

$$\begin{aligned} \pi_j^{(2)} &= \pi_1 \pi_j - \pi_{j+1} = (1+\theta)^2 (-\theta)^{j-1} + (-\theta)^j (1+\theta) \\ &= (1+\theta)(-\theta)^{j-1}(1+\theta-\theta) = -\pi_j = \pi_j^{(1)}. \end{aligned}$$

^۱ Wegman

در نتیجه $\tilde{P}_n X_{n+2} = \tilde{P}_n X_{n+1}$ ، با واریانس خطای $Var(\tilde{e}_n(2)) = \sigma^2(1 + (1 + \theta)^2)$ در حالت کلی، با کمی محاسبات جبری ثابت می‌شود که $\pi_j^{(l)} = \pi_j^{(1)}$ و در نتیجه $\tilde{P}_n X_{n+l} = \tilde{P}_n X_{n+1}$ ، با واریانس خطای

$$Var(\tilde{e}_n(l)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 = \sigma^2(1 + (1 + \theta)^2(l - 1)).$$

با تابع *FORECAST* برای محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ های یک سری ARMA در فصل قبل آشنا شدیم. از این تابع برای محاسبه مقادیر $\tilde{P}_n X_{n+l}$ یک سری ARIMA نیز می‌توان استفاده کرد. برای این منظور کافی است دستور $FORECAST(data, \phi^*, \theta, \sigma^2, l)$ را به کار ببریم. که در آن ϕ^* بردار ضرایب اتورگرسیو تعمیم یافته در (۴.۵) است. به عنوان مثال برای سری شکل (۵.۵-i) که مصدق از مدل $IMA(1, 1)$ با $\theta = 0.7$ و $\sigma^2 = 1$ است، $\phi^* = 1$ و استفاده از دستور $FORECAST(data, 1, .7, 1, 3)$ منجر به مقادیر زیر می‌شود.

$$\tilde{P}_{100} X_{101} = -9.559, \quad Var(\tilde{e}_{100}(1)) = 1.00$$

$$\tilde{P}_{100} X_{102} = -9.559, \quad Var(\tilde{e}_{100}(2)) = 3.89$$

$$\tilde{P}_{100} X_{103} = -9.559, \quad Var(\tilde{e}_{100}(3)) = 6.78.$$

تابع $arima.forecast(data, model = list(ndiff = d, ar = \phi, ma = -\theta), sigma2 = \sigma^2, l)$ از توابع S-PLUS را نیز برای محاسبه پیش‌بینی های یک سری ARIMA می‌توان به کار برد.

نتایج به دست آمده در مثال (۸.۵) را می‌توان به عنوان وضعیت حدی نتایج مثال (۶.۴) وقتی $\phi \rightarrow 1$ نیز به دست آورد. تفاوت رفتار پیش‌بینی‌ها و واریانس خطای آنها در این دو مثال قابل تأمل است. در حالت ایستا پیش‌بینی‌ها به صفر (میانگین سری) همگرا می‌شوند، رفتاری که برای سریهای ایستای ARMA از هر مرتبه‌ای عمومیت دارد. اما در حالتی که $\phi = 1$ است همانطور که دیدیم، پیش‌بینی‌ها مقداری ثابت دارند که برابر $\tilde{P}_n X_{n+1}$ همانطور که در بخش (۵.۵) خواهیم دید چنین رفتاری عمومیت نداشته و کاملاً به مدل وابسته است. تفاوت دیگر در رفتار $Var(\tilde{e}_n(l))$ دیده می‌شود. در حالت نایستا ($\phi = 1$) این واریانس بدون کران افزایش می‌یابد رفتاری که برای سریهای ARIMA عمومیت دارد. اما در حالتی که $|\phi| < 1$ است (مثال ۶.۴) این واریانس به مقدار حدی $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2})$ (که وابسته به مدل است) میل می‌کند.

نکته قابل تأمل دیگر در مثال (۸.۵) این است که پیش‌بینی‌های $\tilde{P}_n X_{n+l}$ مقداری ثابت و برابر با یک ترکیب خطی از عناصر سری با ضرایب نمایی میرا دارند. قبلاً چنین پیش‌بینی‌هایی را در استفاده از روش هموارسازی نمایی ساده (بخش ۱.۲) دیده بودیم. در واقع پیش‌بینی‌های حاصل از روش هموارسازی نمایی ساده را می‌توان توسط مدل $IMA(1, 1)$ نیز به دست آورد، زیرا اگر $\{X_t\} \sim IMA(1, 1)$

باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n X_{n+l} &= \tilde{P}_n X_{n+1} = (1 + \theta)X_n + (1 + \theta) \sum_{j=2}^{+\infty} (-\theta)^{j-1} X_{n+1-j} \\ &= (1 + \theta)X_n - \theta(1 + \theta) \sum_{j=1}^{+\infty} (-\theta)^{j-1} X_{n-j} = (1 + \theta)X_n - \theta \tilde{P}_{n-1} X_n,\end{aligned}$$

که اگر قرار دهیم $\alpha = 1 + \theta$ و $S_n = \tilde{P}_n X_{n+1}$ همان رابطه (۵.۲) حاصل می‌شود. بنابراین پیش‌بینی‌های حاصل از انتخاب مدل کلاسیک (۱.۲) و استفاده از روش هموارسازی نمایی ساده را می‌توان به کمک مدل $IMA(1, 1)$ نیز به دست آورد. با این تفاوت که روش دوم تضمین می‌کند این پیش‌بینی‌ها نه تنها برای سریهای بدون روند بلکه برای سریهای ناپایدار مشابه سریهای شکل (۵.۵) نیز بهترین پیش‌بینی‌های خطی‌اند. علاوه بر این در روش دوم دامنه مقادیر α وسیعتر شده است ($0 < \alpha < 2$) با اینکار به ضرایب پیش‌بینی امکان داده‌ایم که منفی نیز باشند (به ازای $1 < \alpha < 2$) به عبارت دیگر پیش‌بینی‌های بیشتری برای یافتن بهترین پیش‌بین مقایسه می‌شوند. همچنین تعیین ثابت هموارسازی که یکی از مشکلات در استفاده از روش هموارسازی نمایی ساده است معادل با تعیین θ در استفاده از مدل $IMA(1, 1)$ است. همانطور که در فصل ششم خواهیم دید θ یعنی پارامتر مدل را به کمک روشهای خوب آماری می‌توان برآورد کرد. چنین وضعیتی برای هموارسازیهای مراتب بالاتر نیز وجود دارد و نتایج حاصل از آنها را می‌توان توسط مدل‌های میانگین متحرک جمع بسته به دست آورد (آبراهام^۱ و لدولتر^۲، ۱۹۸۳ را ببینید).

پیش‌بینی‌های $\tilde{P}_n X_{n+l}$ یک سری ARIMA با رانش θ_0 را می‌توان از روابطی مشابه (۲۶.۴) نیز محاسبه کرد. برای به دست آوردن چنین روابطی از اینکه سری $\{W_t - \mu_W\}$ یک سری عکس‌پذیر با میانگین صفر است می‌توان نوشت،

$$\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}(W_t - \mu_W) = Z_t,$$

و در نتیجه

$$\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}W_t = \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}\mu_W + Z_t = \frac{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_q}\mu_W + Z_t = \frac{\theta_0}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_q} + Z_t$$

از طرفی

$$\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}W_t = \frac{\phi_p(B)(1 - B)^d}{\theta_q(B)}X_t = \pi(B)X_t,$$

بنابراین

$$X_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \frac{\theta_0}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_q} + Z_t,$$

^۱ Abraham

^۲ Ledolter

قرار می‌دهیم $t = n + l$ و \tilde{P}_n را اعمال می‌کنیم.

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{P}_n X_{n+l-j} + \frac{\theta_0}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_q}. \quad (11.5)$$

بنابراین کافی است π_j ها را از تساوی $\pi(B)\theta_q(B) = \phi_p(B)(1-B)^d$ به دست آورده و پیش‌بینی‌ها را به طور بازگشتی از (۱۱.۵) محاسبه کنیم. به ترتیبی که در بخش (۷.۴) عمل کردیم، می‌توان این پیش‌بینی‌ها را به طور صریحی بر حسب $\{X_t : t \leq n\}$ نیز نوشت و تساوی زیر را ثابت کرد.

$$\tilde{P}_n X_{n+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} X_{n+1-j} + C^{(l)}, \quad (12.5)$$

که در آن $\pi_j^{(l)}$ ها از روابط (۲۹.۴) و (۳۰.۴) محاسبه می‌شوند و $C^{(l)}$ ها نیز از

$$C^{(l)} = \begin{cases} \frac{\theta_0}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_q} & l = 1 \\ C^{(1)} - \sum_{j=1}^{l-1} \pi_j C^{(l-j)} & l \geq 2 \end{cases}. \quad (13.5)$$

به دست می‌آیند. نکته قابل توجه در (۱۲.۵) این است که $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} X_{n+1-j}$ پیش‌بینی X_{n+l} حاصل مدل ARIMA به ازای $\theta_0 = 0$ است. بنابراین برای $l \geq 1$ ، $C^{(l)}$ برابر اختلاف پیش‌بینی‌های حاصل از دو مدل ARIMA با و بدون رانش است. به عبارت دیگر $C^{(l)}$ مقدار تغییر در پیش‌بینی را وقتی θ_0 به مدل اضافه می‌شود نشان می‌دهد.

مثال (۹.۵): برای سری $ARI(1,1)$ ، در حالت کلی $\pi_j^{(l)}$ ها به ازای $z \geq 3$ صفرند. در حالت خاص سری شکل (۷.۵-ii) مقادیر غیر صفر $\pi_j^{(l)}$ به ازای $l = 1, 2, 3$ را محاسبه کرده و به همراه دو مشاهده آخرین سری در جدول (۱.۵) آورده‌ایم. از (۱۳.۵) به ازای $l = 1, 2, 3$ ، مقادیر $C^{(1)} = 0.5$ ، $C^{(2)} = 1.35$ ، $C^{(3)} = 2.445$ در نتیجه

$$\tilde{P}_{100} X_{101} = \pi_1^{(1)} X_{100} + \pi_2^{(1)} X_{99} + C^{(1)} = 238.75 + 0.5 = 239.25$$

$$\tilde{P}_{100} X_{102} = \pi_1^{(2)} X_{100} + \pi_2^{(2)} X_{99} + C^{(2)} = 238.46 + 1.35 = 239.81$$

$$\tilde{P}_{100} X_{103} = \pi_1^{(3)} X_{100} + \pi_2^{(3)} X_{99} + C^{(3)} = 238.26 + 2.445 = 240.70.$$

از تابع $FORECAST$ به شکل $FORECAST(data, \theta_0 = \theta_0, \phi, \theta, \sigma^2, l)$ برای محاسبه پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل ARIMA با رانش θ_0 می‌توان استفاده کرد.

t	X_t	j	$\pi_j^{(1)}$	$\pi_j^{(2)}$	$\pi_j^{(3)}$
100	239.16	1	1.7	2.19	2.533
99	239.75	2	-0.7	-1.19	-1.533

جدول ۱.۵: دو مشاهده آخر سری مثال (۹.۵) به همراه ضرایب $\pi_j^{(l)}$.

۵.۵ تابع پیش‌بینی غائی و رفتار پیش‌بینی‌های یک سری ARIMA

در بخش قبل با چگونگی محاسبه پیش‌بینی‌های یک سری ARIMA آشنا شدیم. در این بخش به کمک تابع پیش‌بینی غائی در ماهیت و رفتار این پیش‌بینی‌ها در دو حالت $\theta_0 = 0$ و $\theta_0 \neq 0$ بحث خواهیم کرد. در صورتی که $\theta_0 = 0$ باشد از بحثی مشابه آنچه در بخش (۸.۴) داشتیم نتیجه می‌گیریم که تابع پیش‌بینی غائی در مبدأ پیش‌بینی n عبارت است از:

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}l + \dots + C_d^{(n)}l^{d-1} + C_{d+1}^{(n)}F_1^{(l)} + \dots + C_{d+p}^{(n)}F_p^{(l)} \quad (۱۴.۵)$$

که در آن ضرایب $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_{d+p}^{(n)}$ از حل معادلات

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}, \quad l = q, q-1, \dots, q-p-d+1, \quad (۱۵.۵)$$

به دست می‌آیند. خاصیت تابع پیش‌بینی غائی که به ما امکان تبیین رفتار پیش‌بینی‌ها را می‌دهد این است که مقادیر این تابع به ازای $l \geq q-p-d+1$ با پیش‌بینی‌های $\tilde{P}_n X_{n+l}$ برابرند. از (۱۴.۵) بدیهی است که اگر $p=0$ تابع پیش‌بینی غائی چند جمله‌ای درجه $(d-1)$ ام، $C_1^{(n)} + C_2^{(n)}l + \dots + C_d^{(n)}l^{d-1}$ است و در صورتی که $p \neq 0$ ، با توجه به همگرایی $F_j(l)$ ‌ها به صفر، $\tilde{P}_n(l)$ به طور مجانبی به این چند جمله‌ای نزدیک می‌شود.

مثال (۱۰.۵): اگر $\{X_t\} \sim IMA(1, q)$ باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)}$$

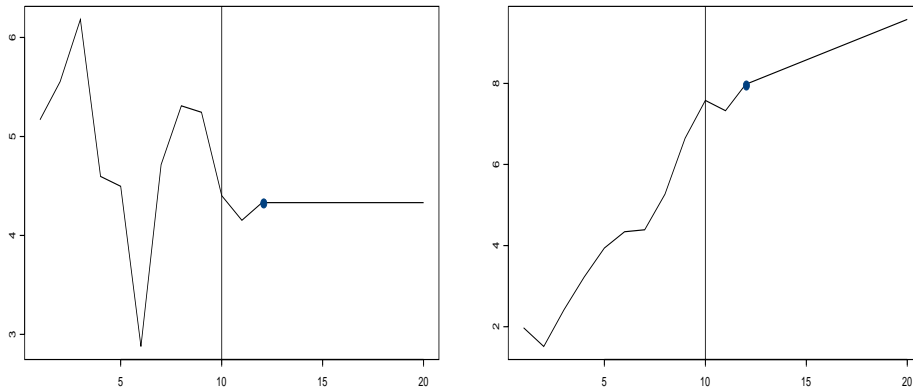
و از (۱۵.۵) به ازای $l = q$ ، $C_1^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q}$ پس

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = \tilde{P}_n X_{n+q}, \quad l \geq q$$

به عبارت دیگر پیش‌بینی‌ها بعد از $(q-1)$ مقدار اولیه، برابر مقدار ثابت $\tilde{P}_n X_{n+q}$ خواهند بود. شکل (۸.۵-۱) این وضعیت را به ازای $q=2$ نشان می‌دهد. بدیهی است در صورتی که $q=0$ ، یعنی $\{X_t\}$ قدم زدن تصادفی باشد این مقدار ثابت برابر با X_n است.

مثال (۱۱.۵): اگر $\{X_t\} \sim IMA(2, q)$ باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}l$$



شکل ۵.۸: نمودار تابع پیش‌بینی غائی مدل $IMA(1,2)$ ، (i) بدون رانش و (ii) با رانش θ_0 ، $(\theta_0 > 0)$.

که $C_1^{(n)}$ و $C_2^{(n)}$ از حل معادلات (۱۵.۵) به ازای $l = q - 1$ و $l = q$ یعنی

$$\begin{cases} \tilde{P}_n(q-1) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}(q-1) = \tilde{P}_n X_{n+q-1} \\ \tilde{P}_n(q) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}q = \tilde{P}_n X_{n+q} \end{cases}$$

به دست می‌آیند. جواب این معادلات عبارت است از

$$C_1^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q} - (\tilde{P}_n X_{n+q} - \tilde{P}_n X_{n+q-1})q, \quad C_2^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q} - \tilde{P}_n X_{n+q-1}$$

و در نتیجه

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = \tilde{P}_n X_{n+q} + (\tilde{P}_n X_{n+q} - \tilde{P}_n X_{n+q-1})(l - q), \quad l \geq q - 1$$

از نظر هندسی $\tilde{P}_n(l)$ خط راستی است که از دو نقطه $(q, \tilde{P}_n X_{n+q})$ و $(q-1, \tilde{P}_n X_{n+q-1})$ ، (نسبت به مبدأ n) می‌گذرد. در صورتی که $q = 0$ این خط از نقاط $(0, X_n)$ ، $(-1, X_{n-1})$ می‌گذرد. شکل (۹.۵-i) این تابع را وقتی $q = 0$ نشان می‌دهد.

مثال (۱۲.۵): اگر $\{X_t\} \sim ARI(1,1)$ باشد آنگاه

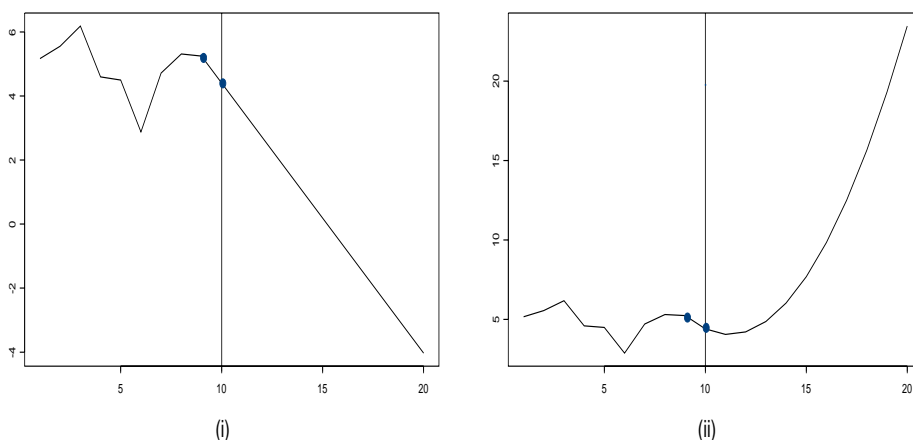
$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}\phi^l$$

که $C_1^{(n)}$ و $C_2^{(n)}$ از حل معادلات (۱۵.۵) به ازای $l = 0$ و $l = -1$ یعنی

$$\begin{cases} C_1^{(n)} + \phi^{-1}C_2^{(n)} = X_{n-1} \\ C_1^{(n)} + C_2^{(n)} = X_n \end{cases}$$

به دست می‌آیند. جواب این دستگاه عبارت است از

$$C_1^{(n)} = X_n + \frac{\phi}{1-\phi}(X_n - X_{n-1}), \quad C_2^{(n)} = -\frac{\phi}{1-\phi}(X_n - X_{n-1}).$$



شکل ۹.۵: نمودار تابع پیش‌بینی غائی مدل $IMA(2, 0)$ ، (i) بدون رانش و (ii) با رانش θ_0 ، $(\theta_0 > 0)$.

در نتیجه

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = X_n + (X_n - X_{n-1}) \frac{\phi(1 - \phi^l)}{1 - \phi}, \quad l \geq -1$$

که به طور مجانبی به مقدار ثابت

$$X_n + (X_n - X_{n-1}) \frac{\phi}{1 - \phi} = \frac{X_n - \phi X_{n-1}}{1 - \phi},$$

میل می‌کند. نمودار چنین تابعی به ازای $-1 < \phi < 0$ در شکل (i-۱۰.۵) رسم شده است. در صورتی که $\tilde{P}_n(l)$ ، $\theta_0 \neq 0$ در معادله تفاضلی غیر همگن

$$\phi_p(B)(1 - B)^d \tilde{P}_n(l) = \theta_0,$$

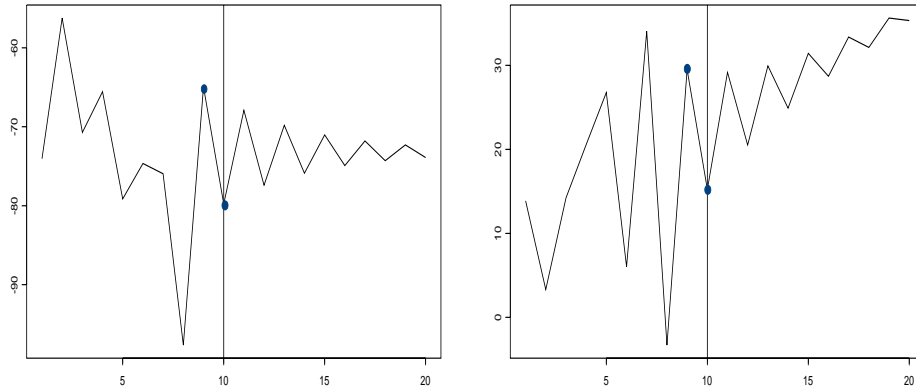
صدق می‌کند. با توجه به اینکه $\frac{\mu W}{d!} l^d = \frac{\theta_0}{d!(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)} l^d$ یک جواب خصوصی این معادله تفاضلی است جواب عمومی مجموع این جواب با (۱۴.۵) است. یعنی،

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)} l + \dots + C_d^{(n)} l^{d-1} + \frac{\mu W}{d!} l^d + C_{d+1}^{(n)} F_1(l) + \dots + C_{d+p}^{(n)} F_p(l) \quad (16.5)$$

که ضرایب $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_{d+p}^{(n)}$ از حل معادلات (۱۵.۵) تعیین می‌گردند. بنابراین اگر $p = 0$ تابع پیش‌بینی غائی چند جمله‌ای درجه d ام، $\frac{\mu W}{d!} l^d + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} l + \dots + C_d^{(n)} l^{d-1}$ است. که در آن عبارت درجه d ام فارغ از X_t ها و قطعی است. در صورتی که $p \neq 0$ ، این چند جمله‌ای مجانب $\tilde{P}_n(l)$ است.

مثال (۱۳.۵): اگر $\{X_t\} \sim IMA(1, q)$ با رانش θ_0 باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + \theta_0 l$$



شکل ۱۰.۵: نمودار تابع پیش‌بینی غائی مدل $ARI(1,1)$ ، (i) بدون رانش و (ii) با رانش θ_0 ، $(\theta_0 > 0)$.

و از (۱۵.۵) به ازای $l = q$ ، $C_1^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q} - q\theta_0$ پس

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = \tilde{P}_n X_{n+q} + \theta_0(l - q), \quad l \geq q.$$

یعنی $\tilde{P}_n(l)$ خط ماربر نقطه $(q, \tilde{P}_n X_{n+q})$ با شیب θ_0 است. نمودار چنین تابعی به ازای $q = 2$ و $\theta_0 > 0$ در شکل (۸.۵-ii) رسم شده است.

مثال (۱۴.۵): اگر $\{X_t\} \sim IMA(2, q)$ با رانش θ_0 باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}l + \frac{\theta_0}{2}l^2$$

که $C_1^{(n)}$ و $C_2^{(n)}$ جواب دستگاه معادلات (۱۵.۵) به ازای $l = q - 1$ و $l = q$ یعنی،

$$\begin{cases} C_1^{(n)} + C_2^{(n)}(q-1) + \frac{\theta_0}{2}(q-1)^2 & = \tilde{P}_n X_{n+q-1} \\ C_1^{(n)} + C_2^{(n)}q + \frac{\theta_0}{2}q^2 & = \tilde{P}_n X_{n+q} \end{cases}$$

و برابرند با

$$C_2^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q} - \tilde{P}_n X_{n+q-1} - \theta_0 q + \frac{\theta_0}{2}, \quad C_1^{(n)} = \tilde{P}_n X_{n+q} - \frac{\theta_0}{2}q^2 - C_2^{(n)}q$$

و در نتیجه برای $l \geq q - 1$

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = \left(\tilde{P}_n X_{n+q} - \frac{\theta_0}{2}q^2\right) + \left(\tilde{P}_n X_{n+q} - \tilde{P}_n X_{n+q-1} - \theta_0 q + \frac{\theta_0}{2}\right)(l - q) + \frac{\theta_0}{2}l^2.$$

از نظر هندسی نمودار تابع $\tilde{P}_n(l)$ منحنی درجه دومی با عبارت درجه دوم $\frac{\theta_0}{2}l^2$ است که از نقاط $(q-1, \tilde{P}_n X_{n+q-1})$ و $(q, \tilde{P}_n X_{n+q})$ می‌گذرد. چنین وضعیتی در شکل (۹.۵-ii) به ازای $q = 0$ و $\theta_0 > 0$ نشان داده شده است.

مثال (۱۵.۵): اگر $\{X_t\} \sim ARI(1,1)$ با رانش θ_0 باشد آنگاه $\mu_W = \frac{\theta_0}{1-\phi}$ و

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + \mu_W l + C_2^{(n)} \phi^l$$

که $C_1^{(n)}$ و $C_2^{(n)}$ از حل معادلات (۱۵.۵) به ازای $l = -1$ و $l = 0$ یعنی

$$\begin{cases} C_1^{(n)} - \mu_W + \phi^{-1} C_2^{(n)} = X_{n-1} \\ C_1^{(n)} + C_2^{(n)} = X_n \end{cases}$$

به دست می آیند. جواب این دستگاه عبارت است از

$$C_1^{(n)} = X_n + \frac{\phi}{1-\phi} (X_n - X_{n-1} - \mu_W), \quad C_2^{(n)} = -\frac{\phi}{1-\phi} (X_n - X_{n-1} - \mu_W).$$

در نتیجه

$$\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} = X_n + \mu_W l + (X_n - X_{n-1} - \mu_W) \frac{\phi(1-\phi^l)}{1-\phi}, \quad l \geq -1$$

که به طور مجانبی به خط

$$X_n + (X_n - X_{n-1} - \mu_W) \frac{\phi}{1-\phi} + \mu_W l,$$

میل می کند. نمودار چنین تابعی به ازای $-1 < \phi < 0$ و $\theta_0 > 0$ در شکل (۱۰.۵-ii) رسم شده است.

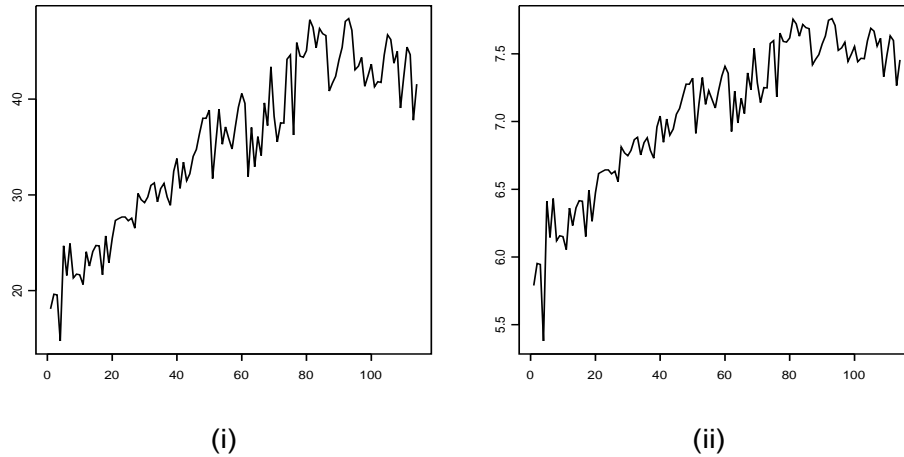
۶.۵ تبدیلات تثبیت کننده واریانس

تغییر در دامنه نوسانات سری مشاهده شده مشخصه‌ای دیگر از عدم ایستایی سری می باشد (نمودارهای ۱.۵-iii، ۴.۷ و ۵.۷ را ببینید). این تغییرات وقتی با تغییرات در سطح سری همراه است بیانگر این است که $Var(X_t)$ تابعی از μ_t است. در دو حالتی که ضابطه این تابع، معلوم باشد یا اینکه تقریباً متناسب با توانی از میانگین باشد به سادگی می توان تبدیلاتی را یافت که در تثبیت واریانس موثرند. فرض کنید $Var(X_t) = f(\mu_t)$ و $f(\cdot)$ معلوم باشد، مثل وقتی که X_t دارای توزیع پواسون است (در این حالت $f(x) = x$) یا وقتی که X_t دارای توزیع نمائی است (در این حالت $f(x) = x^2$). برای یافتن تبدیل $T(x)$ به طوری که $Var[T(X_t)]$ ثابت باشد از تقریب درجه اول تیلور $T(x)$ در نقطه μ_t یعنی $T(x) \approx \mu_t + T'(\mu_t)(x - \mu_t)$ که $T'(\mu_t) = \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=\mu_t}$ استفاده کرده و تقریب زیر را به دست می آوریم.

$$Var[T(X_t)] \approx [T'(\mu_t)]^2 Var(X_t) = [T'(\mu_t)]^2 f(\mu_t)$$

اگر قرار دهیم $c = [T'(x)]^2 f(x) = \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)^2 f(x)$ آنگاه

$$T(x) = c \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \quad (۱۷.۵)$$



شکل ۱۱.۵: (i): سری مثال (۱۸.۵) بعد از جذرگیری. (ii): سری مثال (۱۸.۵) بعد از تبدیل لگاریتمی.

تبدیلی است که به ازای آن $Var[T(X_t)] \approx c$ و به تبدیل تثبیت کننده واریانس معروف است. مثال (۱۶.۵): در صورتی که X_t دارای توزیع پواسون باشد آنگاه

$$T(x) = c \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = c\sqrt{x} + c'$$

به ازای هر مجموعه از مقادیر c و c' یک تبدیل تثبیت کننده واریانس است. در عمل از $T(X_t) = \sqrt{X_t}$ استفاده می‌کنیم. مثال (۱۷.۵): در صورتی که X_t دارای توزیع نمایی باشد آنگاه

$$T(x) = c \int \frac{dx}{x} = c \ln(x) + c'$$

و در عمل از تبدیل $T(X_t) = \ln(X_t)$ استفاده می‌کنیم.

از (۱۷.۵) بدیهی است که اگر $f(x) \propto x^k$ ، تبدیل تثبیت کننده واریانس یک تبدیل توانی به شکل X_t^λ ، (وقتی $k \neq 2$) یا $\ln(X_t)$ ، (وقتی $k = 2$) است. در چنین وضعیتی تبدیل مناسب را با تعیین مقدار λ می‌توان مشخص کرد. برای این منظور می‌توان λ را همراه سایر پارامترهای مدل برآورد کرد، در این مورد از تبدیل توانی به شکل

$$T_\lambda(X_t) = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(X_t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

که به تبدیل توانی باکس و کاکس^۱ (۱۹۶۴) معروف است و به عنوان تابعی از λ تابعی پیوسته است استفاده می‌شود. در این کتاب به طریق شهودی عمل کرده و از بررسی نمودار زمانی سریهای $\ln(X_t)$ و

^۱ Cox

X_t^λ به ازای مقادیر مختلف λ (معمولاً مقادیر $\lambda = \pm 2, \pm 1.5, \pm 1, \pm 0.5$ کفایت می‌کند.) λ ی مناسب را تشخیص می‌دهیم.

مثال (۱۸.۵): سری تولید سالانه توتون در کشور آمریکا (سری Se6 در پیوست ۲)، در نمودار (iii-۱.۵) مصداقی از یک سری با واریانس غیر ثابت است. برای تعیین تبدیل توانی مناسب نمودار زمانی سریهای تبدیل شده را به ازای λ های مختلف رسم کردیم. اثر دو تبدیلی که مناسبتر از باقی بود را در شکل (۱۱.۵) می‌بینید. اینطور به نظر می‌رسد تبدیل لگاریتمی در این مثال تبدیل مناسبی است.

۷.۵ تمرینات

۱.۵- نشان دهید:

الف) اگر $P_d(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$ آنگاه $\nabla^d P_d(t) = d!$

ب) اگر $\{Y_t\}$ یک سری ایستا باشد آنگاه $\{\nabla^d Y_t\}$ نیز ایستا است.

۲.۵- ضرایب π_j و ψ_j را برای مدل‌های زیر به دست آورید.

الف) $(1 - B)(1 - \phi B)X_t = (1 + \theta B)Z_t$

ب) $(1 - B)^2 X_t = (1 + \theta B)Z_t$

۳.۵- به کمک تابع *arima.sim* مصادیقی به طول 100 از هر یک از مدل‌های زیر شبیه سازی کنید. نمودار این سریها را به همراه نمودار توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی نمونه آنها تا تأخیر 25 رسم کنید.

الف) $(1 - B)(1 - 0.7B)X_t = Z_t$

ب) $(1 - B)X_t = (1 - 0.6B)Z_t$

ج) $(1 - B)(1 + .6B)X_t = (1 - .5B)Z_t$

در هر سه حالت $\{Z_t\} \sim WN(0, 1)$.

۴.۵- تابع

```
SIM.ARIMA111<-function(phi,theta0,theta,sigma2,n){
```

```
DAT<-0; DAT[1:2]<-0
```

```

INN<-rnorm((n+25),0,sigma2^.5)
for(t in 3:(n+25)){
  DAT[t]<-theta0+(1+phi)*DAT[t-1]-phi*DAT[t-2]+INN[t]+theta*INN[t-1]}
DAT<-DAT[26:(n+25)]
return(DAT)}

```

مشاهداتی از مدل $ARIMA(1, 1, 1)$ با رانش را شبیه سازی می کند. مصداقی به طول 100 از این مدل به ازای $\phi = 0.3$, $\theta_0 = 0.2$, $\theta = -0.7$ و $\sigma^2 = 10$ شبیه سازی کنید. نمودار این سری را به همراه نمودار توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی نمونه ای آن تا تاخیر 25 رسم کنید.

۵.۵- برای سربهای تمرین (۳.۵)،

(الف) $P_{100}X_{100+l}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5$ را حساب کنید.

(ب) $\tilde{P}_{100}X_{100+l}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5$ و پیش بینی های فاصله ای 95 درصد را به دست آورید. نمودار این پیش بینی ها را در ادامه سری رسم کنید. به کمک تابع *FORECAST* جواب خود را امتحان کنید.

(ج) در هر سه مورد به کمک ضابطه عمومی تابع پیش بینی غائی در رفتار پیش بینی ها بحث کنید.

۶.۵- برای سری که در تمرین (۴.۵) شبیه سازی کرده اید.

(الف) $P_{100}X_{100+l}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5$ را حساب کنید.

(ب) $\tilde{P}_{100}X_{100+l}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5$ و پیش بینی های فاصله ای 95 درصد را به دست آورید. نمودار این پیش بینی ها را در ادامه سری رسم کنید. به کمک تابع *FORECAST* جواب خود را امتحان کنید.

(ج) به کمک ضابطه عمومی تابع پیش بینی غائی در رفتار پیش بینی ها بحث کنید.

۷.۵- سری Se7 در پیوست ۲ و مدل جدول (۳.۶) را برای آن در نظر بگیرید. $\tilde{P}_{78}X_{78+l}$ و پیش بینی های فاصله ای 95 درصد را به ازای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ به دست آورید. نمودار این پیش بینی ها را در ادامه سری رسم کنید. به کمک ضابطه عمومی تابع پیش بینی غائی در رفتار پیش بینی ها بحث کنید.

۸.۵- سری Se9 در پیوست ۲ و مدل جدول (۳.۶) را برای آن در نظر بگیرید. $\tilde{P}_{197}X_{197+l}$ و پیش بینی های فاصله ای 95 درصد را به ازای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ به دست آورید. نمودار این پیش بینی ها را در ادامه سری رسم کنید. به کمک ضابطه عمومی تابع پیش بینی غائی در رفتار پیش بینی ها بحث کنید.

۹.۵ برای سری $IMA(1, 2)$,

الف) نشان دهید برای $l \geq 2, j \geq 1$ ، $\pi_j^{(l)} = \pi_j^{(2)}$.

ب) واریانس $\tilde{\epsilon}_n(l)$ را بیابید.

ج) مشاهدات $0.12, -1.05, 0.50, -0.75, -1.50, -1.94, -0.72, 0.18, -2.47, -2.77, \dots$ ده

مشاهده آخر مصدق به طول $n = 100$ از سری $IMA(1, 2)$ با پارامترهای $\theta_1 = -0.7$,

$\theta_2 = 0.2$ و $\sigma^2 = 1$ هستند. $\tilde{P}_{100} X_{100+l}$ را به ازای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ به همراه واریانس

خطای این پیش‌بینی‌ها و پیش‌بینی‌های فاصله‌ای 95 برای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ X_{100+l}

به دست آورید. فرض کنید $X_{101} = -1.31$ مشاهده شود با استفاده از تمرین (۲۲.۴)

$\tilde{P}_{101} X_{101+l}$ را به ازای $l = 1, 2, 3, 4$ حساب کنید.

۱۰.۵- نشان دهید برای مدل‌های ARIMA در صورتی که $d \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \pi_j^{(l)} = 1, \quad l \geq 1.$$

۱۱.۵- تساوی (۱۳.۵) را ثابت کنید.

۱۲.۵- تابع پیش‌بینی غائی مدل‌های زیر را در دو حالت $\theta_0 = 0$ و $\theta_0 \neq 0$ یافته و در رفتار پیش‌بینی‌ها

بحث کنید.

الف) $ARIMA(1, 1, 1)$

ب) $ARI(1, 2)$

۱۳.۵- تبدیلات تثبیت‌کننده واریانس را در حالات زیر بیابید.

الف) $Var(X_t) \propto \mu_t^{1/4}$

ب) $Var(X_t) \propto \mu_t^{1/2}$

فصل ۶

برآورد پارامترها

در این فصل با روشهایی برای برآورد پارامترهای یک مدل $ARIMA(p, d, q)$ آشنا می‌شویم. روشهایی چون، روش گشتاورها، به خصوص برآوردکننده‌های یول - واکر برای سریهای اتورگرسیو و روش مبتنی بر الگوریتم تحولها برای سریهای میانگین متحرک که در بخش (۱.۶) ارائه می‌شوند. روش برگ^۱ که روشی است برای برآورد پارامترهای یک سری اتورگرسیو در بخش (۲.۶)، روش هنان^۲ - ريسانن^۳ برای برآورد پارامترهای یک مدل مخلوط در بخش (۳.۶) و روشهای کمترین توانهای دوم شرطی و غیر شرطی و بیشترین درستنمایی شرطی و غیر شرطی در ادامه فصل معرفی می‌شوند. در سراسر این فصل فرض می‌کنیم مرتبه مدل یعنی (p, d, q) معلوم است و بدون اینکه از کلیت مسئله بکاهیم قرار می‌دهیم $d = 0$ و در صورتی که $d \geq 1$ باشد در کلیه این روشها $W_t = \nabla^d X_t$ را جایگزین X_t می‌کنیم.

۱.۶ روش گشتاورها

با برآوردکننده گشتاوری μ و خواص آن در بخش (۱.۵.۳) آشنا شدیم. در اینجا با برآوردکننده‌های گشتاوری $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ ، $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ و σ^2 آشنا می‌شویم. از دیدگاهی نظری در صورت وجود مقادیر $h = 0, 1, \dots, p + q + 1$ با حل دستگاهی شامل $q + 1$ معادله (۲۱.۴) و p معادله اول (۲۲.۴) یعنی معادلات،

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) + \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h}, \quad h = 0, 1, \dots, q \quad (1.6)$$

^۱ Burg
^۲ Hannan
^۳ Rissanen

و

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p), \quad h = q+1, q+2, \dots, q+p \quad (۲.۶)$$

می‌توان مقادیر پارامترهای فوق را تعیین کرد و در نتیجه با قرار دادن $\hat{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \dots, p+q+1$ به جای $\gamma(h)$ ها در این دستگاه معادلات و حل آن می‌توان برآوردکننده‌های گشتاوری $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q)'$ و $\hat{\sigma}^2$ را به دست آورد. آنچه مسلم است معادلات (۲.۶) که به معادلات یول - واکر گسترش یافته^۱ معروفند نسبت به ϕ_i ها خطی‌اند پس به سادگی قابل حل اند. اما معادلات (۱.۶) نسبت به پارامترها غیر خطی‌اند پس در حل دستگاه شامل این معادلات با مشکلات خاص چنین معادلاتی سر و کار پیدا خواهیم کرد. بنابراین در حالتی که $q = 0$ است به عبارت دیگر $\{X_t\}$ اتورگرسیو محض است این معادلات ساده‌ترین شکل خود را خواهند داشت. در این حالت برآوردکننده‌های گشتاوری $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)'$ از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}(0) + \hat{\phi}_2 \hat{\gamma}(1) + \dots + \hat{\phi}_p \hat{\gamma}(p-1) = \hat{\gamma}(1) \\ \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}(1) + \hat{\phi}_2 \hat{\gamma}(0) + \dots + \hat{\phi}_p \hat{\gamma}(p-2) = \hat{\gamma}(2) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}(p-1) + \hat{\phi}_2 \hat{\gamma}(p-2) + \dots + \hat{\phi}_p \hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(p) \end{cases} \quad (۳.۶)$$

و

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}(1) - \dots - \hat{\phi}_p \hat{\gamma}(p) \quad (۴.۶)$$

معادلات (۳.۶) به معادلات یول - واکر و جواب آنها به برآوردکننده‌های یول - واکر ϕ معروفند. این معادلات در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\hat{\Gamma}_p \hat{\phi} = \hat{\gamma}_p(1), \quad (۵.۶)$$

که همان معادله (۱۱.۳) است که در آن به جای $\gamma(h)$ ها، $\hat{\gamma}(h)$ ها را قرار داده‌ایم. بنابراین (بخصوص برای p های بزرگ) از الگوریتم دوربین - لوینسون نیز برای محاسبه $\hat{\phi}$ می‌توان استفاده کرد. توزیع مجانبی برآوردکننده‌های یول - واکر در قضیه زیر آمده است. اثباتی از این قضیه را می‌توان در براکول و دیویس (۱۹۹۱) یافت.

قضیه (۱.۶): اگر $\phi_p(B)X_t = Z_t$ سری اتورگرسیو سببی و Z_t ها مستقل از هم باشند. توزیع مجانبی برآوردکننده یول - واکر، $\hat{\phi}$ عبارتست از:

$$N_p\left(\phi, \frac{\sigma^2}{n} \Gamma_p^{-1}\right). \quad (۶.۶)$$

مثال (۱.۶): سری Se7 در پیوست ۲ شاخص Dow-Jones از 28 آگوست تا 18 دسامبر 1972 در بورس نیویورک را نشان می‌دهد. مدلی که برای برازش به این سری پیشنهاد شده $ARIMA(1, 1, 0)$ با

^۱ Extended Yule-Walker Equations

رانش (چگونگی شناسایی این مدل و مدل‌های پیشنهاد شده در سایر مثال‌های این فصل را در فصل بعد خواهیم دید.) یعنی مدل

$$(1 - \phi B)(W_t - \mu_W) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad (7.6)$$

است که در آن $W_t = \nabla X_t$. محاسبات برای سری تفاضلی شده نشان می‌دهند که

$$\bar{W} = 0.1336, \quad \hat{\gamma}_W(0) = 0.1799, \quad \hat{\gamma}_W(1) = 0.0759$$

در نتیجه $\hat{\phi} = \hat{\rho}_W(1) = 0.4219$ و $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_W(0) - \hat{\phi}\hat{\gamma}_W(1) = 0.1479$ و مدل برازش شده به روش یول - واکر عبارت است از

$$(1 - 0.4219B)(W_t - 0.1336) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.1479).$$

با استناد به قضیه (۲.۶)،

$$\hat{\phi} \approx N\left(\phi, \frac{\sigma^2}{n\gamma(0)}\right).$$

که به کمک آن فاصله اطمینان زیر برای ϕ به دست می‌آید،

$$\hat{\phi} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n\gamma(0)}}.$$

در عمل به جای σ^2 و $\gamma(0)$ برآورد آنها را قرار می‌دهیم. در این مثال، فاصله اطمینان 95 درصدی $0.4219 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.1479}{77 \times 0.1799}}$ یعنی (0.2194, 0.6244) برای ϕ به دست می‌آید. مثال (۲.۶): سری Se8 در پیوست ۲ تعداد لکه‌های خورشیدی از سال ۱۷۰۰ تا ۱۷۸۳ را نشان می‌دهد. در بررسی‌های انجام شده بعد از تبدیل $\sqrt{X_t}$ مدل $AR(2)$ با میانگین غیر صفر یعنی،

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(\sqrt{X_t} - \mu) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad (8.6)$$

برای برازش به این سری پیشنهاد می‌شود. اگر قرار دهیم $Y_t = \sqrt{X_t}$ آنگاه

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = 6.0837, \quad \hat{\gamma}_Y(0) = 7.1698, \quad \hat{\gamma}_Y(1) = 5.7770, \quad \hat{\gamma}_Y(2) = 3.1419$$

و معادلات یول - واکر عبارتند از

$$\begin{cases} 7.1698\hat{\phi}_1 + 5.7770\hat{\phi}_2 = 5.7770 \\ 5.7770\hat{\phi}_1 + 7.1698\hat{\phi}_2 = 3.1419 \end{cases}$$

با جواب $\hat{\phi}_1 = 1.2904$ و $\hat{\phi}_2 = -0.6016$ بعلاوه از (۴.۶)،

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_Y(0) - \hat{\phi}_1\hat{\gamma}_Y(1) - \hat{\phi}_2\hat{\gamma}_Y(2) = 1.6053$$

و نهایتاً از این روش مدل برازش شده

$$(1 - 1.2904B + 0.6016B^2)(\sqrt{X_t} - 6.0837) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1.6053).$$

حاصل می‌شود. با قرار دادن $\hat{\gamma}_Y(0)$ ، $\hat{\gamma}_Y(1)$ و $\hat{\sigma}^2$ در (۶.۶) توزیع تقریبی زیر را برای $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)'$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} \approx N_2 \left(\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \frac{1.6053}{84} \begin{bmatrix} 0.398 & -0.320 \\ -0.320 & 0.398 \end{bmatrix} \right).$$

و به کمک این توزیع تقریبی فواصل اطمینان ۹۵ درصدی زیر را برای ϕ_1 و ϕ_2 به دست می‌آوریم.

$$\phi_1 : (1.119, 1.461), \quad \phi_2 : (-0.773, -0.431).$$

از تابع $ar.yw(data, aic = F, order.max = p)$ در S-PLUS برای برازش مدل $AR(p)$ به یک سری می‌توان استفاده کرد. به عنوان مثال برای برازش مدل $AR(2)$ به سری $\sqrt{X_t}$ در مثال (۲.۶) از دستور $ar.yw(sqrt(Se8), aic = F, order.max = 2)$ استفاده می‌کنیم. با شناسه aic و کاربرد آن در فصل بعد آشنا می‌شویم.

در دو مثال قبل استفاده از توزیع مجانبی (۶.۶) را در ساخت فواصل اطمینان برای ϕ_j ها دیدیم. با استفاده از این توزیع مجانبی می‌توان نواحی اطمینان توأم نیز برای این پارامترها به دست آورد برای این منظور و به عنوان نتیجه‌ای از (۶.۶) به سادگی می‌توان نشان داد کمیت محوری،

$$\frac{n(\phi - \hat{\phi})' \Gamma_p(\phi - \hat{\phi})}{\sigma^2},$$

دارای توزیع کای - دو با p درجه آزادی است. و در نتیجه یک ناحیه اطمینان توأم با ضریب $100 \times (1 - \alpha)$ درصد برای $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ عبارتست از

$$\{\phi \in \mathbb{R}^p : \frac{n(\phi - \hat{\phi})' \Gamma_p(\phi - \hat{\phi})}{\sigma^2} \leq \chi_{p, \alpha}^2\}.$$

که در آن $\chi_{p, \alpha}^2$ نقطه بحرانی توزیع کای - دو با p درجه آزادی در سطح α است. چون Γ_p و σ^2 نامعلومند در عمل از تقریب زیر استفاده می‌کنیم.

$$\{\phi \in \mathbb{R}^p : \frac{n(\phi - \hat{\phi})' \hat{\Gamma}_p(\phi - \hat{\phi})}{\hat{\sigma}^2} \leq \chi_{p, \alpha}^2\}. \quad (9.6)$$

مثال (۳.۶): ناحیه اطمینان توأم ۹۵ درصدی برای $(\phi_1, \phi_2)'$ در مثال (۲.۶) عبارت است از

$$\left\{ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{84[\phi_1 - 1.2904 \phi_2 + 0.6016] \begin{bmatrix} 7.1698 & 5.7770 \\ 5.7770 & 7.1698 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - 1.2904 \\ \phi_2 + 0.6016 \end{bmatrix}}{1.6053} \leq 5.991 \right\},$$

که ناحیه داخلی و روی بیضی زیر است.

$$7.1698(\phi_1 - 1.2904)^2 + 11.554(\phi_1 - 1.2904)(\phi_2 + 0.6016) + 7.1698(\phi_2 + 0.6016)^2 = 0.1145.$$

اگر مدل اتورگرسیو برازش شده را با $\{Z_t\} \sim WN(0, \hat{\sigma}^2)$ نشان دهیم که در آن $\hat{\phi}_p(B)X_t = Z_t$ ، $\hat{\phi}_p(B) = 1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p$ آنگاه یکی از خواص برآوردکننده‌های یول - واکر این است که ریشه‌های $\hat{\phi}_p(B) = 0$ خارج دایره واحداند. به عبارت دیگر مدل اتورگرسیو برازش شده به روش یول - واکر سببی است.

قضیه (۲.۶): اگر $\hat{\phi}_p(B)X_t = Z_t$ مدل اتورگرسیو برازش شده به روش یول - واکر باشد آنگاه ریشه‌های $\hat{\phi}_p(B) = 0$ خارج دایره واحدند.

اثبات: فرض کنید اینطور نباشد و $\hat{\phi}_p(B) = 0$ ریشه‌ای چون b داشته باشد که $|b| \leq 1$. پس می‌توان $\hat{\phi}_p(B)$ را به صورت $\hat{\phi}_p(B) = (1 - \frac{1}{b}B)\xi_{p-1}(B)$ تجزیه کرد. که $\xi_{p-1}(B)$ یک چندجمله‌ای درجه $p-1$ با ریشه‌هایی خارج دایره واحد است. اگر تعریف کنیم $Y_t = \xi_{p-1}(B)X_t$ ، $\rho = \rho(Y_{p+1}, Y_p)$ و $\tilde{\phi}_p(B) = (1 - \rho B)\xi_{p-1}(B)$ در این صورت

$$\begin{aligned} E[X_{p+1} - \tilde{\phi}_1 X_p - \dots - \tilde{\phi}_p X_1]^2 &= E[\tilde{\phi}_p(B)X_{p+1}]^2 \\ &= E[Y_{p+1} - \rho Y_p]^2 \\ &\leq E[Y_{p+1} - \frac{1}{b}Y_p]^2 \\ &= E[\hat{\phi}_p(B)X_{p+1}]^2 \\ &= E[X_{p+1} - \hat{\phi}_1 X_p - \dots - \hat{\phi}_p X_1]^2 \end{aligned}$$

نامساوی برقرار است زیرا ρY_p بهترین پیش بین خطی Y_{p+1} است. اما تناقضی هم وجود دارد زیرا $\hat{\phi}_1 X_p + \hat{\phi}_2 X_{p-1} + \dots + \hat{\phi}_p X_1$ نیز بهترین پیش بین خطی X_{p+1} است و واریانس خطای آن کمتر از واریانس خطای هر پیش بین خطی دیگری از جمله $\tilde{\phi}_1 X_p + \tilde{\phi}_2 X_{p-1} + \dots + \tilde{\phi}_p X_1$ است. این تناقض اثبات قضیه را کامل می‌کند.

در اثبات قضیه فوق ترکیب خطی $\hat{\phi}_1 X_p + \hat{\phi}_2 X_{p-1} + \dots + \hat{\phi}_p X_1$ بهترین پیش بین خطی X_{p+1} است زیرا با توجه به روش برازش بردار $(X_1, X_2, \dots, X_{p+1})'$ یک بردار تصادفی با ماتریس کوواریانس $\Gamma_{p+1} = [\hat{\gamma}(i-j)]$ است و ضرایب $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)'$ از معادله (۱۱.۳) به دست آمده‌اند.

در صورتی که $q > 0$ باشد جوابهای غیر یکتا، غیر سببی، غیر عکس پذیر یا مختلط می‌توانند از حل معادلات (۱.۶) و (۲.۶) حاصل شوند. در دو مثال زیر با این موارد بیشتر آشنا می‌شویم.

مثال (۴.۶): اگر $\{X_t\} \sim MA(1)$ ، آنگاه از (۱.۶) به ازای $h = 0, 1$ داریم

$$\begin{cases} \hat{\gamma}(0) = \hat{\sigma}^2(1 + \hat{\theta}^2) \\ \hat{\gamma}(1) = \hat{\sigma}^2 \hat{\theta} \end{cases} \quad (۱۰.۶)$$

بعد از کمی محاسبات جبری خواهیم دید که $\hat{\theta}$ جواب معادله $\hat{\rho}(1)\hat{\theta}^2 - \hat{\theta} + \hat{\rho}(1) = 0$ است. این معادله برای $|\hat{\rho}(1)| > 0.5$ ریشه های مختلط دارد و در صورتی که $0 < |\hat{\rho}(1)| \leq 0.5$ دارای دو ریشه حقیقی است که عکس یکدیگرند. ریشه $\hat{\theta} = (1 - \sqrt{1 - 4\hat{\rho}(1)^2}) / (2\hat{\rho}(1))$ دارای قدر مطلق کمتر از یک و برآورد ما از θ است. در دو حالتی که $\hat{\rho}(1) \geq 0.5$ و $\hat{\rho}(1) \leq -0.5$ می توان $\hat{\theta}$ را به ترتیب 1 و -1 تعریف کرده و نهایتاً برآوردکننده زیر را ارائه کرد

$$\hat{\theta} = \begin{cases} -1 & \hat{\rho}(1) < -0.5 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4\hat{\rho}(1)^2}}{2\hat{\rho}(1)} & 0 < |\hat{\rho}(1)| < 0.5 \\ 1 & \hat{\rho}(1) > 0.5 \\ 0 & \hat{\rho}(1) = 0 \end{cases} \quad (11.6)$$

همچنین از اولین معادله در (۱۰.۶)، $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}(0)}{1 + \hat{\theta}^2}$ به دست می آید. سری Se9 در پیوست ۲ غلظت یک ماده شیمیایی را نشان می دهد که در فرآیند ساخت هر دو ساعت یکبار اندازه گیری شده است. مدل $IMA(1,1)$ با میانگین صفر یعنی

$$\nabla X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad (12.6)$$

برای این سری مدلی مناسب تشخیص داده شده است. برای سری $W_t = \nabla X_t$

$$\hat{\gamma}_W(0) = 0.1364, \quad \hat{\gamma}_W(1) = -0.0563, \quad \hat{\rho}_W(1) = -0.4128$$

که منجر به $\hat{\theta} = -0.5280$ و $\hat{\sigma}^2 = 0.1067$ و مدل برازش شده زیر می شود.

$$\nabla X_t = Z_t - 0.528Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.1067).$$

مثال (۵.۶): اگر $\{X_t\} \sim ARMA(1,1)$ باشد با توجه به (۱.۶) به ازای $h = 0, 1$ و اولین معادله (۲.۶) برآوردکننده های گشتاوری θ ، ϕ و σ^2 از حل دستگاه معادلات زیر حاصل می شوند.

$$\begin{cases} \hat{\gamma}(0) = \hat{\phi}\hat{\gamma}(1) + \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2\hat{\theta}(\hat{\theta} + \hat{\phi}) \\ \hat{\gamma}(1) = \hat{\phi}\hat{\gamma}(0) + \hat{\sigma}^2\hat{\theta} \\ \hat{\gamma}(2) = \hat{\phi}\hat{\gamma}(1) \end{cases}$$

از معادله آخر $\hat{\phi} = \frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(1)}$ به دست می آید اما برای محاسبه $\hat{\theta}$ باید یک معادله درجه دوم را حل کنیم. به عنوان مثال اگر $\hat{\gamma}(0) = 72.13$ ، $\hat{\gamma}(1) = 64.11$ و $\hat{\gamma}(2) = 48.51$ آنگاه $\hat{\phi} = 0.757$ و $\hat{\theta}$ از حل معادله $0 = \hat{\theta}^2 - 1.723\hat{\theta} + 1$ تعیین می شود و این در حالی است که این معادله ریشه حقیقی ندارد. در همین مثال اگر $|\hat{\gamma}(2)| > |\hat{\gamma}(1)|$ می بود، $|\phi| > 1$ حاصل می شد.

همانطور که در دو مثال قبل دیدیم در صورتی که $q > 0$ باشد، معادلات (۱.۶)، بر حسب θ و σ^2 غیر خطی اند. در حالت کلی اگر $\gamma(h)$ ها معلوم باشند به کمک روشهای عددی می توان مقادیر این پارامترها

را حساب کرد. برای این منظور و در حالتی که $p = 0$ است الگوریتم ویلسون^۱ (۱۹۶۹) و در حالت کلی تری که p نیز بزرگتر از صفر است الگوریتم چوی^۲ (۱۹۸۶) را می‌توان به کار برد. با توجه به یکتا نبودن جواب چنین معادلاتی، چوی (۱۹۸۷) انتخابهای اولیه‌ای را نیز پیشنهاد کرده که منجر به جواب عکس پذیر می‌شوند. اما در صورتی که $\hat{\gamma}(h)$ ها جایگزین $\gamma(h)$ گردند چنین چیزی تضمین نمی‌شود و جواب نهایی نسبت به انتخابهای اولیه خیلی حساسند. بعلاوه همانطور که در مثالهای (۴.۶) و (۵.۶) دیدیم $\hat{\gamma}(h)$ ها لزوماً مقید به قیدهای $\gamma(h)$ های نظیرشان نیستند که این هم می‌تواند به جوابهای غیر حقیقی، غیر عکس پذیر یا غیر سببی منجر گردد. علاوه بر این مشکلات، فقدان خواص خوب آماری برای این برآوردکننده‌ها (به عنوان مثال برآوردکننده^{۱۱.۶}) حتی به طور مجانبی کارا نیست، فولر ۱۹۷۶ یا براکول و دیویس ۱۹۹۱ را ببینید) و وجود برآوردکننده‌های بهتر، استفاده از این برآوردکننده‌ها را محدود می‌کند.

در ادامه این بخش با روشی گشتاوری مبتنی بر الگوریتم تحولاتها برای برآورد پارامترهای یک سری میانگین متحرک مرتبه^{۱۵.۳} q آشنا می‌شویم.

در مثال (۱۵.۳) استفاده از الگوریتم تحولاتها در پیش بینی سری میانگین متحرک مرتبه^{۱۷.۳} اول را دیدیم و در تمرین (۱۷.۳) نشان دادیم که $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{m1} = \theta$ و $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = \sigma^2$. در حالت کلی و برای یک سری $MA(q)$ می‌توان نشان داد که برای $\theta_{mk} = 0, k > q$ و برای $k \leq q$ $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{mk} = \theta_k$ همچنین $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = \sigma^2$.

حال فرض کنید $\{X_t\} \sim MA(q)$ و $\hat{\theta}_m = (\hat{\theta}_{m1}, \hat{\theta}_{m2}, \dots, \hat{\theta}_{mq})'$ و \hat{v}_m برآوردکننده‌های حاصل از تکرار m ام الگوریتم تحولاتها باشند، وقتی $\hat{\gamma}(h)$ ها جایگزین $\gamma(h)$ ها در این الگوریتم شده‌اند. براکول و دیویس (۱۹۸۸)، ثابت کردند، به ازای m مناسب (مثلاً $m = \lfloor \ln^2(n) \rfloor$)، این برآوردکننده‌ها برای $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ و σ^2 سازگارند. بعلاوه ثابت کردند

$$\hat{\theta}_m \approx N_q\left(\theta, \frac{1}{n}A\right), \quad (۱۳.۶)$$

عناصر ماتریس A عبارتند از $a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} \theta_{i-r}\theta_{j-r}$ که $\theta_0 = 1$ و برای $j > q$ ، $\theta_j = 0$. بخصوص $Var(\hat{\theta}_{mi}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j^2$ و در نتیجه واریانس مجانبی $\hat{\theta}_{mi}$ برابر است با $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{i-1} \theta_j^2$. در عمل این واریانس توسط $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{mi}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\theta}_{mj}^2$ برآورد می‌شوند. در این صورت یک فاصله اطمینان تقریبی با ضریب اطمینان $100(1 - \alpha)$ درصد برای θ_i عبارت است از

$$\hat{\theta}_{mi} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\theta}_{mj}^2}. \quad (۱۴.۶)$$

برای برازش مدل $MA(q)$ به کمک الگوریتم تحولاتها می‌توان از تابع $MA.INN(data, q)$ در پیوست ۳ استفاده کرد. در این تابع $m = \lfloor \ln^2(n) \rfloor$ اختیار می‌شود و به ازای این $\hat{\theta}_{mj}$ ، $\hat{v}_m = \hat{\sigma}^2$ و $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{mj})$ به ازای $j = 1, 2, \dots, q$ حساب می‌شوند.

^۱ Wilson

^۲ Choi

مثال (۶.۶): برای برازش مدل (۱۲.۶) به سری Se9 به کمک روش فوق از دستور $MA.INN(diff(Se9), 1)$ استفاده می‌کنیم. در این مثال $n = 196$ است (بعد از تفاضل‌گیری) بنابراین $m = 27$ و برای این مقدار m ، $\hat{\theta}_{m1} = -0.599$ و $\hat{\sigma}^2 = \hat{v}_m = 0.0867$ به دست می‌آیند. در نتیجه مدل برازش شده به کمک الگوریتم تحولات به صورت زیر است

$$\nabla X_t = Z_t - 0.599Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.0867).$$

با استفاده از (۱۴.۶) فاصله اطمینان با ضریب اطمینان ۹۵ درصد زیر را برای θ به دست می‌آوریم.

$$\left(\hat{\theta}_{m1} - \frac{1.96}{\sqrt{196}}, \hat{\theta}_{m1} + \frac{1.96}{\sqrt{196}}\right) = (-0.739, -0.459).$$

مثال (۷.۶): سری Se10 در پیوست ۲ مصدقی شبیه سازی شده از یک سری $MA(2)$ با میانگین صفر است. به عبارت دیگر

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2). \quad (۱۵.۶)$$

با اجرای دستور $MA.INN(Se10, 2)$ برآوردهای $\hat{\theta}_{m1} = -1.010$ ، $\hat{\theta}_{m2} = 0.578$ و $\hat{\sigma}^2 = 1.057$ را به ازای $m = 19$ و در نتیجه مدل برازش شده زیر را به دست می‌آوریم.

$$X_t = Z_t - 1.010Z_{t-1} + 0.578Z_{t-2}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1.057).$$

همچنین $Var(\hat{\theta}_{m1}) = \frac{1}{85} = 0.012$ و $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{m2}) = \frac{1}{85}(1 + (-1.01)^2) = 0.024$ و در نتیجه فواصل اطمینان ۹۵ درصد، حاصل از (۱۴.۶) برای θ_1 و θ_2 عبارتند از:

$$\theta_1 : (-1.225, -0.795), \quad \theta_2 : (0.274, 0.882).$$

۲.۶ روش برگ

در این بخش با روشی آشنا می‌شویم که برگ (۱۹۶۷) برای برآورد پارامترهای یک مدل اتورگرسیوارائه داده است. در این روش که الگوریتمی است برای برازش دنباله‌ای از مدل‌های اتورگرسیو، در تکرار i ام ابتدا خودهمبستگی جزئی i ام یعنی ϕ_{ii} طوری برآورد می‌شود که مجموع توانهای دوم دو نوع خطای زیر حداقل گردد.

$$\begin{cases} V_{i,t} = X_t - \sum_{j=1}^i \phi_{ij} X_{t-j} & t = i+1, i+2, \dots, n \\ U_{i,t} = X_t - \sum_{j=1}^i \phi_{ij} X_{t+j} & t = 1, 2, \dots, n-i \end{cases}$$

این خطاها به ترتیب خطای پیش بینی گام بعد و پس بینی گام قبل حاصل مدل اتورگرسیو مرتبه i ، پارامترها به کمک روابط بازگشتی (۲۹.۳) محاسبه می‌شوند.

بدیهی است که $V_{0,t} = U_{0,t} = X_t$ ، سایر $V_{i,t}$ و $U_{i,t}$ ها در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} V_{i,t} = V_{i-1,t} - \phi_{ii}U_{i-1,t-i} & t = i+1, i+2, \dots, n \\ U_{i,t} = U_{i-1,t} - \phi_{ii}V_{i-1,t+i} & t = 1, 2, \dots, n-i \end{cases} \quad (۱۶.۶)$$

برای اثبات تساوی اول،

$$\begin{aligned} V_{i-1,t} - \phi_{ii}U_{i-1,t-i} &= X_t - \sum_{j=1}^{i-1} \phi_{i-1,j}X_{t-j} - \phi_{ii}X_{t-i} + \sum_{j=1}^{i-1} \phi_{ii}\phi_{i-1,j}X_{t-i+j} \\ &= X_t - \sum_{j=1}^{i-1} (\phi_{i-1,j} - \phi_{ii}\phi_{i-1,i-j})X_{t-j} - \phi_{ii}X_{t-i} \\ &= X_t - \sum_{j=1}^{i-1} \phi_{i,j}X_{t-j} - \phi_{ii}X_{t-i} \\ &= X_t - \sum_{j=1}^i \phi_{i,j}X_{t-j} = V_{i,t}. \end{aligned}$$

تساوی سوم در این اثبات از (۲۹.۳) حاصل می‌شود. تساوی دیگر در (۱۶.۶) نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. مراحل اجرای الگوریتم به شرح زیر است.

مرحله اول: برآوردکننده برگ $\hat{\phi}_{11}$ برای ϕ_{11} را با حداقل کردن

$$S_1^2(\phi_{11}) = \sum_{t=2}^n V_{1,t}^2 + \sum_{t=1}^{n-1} U_{1,t}^2 = \sum_{t=2}^n [V_{0,t} - \phi_{11}U_{0,t-1}]^2 + \sum_{t=1}^{n-1} [U_{0,t} - \phi_{11}V_{0,t+1}]^2,$$

به دست می‌آوریم، این برآوردکننده عبارت است از

$$\hat{\phi}_{11} = \frac{2 \sum_{t=2}^n U_{0,t-1}V_{0,t}}{\sum_{t=2}^n U_{0,t-1}^2 + \sum_{t=1}^{n-1} V_{0,t+1}^2}.$$

بلافاصله با قرار دادن $\hat{\phi}_{11}$ به جای ϕ_{11} در روابط (۱۶.۶)، $V_{1,t}$ ها و $U_{1,t}$ ها و به کمک آنها برآورد برگ برای σ_1^2 را از رابطه زیر

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{S_1^2(\hat{\phi}_{11})}{2(n-1)},$$

محاسبه می‌کنیم.

مرحله i ام: $\hat{\phi}_{ii}$ مینیمم تابع

$$S_i^2(\phi_{ii}) = \sum_{t=i+1}^n V_{i,t}^2 + \sum_{t=1}^{n-i} U_{i,t}^2 = \sum_{t=i+1}^n [V_{i-1,t} - \phi_{ii}U_{i-1,t-i}]^2 + \sum_{t=1}^{n-i} [U_{i-1,t} - \phi_{ii}V_{i-1,t+i}]^2.$$

یعنی

$$\hat{\phi}_{ii} = \frac{2 \sum_{t=i+1}^n U_{i-1,t-i} V_{i-1,t}}{\sum_{t=i+1}^n U_{i-1,t-i}^2 + \sum_{t=1}^{n-i} V_{i-1,t+i}^2}, \quad (17.6)$$

برآورد برگ ϕ_{ii} محاسبه می‌شود. بلافاصله با قرار دادن $\hat{\phi}_{ii}$ به جای ϕ_{ii} در روابط (۱۶.۶)، $V_{i,t}$ ها و $U_{i,t}$ ها و به کمک آنها برآورد برگ برای σ_i^2 از رابطه زیر

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{S_i^2(\hat{\phi}_{ii})}{2(n-i)},$$

محاسبه می‌کنیم. در ادامه مرحله i ام، برآورد سایر پارامترها با توجه به (۲۹.۳) و توسط رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$\hat{\phi}_{ij} = \hat{\phi}_{i-1,j} - \hat{\phi}_{ii} \hat{\phi}_{i-1,i-j} \quad j = 1, 2, \dots, i-1.$$

در بحث فوق فرض کرده‌ایم $\mu = 0$ در صورتی که $\mu \neq 0$ باشد آنرا توسط \bar{X} برآورد کرده و در محاسبات فوق $X_t - \bar{X}$ را جایگزین X_t ها می‌کنیم. برای برازش مدل $AR(p)$ به روش برگ در این کتاب از تابع $ar.burg(data, aic = F, order.max = p)$ در S-PLUS استفاده می‌کنیم. این تابع به طور خودکار قبل از انجام محاسبات میانگین سری را از مشاهدات کم کرده و محاسبات را به کمک سری تصحیح شده انجام می‌دهد. در انتها لازم به ذکر است که توزیع جانبی برآوردکننده‌های برگ با توزیع جانبی برآوردکننده‌های یول - واکر در قضیه (۱.۶) یکی است. مثال (۸.۶): برای برازش مدل (۷.۶) به سری Se8 از دستور

$$ar.burg(diff(Se8), aic = F, order.max = 1)$$

استفاده می‌کنیم. برآوردهای حاصل از این روش برای ϕ و σ^2 برابرند با $\hat{\phi} = 0.4949$ و $\hat{\sigma}^2 = 0.1493$ و در نتیجه مدل برازش شده به این روش عبارت است از

$$(1 - 0.4949B)(W_t - 0.1336) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.1493).$$

مثال (۹.۶): بعد از انجام محاسبات به کمک دستور، $ar.burg(sqrt(Se8), aic = F, order.max = 2)$ به منظور برازش مدل (۸.۶) به سری Se8، مدل برازش شده زیر به دست می‌آید.

$$(1 - 1.4910B + 0.5362B^2)(\sqrt{X_t} - 6.0837) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1.8243).$$

۳.۶ روش هنان - ريسان

هنان و ريسان (۱۹۸۲) روشی سه مرحله‌ای برای برآورد پارامترهای یک مدل $ARMA(p, q)$ سیبی و عکس پذیر ارائه کردند. در این روش که تعمیمی است از روش دورین^۱ (۱۹۶۰)، مدل ARMA به عنوان یک مدل رگرسیونی با متغیرهای کمکی $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}$ ، یعنی

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} + Z_t$$

در نظر گرفته می‌شود. با توجه به نامعلوم بودن مقادیر Z_t اولین مرحله از روش هنان - ريسان تقریبی برای این مقادیر فراهم می‌آورد.

مرحله اول: مدل اتورگرسیو $X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_k X_{t-k} + Z_t$ ، با مرتبه نسبتاً بزرگ k را به روش یول - واکر به داده‌ها برازش می‌دهیم. با توجه به سیبی بودن $\{X_t\}$ این مدل می‌تواند تقریب خوبی برای مدل اصلی باشد. اگر برآوردهای حاصل را با $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k$ نشان دهیم، مانده‌های حاصل از این برازش، یعنی

$$\tilde{Z}_t = X_t - \tilde{a}_1 X_{t-1} - \tilde{a}_2 X_{t-2} - \dots - \tilde{a}_k X_{t-k}.$$

را به ازای $t = k+1, k+2, \dots, n$ برای تقریب Z_t ها به کار می‌بریم.

مرحله دوم: مدل رگرسیونی

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \theta_{t-q} \tilde{Z}_{t-q} + \epsilon_t,$$

را به مشاهدات

$$(X_t; X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}, \tilde{Z}_{t-1}, \dots, \tilde{Z}_{t-q}), \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, n$$

که $t_0 = q + k$ ، به روش کمترین توانهای دوم عادی برازش داده و برآوردهای اولیه $\hat{\phi}_i^{(0)}$ و $\hat{\theta}_j^{(0)}$ را برای ϕ_i و θ_j به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر اگر قرار دهیم $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$ ، $\hat{\beta}^{(0)}$ را طوری پیدا می‌کنیم که مجموع توانهای دوم زیر حداقل گردد.

$$S^{(0)}(\beta) = \sum_{t=t_0+1}^n \epsilon_t^2 = \sum_{t=t_0+1}^n \left(X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \tilde{Z}_{t-j} \right)^2.$$

و همانطور که در کتابهای درسی رگرسیون آمده است (به عنوان مثال مونتگومری و پیک^۲، ۱۹۹۲)،

$$\hat{\beta}^{(0)} = (W'W)^{-1} W'X_{t_0+1, n}$$

^۱ Durbin

^۲ Peck

که $\mathbf{X}_{t_0+1,n} = (X_{t_0+1}, X_{t_0+2}, \dots, X_n)'$ و

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} X_{t_0} & X_{t_0-1} & \cdots & X_{t_0-p+1} & \tilde{Z}_{t_0} & \tilde{Z}_{t_0-1} & \cdots & \tilde{Z}_{t_0-q+1} \\ X_{t_0+1} & X_{t_0} & \cdots & X_{t_0-p+2} & \tilde{Z}_{t_0+1} & \tilde{Z}_{t_0} & \cdots & \tilde{Z}_{t_0-q+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n-1} & X_{n-2} & \cdots & X_{n-p} & \tilde{Z}_{n-1} & \tilde{Z}_{n-2} & \cdots & \tilde{Z}_{n-q} \end{bmatrix}.$$

در ادامه این مرحله تقریبهای جدید \tilde{Z}_t را برای Z_t ها به کمک روابط

$$\begin{cases} \tilde{Z}_t = X_t = 0 & t \leq 0 \\ \tilde{Z}_t = X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i^{(0)} X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j^{(0)} \tilde{Z}_{t-j} & t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

محاسبه کرده و به کمک آنها برآورد هنان - ريسانن،

$$\hat{\sigma}^{2(0)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{Z}_t^2, \quad (18.6)$$

را برای σ^2 به دست می آوریم.

مرحله سوم: برآوردکنندههای مرحله دوم سازگارند اما به طور مجانبی کارا نیستند. اجرای مرحله سوم با تعدیل این برآوردکنندهها به برآوردکنندههایی منجر می شود که کارایی مجانبی برآوردکنندههای بیشترین درستنمایی را دارند. ابتدا تعریف می کنیم

$$U_t = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i^{(0)} U_{t-i} + \tilde{Z}_t & t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

و

$$V_t = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -\sum_{i=1}^p \hat{\theta}_i^{(0)} V_{t-i} + \tilde{Z}_t & t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

در صورتی که $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_p, \hat{\delta}_{p+1}, \dots, \hat{\delta}_{p+q})'$ برآوردکننده کمترین توانهای دوم عادی $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p, \delta_{p+1}, \dots, \delta_{p+q})'$ در رگرسیون \tilde{Z}_t روی $(U_{t-1}, \dots, U_{t-p}, V_{t-1}, \dots, V_{t-q})'$ ، به عبارت دیگر نقطه مینیمم تابع زیر باشد

$$S^{(1)}(\beta) = \sum_{t=t_1+1}^n \left(\tilde{Z}_t - \sum_{i=1}^p \delta_i U_{t-j} - \sum_{j=1}^q \delta_{p+j} V_{t-j} \right)^2,$$

که $t_1 = \max(p, q)$ آنگاه برآوردکننده جدید هنان - ريسانن به صورت $\hat{\beta} = \hat{\beta}^{(0)} + \hat{\delta}$ تعریف می شود. برآوردکننده هنان - ريسانن برای σ^2 نیز به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i X_{t-j} - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \tilde{Z}_{t-j} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{Z}_t^2,$$

که،

$$\begin{cases} \hat{Z}_t = X_t = 0 & t \leq 0 \\ \hat{Z}_t = X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{Z}_{t-j} & t = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

با تکرار مرحله سوم می‌توان تقریب خوبی برای برآوردهای بیشترین درست‌نمایی غیرشرطی به دست آورد. اما معمولاً برآوردهای حاصل از مرحله دوم را به عنوان مقادیر اولیه در الگوریتم‌های مناسب‌تر برای محاسبه برآوردهای بیشترین درست‌نمایی غیرشرطی به کار می‌بریم.

تابع $ARMA.HANRIS(data, p, q)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات روش هنان - ريسانن تهیه شده است. در این تابع k به طور پیش فرض برابر $\max\{[(\ln n)^2], 2 \times \max(p, q)\}$ اختیار می‌شود که کاربر می‌تواند آن را به دلخواه تغییر دهد.

مثال (۱۰.۶): مدلی مناسب برای برازش به سری $Se11$ در پیوست ۲، سری تعداد پوستهای Lynx فروخته شده، مدل زیر است.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(\ln(X_t) - \mu) = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2). \quad (19.6)$$

میانگین سری تبدیل یافته و برآورد ما از μ برابر است با 9.793 به ازای $k = 16$ که انتخاب پیش فرض دستور $ARMA.HANRIS(\log(Se11), 2, 1)$ است برآوردهای مراحل دوم و سوم عبارتند از

$$\hat{\phi}_1^{(0)} = 1.481, \quad \hat{\phi}_2^{(0)} = -0.921, \quad \hat{\theta}^{(0)} = -0.364, \quad \hat{\sigma}^{2(0)} = 0.0846,$$

$$\hat{\phi}_1^{(1)} = 1.580, \quad \hat{\phi}_2^{(1)} = -0.962, \quad \hat{\theta}^{(1)} = -0.617, \quad \hat{\sigma}^{2(1)} = 0.0827.$$

و مدل برازش شده به این سری به روش هنان - ريسانن عبارت است از:

$$(1 - 1.58B + 0.962B^2)(\ln(X_t) - 9.793) = Z_t - 0.617Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.0827).$$

۴.۶ روش کمترین توانهای دوم شرطی

یکی از روشهای معمول در برازش مدل‌های آماری روش کمترین توانهای دوم عادی است. در این روش مجموع توانهای دوم خطا که تابعی از پارامترهای مدل است به عنوان تابع هدف اختیار می‌شود و برآوردهای کمترین توانهای دوم، نقطه مینیمم این تابع تعریف می‌شوند. در بحث حاضر این خطاها عبارتند از

$$Z_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} - \theta_1 Z_{t-1} - \dots - \theta_q Z_{t-q}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

و برای تأکید بر وابستگی Z_t ها به $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$ می‌نویسیم $Z_t = Z_t(\beta)$ در واقع برای تأکید بر وابستگی Z_t ها به X_t ها و β بهتر است بنویسیم $Z_t((X_1, X_2, \dots, X_n)', \beta)$ اما انتظار داریم این ساده نویسی ابهامی به همراه نداشته باشد. در این صورت تابع مجموع توانهای دوم خطا عبارت است از $\sum_{t=1}^n Z_t^2(\beta)$. اما این تابع به $X^* = (X_0, X_{-1}, \dots, X_{1-p})'$ و $Z^* = (Z_0, Z_{-1}, \dots, Z_{1-q})'$ که مشاهده نمی‌شوند نیز بستگی دارد. برای رفع این مشکل در روش کمترین توانهای دوم شرطی مقادیر اولیه مناسبی را جایگزین X^* و Z^* کرده و مجموع توانهای دوم شرطی یعنی

$$S^*(\beta | X^*, Z^*) = \sum_{t=1}^n Z_t^2(\beta | X^*, Z^*) \quad (20.6)$$

را به منظور برآورد پارامترها حداقل می‌کنیم. برآوردکننده‌های حاصل از این روش به برآوردکننده‌های کمترین توانهای دوم شرطی معروفند. معمولاً مقادیر اولیه برای X^* و Z^* را برابر امید ریاضی غیر شرطی آنها یعنی صفر اختیار می‌کنیم (در صورتی که $\mu \neq 0$ به جای X های اولیه \bar{X} را قرار می‌دهیم). برای n های بزرگ و در صورتی که p یا q بزرگ نباشند یا سری فصلی نباشد برآوردهای حاصل نسبت به انتخابهای اولیه حساس نیستند.

شکل دیگری از تابع مجموع توانهای دوم شرطی که در استفاده از آن نیازی به مقادیر اولیه برای X^* نیست، عبارت است از

$$S^*(\beta | Z^*) = \sum_{t=p+1}^n Z_t^2(\beta | Z^*) \quad (21.6)$$

که در آن اگر $q \geq 1$ و $Z^* = (Z_p, Z_{p-1}, \dots, Z_{p+1-q})'$ و برابر صفر اختیار می‌شود. در صورتی که سری $\{X_t\}$ اتورگرسیو محض باشد، نیازی به این مقادیر اولیه نیز نیست. اگر $\hat{\beta}$ برآوردکننده کمترین توانهای دوم شرطی β باشد برآوردکننده کمترین توانهای دوم شرطی σ^2 نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^*(\hat{\beta} | X^*, Z^*)}{n - p - q} \quad (22.6)$$

و در صورت استفاده از (۲۱.۶)،

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^*(\hat{\beta} | Z^*)}{n - 2p - q} \quad (23.6)$$

در بحث فوق میانگین سری را صفر فرض کردیم. در صورتی که میانگین صفر نباشد همانطور که در مثالهای زیر نیز خواهید دید می‌توان آن را همراه سایر پارامترها برآورد کرد. اما با توجه به اینکه برآوردکننده‌های حاصل برای μ اختلاف چندانی با \bar{X} ندارند غالباً از \bar{X} برای برآورد μ استفاده می‌کنیم.

مثال (۱۱.۶): فرض کنید $\{X_t\} \sim AR(1)$ با میانگین μ باشد. در این صورت $Z_t(\phi, \mu) = (X_t - \mu) - \phi(X_{t-1} - \mu)$ و مجموع توانهای دوم شرطی (۲۱.۶) به صورت زیر در می آید

$$S^*(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^n Z_t^2(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^n [(X_t - \mu) - \phi(X_{t-1} - \mu)]^2.$$

و

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial \mu} \right|_{\mu=\hat{\mu}, \phi=\hat{\phi}} = 0 \implies \hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t - \hat{\phi} \sum_{t=2}^n X_{t-1}}{(n-1)(1-\hat{\phi})},$$

و با توجه به اینکه

$$\frac{\sum_{t=2}^n X_t}{n-1} \approx \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1}}{n-1} \approx \bar{X}$$

نتیجه می شود $\hat{\mu} \approx \bar{X}$. اگر قرار دهیم $\hat{\mu} = \bar{X}$

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial \phi} \right|_{\mu=\bar{X}, \phi=\hat{\phi}} = 0 \implies \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=2}^n (X_{t-1} - \bar{X})^2}.$$

همانطور که ملاحظه می شود $\hat{\phi} \approx \hat{\rho}(1)$. به عبارت دیگر برآوردکننده های $\hat{\mu}$ و $\hat{\phi}$ به روش کمترین توانهای دوم شرطی و روش گشتاوری برای n های بزرگ تقریباً برابرند.

مثال (۱۲.۶): در صورتی که $\{X_t\} \sim AR(2)$ با میانگین μ باشد، مجموع توانهای دوم شرطی (۲۱.۶) به صورت زیر در می آید

$$S^*(\phi_1, \phi_2, \mu) = \sum_{t=3}^n [(X_t - \mu) - \phi_1(X_{t-1} - \mu) - \phi_2(X_{t-2} - \mu)]^2.$$

به سادگی می توان نشان داد که $\hat{\mu} \approx \bar{X}$ و اگر قرار دهیم $\hat{\mu} = \bar{X}$ آنگاه $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\phi}_2$ از حل معادلات زیر به دست می آیند.

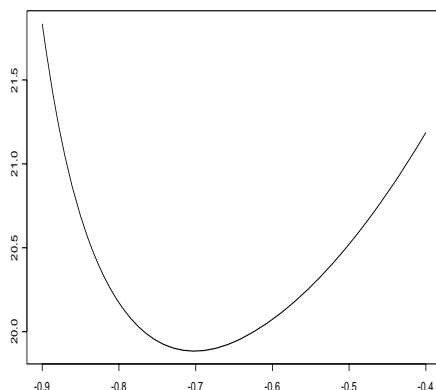
$$\begin{cases} \sum_{t=3}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X}) - \hat{\phi}_1 \sum_{t=3}^n (X_{t-1} - \bar{X})^2 - \hat{\phi}_2 \sum_{t=3}^n (X_{t-2} - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X}) = 0 \\ \sum_{t=3}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X}) - \hat{\phi}_1 \sum_{t=3}^n (X_{t-1} - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X}) - \hat{\phi}_2 \sum_{t=3}^n (X_{t-2} - \bar{X})^2 = 0 \end{cases}$$

که با کمی تقریب همان معادلات یول - واکر هستند. بنابراین برآوردکننده های کمترین توانهای دوم شرطی ϕ_1 و ϕ_2 و برآوردکننده های یول - واکر آنها تقریباً برابرند.

در واقع برای سریهای اتورگرسیو مجموع مربعات شرطی (۲۱.۶) همان مجموع مربعات عادی برای مدل رگرسیونی

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, n$$

است و برآوردکننده های کمترین توانهای دوم شرطی همان برآوردکننده های کمترین توانهای دوم عادی اند. می توان نشان داد که این برآوردکننده ها با برآوردکننده های یول - واکر به طور مجانبی معادلند (فولر ۱۹۷۶ رابینند) و توزیع مجانبی آنها همان است که در قضیه (۱.۶) آمده است.



شکل ۱.۶: نمودار تابع مجموع توانهای دوم شرطی برای سری مثال (۱۳.۶).

θ	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1
S^*	21.834	20.171	19.885	20.072	20.521	21.187	22.086	23.264	24.786

جدول ۱.۶: مقادیر $S^*(\theta)$ برای سری مثال (۱۳.۶).

در صورتی که $q \geq 1$ باشد بر خلاف سریهای اتورگرسیو $Z_t(\beta|X^*, Z^*)$ تابعی غیر خطی از پارامترها است. در نتیجه برآوردهای کمترین توانهای دوم شرطی در این حالات را بایستی به روشهای عددی محاسبه کرد. به عنوان مثال در صورتی $\{X_t\} \sim MA(1)$ باشد و به شرط اینکه $Z_0 = 0$ باشد،

$$Z_t(\theta|Z_0 = 0) = X_t - \theta Z_{t-1}(\theta|Z_0 = 0) \quad (24.6)$$

و

$$S^*(\theta|Z_0 = 0) = \sum_{t=1}^n [Z_t(\theta|Z_0 = 0)]^2 = \sum_{t=1}^n [X_t - \theta Z_{t-1}(\theta|Z_0 = 0)]^2.$$

در اینحالت خاص با توجه به اینکه $S^*(\theta|Z_0 = 0)$ تابعی فقط از پارامتر θ با دامنه $(-1, 1)$ است $\hat{\theta}$ را می توان با محاسبه مقادیر $S^*(\theta|Z_0 = 0)$ روی مجموعه ای از θ ها در بازه $(-1, 1)$ و مقایسه این مقادیر تقریب کرد. برای محاسبه مقدار $S^*(\theta_0|Z_0 = 0)$ به ازای θ_0 معلوم بدیهی است ابتدا $Z_t(\theta_0|Z_0 = 0)$ ها را از رابطه بازگشتی (۲۴.۶) حساب کرده سپس مجموع توانهای دوم آنها را می یابیم.

مثال (۱۳.۶): جدول (۱.۶) مجموع توانهای دوم شرطی سری Se9 برای مدل (۱۲.۶) را به ازای مقادیر مختلف θ نشان می دهد. نگاهی اجمالی به این مقادیر حداقل مقداری در نزدیکی -0.7 را نشان می دهد. در واقع محاسبه مقادیر این تابع در نزدیکی -0.7 نشان می دهد که $\hat{\theta} = -0.702$ (تمرین ۸.۶ را ببینید). نمودار تابع مجموع توانهای دوم در شکل (۱.۶) رسم شده است. طبیعی است با افزایش تعداد پارامترها روش فوق دیگر کار آمد نخواهد بود.

در ادامه ابتدا با روش گاوس - نیوتن برای مدل $MA(1)$ آشنا شده سپس تعمیم این روش را به مدل‌های ARMA خواهیم دید. در این روش تقریب درجه اول تیلور^۱ یعنی $Z_t(\theta|Z_0=0) \approx Z_t(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0) + (\theta - \hat{\theta}^{(0)})Z_t'(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)$ که در آن $\hat{\theta}^{(0)}$ برآورد اولیه‌ای از θ و $Z_t'(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)$ مشتق $Z_t(\theta|Z_0=0)$ در نقطه $\hat{\theta}^{(0)}$ است را جایگزین $Z_t(\theta|Z_0=0)$ در (۲۰.۶) می‌کنیم. در اینصورت

$$S^*(\theta|Z_0=0) \approx \sum_{t=1}^n [Z_t(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0) + (\theta - \hat{\theta}^{(0)})Z_t'(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)]^2, \quad (25.6)$$

و اگر قرار دهیم $\delta = \theta - \hat{\theta}^{(0)}$ ، δ برابر مقدار تعدیلی است که باید در $\hat{\theta}^{(0)}$ صورت گیرد. برآورد δ حاصل از حداقل کردن مجموع توانهای دوم فوق عبارت است از:

$$\hat{\delta} = - \frac{\sum_{t=1}^n Z_t(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)Z_t'(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)}{\sum_{t=1}^n [Z_t'(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)]^2}$$

و در نتیجه برآورد جدید برای θ برابر است با $\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\delta} + \hat{\theta}^{(0)}$. برآورد σ^2 را نیز با استفاده از (۲۲.۶) به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$\hat{\sigma}^{2(1)} = \frac{S^*(\hat{\theta}^{(1)}|Z_0=0)}{n-1}.$$

این فرآیند را می‌توان تا حصول همگرایی $\hat{\theta}^{(i)}$ ها تکرار کرد. در روابط فوق $Z_t(\hat{\theta}^{(0)}|Z_0=0)$ ها با توجه به اینکه $Z_0=0$ ، به کمک رابطه بازگشتی (۲۴.۶) محاسبه می‌شوند. اگر از (۲۴.۶) نسبت به θ مشتق بگیریم آنگاه برای محاسبه مشتقها نیز رابطه بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم

$$Z_t'(\theta|Z_0=0) = -Z_{t-1}'(\theta|Z_0=0) - \theta Z_{t-1}'(\theta|Z_0=0),$$

که $Z_0'(\theta|Z_0=0) = 0$ می‌توان ثابت کرد (فولر ۱۹۷۶ را ببینید) که $\hat{\theta}^{(1)}$ برآوردکننده‌ای سازگار و به طور مجانبی کارا برای θ است و

$$\hat{\theta}^{(1)} \approx N\left(\theta, \frac{1-\theta^2}{n}\right).$$

مثال (۱۴.۶): برای سری مثال (۱۳.۶) الگوریتم فوق با شروع از برآورد اولیه $\hat{\theta}^{(0)} = -0.65$ در تکرار ششم به $\hat{\theta}^{(6)} = -0.7018$ همگرا می‌شود (به این معنی که $|\hat{\theta}^{(6)} - \hat{\theta}^{(5)}| < 0.0005$). نتایج این تکرارها را در جدول (۲.۶) آورده‌ایم. در این جدول مقادیر مجموع توانهای دوم شرطی و تقریب آنها یعنی سمت راست (۲۵.۶) را نیز آورده‌ایم. همانطور که ملاحظه می‌شود در نزدیکی نقطه مینیمم این تقریبها کاملاً به مقادیر واقعی نزدیک‌اند. با استفاده از (۲۲.۶)،

^۱ Taylor

i	$\hat{\theta}^{(i)}$	$S^*(\hat{\theta}^{(i)} Z_0=0)$	های تقریبی $S^*(\hat{\theta}^{(i)} Z_0=0)$
0	-0.65	19.93897	19.93897
1	-0.6802756	19.89542	19.90096
2	-0.6928503	19.88721	19.88814
3	-0.6981587	19.88569	19.88585
4	-0.7004252	19.88541	19.88543
5	-0.7013985	19.88535	19.88536
6	-0.7018176	19.88534	19.88534

جدول ۲.۶: نتایج حاصل از تکرارهای الگوریتم گاوس - نیوتن برای سری مثال (۱۳.۶).

$$\hat{\sigma}^{2(6)} = \frac{S^*(\hat{\theta}^{(6)}|Z_0=0)}{n-1} = \frac{19.88534}{195} = 0.102.$$

در حالت کلی اگر $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ باشد آنگاه

$$Z_t(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*) = \theta_q^{-1}(B)\phi_p(B)X_t = X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j Z_{t-j}(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*). \quad (26.6)$$

تقریب درجه اول تیلور $Z_t(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*)$ در نقطه $\hat{\beta}^{(0)}$ عبارت است از

$$Z_t(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*) \approx Z_t^{(0)} - \sum_{i=1}^p (\phi_i - \hat{\phi}_i^{(0)})U_{t-i}^{(0)} - \sum_{j=1}^q (\theta_j - \hat{\theta}_j^{(0)})V_{t-j}^{(0)}, \quad (27.6)$$

که در آن $Z_t^{(0)} = Z_t(\hat{\beta}^{(0)}|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*)$ و

$$U_{t-i}^{(0)} = -\left. \frac{\partial Z_t(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*)}{\partial \phi_i} \right|_{\beta=\hat{\beta}^{(0)}}, \quad V_{t-j}^{(0)} = -\left. \frac{\partial Z_t(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*)}{\partial \theta_j} \right|_{\beta=\hat{\beta}^{(0)}} \quad (28.6)$$

و به سادگی می توان نشان داد

$$\begin{cases} U_t^{(0)} = [\hat{\theta}_q^{(0)}(B)]^{-1} X_t = [\hat{\phi}_p^{(0)}(B)]^{-1} Z_t^{(0)} \\ V_t^{(0)} = [\hat{\theta}_q^{(0)}(B)]^{-2} \hat{\phi}_p^{(0)}(B) X_t = [\hat{\theta}_q^{(0)}(B)]^{-1} Z_t^{(0)} \end{cases} \quad (29.6)$$

که در آن $\hat{\phi}_p^{(0)} = (1 - \hat{\phi}_1^{(0)}B - \dots - \hat{\phi}_p^{(0)}B^p)$ و $\hat{\theta}_q^{(0)} = (1 + \hat{\theta}_1^{(0)}B + \dots + \hat{\theta}_q^{(0)}B^q)$

$$S^*(\beta|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*) \approx \sum_{t=1}^n [Z_t^{(0)} - \sum_{i=1}^p (\phi_i - \hat{\phi}_i^{(0)})U_{t-i}^{(0)} - \sum_{j=1}^q (\theta_j - \hat{\theta}_j^{(0)})V_{t-j}^{(0)}]^2$$

مجموع توانهای دوم فوق همان مجموع توانهای دوم عادی برای رگرسیون $Z_t^{(0)}$ روی $(U_{t-1}^{(0)}, \dots, U_{t-p}^{(0)}, V_{t-1}^{(0)}, \dots, V_{t-q}^{(0)})'$ است. ضرایب این رگرسیون که مقدار تعدیل

در برآوردهای اولیه برای رسیدن به برآوردهای جدید را مشخص می‌کنند، با $\delta = (\phi_1 - \hat{\phi}_1^{(0)}, \dots, \phi_p - \hat{\phi}_p^{(0)}, \theta_1 - \hat{\theta}_1^{(0)}, \dots, \theta_q - \hat{\theta}_q^{(0)})'$ و برآورد آن را با $\hat{\delta}$ نشان می‌دهیم، در این صورت

$$\hat{\delta} = (\mathbf{W}^{(0)'}\mathbf{W}^{(0)})^{-1}\mathbf{W}^{(0)'}\mathbf{Z}_n^{(0)}$$

که در آن $\mathbf{Z}_n^{(0)} = (Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, \dots, Z_n^{(0)})'$ و

$$\mathbf{W}^{(0)} = \begin{bmatrix} U_0^{(0)} & U_{-1}^{(0)} & \dots & U_{1-p}^{(0)} & V_0^{(0)} & V_{-1}^{(0)} & \dots & V_{1-q}^{(0)} \\ U_1^{(0)} & U_0^{(0)} & \dots & U_{2-p}^{(0)} & V_1^{(0)} & V_0^{(0)} & \dots & V_{2-q}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_{n-1}^{(0)} & U_{n-2}^{(0)} & \dots & U_{n-p}^{(0)} & V_{n-1}^{(0)} & V_{n-2}^{(0)} & \dots & V_{n-q}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

و در نتیجه برآورد جدید β ،

$$\hat{\beta}^{(1)} = \hat{\beta}^{(0)} + \hat{\delta}. \quad (30.6)$$

به دست می‌آید. برآورد σ^2 را نیز با استفاده از (۲۲.۶) به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\sigma}^{2(1)} = \frac{S^*(\hat{\beta}^{(1)}|\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*)}{n-p-q}.$$

این فرآیند را می‌توان با جایگزین کردن $\hat{\beta}^{(1)}$ به جای برآورد اولیه $\hat{\beta}^{(0)}$ در روابط فوق تکرار کرد و تا حصول همگرایی ادامه داد.

برای محاسبه $Z_t^{(0)}$ ، $U_t^{(0)}$ و $V_t^{(0)}$ در روابط فوق ابتدا $Z_t^{(0)}$ ها را به صورت زیر حساب کرده

$$\begin{cases} Z_t^{(0)} = X_t = 0 & t \leq 0 \\ Z_t^{(0)} = X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i^{(0)} X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j^{(0)} Z_{t-j}^{(0)} & t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

سپس $U_t^{(0)}$ و $V_t^{(0)}$ ها را با استفاده از (۲۹.۶) و با صفر قرار دادن مقادیر اولیه به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$U_t^{(0)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i^{(0)} U_{t-i}^{(0)} + Z_t^{(0)} & t = 1, 2, \dots, n \end{cases},$$

$$V_t^{(0)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -\sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i^{(0)} V_{t-i}^{(0)} + Z_t^{(0)} & t = 1, 2, \dots, n \end{cases},$$

تحت شرایط قضیه (۳.۶) و انتخاب برآوردکننده اولیه مناسب می‌توان ثابت کرد (براکول و دیویس ۱۹۹۱ را ببینید) توزیع مجانبی $\hat{\beta}^{(1)}$ عبارت است از:

$$\hat{\beta}^{(1)} \approx N_{p+q}\left(\beta, \frac{1}{n}\mathbf{V}(\beta)\right), \quad (31.6)$$

که $V(\beta)$ در تساوی (۴۴.۶) تعریف شده است. در کاربردهای عملی می‌توان $V(\beta)$ را توسط $V(\hat{\beta}^{(1)})$ برآورد کرد. علاوه بر این ثابت می‌شود $n^{-1}(\mathbf{W}^{(0)'}\mathbf{W}^{(0)})$ برآوردکننده‌ای سازگار برای $\sigma^2\mathbf{V}^{-1}(\beta)$ است و در نتیجه از $n\hat{\sigma}^{2(1)}(\mathbf{W}^{(0)'}\mathbf{W}^{(0)})^{-1}$ نیز می‌توان برای برآورد $V(\beta)$ استفاده کرد.

همانطور که اشاره شد در عمل برای رسیدن به تقریب بهتر از برآوردهای کمترین توانهای دوم شرطی، الگوریتم فوق تکرار می‌شود. اگر همگرایی در تکرار k ام حاصل شود از برآوردهای $V(\hat{\beta}^{(k)})$ یا $n\hat{\sigma}^{2(k)}(\mathbf{W}^{(k)'}\mathbf{W}^{(k)})^{-1}$ برای برآورد $V(\beta)$ و از توزیع‌های تقریبی زیر برای استنباط درباره β استفاده می‌کنیم.

$$\hat{\beta}^{(k)} \approx N_{p+q}\left(\beta, \frac{1}{n}\mathbf{V}(\hat{\beta}^{(k)})\right),$$

یا

$$\hat{\beta}^{(k)} \approx N_{p+q}\left(\beta, \hat{\sigma}^{2(k)}(\mathbf{W}^{(k)'}\mathbf{W}^{(k)})^{-1}\right).$$

۵.۶ روش بیشترین درستنمایی شرطی

با فرض اینکه سری نوفه سفید $\{Z_t\}$ گاوسی است به عبارت دیگر Z_t ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $N(0, \sigma^2)$ اند، سری اتورگرسیو - میانگین متحرک $\{X_t\}$ نیز گاوسی است و در نتیجه

$$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)' \sim N_n(\mathbf{o}_n, \mathbf{\Gamma}_n),$$

و تابع درستنمایی $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$ و σ^2 عبارت است از

$$L(\beta, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{\Gamma}_n|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'_n \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{x}_n\right\}, \quad (۳۲.۶)$$

که در آن $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ سری مشاهده شده است. به خاطر وجود دترمینان و عکس ماتریس با مرتبه بالا، بدیهی است که ارزیابی مستقیم این تابع به منظور یافتن برآوردکننده‌های بیشترین درستنمایی عملی نیست. بنابراین در عمل به تقریبی از این تابع یا ضوابط ساده‌تر و عملیاتی تری از این تابع نیاز داریم. در این بخش با تابع درستنمایی شرطی به عنوان تقریبی از (۳۲.۶) آشنا می‌شویم. در بخش بعد با ضابطه‌های دیگری برای این تابع که فارغ از دترمینان و عکس ماتریس $\mathbf{\Gamma}_n$ اند، آشنا خواهیم شد.

فرض کرده‌ایم Z_t ها نرمالند بنابراین چگالی توأم $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$ عبارت است از

$$f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n Z_t^2\right\}$$

حال اگر قرار دهیم $\mathbf{X}^* = (X_0, X_{-1}, \dots, X_{1-p})' = \mathbf{o}_p$ و $\mathbf{Z}^* = (Z_0, Z_{-1}, \dots, Z_{1-q})' = \mathbf{o}_q$ معادلات (۲۶.۶) به ازای $t = 1, 2, \dots, n$ تبدیلی یک به یک از $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$ به

$X_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ تعریف می‌کنند. ژاکوبین این تبدیل ۱ است و در نتیجه چگالی X_n به شرط X^* و Z^* عبارت است از

$$f_{X_n|X^*, Z^*}(x_n; \beta, \sigma^2|X^*, Z^*) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n Z_t^2(\beta|X^*, Z^*)\right\},$$

و در نتیجه تابع درست‌نمایی β و σ^2 که به تابع درست‌نمایی شرطی معروف است برابر است با

$$L(\beta, \sigma^2|X^*, Z^*) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} S^*(\beta|X^*, Z^*)\right\}. \quad (۳۳.۶)$$

که در آن $S^*(\beta|X^*, Z^*)$ همان مجموع توانهای دوم شرطی (۲۰.۶) است. و همانطور که از ضابطه (۳۳.۶) دیده می‌شود، برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی شرطی β با برآوردکننده کمترین توانهای دوم شرطی یکی است. برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی شرطی σ^2 نیز از تساوی زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^*(\hat{\beta}|X^*, Z^*)}{n}.$$

برای سریهای غیر فصلی و دراز مدت که مرتبه بالایی نداشته باشند، برآوردکننده‌های بیشترین درست‌نمایی شرطی و بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی اختلاف اساسی با هم ندارند. در غیر اینصورت معمولاً برآوردهای حاصل از این روش را فقط به عنوان مقادیر اولیه برای محاسبه برآوردهای درست‌نمایی غیر شرطی به کار می‌بریم.

۶.۶ روش بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی

آنچه ضابطه تابع درست‌نمایی (۳۲.۶)، را که از اینجا به بعد به آن درست‌نمایی غیر شرطی (یا دقیق) می‌گوییم، ناکارآمد می‌کند وجود دترمینان و معکوس ماتریس Γ_n است، که برای n های بزرگ حتی برای محاسبات عددی نیز مشکل سازند. در این بخش با ضوابط ساده‌تری برای این تابع، بخصوص برای محاسبه مقادیر این تابع آشنا می‌شویم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\{X_t\} \sim AR(p)$ است و چگالی X_n را با استفاده از تساوی زیر می‌یابیم.

$$f_{X_n}(x_n; \phi, \sigma^2) = f_{X_p}(x_p; \phi, \sigma^2) f_{X_{p+1,n}|X_p}(x_{p+1,n}; \phi, \sigma^2|x_p), \quad (۳۴.۶)$$

که $X_{p+1,n} = (X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n)'$ ، $x_p = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ ، $X_p = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ و $x_{p+1,n} = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)'$ گاوسی است، پس

$$f_{X_p}(x_p; \phi, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Gamma_p|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x_p' \Gamma_p^{-1} x_p\right\},$$

و اگر قرار دهیم $M_p = \sigma^{-2} \Gamma_p$ ،

$$f_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{x}_p; \phi, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{p}{2}} |M_p|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x}'_p M_p^{-1} \mathbf{x}_p\right\}.$$

برای پیدا کردن چگالی شرطی سمت راست (۳۴.۶) توجه می‌کنیم که به شرط \mathbf{X}_p معادلات

$$Z_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p}, \quad t = p+1, p+2, \dots, n$$

تبدیلی یک به یک از $(Z_{p+1}, Z_{p+2}, \dots, Z_n)'$ به $(X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n)'$ تعریف می‌کنند. ژاکوبین این تبدیل ۱ است و در نتیجه

$$f_{\mathbf{X}_{p+1:n} | \mathbf{X}_p}(\mathbf{x}_{p+1:n}; \phi, \sigma^2 | \mathbf{x}_p) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-p}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n (x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2\right\}$$

و اگر در (۳۴.۶) قرار دهیم

$$f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n; \phi, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |M_p|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\mathbf{x}'_p M_p^{-1} \mathbf{x}_p + S^*(\phi)]\right\} \quad (۳۵.۶)$$

که $S^*(\phi) = \sum_{t=p+1}^n (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p})^2$ همان مجموع توانهای دوم شرطی (۲۱.۶) برای سری اتورگرسیو مرتبه p است. اگر قرار دهیم $S(\phi) = \mathbf{X}'_p M_p^{-1} \mathbf{X}_p + S^*(\phi)$ آنگاه لگاریتم تابع درستنمایی غیر شرطی سری اتورگرسیو مرتبه p به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$l(\phi, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|M_p|) - \frac{S(\phi)}{2\sigma^2}. \quad (۳۶.۶)$$

به عنوان مثال در حالت خاص $p=1$ ،

$$l(\phi, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2} \ln(1 - \phi^2) - \frac{S(\phi)}{2\sigma^2}. \quad (۳۷.۶)$$

که $S(\phi) = (1 - \phi^2)X_1^2 + \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2$ به روشهایی مشابه آنچه دیدیم فرمولهای مشابهی برای سریهای $ARMA(p, q)$ می‌توان به دست آورد. از طرفی می‌توان نشان داد که برای یک سری $ARMA$ ی سببی و عکس پذیر گاوسی، لگاریتم تابع درستنمایی β و σ^2 را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$l(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + f(\beta) - \frac{S(\beta)}{2\sigma^2}, \quad (۳۸.۶)$$

که در آن،

$$S(\beta) = \sum_{t=-\infty}^n [E(Z_t; \beta | \mathbf{X}_n)]^2, \quad (۳۹.۶)$$

مجموع توانهای دوم غیر شرطی نامیده می‌شود. برای اثبات (۳۸.۶) در حالت کلی باکس و جنکینز (۱۹۷۶) را ببینید، در اینجا این تساوی را برای سریهای $AR(1)$ و $MA(1)$ ثابت می‌کنیم.

سری اتورگرسیو مرتبه اول: برای این سری از مقایسه (۳۸.۶) با (۳۷.۶)، می‌بینیم $f(\phi) = \ln(1 - \phi^2)$ بنابراین کافی است نشان دهیم

$$S(\phi) = \sum_{t=-\infty}^n [E(Z_t; \phi | \mathbf{X}_n)]^2 = (1 - \phi^2)X_1^2 + \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2.$$

با استفاده از خواص امید ریاضی شرطی داریم

$$E[Z_t; \phi | \mathbf{X}_n] = \begin{cases} X_t - \phi X_{t-1} & t \geq 2 \\ E[X_t; \phi | \mathbf{X}_n] - \phi E[X_{t-1}; \phi | \mathbf{X}_n] & t \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به گاوسی بودن سری $\{X_t\}$ ، $E[X_t; \phi | \mathbf{X}_n]$ در تساوی فوق بهترین پیش‌بین خطی X_t توسط \mathbf{X}_n است. در تمرین (۴.۳) نشان دادیم این پیش‌بین برابر است با $\phi^{-t+1}X_1$ در نتیجه برای $t \leq 1$

$$E[Z_t; \phi | \mathbf{X}_n] = \phi^{-t+1}X_1 - \phi(\phi^{-t+2}X_1) = \phi^{-t+1}(1 - \phi^2)X_1,$$

و اگر در (۳۹.۶) قرار دهیم

$$\begin{aligned} S(\phi) &= (1 - \phi^2)^2 X_1^2 \sum_{t=-\infty}^1 \phi^{2(-t+1)} + \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2 \\ &= (1 - \phi^2)X_1^2 + \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2. \end{aligned}$$

سری میانگین متحرک مرتبه اول: اگر قرار دهیم $\mathbf{Z}_{0,n} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)'$ و $\mathbf{z}_{0,n} = (z_0, z_1, \dots, z_n)'$ داریم

$$f_{\mathbf{Z}_{0,n}}(\mathbf{z}_{0,n}; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^n z_t^2\right\}$$

و با توجه به تبدیلات

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_0 \\ Z_1 &= X_1 - \theta Z_0 \\ Z_2 &= X_2 - \theta Z_1 = X_2 - \theta X_1 + \theta^2 Z_0 \\ &\vdots \\ Z_n &= X_n - \theta Z_{n-1} = X_n - \theta X_{n-1} + \theta^2 X_{n-2} - \dots + (-\theta)^n Z_0 \end{aligned}$$

چگالی توأم \mathbf{X}_n و Z_0 عبارت است از

$$f_{\mathbf{X}_n, Z_0}(\mathbf{x}_n, z_0; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^n z_t^2\right\} \quad (40.6)$$

تبدیلات فوق را با نمادهای ماتریسی به شکل $Z_{0,n} = L X_n + C Z_0$ که

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\theta)^{n-1} & (-\theta)^{n-2} & (-\theta)^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -\theta \\ \theta^2 \\ \vdots \\ (-\theta)^n \end{bmatrix}$$

می‌نویسیم. در اینصورت $S(\theta, Z_0) = (L X_n + C Z_0)'(L X_n + C Z_0) = S(\theta, Z_0)$ ، و اگر \widehat{Z}_0 ، $S(\theta, Z_0)$ را به عنوان تابعی از Z_0 حداقل کند می‌توان نوشت (تمرین ۱۶.۶)،

$$S(\theta, Z_0) = S(\theta) + (Z_0 - \widehat{Z}_0)' C' C (Z_0 - \widehat{Z}_0) \quad (۴۱.۶)$$

که در آن $S(\theta) = (L X_n + C \widehat{Z}_0)'(L X_n + C \widehat{Z}_0)$ تابعی از X_n است اما تابعی از Z_0 نیست. در (۴۰.۶) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}_n, Z_0}(\mathbf{x}_n, z_0; \theta, \sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [S(\theta) + (Z_0 - \widehat{Z}_0)' C' C (Z_0 - \widehat{Z}_0)]\right\} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} |C' C|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (Z_0 - \widehat{Z}_0)' C' C (Z_0 - \widehat{Z}_0)\right\} \times \\ &\quad (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |C' C|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{S(\theta)}{2\sigma^2}\right\} \\ &= f_{Z_0|\mathbf{X}_n}(z_0; \theta, \sigma^2 | \mathbf{x}_n) f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n; \theta, \sigma^2) \end{aligned}$$

در نتیجه $f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n; \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |C' C|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{S(\theta)}{2\sigma^2}\right\}$ لگاریتم تابع درست‌نمایی عبارت است از

$$l(\theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln |C' C| - \frac{S(\theta)}{2\sigma^2}$$

اما $\widehat{Z}_0 = E(Z_0; \theta | \mathbf{X}_n)$ و با توجه به اینکه $C' C = \sum_{t=0}^n \theta^{2t} = \frac{1-\theta^{2n+2}}{1-\theta^2}$ داریم

$$E(Z_{0,n}; \theta | \mathbf{X}_n) = (L X_n + C \widehat{Z}_0)$$

در نتیجه $S(\theta) = (E(Z_{0,n}; \theta | \mathbf{X}_n))' E(Z_{0,n}; \theta | \mathbf{X}_n) = \sum_{t=0}^n [E(Z_t; \theta | \mathbf{X}_n)]^2$ در اینحالت برای $t \leq -1$ ، $E(Z_t; \theta | \mathbf{X}_n) = 0$ ، همان (۳۹.۶) است. نهایتاً لگاریتم درست‌نمایی سری میانگین متحرک مرتبه اول عبارت است از

$$l(\theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\theta^{2n+2}}{1-\theta^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^n [E(Z_t; \theta | \mathbf{X}_n)]^2.$$

شکل دیگری از تابع درست‌نمایی (۳۲.۶) را به کمک تحولات U_1, U_2, \dots, U_n می‌توان نوشت. با تعریفی که از تحولات داشتیم در اینجا که $\{X_t\}$ گاوسی است، U_t ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای $N(0, v_{t-1})$ هستند و در نتیجه

$$f_{U_n}(\mathbf{u}_n; v_0, \dots, v_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \times v_0 \times \cdots \times v_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{u_t^2}{v_{t-1}}\right\}$$

که در آن $U_n = (U_1, U_2, \dots, U_n)'$ و $u_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)'$ از طرفی $X_n = C_n U_n$ که ماتریس C_n در بخش (۳.۳) تعریف شده و دارای دترمینان 1 است. در نتیجه چگالی X_n برابر است با

$$f_{X_n}(x_n; \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \times v_0 \times \dots \times v_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{v_{t-1}}\right\}.$$

و در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$l(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(v_{t-1}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{v_{t-1}} \quad (۴۲.۶)$$

با استفاده از این ضابطه و به کمک الگوریتم تحولها می‌توان به ازای مقادیر خاص پارامترها مقدار تابع درستنمایی را محاسبه کرد.

به منظور محاسبه برآوردهای بیشترین درستنمایی غیر شرطی الگوریتم‌های مختلفی ارائه گردیده است. به عنوان مثال برای $AR(1)$ با درستنمایی (۳۷.۶) (و البته حالاتی کلی‌تر) فولر (۱۹۷۶) را ببینید. باکس و جنکینز (۱۹۷۶) برآوردهای کمترین توانهای دوم غیر شرطی یعنی $\hat{\beta}$ ی که (۳۹.۶) را حداقل می‌کند، برای تقریب برآوردهای بیشترین درستنمایی پیشنهاد می‌کنند. آنها روشی بازگشتی برای محاسبه این مجموع مربعات به ازای مقادیر خاص پارامترها و الگوریتم‌هایی نیز برای تقریب برآوردهای کمترین توانهای دوم غیر شرطی ارائه کرده‌اند. خواننده علاقمند به آشنایی با روشهای محاسبه برآوردهای بیشترین درستنمایی می‌تواند به باکس و جنکینز (۱۹۷۶)، فولر (۱۹۷۶)، انسلی^۱ (۱۹۷۹) و ملارد^۲ (۱۹۸۴) مراجعه کند. در این کتاب بدون ورود به این مباحث، برای محاسبه برآوردهای بیشترین درستنمایی غیر شرطی از تابع *arima.mle* در S-PLUS استفاده می‌کنیم. ساده‌ترین شکل این تابع $(\text{arima.mle}(\text{data}, \text{model} = \text{list}(\text{order} = c(p, d, q))))$ است. در صورتی که $\hat{\beta}$ برآورد بیشترین درستنمایی β باشد برآورد بیشترین درستنمایی σ^2 از تساوی زیر محاسبه می‌شود.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\beta})}{n}.$$

مثال (۱۵.۶): سری مثال (۱۰.۶) را در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $\hat{\mu} = \bar{X} = 9.793$ برآوردهای بیشترین درستنمایی سایر پارامترهای مدل (۱۹.۶) را به کمک دستور

$$\text{arima.mle}(\log(\text{Se11}) - \text{mean}(\log(\text{Se11})), \text{model} = \text{list}(\text{order} = c(2, 0, 1))).$$

محاسبه می‌کنیم. خروجی این دستور به صورت زیر است.

^۱ Ansley

^۲ Melard

```

Call: arima.mle(x = log(Se11) - mean(log(Se11)), model = list(order = c(2, 0, 1)),
  max.iter = 50)
Method: Maximum Likelihood
Model : 2 0 1
Coefficients:
  AR : 1.55254 -0.95939
  MA : 0.49818
Variance-Covariance Matrix:
              ar(1)      ar(2)      ma(1)
ar(1) 0.001675892 -0.001274429 0.001684326
ar(2) -0.001274429 0.001542557 -0.000818642
ma(1) 0.001684326 -0.000818642 0.016250632
Optimizer has converged
Convergence Type: relative function convergence
AIC: 23.83917

```

خروجی (۱.۶)

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت علامت برآورد بیشترین درست‌نمایی θ است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد پارامترهای میانگین متحرک مدل‌های ARIMA در S-PLUS (به استثنای توابع پیوست ۳) گزینه پارامترهای نظیرشان در این کتاب هستند و در استفاده از آنها باید به این نکته توجه داشت. بنابراین برآورد بیشترین درست‌نمایی پارامترهای مدل (۱۹.۶) برابرند با، $\hat{\phi}_1 = 1.553$ ، $\hat{\phi}_2 = -0.959$ و $\hat{\theta}_1 = -0.498$. مقدار $\hat{\sigma}^2$ در این خروجی نیست، اگر به طریق زیر عمل کنیم $\hat{\sigma}^2 = 0.0815$ به دست می‌آید.

$$out < -arima.mle(log(Se11) - mean(log(Se11)), model = list(order = c(2, 0, 1)))$$

$$out\$sigma2$$

و در نتیجه مدل برازش شده به روش بیشترین درست‌نمایی غیرشرطی عبارت است از

$$(1 - 1.553B + 0.959B^2)(\ln(X_t) - 9.793) = Z_t - 0.498Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.0815).$$

تابع $arima.mle$ امکان برآورد μ همراه سایر پارامترها را نیز فراهم می‌کند، برای این منظور از شناسه $xreg$ به شکل زیر کمک می‌گیریم

$$arima.mle(log(Se11), model = list(order = c(2, 0, 1)), xreg = 1)$$

سری	n	مدل برازش شده	$\hat{\sigma}^2$
Se7	78	$(1 - 0.448B)(\nabla X_t - 0.133) = Z_t$ (0.103)	0.146
Se8	84	$(1 - 1.351B + 0.653B^2)(\sqrt{X_t} - 6.1) = Z_t$ (0.084) (0.084)	1.350
Se9	197	$\nabla X_t = (1 - 0.699B)Z_t$ (0.051)	0.101
Se10	85	$X_t = (1 - 1.018B + 0.476B^2)Z_t$ (0.095) (0.095)	1.178
Se11	55	$(1 - 1.553B + 0.960B^2)(\ln(X_t) - 9.801)$ (0.040) (0.040) $= (1 - 0.499B)Z_t$ (0.039)	0.082

جدول ۳.۶: مدل‌های برازش شده به روش بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی برای سری‌های Se7 تا Se11. مقادیر داخل پرانتز خطای معیار برآورد کننده پارامتر نظیرش است.

این برآورد همزمان، منجر به مدل زیر می‌شود که اختلاف اساسی با مدل برازش شده قبلی ندارد.

$$(1 - 1.553B + 0.960B^2)(\ln(X_t) - 9.801) = Z_t - 0.499Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.0815).$$

جدول (۳.۶) شامل مدل‌های برازش شده به روش بیشترین درست‌نمایی برای سری‌های این فصل است که به کمک تابع *arima.mle* به دست آمده‌اند.

در ادامه این بخش و در قضیه زیر با خواص مجانبی برآوردکننده‌های بیشترین درست‌نمایی آشنا می‌شویم اثباتی از این قضیه را می‌توان در براکول و دیویس (۱۹۹۱) یافت.

قضیه (۳.۶): اگر $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ و یک سری سببی و عکس پذیر گاوسی باشد به طوری که $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ ریشه مشترک نداشته باشند آنگاه برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی (شرطی یا غیر شرطی) $\hat{\beta}$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال می‌باشد. به طور دقیق‌تر،

$$\hat{\beta} \approx N_{p+q}\left(\beta, \frac{1}{n}V(\beta)\right), \quad (۴۳.۶)$$

که ماتریس کوواریانس $V(\beta)$ وقتی $p \geq 1$ و $q \geq 1$ برابر است با

$$V(\beta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} E(U_t U_t') & E(U_t V_t') \\ E(V_t U_t') & E(V_t V_t') \end{bmatrix}^{-1}, \quad (۴۴.۶)$$

که در آن $\mathbf{U}_t = (U_t, U_{t-1}, \dots, U_{t-p+1})'$ ، $\mathbf{V}_t = (V_t, V_{t-1}, \dots, V_{t-q+1})'$ و سریهای $\{U_t\}$ و $\{V_t\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\phi_p(B)U_t = Z_t, \quad \theta_q(B)V_t = Z_t.$$

بعلاوه

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{S(\hat{\beta})}{\sigma^2} \approx \chi_{n-p-q}^2. \quad (۴۵.۶)$$

شرط گاوسی بودن سری $\{X_t\}$ در قضیه فوق ضروری نیست و قضیه را می‌توان در حالت کلی‌تری که Z_t ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با گشتاور چهارم متناهی هستند نیز ثابت کرد. در چنین وضعیتی می‌توان تابع درست‌نمایی (۳۲.۶) را به عنوان یک تابع سود یا ملاکی برای نیکویی برازش تفسیر کرد.

با این توزیعهای مجانبی در چند حالت خاص بیشتر آشنا می‌شویم.

سریهای $AR(p)$: در این حالت $\mathbf{V}(\phi) = \sigma^2 [E(\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t')]^{-1}$ که $\phi_p(B)U_t = Z_t$ و در نتیجه

$$\mathbf{V}(\phi) = \sigma^2 \mathbf{\Gamma}_p^{-1},$$

که $\mathbf{\Gamma}_p$ ماتریس اتوکواریانس‌های سری $AR(p)$ ، $\{U_t\}$ است. پس

$$\hat{\phi} \approx N_p(\phi, n^{-1} \sigma^2 \mathbf{\Gamma}_p^{-1}).$$

در صورتی که $p = 1$ ،

$$\hat{\phi} \approx N(\phi, n^{-1}(1 - \phi^2)).$$

و اگر $p = 2$ ،

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} \approx N_2 \left(\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, n^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \phi_2^2 & -\phi_1(1 + \phi_2) \\ -\phi_1(1 + \phi_2) & 1 - \phi_2^2 \end{bmatrix} \right).$$

سریهای $MA(q)$: در این حالت $\mathbf{V}(\theta) = \sigma^2 [E(\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t')]^{-1}$ که $\theta_q(B)V_t = Z_t$ و در نتیجه

$$\mathbf{V}(\theta) = \sigma^2 [\mathbf{\Gamma}_q^*]^{-1},$$

که $\mathbf{\Gamma}_q^*$ ماتریس اتوکواریانس‌های سری $AR(q)$ ، $\{V_t\}$ است. پس

$$\hat{\theta} \approx N_p(\theta, n^{-1} \sigma^2 [\mathbf{\Gamma}_q^*]^{-1}).$$

در صورتی که $q = 1$ ،

$$\hat{\theta} \approx N(\theta, n^{-1}(1 - \theta^2)).$$

و اگر $q = 2$ ،

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \approx N_2 \left(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, n^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \theta_2^2 & \theta_1(1 - \theta_2) \\ \theta_1(1 - \theta_2) & 1 - \theta_2^2 \end{bmatrix} \right).$$

سری $ARMA(1,1)$: در این حالت

$$\mathbf{V}(\phi, \theta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} E(U_t^2) & E(U_t V_t) \\ E(V_t U_t) & E(V_t^2) \end{bmatrix}^{-1}$$

که $U_t - \phi U_{t-1} = Z_t$ و $V_t + \theta V_{t-1} = Z_t$ و در نتیجه

$$\mathbf{V}(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)^{-1} & (1 + \phi\theta)^{-1} \\ (1 + \phi\theta)^{-1} & (1 - \theta^2)^{-1} \end{bmatrix}^{-1},$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} \approx N_2 \left(\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}, n^{-1} \frac{1 + \phi\theta}{(\phi + \theta)^2} \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)(1 + \phi\theta) & -(1 - \theta^2)(1 - \phi^2) \\ -(1 - \theta^2)(1 - \phi^2) & (1 - \theta^2)(1 + \phi\theta) \end{bmatrix} \right).$$

در عمل $\mathbf{V}(\beta)$ معلوم نیست و می‌توان آن را توسط $\mathbf{V}(\hat{\beta})$ برآورد کرد (بحث انتهایی بخش ۴.۶ را نیز ببینید). به عنوان مثال برای سری اتورگرسیو مرتبه اول $V(\hat{\phi}) = n^{-1}(1 - \phi^2)$ را توسط $\hat{V}(\hat{\phi}) = n^{-1}(1 - \hat{\phi}^2)$ برآورد می‌کنیم. برای مدل برازش شده به سری Se7 (جدول ۳.۶)، $\hat{V}(\hat{\phi}) = (77)^{-1}(1 - (0.448)^2) = 0.0104$ و خطای معیار $\hat{\phi}$ برابر $\sqrt{\hat{V}(\hat{\phi})} = 0.102$ به دست می‌آیند. همانطور که در خروجی (۱.۶) نیز دیده می‌شود تابع *arima.mle* برآورد ماتریس $\mathbf{V}(\hat{\beta})$ را نیز محاسبه می‌کند. این برآورد که با استفاده از روابط انتهایی بخش (۴.۶) محاسبه می‌شود اختلاف اساسی با $\mathbf{V}(\hat{\beta})$ ندارد. خطاهای معیار در جدول (۳.۶) را با استفاده از تابع *arima.mle* به دست آورده‌ایم. در مثال زیر استفاده از این توزیع‌های مجانبی را در انجام استنباطهای آماری می‌بینیم. مثال (۱۶.۶): از بحث فوق، و مدل برازش شده برای سری Se10 در جدول (۳.۶)، توزیعهای تقریبی زیر تشخیص داده می‌شوند.

$$\hat{\theta}_1 \approx N(\theta_1, (0.095)^2), \quad \hat{\theta}_2 \approx N(\theta_2, (0.095)^2).$$

با استفاده از این توزیع‌ها فواصل اطمینان $100(1 - \alpha)$ درصدی زیر برای پارامترهای θ_1 و θ_2 به دست می‌آیند.

$$\hat{\theta}_i \pm Z_{\alpha/2} \times 0.095, \quad i = 1, 2$$

به ازای $\alpha = 0.05$ ،

$$\theta_1 : (-1.204, -0.832), \quad \theta_2 : (0.289, 0.662)$$

از طرفی چون هیچیک از این بازه‌ها شامل صفر نیست فرض صفر بودن θ_i ها در سطح 0.05 رد می‌شود.

۷.۶ تمرینات

۱.۶- برای مصداقی به طول 100 از سری $\{X_t\}$ بعد از یک بار تفاضل گیری داریم $\bar{W} = 0$ و $\hat{\gamma}_W(0) = 1.304$ (که $W_t = \nabla X_t$)، جدول زیر نیز مقادیری از توابع SACF و SPACF را نشان می‌دهد. به کمک این مقادیر مدلی برای برازش به سری $\{X_t\}$ حدس زده و آنرا به روشی مناسب برازش دهید.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\rho}(h)$	-0.403	0.417	-0.195	0.162	-0.115	-0.005	0.126	-0.151	0.181
$\hat{\phi}_{hh}$	-0.403	0.304	-0.058	-0.034	-0.075	0.087	-0.053	0.081	-0.059

خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی نمونه‌ای سری W_t در تمرین (۱.۶).

۲.۶- به مصداقی که در تمرین (۱۲.۴) شبیه سازی کرده‌اید مدل $AR(2)$ ،

الف) به روش یول - واکر برازش دهید.

ب) به روش برگ برازش دهید.

در هر مورد فواصل اطمینان 95 درصد برای ϕ_1 و ϕ_2 بسازید.

۳.۶- به مصداقی که در تمرین (۱۴.۴) از مدل‌های شکل (۵.۴) شبیه سازی کرده‌اید به روش تحولاتها مدل $MA(2)$ برازش داده و برای θ_1 و θ_2 فواصل اطمینان 95 درصد بسازید.

۴.۶- به مصداقی که در تمرین (۱۴.۴) از مدل‌های شکل (۹.۴) شبیه سازی کرده‌اید به روش هنان - ریسانن مدل $ARMA(1,1)$ را برازش دهید.

۵.۶- در سه تمرین قبل برآوردهای بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی را نیز با استفاده از تابع $arima.mle$ محاسبه کنید.

۶.۶- برای سری Se8 در پیوست ۲،

الف) مدل $AR(7)$ را به روش بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی برازش دهید. به ازای

$i = 1, 2, \dots, 7$ فرضهای $H_{0i} : \phi_i = 0$ در مقابل $H_{1i} : \phi_i \neq 0$ را در سطح معنی داری

$\alpha = 0.1$ آزمون کنید. همانطور که ملاحظه می‌کنید فرض صفر بودن ضرایب به ازای

$i = 3, 4, 5, 6$ رد نمی‌شود بنابراین مدلی که باید برازش شود مدل $AR(7)$ است که در آن

بعضی از ضرایب صفراند. برای برازش چنین مدلی به کمک تابع *arima.mle* کافی است شناسه $ar.opt = c(T, T, F, F, F, F, T)$ را به *model* اضافه کرد.

ب) تمرین (الف) را برای مدل $AR(10)$ نیز انجام دهید.

ج) برای دو مدل برازش شده فوق $\tilde{P}_{84}X_{84+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ حساب کرده آنها را در ادامه سری رسم کنید.

۷.۶- مدل $IMA(2, 1)$ را به روش کمترین توانهای دوم شرطی به مشاهدات زیر برازش دهید.

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = -1, X_4 = -2.5, X_5 = -4.25$$

۸.۶- تابع زیر مقادیر مجموع توانهای دوم شرطی سری $MA(1)$ را به ازای $a \leq \theta_i \leq b$ و $\theta_{i+1} = \theta_i + \zeta$ برای سری *data* محاسبه و رسم می‌کند.

```
SSTAR<-function(data,a,b,zeta){
  n<-length(data); z<-0; z[1]<-0
  Sstar<-0
  theta<-seq(a,b,zeta)
  for(i in 1:length(theta)){
    for(t in 2:(n+1)){ z[t]<-data[t-1]-z[t-1]*theta[i] }
    Sstar[i]<-sum(z[2:(n+1)]^2)}
  plot(theta,Sstar,type="l")
  return(theta,Sstar)}
```

الف) با استفاده از این تابع مقادیر جدول (۱.۶) را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از این تابع به ازای $a = -0.72$, $b = -0.68$ و $\zeta = 0.001$ مقادیر مجموع توانهای دوم شرطی را در نزدیکی نقطه -0.7 و نقطه مینیمم را تشخیص دهید.

ج) مصداقی به طول ۱۰۰ از سری $MA(1)$ به ازای $\theta = 0.4$ و $\sigma^2 = 1$ شبیه سازی کرده سپس برآوردهای کمترین توانهای دوم شرطی θ و σ^2 را حساب کنید.

۹.۶- مشابه تمرین قبل تابعی برای محاسبه مقادیر مجموع توانهای دوم شرطی یک سری $MA(2)$ بنویسید. به کمک آن مجموع توانهای دوم شرطی سری $Se10$ را به ازای مقادیر مختلف پارامترها حساب کرده نقطه مینیمم را تشخیص دهید.

۱۰.۶- مدل $IMA(2,1)$ (بدون رانش) را به روش بیشترین درست‌نمایی غیرشرطی به سری $Se7$ ، برازش دهید. پیش‌بینی‌های ده گام بعد را یکبار به کمک این مدل برازش شده و یکبار به کمک مدلی که در جدول (۳.۶) آمده، حساب کرده آنها را در ادامه سری رسم کنید.

۱۱.۶- تساوی دوم (۱۶.۶) را ثابت کنید.

۱۲.۶- اگر مخرج کسر (۱۷.۶) را با d_i نشان دهیم ثابت کنید،

$$\text{الف) } S_i^2(\hat{\phi}_{ii}) = d_i(1 - \hat{\phi}_{ii}^2) \text{ و در نتیجه } \hat{\sigma}_i^2 = \frac{d_i(1 - \hat{\phi}_{ii}^2)}{2(n-i)}$$

$$\text{ب) } d_{i+1} = d_i(1 - \hat{\phi}_{ii}^2) - V_{i,i+1}^2 - U_{i,n-i}^2$$

۱۳.۶- تساویها در (۲۹.۶) را ثابت کنید.

۱۴.۶- نشان دهید در صورتی که $\{X_i\} \sim AR(p)$ ، برآوردکننده کمترین توانهای دوم شرطی حاصل از (۲۱.۶) با برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی شرطی حاصل از توزیع شرطی $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$ به شرط X_1, X_2, \dots, X_p یکی است.

۱۵.۶- الف) با استفاده از (۳۵.۶) تابع درست‌نمایی و مجموع توانهای دوم غیرشرطی سری اتورگرسیو مرتبه دو را بیابید.

ب) مجموع توانهای دوم غیرشرطی این سری را با استفاده از (۳۹.۶) به دست آورید.

۱۶.۶- الف) تساوی (۴۱.۶) را ثابت کنید.

$$\text{ب) نشان دهید } \hat{Z}_0 = -\frac{(1-\theta^2)\sum_{i=1}^n (-\theta)^n Y_i}{1-\theta^{2n+2}} \text{ که } Y_t = \sum_{i=1}^t (-\theta)^{i-1} X_{t-i+1}$$

۱۷.۶- تحت شرایط قضیه (۳.۶)، برای یک سری $ARMA(1,1)$ نشان دهید،

$$V(\phi, \theta) = \frac{1 + \phi\theta}{(\phi + \theta)^2} \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)(1 + \phi\theta) & -(1 - \theta^2)(1 - \phi^2) \\ -(1 - \theta^2)(1 - \phi^2) & (1 - \theta^2)(1 + \phi\theta) \end{bmatrix}$$

فصل ۷

شناسایی مدل و ارزیابی مدل برازش شده

شناسایی مدل به منظور برازش به مجموعه‌ای از داده‌ها یکی از مهمترین مراحل مدل کردن داده‌های آماری است. در تحلیل سریهای زمانی با استفاده از مدل‌های کلاسیک، نمودار زمانی سری مشاهده شده به خوبی می‌تواند در انتخاب مدل مناسب به ما کمک کند. زیرا رفتار ظاهری سری مشاهده شده می‌تواند به خوبی معرف مدل کلاسیک مولد آن باشد. در استفاده از مدل‌های ARIMA هر چند چنین نموداری شامل اطلاعات بسیار مفیدی است اما به سختی می‌توان از آن ساختار وابستگی عناصر سری، یعنی مهمترین عامل تمیز بین مدل‌های ARIMA را شناسایی کرد. از طرفی نمودار توابع SACF و SPACF معمولاً این ساختارهای وابستگی را به خوبی منعکس می‌کنند. با چگونگی استفاده از این توابع در شناسایی مدل در بخش (۲.۷) آشنا می‌شویم. با وجود عملکرد خوب این توابع در شناسایی سریهای اتورگرسیو و میانگین متحرک محض برای شناسایی مرتبه مدل‌های مخلوط مناسب نیستند. برای این منظور تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه را در بخش (۳.۷) معرفی کرده‌ایم. یکی دیگر از روشهای معمول برای انتخاب مدل استفاده از ملاکهای اطلاعاتی است. در بخش (۴.۷) با چند ملاک اطلاعاتی و کاربرد آنها آشنا می‌شویم. بعد از شناسایی مدل و برازش آن به یکی از روشهای فصل قبل، این سوال مطرح می‌شود که آیا مدل برازش شده مدل مناسبی است؟ با روشهایی برای ارزیابی مدل به منظور پاسخگویی به این سوال در بخش (۵.۷) آشنا می‌شویم. ابتدا مراحل کلی شناسایی یک مدل ARIMA را مرور می‌کنیم.

۱.۷ مراحل شناسایی مدل ARIMA

الف: بحث در رفتار سری مشاهده شده و سازگاری آن با مدل‌های ARIMA،
مشاهدات X_1, X_2, \dots, X_n از یک سری زمانی موجودند مدل مناسب برای برازش به این مشاهدات چیست؟ در فصل دوم، وقتی در مجموعه مدل‌های کلاسیک به دنبال چنین مدلی می‌گشتیم پاسخی به

این سوال داده‌ایم. در آنجا روشی که برای شناسایی مدل به کار بردیم روشی شهودی بود. به این ترتیب که نمودار زمانی سری مشاهده شده را رسم می‌کردیم، با شناختی که از یک مدل کلاسیک و مصادیق حاصل از آن داشتیم اگر این نمودار با شناخت و انتظار ما سازگار بود از آن مدل استفاده می‌کردیم. بدیهی است در استفاده از مدل‌های ARIMA نیز اولین نکته‌ای که باید به آن توجه داشت همین سازگاری است. با توجه به شناختی که از مدل‌های ARIMA و مصادیق آنها در فصول چهارم و پنجم پیدا کرده‌ایم، رسم نمودار زمانی مشاهدات ساده‌ترین راه برای تشخیص اولیه این سازگاری است. طبیعی است اگر مصادیقی ایستا یا نایستای همگن دیدیم از مدل‌های ARIMA استفاده می‌کنیم. در مواردی هم مثل سری‌های شکل (۴.۷) و شکل (۵.۷) هر چند چنین سری‌هایی را نمی‌توان مستقیماً توسط مدل‌های ARIMA مدل کرد اما همانطور که در مثال‌های (۵.۷) و (۶.۷) می‌بینیم بعد از تبدیلی ساده رفتار سری حاصل به خوبی توسط این مدل‌ها تبیین می‌شود. از نمودار سری مشاهده شده اطلاعات دیگری چون امکان وجود نقاط دور افتاده، تغییرات ناگهانی یا تدریجی در سطح و غیره را نیز می‌توان دریافت کرد. طبیعی است در چنین شرایطی نیز نمی‌توان از مدل‌های ARIMA استفاده کرد اما همانطور که در فصل بعد خواهیم دید با تعمیم مدل‌های ARIMA می‌توان مدل‌هایی مناسب چنین شرایطی به دست آورد. در نهایت اگر از بررسی نمودار سری به این نتیجه رسیدیم که از مدل‌های ARIMA استفاده کنیم به مرحله بعد می‌رویم.

ب: تعیین مرتبه تفاضل‌گیری،

معمولاً نیاز به تفاضل‌گیری از آنجا تشخیص داده می‌شود که نمودار زمانی سری مشاهده شده یک سری نایستای همگن را نشان می‌دهد. برای رسیدن به مصادیقی ایستا تفاضل‌گیری مرتبه اول را انجام می‌دهیم و نمودار زمانی سری تفاضلی شده را رسم می‌کنیم، بدیهی است اگر همچنان رفتار نایستا دیده شود تفاضل‌گیری را ادامه می‌دهیم در غیر این صورت $d = 1$ اختیار می‌شود. این راه کار معمولاً در تعیین مرتبه d کفایت می‌کند اما توجه به رفتار $\hat{\rho}(h)$ ‌ها برای یک سری نایستا نیز بسیار مفید است. وقتی سری نایستا است $\hat{\rho}(h)$ ‌ها مفهوم خاصی ندارند اما برای سری‌های ARIMA، $(d \geq 1)$ می‌توان نشان داد (کوانن^۱، ۱۹۸۰ یا فیندلی^۲، ۱۹۸۰ را ببینید) برای n ‌های بزرگ $(1 - B)\hat{\rho}(h) \approx 0$. که پیامدش نزول کند و تقریباً خطی $\hat{\rho}(h)$ ‌ها و مشخصه‌ای از نیاز به تفاضل‌گیری است. بنابراین به عنوان راه کاری دیگر برای تعیین d تفاضل‌گیری را تا مرتبه‌ای ادامه می‌دهیم که خودهمبستگی‌های نمونه سری تفاضلی شده دیگر نزولی کند از خود نشان ندهند. دیکی^۳ و فولر^۴ (۱۹۷۹ و ۱۹۸۱) و فیلیپس^۴ و پرون^۵ (۱۹۸۸) آزمون‌هایی آماری برای تشخیص نیاز به تفاضل‌گیری یا به تعبیری وجود ریشه‌های واحد در عبارت اتورگرسیون ارائه کرده‌اند که از آنها نیز می‌توان استفاده کرد.

ج: تعیین مرتبه (p, q) ،

دشوارترین مرحله شناسایی مدل تعیین مرتبه (p, q) است که در بخش‌های آینده به آن خواهیم پرداخت. در این بخش‌ها استفاده از توابع SACF، SPACF و تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه

^۱ Quinn
^۲ Findley
^۳ Dickey
^۴ Phillips
^۵ Perron

(SEACF^۱) و چند ملاک اطلاعاتی را برای این منظور شرح می‌دهیم. کتاب چوی (۱۹۹۲) مرجع بسیار خوبی برای آشنایی با روشهای دیگر است.

د: بحث در وجود یا عدم وجود رانش،

تأثیر θ_0 بر مصادیق یک مدل ARIMA و پیش‌بینی‌های حاصل از آن را در بخش‌های (۳.۵) و (۵.۵) بررسی کردیم. در حالتی که $d = 0$ ، دیدیم که $\theta_0 = 0$ معادل است با اینکه $\mu = 0$ ، بنابراین با آزمون فرض $H_0: \mu = 0$ در مقابل $H_1: \mu \neq 0$ به کمک آماره $Z = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\widehat{Var}(\bar{X})}}$ با $\widehat{Var}(\bar{X})$ در (۴۴.۳) می‌توان وجود یا عدم وجود $\theta_0 = 0$ را به کمک مشاهدات آزمون کرد. در حالتی که $d \geq 1$ ، دیدیم که $\theta_0 = 0$ معادل است با $\mu_W = 0$ (که $W = \nabla^d X$) بنابراین تصمیم در وجود یا عدم وجود θ_0 در مدل را می‌توان با آزمون فرض $H_0: \mu_W = 0$ در مقابل $H_1: \mu_W \neq 0$ اتخاذ کرد. در چند بخش آینده با روشهایی برای تعیین مرتبه (p, q) آشنا می‌شویم. در حل مثالهای مورد بحث در این بخش‌ها مراحل فوق در تعیین مدل را مد نظر قرار داده‌ایم.

۲.۷ استفاده از توابع SACF و SPACF در شناسایی مرتبه مدل

باکس و جنکینز (۱۹۷۶) در اجرای فرآیند سه مرحله‌ای مدلسازی یعنی شناسایی، برازش و ارزیابی استفاده از توابع SACF و SPACF را برای شناسایی (p, q) پیشنهاد کرده‌اند. در واقع دنباله صفرها از تأخیری به بعد در ACF سریهای میانگین متحرک و PACF سریهای اتورگرسیو مشخصه‌هایی اند که کار شناسایی این مدلها را به کمک انواع نمونه‌ای این توابع یعنی SACF و SPACF آسان می‌کند.

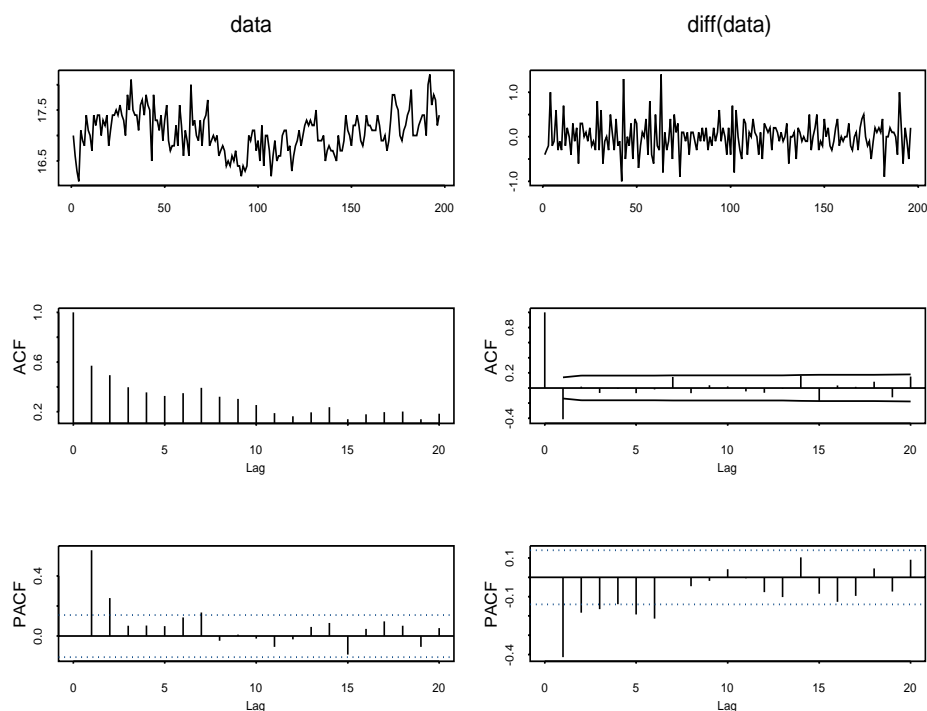
سریهای میانگین متحرک: برای یک سری $MA(q)$ در حالی که PACF به طور دنباله داری به صفر میل می‌کند ACF از تأخیر q به بعد صفر می‌شود. بنابراین اگر از نمودار SPACF همگرایی دنباله داری به صفر و در نمودار SACF قطع شدن را تشخیص دادیم به استفاده از مدل میانگین متحرک ترغیب می‌شویم. طبیعی است در چنین وضعیتی برای تعیین مرتبه q می‌توان فرض‌های $H_{0,h}: \rho(h) = 0$ در مقابل $H_{1,h}: \rho(h) \neq 0$ را آزمون کرده و q را کوچک‌ترین h ی اختیار کرد که از آنجا به بعد هیچیک از فرضهای $H_{0,h}$ رد نمی‌شوند. با توجه به توزیع مجانبی $\hat{\rho}(h)$ که در بخش (۲.۵.۳) با آن آشنا شدیم، آماره آزمون برای آزمون فرض $H_{0,h}: \rho(h) = 0$ در مقابل $H_{1,h}: \rho(h) \neq 0$ عبارت است از،

$$Z = \frac{\sqrt{n}\hat{\rho}(h)}{\sqrt{\widehat{V}(h)}} \quad (۱.۷)$$

که در آن $\widehat{V}(h) = 1 + 2(\hat{\rho}(1)^2 + \hat{\rho}(2)^2 + \dots + \hat{\rho}(h-1)^2)$ و فرض $H_{0,h}$ را در سطح معنی داری α رد می‌کنیم هرگاه $|Z| > Z_{\alpha/2}$ باشد.

مثال (۱.۷): نمودار سری Se9 و نمودار SACF آن در شکل (۱.۷) نایستایی سری و لازمه تفاضل‌گیری را نشان می‌دهند. نمودار سری تفاضلی شده و نمودار SACF آن بعد از یکبار تفاضل‌گیری

^۱ Sample Extended Autocorrelation Function



شکل ۱.۷: نمودار سری Se9 و توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای این سری قبل و بعد از تفاضل‌گیری.

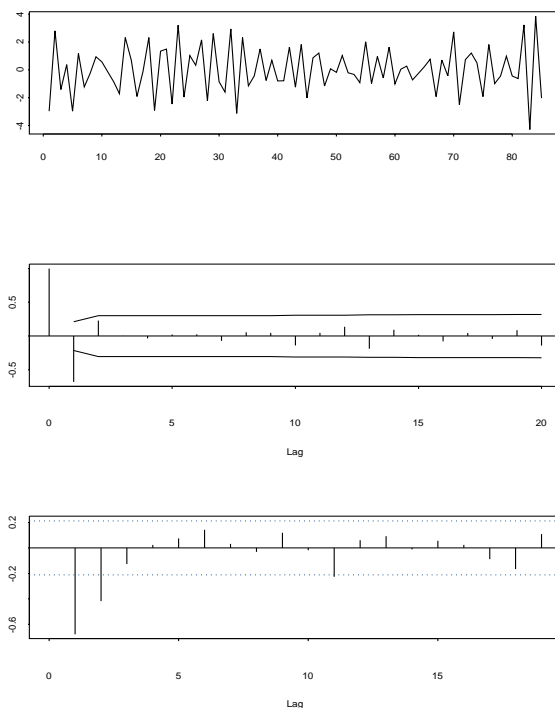
h	$\hat{\rho}(h)$	$\sqrt{\frac{\hat{V}(h)}{n}}$	Z	نتیجه	h	$\hat{\rho}(h)$	$\sqrt{\frac{\hat{V}(h)}{n}}$	Z	نتیجه
1	-0.41	0.071	-5.77	*	11	-0.05	0.085	-0.59	-
2	0.02	0.083	0.24	-	12	-0.06	0.085	-0.71	-
3	-0.07	0.083	-0.84	-	13	-0.01	0.085	-0.12	-
4	-0.01	0.083	-0.12	-	14	0.16	0.087	1.84	-
5	-0.07	0.083	-0.84	-	15	-0.17	0.089	-1.91	-
6	-0.02	0.083	-0.24	-	16	0.03	0.089	0.34	-
7	0.15	0.085	1.76	-	17	0.01	0.089	0.11	-
8	-0.07	0.085	-0.82	-	18	0.08	0.089	0.90	-
9	0.04	0.085	0.47	-	19	-0.12	0.090	-1.33	-
10	0.02	0.085	0.24	-	20	0.15	0.091	1.65	-

جدول ۱.۷: خودهمبستگی‌های نمونه ∇X_t برای تأخیرهای 1 تا 20 به همراه خطای معیار آنها و مقدار آماره آزمون برای سری مثال (۱.۷). علامت * نشان می‌دهد که فرض $H_{0,h}$ در سطح معنی داری 0.05 رد می‌شود.

در همان شکل، نشان می‌دهند که یکبار تفاضل‌گیری کافی است و $d = 1$ اختیار می‌شود. از طرفی رفتار خودهمبستگی‌های جزئی نمونه‌سری تفاضلی شده دلالت بر همگرایی PACF به صفر دارد در حالی که به نظر می‌آید که خودهمبستگی‌ها از جایی به بعد (احتمالاً از تأخیر یک به بعد) صفر می‌شوند. در نتیجه یک مدل میانگین متحرک برای این سری پیشنهاد می‌شود. برای تعیین مرتبه q فرض‌های $H_{0,h} : \rho(h) = 0$ در مقابل $H_{1,h} : \rho(h) \neq 0$ را به ازای $h = 1, 2, \dots, 20$ به کمک آماره (۱.۷) آزمون کرده‌ایم. مقدار آماره آزمون و نتیجه آزمون برای این تأخیرها در جدول (۱.۷) نشان می‌دهد مرتبه مناسب $q = 1$ است. برای تشخیص سریعتر q ، حدود $\pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{V}(h)}{n}}$ را به نمودار خودهمبستگی‌های نمونه‌سری تفاضلی شده در شکل (۱.۷) اضافه کرده‌ایم. همانطور که ملاحظه می‌شود فقط $\hat{\rho}(1)$ خارج این حدود قرار دارد. برای آزمون فرض $H_0 : \mu_W = 0$ در مقابل $H_1 : \mu_W \neq 0$ با توجه به اینکه $\bar{W} = 0.002$ و با استفاده از (۴۴.۳) به ازای $K = \sqrt{196} = 14$ ، $\widehat{Var}(\bar{W}) = 0.000085$ مقدار آماره آزمون برابر است با ۰.۲۲۲ که در سطح ۰.۰۵ به تأیید فرض H_0 منجر می‌شود (برای انجام محاسبات مربوطه از تابع $VAR.MEAN(data)$ در پیوست ۳ استفاده کرده‌ایم). با جمع بندی این نتایج مدل $\nabla X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ ، $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ برای برازش به سری Se9 پیشنهاد می‌شود.

مثال (۲.۷): شکل (۲.۷) نمودار سری Se10 به همراه نمودار SACF و SPACF آن را نشان می‌دهد. از بررسی دو نمودار اول عدم نیاز به تفاضل‌گیری و سازگاری رفتار سری با مدل‌های ARMA، را تشخیص می‌دهیم. از جمع بندی رفتار توابع SACF و SPACF یک مدل میانگین متحرک برای این سری پیشنهاد می‌شود. برای تعیین q فرض‌های $H_{0,h} : \rho(h) = 0$ در مقابل $H_{1,h} : \rho(h) \neq 0$ را به ازای $h = 1, 2, \dots, 20$ آزمون کرده‌ایم. نتایج حاصل از این آزمون‌ها در جدول (۲.۷)، $q = 1$ را پیشنهاد می‌کند. اما مقدار $\hat{\rho}(1) = -0.68$ ، که برای سری میانگین متحرک مرتبه اول مقدار غیر احتمالی است (با استفاده از تقریب بارتلت و به ازای $\theta = -0.5$ ، $\hat{\rho}(1) \approx N(-0.5, 0.00588)$ ، و در نتیجه $0.0095 \approx P(\hat{\rho}(1) \leq -0.68)$ ، برای انتخاب $q = 1$ ما را دچار تردید می‌کند. از طرفی مقدار نسبتاً بزرگ $\hat{\rho}(2) = 0.23$ مدل میانگین متحرک مرتبه دوم را به عنوان پیشنهادی دیگر مطرح می‌کند. در مواردی مثل این، مدل با مرتبه بالاتر را برای برازش انتخاب می‌کنیم. طبیعی است بعد از برازش این مدل و با آزمون فرض $H_0 : \theta_2 = 0$ در مقابل $H_1 : \theta_2 \neq 0$ می‌توان $q = 2$ در مقابل $q = 1$ را آزمود. برای سری Se10 مثال (۱۶.۶) نشان می‌دهد مدل میانگین متحرک مرتبه دوم انتخاب مناسبی است. برای آزمون فرض $H_0 : \mu = 0$ در مقابل $H_1 : \mu \neq 0$ با توجه به اینکه $\bar{X} = 0.0161$ و $\widehat{Var}(\bar{X}) = 0.0049$ مقدار آماره آزمون برابر است با ۰.۲۳۱ که در سطح ۰.۰۵ به تأیید فرض H_0 منجر می‌شود. بنابراین مدل $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}$ ، $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ برای سری Se10 پیشنهاد می‌شود.

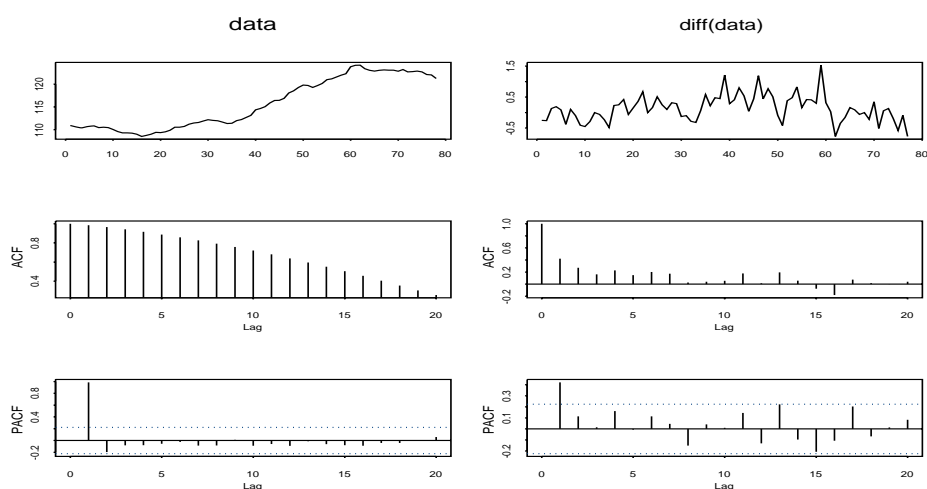
سریهای اتورگرسیو: برای یک سری $AR(p)$ در حالی که ACF به طور دنباله داری به صفر میل می‌کند PACF از تأخیر p به بعد صفر می‌شود. بنابراین اگر از نمودار SADF همگرایی دنباله داری به صفر و در نمودار SPACF قطع شدن را تشخیص دادیم به استفاده از مدل اتورگرسیو ترغیب می‌شویم. طبیعی است در چنین وضعیتی برای تعیین مرتبه p می‌توان فرض‌های $H_{0,h} : \phi_{hh} = 0$ در مقابل $H_{1,h} : \phi_{hh} \neq 0$ را آزمون کرده و p را کوچکترین h ی اختیار کرد که از آنجا به بعد هیچیک از



شکل ۲.۷: نمودار سری Se10 و توابع خودهمبستگی نمونه‌ای و خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای این سری.

h	$\hat{\rho}(h)$	$\sqrt{\frac{\hat{V}(h)}{n}}$	Z	نتیجه	h	$\hat{\rho}(h)$	$\sqrt{\frac{\hat{V}(h)}{n}}$	Z	نتیجه
1	-0.68	0.108	-6.30	*	11	0.05	0.157	0.32	-
2	0.23	0.154	1.49	-	12	0.14	0.158	0.89	-
3	0.00	0.154	0.00	-	13	-0.19	0.161	-1.18	-
4	-0.03	0.154	-0.19	-	14	0.09	0.161	0.56	-
5	0.02	0.154	0.13	-	15	0.02	0.162	0.12	-
6	0.03	0.154	0.19	-	16	-0.08	0.162	-0.49	-
7	-0.07	0.155	-0.45	-	17	0.05	0.162	0.31	-
8	0.06	0.155	0.39	-	18	-0.04	0.162	-0.25	-
9	0.05	0.155	0.32	-	19	0.09	0.163	0.55	-
10	-0.14	0.157	-0.89	-	20	-0.14	0.164	-0.85	-

جدول ۲.۷: خودهمبستگی‌های نمونه در تأخیرهای 1 تا 20 به همراه خطای معیار آنها و مقدار آماره آزمون برای سری مثال (۲.۷). علامت * نشان می‌دهد که فرض $H_{0,h}$ در سطح معنی داری 0.05 رد می‌شود.

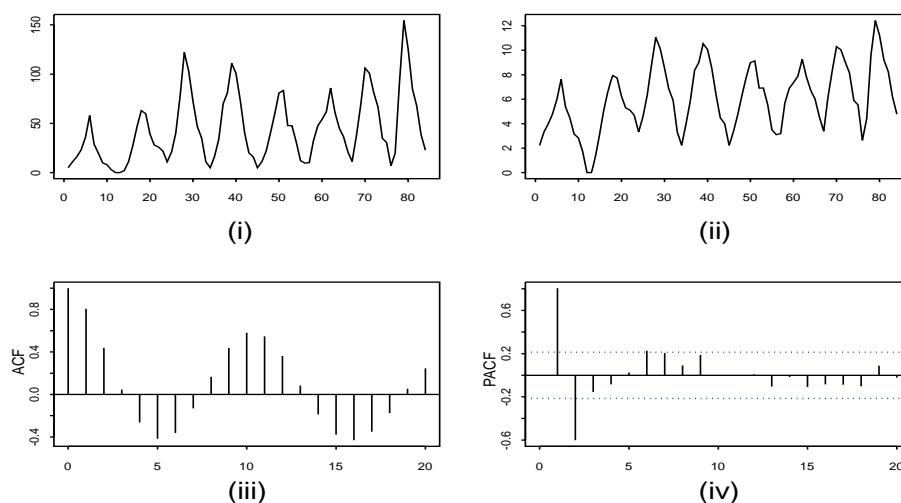


شکل ۳.۷: نمودار سری Se7 و توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای این سری قبل و بعد از تفاضل‌گیری.

فرض‌های $H_{0,h}$ رد نمی‌شوند. با توجه به توزیع مجانبی $\hat{\phi}_{hh}$ که در بخش (۳.۵.۳) با آن آشنا شدیم، آماره آزمون برای آزمون این فرض‌ها عبارت است از $Z = \sqrt{n}\hat{\phi}_{hh}$ و فرض $H_{0,h}$ را در سطح معنی‌داری α رد می‌کنیم هر گاه $|Z| > Z_{\alpha/2}$ باشد. با اضافه کردن حدود $\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}}$ به نمودار SPACF می‌توان این فرض‌ها را به سرعت آزمون کرد.

مثال (۳.۷): نمودار سری Se7 و نمودار SACF آن در شکل (۳.۷) هر دو لازمه تفاضل‌گیری را نشان می‌دهند. نمودارهای سری تفاضلی شده و SACF بعد از یکبار تفاضل‌گیری (شکل ۳.۷) نشان می‌دهند که یکبار تفاضل‌گیری کافی است و $d = 1$ اختیار می‌شود. از طرفی رفتار خودهمبستگی‌های نمونه سری تفاضلی شده دلالت بر همگرایی ACF به صفر دارد در حالی که به نظر می‌رسد که خود همبستگی‌های جزئی از جایی به بعد (احتمالاً از تأخیر یک به بعد) صفر می‌شوند. در نتیجه یک مدل اتورگرسیو برای این سری پیشنهاد می‌شود. برای تعیین مرتبه p حدود $\pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{1}{77}}$ را به نمودار SPACF اضافه می‌کنیم این نمودار در شکل (۳.۷) نشان می‌دهد $p = 1$ انتخاب مناسبی است. برای آزمون فرض $H_0: \mu_W = 0$ در مقابل $H_1: \mu_W \neq 0$ با توجه به اینکه $\bar{W} = 0.134$ و $Var(\bar{W}) = 0.00661$ مقدار آماره آزمون برابر است با 1.64، که هر چند در سطح معنی‌داری 0.05 منجر به تأیید فرض H_0 می‌شود اما اختلافی با $Z_{0.1}$ ندارد پس تا بررسی‌های بیشتر μ_W را به مدل اضافه کرده و مدل $ARIMA(1, 1, 0)$ با رانش را برای برازش به سری Se7 پیشنهاد می‌کنیم.

مثال (۴.۷): نمودار سری Se8 در شکل (۴.۷) ناپایداری در واریانس را نشان می‌دهد در استفاده از تبدیلات توانی باکس و کاکس تبدیل ریشه دوم مناسب تشخیص داده می‌شود (شکل ۴.۷). نمودار توابع SACF و SPACF سری تبدیل یافته، مدل اتورگرسیو مرتبه دو را پیشنهاد می‌کند. میانگین نمونه‌ای 6.08 با برآورد واریانس 0.1919 برای سری $\sqrt{X_t}$ منجر به مقدار $Z = 13.89$ و رد فرض صفر



شکل ۴.۷: نمودار سری Se8، (i) و سری تبدیل یافته (ii) و توابع خودهمبستگی (iii) و خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای (iv) سری تبدیل یافته.

بودن میانگین سری تبدیل یافته می‌شود. بنابراین مدل پیشنهادی برای این سری عبارت است از

$$\phi_2(B)(\sqrt{X_t} - \mu) = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

همانطور که در مثال‌های فوق نیز دیدیم اگر سری مشاهده شده مصداقی از یک مدل اتورگرسیو یا میانگین متحرک باشد توابع SACF و SPACF راهنمای خوبی برای تشخیص این نکته و تعیین مرتبه مدل مربوطه هستند. برای مدل‌های ARMA ی مخلوط همانطور که در فصل چهارم دیدیم توابع ACF و PACF به طور دنباله داری به صفر میل می‌کنند هر چند معمولاً توابع SACF و SPACF این رفتار را منعکس می‌کنند اما در تعیین مرتبه (p, q) به کمک آنها توفیقی نخواهیم داشت. در بخش بعد با تابعی آشنا می‌شویم که در تعیین مرتبه مدل‌های مخلوط هم می‌توان از آن استفاده کرد.

۳.۷ تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه

تسی^۱ و تیاو^۲ (۱۹۸۴) تابع خودهمبستگی گسترش یافته را برای شناسایی مدل‌های ARMA معرفی کردند. همانطور که خواهیم دید مقادیر این تابع به عنوان تابعی از دو متغیر مرتبه اتورگرسیو و مرتبه میانگین متحرک، الگوی مثلی شکلی از صفرها را تشکیل می‌دهند که برای یک سری $ARMA(p, q)$ رأس آن نقطه (p, q) است. بنابراین انتظار داریم به کمک نوع نمونه‌ای این تابع یعنی تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه (SEACF) بتوان مرتبه مدل را شناسایی کرد. به منظور معرفی SEACF، ابتدا با

^۱ Tsay

^۲ Tiao

روش رگرسیون‌های تکراری^۱ آشنا می‌شویم. تسی و تیائو (۱۹۸۴) این روش را برای به دست آوردن برآوردکننده‌های سازگار ضرایب اتورگرسیو یک مدل $ARMA(k, l)$ ارائه کرده‌اند. در این روش ابتدا مدل رگرسیونی

$$X_t = \phi_{1(k)}^{(0)} X_{t-1} + \dots + \phi_{k(k)}^{(0)} X_{t-k} + e_{k,t}^{(0)}, \quad t = k+1, \dots, n$$

با خطاهای رگرسیونی $e_{k,t}^{(0)}$ را به روش کمترین توانهای دوم عادی برازش می‌دهیم. برآورد ضرایب رگرسیونی فوق را با $\hat{\phi}_{1(k)}^{(0)}, \hat{\phi}_{2(k)}^{(0)}, \dots, \hat{\phi}_{k(k)}^{(0)}$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $l = 0$ باشد به عبارت دیگر $\{e_{k,t}^{(0)}\}$ نوفه سفید باشد این برآوردکننده‌ها سازگارند. در غیر اینصورت اگر

$$\hat{e}_{k,t}^{(0)} = X_t - \hat{\phi}_{1(k)}^{(0)} X_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_{k(k)}^{(0)} X_{t-k}, \quad t = k+1, \dots, n$$

مانده‌های حاصل از این برازش باشند، اولین رگرسیون تکراری (از مرتبه k) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$X_t = \phi_{1(k)}^{(1)} X_{t-1} + \dots + \phi_{k(k)}^{(1)} X_{t-k} + \beta_{1(k)}^{(1)} \hat{e}_{k,t-1}^{(0)} + e_{k,t}^{(1)}, \quad t = k+2, \dots, n.$$

که در آن $e_{k,t}^{(1)}$ ها خطاهای رگرسیونی‌اند. برازش این مدل به روش کمترین توانهای دوم عادی منجر به برآوردکننده‌های جدید $\hat{\phi}_{1(k)}^{(1)}, \hat{\phi}_{2(k)}^{(1)}, \dots, \hat{\phi}_{k(k)}^{(1)}$ برای $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ می‌شود. در صورتی که $l = 1$ باشد تسی و تیائو ثابت کردند این برآوردکننده‌ها سازگارند. در غیر این صورت دومین رگرسیون تکراری (از مرتبه k) را تعریف کرده و این فرآیند را ادامه می‌دهیم. در حالت کلی برای $l = 1, 2, \dots$ امین رگرسیون تکراری (از مرتبه k) به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$X_t = \phi_{1(k)}^{(l)} X_{t-1} + \dots + \phi_{k(k)}^{(l)} X_{t-k} + \beta_{1(k)}^{(l)} \hat{e}_{k,t-1}^{(l-1)} + \dots + \beta_{l(k)}^{(l)} \hat{e}_{k,t-l}^{(0)} + e_{k,t}^{(l)}, \quad t = k+l+1, \dots, n.$$

که $e_{k,t}^{(l)}$ خطای رگرسیونی این مدل و

$$\hat{e}_{k,t}^{(i)} = X_t - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{j(k)}^{(i)} X_{t-j} - \sum_{h=1}^i \hat{\beta}_{h(k)}^{(i)} \hat{e}_{k,t-h}^{(i-h)}, \quad i = 1, \dots, l-1$$

مانده‌های حاصل از برازش i امین رگرسیون تکراری هستند. تسی و تیائو ثابت کردند اگر مرتبه میانگین متحرک مدل l باشد برآوردکننده‌های حاصل از برازش l امین رگرسیون تکراری برای ضرایب اتورگرسیو برآوردکننده‌هایی سازگارند.

حال اگر قرار دهیم $W_{k,t}^{(l)} = X_t - \hat{\phi}_{1(k)}^{(l)} X_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_{k(k)}^{(l)} X_{t-k}$ تسی و تیائو k امین خودهمبستگی گسترش یافته نمونه در تأخیر l را خودهمبستگی نمونه سری $W_{k,t}^{(l)}$ در تأخیر l تعریف کردند. به عبارت دیگر اگر k امین خودهمبستگی گسترش یافته نمونه در تأخیر l را با $\hat{\rho}(k, l)$ نشان دهیم آنگاه

$$\hat{\rho}(k, l) = \hat{\rho}_{W_k^{(l)}}(l),$$

^۱ Iterated regressions method

AR	MA					...
	0	1	2	3	4	
0	$\hat{\rho}(0, 1)$	$\hat{\rho}(0, 2)$	$\hat{\rho}(0, 3)$	$\hat{\rho}(0, 4)$	$\hat{\rho}(0, 5)$...
1	$\hat{\rho}(1, 1)$	$\hat{\rho}(1, 2)$	$\hat{\rho}(1, 3)$	$\hat{\rho}(1, 4)$	$\hat{\rho}(1, 5)$...
2	$\hat{\rho}(2, 1)$	$\hat{\rho}(2, 2)$	$\hat{\rho}(2, 3)$	$\hat{\rho}(2, 4)$	$\hat{\rho}(2, 5)$...
3	$\hat{\rho}(3, 1)$	$\hat{\rho}(3, 2)$	$\hat{\rho}(3, 3)$	$\hat{\rho}(3, 4)$	$\hat{\rho}(3, 5)$...
4	$\hat{\rho}(4, 1)$	$\hat{\rho}(4, 2)$	$\hat{\rho}(4, 3)$	$\hat{\rho}(4, 4)$	$\hat{\rho}(4, 5)$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

جدول ۳.۷: جدول خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه SEACF.

AR	MA	1	2	3	4	5	6	7	8	...
		0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	*	×	×	×	×	×	×	×	×	...
1	*	×	0	0	0	0	0	0	0	...
2	*	×	×	0	0	0	0	0	0	...
3	*	×	×	×	0	0	0	0	0	...
4	*	×	×	×	×	0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

جدول ۴.۷: جدول نمادین خودهمبستگی‌های گسترش یافته برای سری $ARMA(1, 2)$. در این جدول \times بیانگر مقادیر غیر صفر و * بیانگر مقادیر بین -1 و 1 هستند.

برای $k = 0$ نیز تعریف می‌کنیم $\hat{\rho}(0, l) = \hat{\rho}(l)$. تابع دو متغیره با ضابطه فوق را تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه می‌نامیم. در صورتی که مدل واقعی $ARMA(p, q)$ باشد از سازگاری برآوردکننده‌های رگرسیون‌های تکراری برای ضرایب اتورگرسیون به ازای $l \geq q$ می‌توان نتیجه گرفت که سری $W_{p,t}^{(l)} = X_t - \sum_{h=1}^p \hat{\phi}_{h(p)}^{(l)} X_{t-h}$ به طور حدی یک سری $MA(q)$ است. بنابراین وقتی n بدون کران افزایش می‌یابد همگرایی (در احتمال) زیر را داریم،

$$\hat{\rho}(k, l) \rightarrow \begin{cases} 0 & l > q, k = p \\ c & l = q, k = p \end{cases}$$

همگرایی فوق نشان می‌دهد که تابع p امین خودهمبستگی گسترش یافته سری $ARMA(p, q)$ دقیقاً همان خاصیت قطع شدن تابع خودهمبستگی سری $MA(q)$ را دارد. از این خاصیت حدی در صورتی که p معلوم باشد در تعیین q می‌توان استفاده کرد. اما معمولاً p و q هر دو نامعلومند، خوشبختانه تسی و تیاو (۱۹۸۴) مقادیر حدی دیگری از تابع خودهمبستگی گسترش یافته نمونه سری $ARMA(p, q)$ را شناسایی کردند. آنها برای یک سری $ARMA(p, q)$ وقتی n بدون کران افزایش می‌یابد همگرایی (در

احتمال) زیر را ثابت کردند.

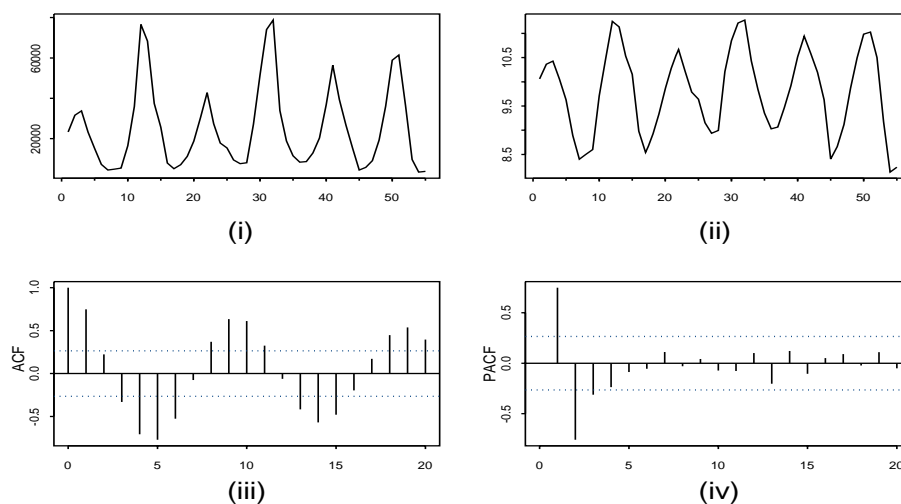
$$\hat{\rho}(k, l) \rightarrow \begin{cases} c(l - q, k - p) & 0 \leq l - q \leq k - p \\ 0 & l - q > k - p \geq 0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

که $c(l - q, k - p)$ ها مقادیری غیر صفر یا متغیرهای تصادفی پیوسته با مقادیری در بازه $(-1, 1)$ هستند. در اینجا این مقادیر حدی را خودهمبستگی‌های گسترش یافته سری ARMA می‌نامیم و با $\rho(k, l)$ نشان می‌دهیم (برای تعریف EACF پنا، تسی و تیانو (۲۰۰۱) را ببینید).

از این خاصیت مجانبی در تعیین مرتبه (p, q) استفاده می‌شود برای این منظور مقادیر SAECF را در یک جدول دو طرفه مثل جدول (۳.۷) مرتب می‌کنیم. در این جدول سطرها با شماره‌های $0, 1, 2, \dots$ برای نشان دادن مرتبه اتورگرسیو و به همین ترتیب ستونها، برای نشان دادن مرتبه میانگین متحرک شماره گذاری شده‌اند. برای تشریح استفاده از این جدول فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(1, 2)$ ، مقادیر حدی یا همان خودهمبستگی‌های گسترش یافته این مدل را به کمک (۲.۷) تعیین کرده و به صورت نمادهایی در جدول (۴.۷) نشان داده‌ایم. به عنوان مثال بدیهی است که برای $l \geq 2$ ، $\rho(0, l) = \rho(l) \neq 0$ ، علاوه بر این از (۲.۷) به ازای $k = 1$ داریم $\rho(1, l) = 0$ ، $l \geq 3$ و وقتی $k = 2$ برای $l \geq 4$ ، $\rho(2, l) = 0$ والی آخر. جدول (۴.۷) وضعیت کلی مقادیر EACF را برای این مدل نشان می‌دهد در این جدول \times بیانگر مقادیر غیر صفر و * بیانگر مقادیر بین -1 و 1 اند. همانطور که ملاحظه می‌شود صفرها الگوی مثلثی شکل با رأسی در نقطه $(1, 2)$ یعنی مرتبه مدل تشکیل می‌دهند. بنابراین برای تعیین مرتبه (p, q) در جدول SEACF باید به دنبال مثلثی از صفرهای مجانبی گشت. در عمل و برای اندازه نمونه متناهی که $\hat{\rho}(k, l)$ لزوماً صفر نیستند تسی و تیانو پیشنهاد کرده‌اند جدول SEACF را با جدول دیگری (جدول نتایج آزمون) شامل علامت \times به ازای خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه با مقادیری خارج بازه $[-2\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\rho}(k, l))}, 2\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\rho}(k, l))}]^{1/2}$ و صفر برای سایر مقادیر تعویض کنیم، که در آن $\widehat{Var}(\hat{\rho}(k, l)) = (n - k - l)^{-1}$. این تابع تابع $SEACF(data, K, L)$ در پیوست ۳ برای محاسبه مقادیر SEACF تهیه شده است. این تابع خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه تا مرتبه K و تأخیر L را حساب کرده جدول نتایج آزمون را نیز ارائه می‌دهد.

مثال (۵.۷): نمودار سری Se11 در شکل (۵.۷) نیاز به یک تبدیل تثبیت واریانس، و نمودار لگاریتم این سری مناسب بودن تبدیل لگاریتمی برای این منظور را نشان می‌دهد. نمودار توابع SACF و SPACF هر دو همگرایی دنباله دار توابع نظری نظیرشان را می‌رسانند. بنابراین مدلی مخلوط برای سری تبدیل یافته پیشنهاد می‌شود. جداول (۵.۷) و (۶.۷) که شامل مقادیر SEACF و نتایج آزمون آنها است مرتبه $(2, 1)$ را برای سری Se11 پیشنهاد می‌کند. مقدار آماره آزمون برای آزمون فرض صفر بودن میانگین سری تبدیل یافته برابر 82.78 بر غیر صفر بودن میانگین تأکید دارد. در نتیجه مدل زیر برای برازش به سری Se11 پیشنهاد می‌شود.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(\ln(X_t) - \mu) = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$



شکل ۵.۷: نمودار سری Se11، (i) و سری تبدیل یافته (ii) و توابع خودهمبستگی (iii) و خودهمبستگی جزئی (iv) نمونه‌ای سری تبدیل یافته.

		MA								
AR		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		0.75	0.22	-0.33	-0.71	-0.77	-0.53	-0.08	0.37	0.63
1		0.71	0.22	-0.30	-0.65	-0.70	-0.51	-0.08	0.34	0.59
2		-0.48	-0.01	0.20	-0.13	0.16	-0.19	0.18	-0.13	0.00
3		-0.49	0.01	0.28	0.10	0.01	-0.05	0.06	-0.12	-0.09
4		0.25	0.22	0.34	0.09	0.01	-0.03	0.02	-0.09	-0.02
5		-0.49	-0.02	0.35	-0.18	0.18	-0.06	0.05	-0.08	-0.11

جدول ۵.۷: جدول خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه برای سری Se11.

		MA								
AR		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		×	0	×	×	×	×	0	×	×
1		×	0	×	×	×	×	0	×	×
2		×	0	0	0	0	0	0	0	0
3		×	0	0	0	0	0	0	0	0
4		0	0	×	0	0	0	0	0	0
5		×	0	×	0	0	0	0	0	0

جدول ۶.۷: جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته برای سری Se11.

		MA								
AR		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		-0.68	0.20	0.04	-0.06	0.03	0.03	-0.09	0.03	0.08
1		-0.57	0.23	0.23	-0.05	0.04	0.03	-0.16	0.02	0.13
2		-0.43	0.08	0.11	0.31	0.01	-0.02	-0.01	-0.06	0.04
3		-0.37	0.15	0.02	0.28	0.01	-0.03	0.03	-0.05	0.06
4		-0.09	0.07	0.07	0.07	-0.03	-0.10	-0.08	-0.04	0.07
5		0.07	0.44	0.04	0.01	-0.01	-0.25	0.02	-0.08	0.10

جدول ۷.۷: جدول خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه برای سری Se10.

		MA								
AR		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		×	0	0	0	0	0	0	0	0
1		×	×	×	0	0	0	0	0	0
2		×	0	0	×	0	0	0	0	0
3		×	0	0	×	0	0	0	0	0
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		0	×	0	0	0	×	0	0	0

جدول ۸.۷: جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته برای سری Se10.

مثال (۶.۷): جداول (۷.۷) و (۸.۷) به ترتیب شامل مقادیر SEACF و نتایج آزمون برای سری Se10 است. جدول (۸.۷) مدل میانگین متحرک مرتبه دوم را برای این سری پیشنهاد می‌کند. این نتیجه تأکیدی است بر مدلی که از بررسی SACF و SPACF برای این سری به دست آورده بودیم.

۴.۷ ملاکهای اطلاعاتی

یک ملاک اطلاعاتی^۱ شاخصی کلی از یک مدل برازش شده است که از آن در مقایسه مدل‌های مختلف استفاده می‌کنیم. در این بخش با چند ملاک اطلاعاتی و کاربرد آنها در تعیین مرتبه مدل‌های ARMA آشنا می‌شویم. هر چند این ملاکها از روشهای مختلفی حاصل شده‌اند اما غالب آنها دارای ساختار زیر هستند،

$$IC(p, q) = -2 \ln(L(\hat{\beta}_{p,q}, \hat{\sigma}_{p,q}^2)) + P(n, M), \quad (۳.۷)$$

که در آن $L(\hat{\beta}_{p,q}, \hat{\sigma}_{p,q}^2)$ بیشترین مقدار تابع درست‌نمایی حاصل از برازش مدل $ARMA(p, q)$ ، $M = p + q$ تعداد پارامترها و $P(n, M)$ تابعی از این تعداد و تعداد مشاهداتی است که در برازش مدل به

^۱ Information Criteria

کاربرده ایم. اگر در تساوی (۳۸.۶) از $f(\beta)$ صرف نظر کنیم به سادگی می توان نشان داد که

$$-2 \ln(L(\hat{\beta}_{p,q}, \hat{\sigma}_{p,q}^2)) = n \ln(\hat{\sigma}_M^2) + n(1 + \ln(2\pi)) \quad (۳.۷)$$

$$IC(p, q) = n \ln(\hat{\sigma}_M^2) + P(n, M) + n(1 + \ln(2\pi)). \quad (۴.۷)$$

نوشت. معمولاً مقدار $n(1 + \ln(2\pi))$ را نیز که برای همه مدلها برابر است از تساوی فوق حذف می کنیم. عبارات اول در تساوی های (۳.۷) و (۴.۷) ملاکهایی از نیکویی برازش مدل هستند و هر چه مقدارشان کمتر باشد گویای برازش بهتری است. این عبارات معمولاً با افزایش تعداد پارامترها کاهش می یابند و $P(n, M)$ در واقع جریمه ای است که برای مقابله با افزایش بی رویه تعداد پارامترها در $IC(p, q)$ در نظر گرفته می شود. بنابراین در استفاده از یک ملاک اطلاعاتی از بین مدل های نامزد مدلی با کمترین IC به عنوان بهترین مدل انتخاب می شود. چند ملاک اطلاعاتی که بیشتر به کار می روند عبارتند از،

۱- ملاک اطلاعاتی آکائیک^۱، آکائیک (۱۹۷۳)،

$$AIC(p, q) = n \ln(\hat{\sigma}_{p,q}^2) + 2(p + q) + n(1 + \ln(2\pi)).$$

۲- ملاک بیزی شوارز^۲، شوارز (۱۹۷۸)،

$$SBC(p, q) = n \ln(\hat{\sigma}_{p,q}^2) + (p + q) \ln(n) + n(1 + \ln(2\pi)).$$

۳- ملاک اطلاعاتی آکائیک تصحیح شده، هورویچ^۳ و تسی (۱۹۸۹)،

$$AICC(p, q) = n \ln(\hat{\sigma}_{p,q}^2) + \frac{2(p + q + 1)n}{(n - p - q - 2)} + n(1 + \ln(2\pi)).$$

از ملاکهای دیگر با ساختار فوق می توان به ملاکهای هنان و کوانن (۱۹۷۹) و ملاک ریسانن (۱۹۸۳) اشاره کرد. برای سریهای اتورگرسیو چند ملاک اطلاعاتی دیگر نیز مورد استفاده قرار می گیرند که عبارتند از،

۱- خطای پیش بینی نهایی (FPE)^۴، آکائیک (۱۹۶۹)،

$$FPE(p) = \left(\frac{n+p}{n-p}\right) \hat{\sigma}_p^2.$$

^۱ Akaike

^۲ Schwarz

^۳ Hurvich

^۴ Final Prediction Error

مدل	AIC	SBC	AICC
MA(1)	276	278.4	278.1
MA(2)	259.1	264	260.4

جدول ۹.۷: مقادیر ملاکهای اطلاعاتی برای مدل‌های مثال (۷.۷).

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$AIC(p, 0)$	403.9	317.9	282.1	282.1	283.5	285.5	283.1	281.4	282.7	281.6	283.6

جدول ۱۰.۷: مقادیر ملاک اطلاعاتی آکائیک برای مدل‌های اتورگرسیو مرتبه صفر تا ده که به روش یول - واکر به سری مجذور Se8 برازش شده‌اند.

۲- ملاک تابع انتقال اتورگرسیو (CAT) ^۱ پارزن ^۲، پارزن (۱۹۷۷)

$$CAT(p) = \begin{cases} -(1 - \frac{1}{n}) & p = 0 \\ (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\sigma_j^2}) - \frac{1}{\sigma_p^2} & p > 0 \end{cases}$$

برای آشنایی بیشتر با این ملاکها و خواص آنها کتاب چوی (۱۹۹۲) مرجع مناسبی است. مثال (۷.۷): در بررسی‌های قبلی برای سری Se10 مدل‌های MA(1) و MA(2) پیشنهاد شدند. مدل‌های برازش شده نظیر این دو به روش بیشترین درست‌نمایی غیر شرطی عبارتند از:

$$X_t = Z_t - 0.715Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1.470)$$

و

$$X_t = Z_t - 1.018Z_{t-1} + 0.476Z_{t-2}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1.178)$$

مقادیر AIC، SBC و AICC برای این مدلها در جدول (۹.۷) آمده‌اند. هر سه ملاک نشان می‌دهند که مدل دوم به سری Se10 بهتر برازش شده است.

بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای که به طور خودکار شناسایی مدل را انجام می‌دهند، از یک ملاک اطلاعاتی به این شکل استفاده می‌کنند که بعد از تعیین کرانهای بالای P و Q برای مرتبه اتورگرسیو و میانگین متحرک توسط کاربر، کلیه مدل‌های $ARMA(p, q)$ که $p \leq P$ و $q \leq Q$ را برازش داده و مدلی با کمترین مقدار آن ملاک اطلاعاتی را به عنوان مدل نهایی ارائه می‌دهد. توابع $ar.burg$ و $ar.yw$ در S-PLUS برای تعیین مرتبه یک سری اتورگرسیو از AIC استفاده می‌کنند. به عنوان مثال با استفاده از دستور $ar.yw(data, aic=T, order.max=P)$ کلیه مدل‌های اتورگرسیو مرتبه

^۱ Criterion of Autoregressive Transfer Function

^۲ Parzen

0 تا P به روش یول - واکر برازش شده و مدلی با کمترین مقدار AIC مشخص و نتایج حاصل از برازش آن ارائه می‌شود (لازم به ذکر است که در این تابع برای محاسبه مقدار AIC به جای برآورد بیشترین درستنمایی σ_p^2 از $\hat{\sigma}_p^2 = \hat{v}_p = \hat{v}_{p-1}(1 - \hat{\phi}_p^2)$ استفاده می‌شود). استفاده از این روش خودکار برای سری Se7 بعد از تفاضل‌گیری منجر به مدل $AR(1)$ ، یعنی همان مدلی که در مثال (۳.۷) نیز شناسایی کرده بودیم، به عنوان بهترین مدل می‌شود. اما برای سری Se8 استفاده از دستور $ar.yw(sqrt(Se8),aic=T,order.max=15)$ به مدل $AR(7)$ منجر می‌شوند. با توجه به اینکه مقادیر ملاک اطلاعاتی آکائیک این مدل و مدل $AR(2)$ که در مثال (۴.۷) شناسایی کرده بودیم تفاوت چندانی با هم ندارند (جدول ۱۰.۷)، می‌توان مدل با تعداد پارامتر کمتر را انتخاب کرد یا اینکه این دو مدل را تا بررسی‌های بیشتر به عنوان نامزدهایی برای سری Se8 در نظر گرفت (تمرین ۷.۷ را حل کنید).

۵.۷ ارزیابی مدل برازش شده

روشهای شناسایی مدل حتی اگر با وسواس زیاد هم به کار گرفته شوند، چون جنبه‌های خاصی از مدل‌های ARIMA را مد نظر قرار می‌دهند ممکن است به تشخیص غیر دقیق و نهایتاً مدل برازش شده نارسا منتهی شوند. هر چند نارسایی‌های یک مدل برازش شده می‌تواند معلول هر یک از مراحل چهارگانه بخش (۱.۷) باشند اما معمولاً به صورت انحرافات از فرضیه‌های اساسی در مدل برازش شده خود را نشان می‌دهند. در اینجا اگر مدل برازش شده

$$\hat{\phi}_p(B)\nabla^d X_t = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_q(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \hat{\sigma}^2), \quad (5.7)$$

باشد، این فرض‌ها عبارتند از میانگین صفر، واریانس ثابت و عدم وابستگی Z_t ها به یکدیگر و معمولاً نرمال بودن توزیع Z_t ها. بنابراین قبل از به کار بردن مدل برازش شده پیشنهاد می‌شود مدل را به منظور کشف نارسایی‌های احتمالی مورد بازرسی قرار دهیم. مجموعه عملیات برای این منظور را ارزیابی مدل یا بازرسی تشخیصی^۱ مدل می‌نامیم. ارزیابی مدل برازش شده در تحلیل سریهای زمانی شبیه این عمل در مدل سازی رگرسیونی است و به کمک مانده‌های حاصل از برازش مدل انجام می‌شود. این مانده‌ها را برای مدل برازش شده (۵.۷) توسط رابطه زیر تعریف می‌کنیم برای سایر مدلها نیز مانده‌ها توسط روابط مشابه تعریف می‌شوند.

$$\hat{Z}_t = W_t - \hat{\phi}_1 W_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_p W_{t-p} - \hat{\theta}_1 \hat{Z}_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{Z}_{t-q} - \hat{\theta}_0, \quad (6.7)$$

مقادیر اولیه برای \hat{Z}_t (و X_t ها) در (۶.۷) با توجه به روش برآورد تعیین می‌شوند. به عنوان مثال وقتی از روش بیشترین درستنمایی شرطی استفاده می‌کنیم مقادیر اولیه را صفر و در استفاده از روش بیشترین درستنمایی غیر شرطی پس‌بینی‌ها را جایگزین مقادیر اولیه می‌کنیم. مانده t ام را خطای پیش‌بینی گام بعد یعنی $e_{t-1}(1)$ یا $\tilde{e}_{t-1}(1)$ حاصل از مدل برازش شده نیز تعریف می‌کنند.

^۱ Diagnostic Checking

با توجه به تعریف، \hat{Z}_t برآوردی از Z_t است بنابراین اگر مدل برازش شده مدلی مناسب باشد انتظار داریم رفتار \hat{Z}_t ها شبیه رفتار مصداقی از یک سری نوفه سفید باشد و با بررسی آنها بتوان عدم وجود روند، ثابت بودن واریانس، عدم وابستگی و در صورتی که Z_t ها نرمال فرض شده باشند، نرمال بودن را نیز تشخیص داد. از طرفی اگر مدل برازش شده مناسب نباشد انتظار داریم نارسایی‌های آن به صورت انحراف‌هایی در رفتار مانده‌ها بروز کنند. در این بخش با چند روش معمول، شامل استفاده از نمودارها و آزمون‌های آماری برای تشخیص انحراف‌های احتمالی آشنا می‌شویم. طبیعی است به عنوان اولین قدم رسم نمودار زمانی مانده‌ها بسیار مفید است. در حالت مطلوب این نمودار نوساناتی افقی با دامنه ثابت حول محور زمان را نشان می‌دهد. نموداری که در آن روند یا تغییراتی در دامنه نوسانات یا نقاط دور افتاده مشاهده شود بیانگر انحرافات از مدل است که با راه کار مقابله با دو مورد اول قبلاً آشنا شده‌ایم. در مورد آخر، چنین پدیده‌ای حاکی از وجود نقاط دور افتاده در سری مشاهده شده است که در فصل هشتم با مدلسازی چنین سری‌هایی آشنا می‌شویم.

البته وجود نوسانات افقی با دامنه ثابت حاکی از ایستایی سری مانده‌ها است اما ممکن است در چنین وضعیتی وابستگی‌هایی نیز وجود داشته باشد. بنابراین باید بررسی‌های بعدی را روی شناسایی وابستگی‌های احتمالی متمرکز کرد. این کار با بررسی خودهمبستگی‌های نمونه‌ای مانده‌ها $(\hat{\rho}_{\hat{Z}}(h))$ و خودهمبستگی‌های جزئی نمونه‌ای مانده‌ها $(\hat{\phi}_{\hat{Z},hh})$ یا خودهمبستگی‌های گسترش یافته نمونه‌ای مانده‌ها $(\hat{\rho}_{\hat{Z}}(k,l))$ انجام می‌شود. در صورتی که مدل برازش شده مناسب باشد انتظار داریم این بررسی‌ها عدم وابستگی مانده‌ها را نشان دهد. در غیر این صورت اگر خوش شانس باشیم مدلی ARIMA از مرتبه (p', d', q') را تشخیص می‌دهیم. این امر نشان می‌دهد که سری $\{Z_t\}$ نوفه سفید نبوده بلکه سری نوفه سفید $\{U_t\}$ وجود دارد به طوریکه

$$\phi_{p'}(B)\nabla^{d'}Z_t = \theta_{q'}(B)U_t.$$

اگر مدل اولیه $\phi_p(B)\nabla^d X_t = \theta_q(B)Z_t$ باشد و در آن به جای Z_t قرار دهیم $\frac{\theta_{q'}(B)}{\phi_{p'}(B)\nabla^{d'}}U_t$ مدل زیر حاصل می‌شود،

$$\phi_{p'}(B)\phi_p(B)\nabla^{d+d'}X_t = \theta_{q'}(B)\theta_q(B)U_t, \quad (7.7)$$

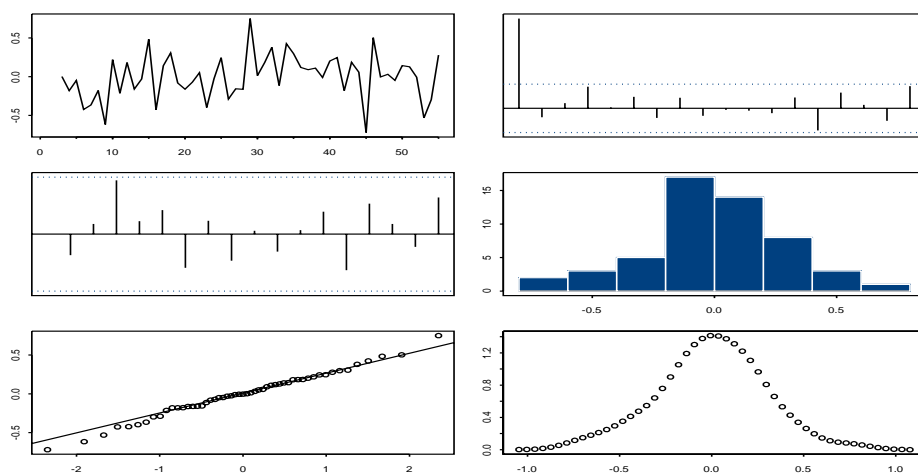
که حالت خاصی از مدل $ARIMA(p+p', d+d', q+q')$ است، بنابراین مدل کلی‌تر را به عنوان مدل پیشنهادی جدید به X_t ها برازش می‌دهیم.

در صورتی که بررسی‌های فوق نارسایی خاصی را نشان ندهند می‌توان از روشهای معمول برای بررسی نرمال بودن Z_t ها استفاده کرد. رسم نمودارهایی چون نمودار ستونی، نمودار چندک^۱ - چندک و نمودار برآورد تابع چگالی و آزمونهای آماری چون آزمون کولموگروف^۲ - اسمیرنوف^۳ چند تا از این روشها هستند.

^۱ Quantile

^۲ Kolmogorov

^۳ Smirnov



شکل ۶.۷: نمودار مانده‌ها، SACF، SPACF مانده‌ها، نمودار ستونی، نمودار چندک‌های مانده‌ها در مقابل چندک‌های توزیع نرمال و نمودار برآورد تابع چگالی مانده‌ها برای سری Se11 در مثال (۸.۷).

مثال (۸.۷): در مثال (۵.۷) مدل $ARMA(2, 1)$ با میانگین غیر صفر را برای سری Se11 تشخیص داده و در مثال (۱۵.۶) با استفاده از دستور

```
out1 <- arima.mle(log(Se11), model = list(order = c(2, 0, 1)), xreg = 1, max.iter = 50)
```

برآوردهای بیشترین درست‌نمایی را حساب کردیم. برای محاسبه مانده‌های حاصل از این برازش از تابع $arima.diag$ به صورت $out2 <- arima.diag(out1, resid = T)$ که در آن خروجی تابع $arima.mle$ است استفاده می‌کنیم. در اینصورت مانده‌ها به صورت برداری در فهرست ذخیره $out2$ می‌شوند که برای دسترسی به آنها می‌نویسیم $out2$resid$. البته این برنامه مانده‌ها را از تأخیر p به بعد حساب می‌کند بنابراین برای استفاده‌های بعدی از این مانده‌ها، می‌نویسیم $out2$resid[p + 1 : n]$. برای تحلیل این مانده‌ها ابتدا با اجرای دستورات زیر نمودارهای شکل (۶.۷) را رسم کرده‌ایم.

```
par(mfrow = c(3, 2)), tsplot(out2$resid[3 : 55]), acf(out2$resid[3 : 55])
```

```
acf(out2$resid[3 : 55], type = "p"), hist(out2$resid[3 : 55]), box(1)
```

```
qqnorm(out2$resid[3 : 55]), qqline(out2$resid[3 : 55]), plot(density(out2$resid[3 : 55]))
```

نمودار زمانی مانده‌ها بجز امکان وجود چند دورافتاده (بعد از آشنایی با مطالب فصل بعد می‌توان نشان داد (تمرین ۴.۸) که دورافتاده‌ای وجود ندارد) نارسایی خاصی را نشان نمی‌دهد. نمودارهای SACF، SPACF و جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته مانده‌ها (جدول ۱۱.۷) حاکی از عدم وابستگی بین مانده‌ها است به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت سری $\{Z_t\}$ نوفه سفید است.

		MA								
AR	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	×	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	×	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	×	0	0	0	0	0	0	
4	×	0	×	0	0	0	0	0	0	
5	×	×	×	0	0	0	0	0	0	

جدول ۱۱.۷: جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته مانده‌ها در مثال (۸.۷).

حال این سوال مطرح است که آیا این دنباله از مشاهدات غیر وابسته مشاهداتی از یک توزیع نرمالند یا خیر؟ برای پاسخ به این سوال نمودارهای ستونی، چندک - چندک و برآورد تابع چگالی مانده‌ها را در شکل (۶.۷) رسم کرده‌ایم این نمودارها انحراف جدی از نرمال بودن را نشان نمی‌دهند. علاوه بر این برای آزمون فرض نرمال بودن مانده‌ها با استفاده از دستور $ks.gof(out2$resid[3 : 55])$ مقدار آماره آزمون کولموگروف - اسمیرنوف برابر 0.0799 با p -مقدار 0.5 را حساب می‌کنیم که تأییدی بر فرض نرمال بودن مانده‌ها است.

مثال (۹.۷): اگر مدل اتورگرسیو مرتبه دو با میانگین غیر صفر را به سری لگاریتم Se11 برازش دهیم با بررسی مانده‌ها نارسا بودن مدل به سادگی تشخیص داده می‌شود. آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته مانده‌های حاصل از این برازش (جدول ۱۲.۷) دو مدل $MA(1)$ یا $AR(1)$ را برای مدل کردن وابستگی‌های موجود بین مانده‌ها پیشنهاد می‌کند. که با توجه به (۷.۷) اولی منجر به مدل $ARMA(2,1)$ و دومی منجر به مدل $AR(3)$ برای سری لگاریتم Se11 می‌شوند. در تمرین (۶.۷) از شما خواسته‌ایم مدل $AR(3)$ را برازش و ارزیابی کرده و آن را با مدل $ARMA(2,1)$ مقایسه کنید.

باکس و پیپرس^۱ (۱۹۷۰) آزمون نیکویی برازشی ارائه کردند که در آن برای تشخیص مناسب بودن مدل برازش شده، فرض صفر بودن خودهمبستگی مانده‌ها به طور همزمان برای K خودهمبستگی اول آزمون می‌شود به عبارت دیگر فرض $H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(K) = 0$ در مقابل اینکه حداقل برای یک h ، $\rho(h) \neq 0$ آزمون می‌شود. آماره این آزمون یکجای^۲ نیکویی برازش عبارت است از

$$Q_{BP} = n \sum_{h=1}^K \hat{\rho}_Z(h)^2.$$

آنها نشان دادند که اگر فرض H_0 درست باشد، توزیع حدی Q به تقریب خوبی - دو با $K - (p + q)$ درجه آزادی است. مطالعه لجانگ^۳ و باکس (۱۹۷۸) نشان داد که این توزیع حدی برای n های

^۱ Pierce

^۲ Portmanteau

^۳ Ljung

		MA								
AR	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	×	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	×	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	×	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	×	×	0	0	0	0	0	

جدول ۱۲.۷: جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته مانده‌های حاصل از برازش مدل $AR(2)$ به سری Se11 (مثال ۹.۷).

متناهی تقریب مناسبی نیست. آنها آماره

$$Q_{LB} = n \sum_{h=1}^K \tilde{\rho}_{\hat{Z}}(h)^2 = n(n+2) \sum_{h=1}^K (n-h)^{-1} \hat{\rho}_{\hat{Z}}(h)^2,$$

را که در آن $\tilde{\rho}_{\hat{Z}}(h) = (n+2)(n-h)^{-1} \hat{\rho}_{\hat{Z}}(h)^2$ پیشنهاد کرده، و نشان دادند توزیع حدی فوق یعنی $\chi_{K-(p+q)}^2$ برای n های معمول نیز تقریب مناسبی برای توزیع آماره Q_{LB} است. مونتسی^۱ (۱۹۹۴) استفاده از آماره زیر را پیشنهاد می‌کند،

$$Q_{MT} = n(n+2) \sum_{h=1}^K (n-h)^{-1} \hat{\phi}_{\hat{Z},hh}^2,$$

که در آن $\hat{\phi}_{\hat{Z},hh}$ خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای مانده‌ها در تأخیر h است و در صورتی که مدل برازش شده مدل واقعی باشد و در نتیجه مانده‌ها مصداقی از نوبه سفید باشند دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین صفر و واریانس $\frac{n-h}{n(n+2)}$ است. اگر مدل برازش شده از مرتبه (p, q) مدل واقعی باشد این آماره به طور مجانبی دارای توزیع $\chi_{K-(p+q)}^2$ است. مونتسی به کمک شبیه‌سازی نشان داد که اگر مدل برازش شده نسبت به مدل واقعی مرتبه میانگین متحرک کمتری داشته باشد Q_{MT} در مقایسه با Q_{LB} این نارسایی را بهتر تشخیص می‌دهد به عبارت دیگر در این حالت آزمون مونتسی تواناتر از آزمون لجانگ - باکس است. پنا^۲ و رودریگز^۳ (۲۰۰۲) با این انگیزه که در تحلیل چند متغیره نرمال برای آزمون فرضی مشابه با $H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(K) = 0$ ، آماره آزمون نسبت درستنمایی با دترمینان ماتریس همبستگی‌های نمونه متناسب است، و به دنبال آماره‌ای مبتنی بر چنین دترمینانی، آماره زیر را برای

^۱ Monti

^۲ Peña

^۳ Rodriguez

K	$p + q$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8.56	6.70	4.52	—	—	—	—	—
10	10.71	9.00	7.14	4.96	—	—	—	—
12	12.10	10.46	8.71	6.76	4.37	—	—	—
14	13.46	11.87	10.11	8.39	6.35	3.56	—	—
24	19.97	18.52	17.05	15.53	13.96	12.32	10.57	8.63
36	27.42	26.06	24.69	23.3	21.88	20.44	18.96	17.44

جدول ۱۳.۷: نقاط بحرانی توزیع تقریبی \hat{D}_K به ازای $\alpha = 0.05$ و مقادیر مختلف K و $p + q$ ، پنا و رودریگز (۲۰۰۲).

آزمون فرض مناسب بودن مدل برازش شده ارائه کرده‌اند،

$$\hat{D}_K = n[1 - |\hat{\rho}_K|^{\frac{1}{K}}],$$

که در آن

$$\hat{\rho}_K = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_{\hat{Z}}(1) & \cdots & \hat{\rho}_{\hat{Z}}(K) \\ \hat{\rho}_{\hat{Z}}(1) & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{\hat{Z}}(K-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{\hat{Z}}(K) & \hat{\rho}_{\hat{Z}}(K-1) & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

آنها یک توزیع گاما با پارامترهای

$$\alpha = \frac{3K[(K+1) - 2(p+q)]^2}{2[2(K+1)(2K+1) - 12K(p+q)]}, \quad \beta = \frac{3K[(K+1) - 2(p+q)]}{[2(K+1)(2K+1) - 12K(p+q)]}$$

را به عنوان توزیع تقریبی \hat{D}_K شناسایی کردند (شبهه سازی‌های انجام شده توسط پنا و رودریگز (۲۰۰۲) نشان می‌دهد استفاده از $\hat{\rho}_{\hat{Z}}(h)$ به جای $\hat{\rho}_{\hat{Z}}(h)$ در روابط فوق به دقت این تقریب می‌افزاید). مقادیر بحرانی این توزیع گاما به ازای چند مقدار K ، $p + q$ و $\alpha = 0.05$ ، که آنها را با $\hat{D}(K, p + q, \alpha)$ نشان می‌دهیم در جدول (۱۳.۷) آمده است. پنا و رودریگز به کمک شبهه سازی نشان دادند که توان آزمون آنها از هر دو آزمون لجانگ - باکس و مونتگی بیشتر است. تابع $PORT.TEST(n, OUT, K)$ در پیوست ۳ که در آن خروجی تابع $arma.diag$ است را می‌توان برای محاسبه مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش بکار برد.

مثال (۱۰.۷): در ادامه مثال (۸.۷) و با اجرای دستور $PORT.TEST(55, out2, K)$ به ازای $K = 10, 12, 14$ مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش را محاسبه و در جدول (۱۴.۷) آورده‌ایم. همانطور که ملاحظه می‌شود همگی بر مناسب بودن مدل برازش شده دلالت دارند.

مثال (۱۱.۷): در مباحث قبل دو مدل $MA(1)$ و $MA(2)$ را به عنوان نامزدهایی برای برازش به سری Se10 با هم مقایسه کرده‌ایم. در اینجا مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش به ازای $K = 14$

K	Q_{BP}	Q_{LB}	Q_{MT}	\bar{D}_K	$\chi_{0.05, K-3}^2$	$D(K, 3, 0.05)$
10	6.53	7.33	8.85	4.91	14.07	4.96
12	7.48	8.59	9.62	5.38	16.92	6.76
14	12.47	15.42	13.43	6.04	19.67	8.39

جدول ۱۴.۷: مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش برای سری Se11 (مثال ۱۰.۷).

برای این دو مدل برازش شده را محاسبه و در جدول (۱۵.۷) آورده‌ایم. همانطور که ملاحظه می‌شود مقادیر بزرگ آماره‌های آزمون مونتئی و پنا - رودریگز منجر به رد فرض مناسب بودن مدل $MA(1)$ در سطح $\alpha = 0.05$ می‌شوند. آماره‌های آزمون باکس - پیرس و لجانگ - باکس در حالی فرض مناسب بودن مدل $MA(1)$ را در سطح $\alpha = 0.05$ تأیید می‌کنند که مقادیر آنها خیلی به مقادیر بحرانی نزدیک است. در واقع اگر $\alpha = 0.1$ اختیار شود با توجه به اینکه $\chi_{0.1, 13}^2 = 19.81$ این دو آزمون هم مدل $MA(1)$ را نامناسب تشخیص می‌دهند. از طرفی همانطور که ملاحظه می‌شود هر چهار آزمون شدیداً بر مناسب بودن مدل $MA(2)$ تأکید دارند.

مدل	Q_{BP}	Q_{LB}	Q_{MT}	\bar{D}_{14}	$\chi_{0.05, 14-q}^2$	$D(14, q, 0.05)$
$MA(1)$	20.14	21.88	27.32	16.66	22.36	11.87
$MA(2)$	6.54	7.64	8.65	2.32	21.03	10.11

جدول ۱۵.۷: مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش برای دو مدل برازش شده به سری Se10، به ازای $K = 14$ (مثال ۱۱.۷).

۶.۷ تمرینات

۱.۷ - برای هر یک از سریهای (الف)، (ب) و (ج) با طی مراحل شناسایی، برازش و ارزیابی مدل مناسبی را شناسایی کنید.

۲.۷ - گاهی اوقات برازش مدلی با مرتبه بالا و آزمون اینکه کدامیک از ضرایب این مدل را می‌توان صفر قرار داد به مدلهای مناسبی منجر می‌شود. برای سری (الف) در تمرین (۱.۷) به این روش و با

[1]	1383.4	1417.9	1456.9	1498.6	1541.1	1584.8	1617.6	1642.4
[9]	1667.4	1699.3	1729.4	1755.8	1780.9	1805.0	1822.8	1837.5
[17]	1856.9	1880.9	1904.7	1937.8	1968.9	1994.0	2023.1	2053.8
[25]	2075.8	2095.7	2119.0	2137.1	2156.1	2176.3	2197.3	2221.2
[33]	2247.9	2273.2	2298.8	2325.4	2354.1	2376.3	2394.9	2415.8
[41]	2438.8	2461.1	2486.4	2513.5	2540.4	2566.8	2595.4	2629.3
[49]	2657.0	2685.8	2718.5	2753.4	2786.7	2818.8	2851.8	2883.7
[57]	2916.5	2952.4	2985.3	3013.4	3043.6	3071.6	3100.5	3129.6
[65]	3158.7	3192.9	3233.4	3280.0	3324.2	3366.2	3402.0	3438.2
[73]	3474.0	3512.2	3548.6	3583.1	3614.2	3639.5	3667.0	3695.4

سری (الف)

[1]	8.65	9.40	10.65	9.59	9.32	10.15	10.47	9.69	10.21	9.40
[11]	10.09	10.93	10.88	12.05	11.64	10.77	10.67	10.86	11.48	11.40
[21]	9.72	10.09	8.69	8.73	7.46	9.40	10.22	9.46	9.88	10.45
[31]	10.61	9.63	11.64	11.22	10.15	8.95	9.95	11.71	10.44	9.93
[41]	11.38	9.09	8.93	10.59	9.99	10.61	11.49	11.56	10.07	10.25
[51]	9.73	9.20	10.64	9.00	8.61	10.30	9.97	10.82	10.40	9.12
[61]	9.28	10.64	7.84	8.64	9.67	8.38	7.99	10.57	8.97	9.21
[71]	11.05	10.23	8.74	10.40	9.96	10.88	10.52	11.12	11.23	11.73
[81]	12.02	11.06	12.99	11.70	11.53	13.53	10.08	10.53	13.11	10.12
[91]	9.10	12.43	11.11	10.89	10.62	10.13	11.11	10.83	10.05	10.63

سری (ب)

[1]	0.56	-0.30	-1.66	-0.46	0.15	-0.69	-2.34	-0.84	1.84	1.32
[11]	1.22	1.61	-0.72	-2.74	-1.87	-1.83	-2.62	-0.88	-0.29	-1.72
[21]	-1.59	1.74	2.21	0.13	-0.52	-0.89	-0.61	1.07	0.27	-1.93
[31]	-0.89	-0.36	-2.97	-2.47	-0.80	-1.77	-2.76	-2.67	-2.58	-3.01
[41]	-3.26	-3.71	-3.35	-2.35	-2.02	-2.36	-2.52	-1.96	-1.01	-0.06
[51]	-0.70	-0.09	1.53	0.74	-0.37	-1.30	-0.37	0.18	1.48	2.61
[61]	2.43	0.87	1.90	1.95	-1.30	-0.99	3.50	4.13	0.69	-0.42
[71]	1.09	1.65	-1.80	-1.80	-1.91	-3.23	-2.80	-3.49	-2.37	-0.27
[81]	0.49	-1.32	-1.42	0.54	-0.92	-1.63	0.22	0.91	-1.25	-0.56
[91]	0.75	-0.05	0.88	1.09	-0.43	0.12	2.38	0.27	-1.63	-0.78

سری (ج)

استفاده از تابع $MA.INN$ و انتخاب $q = 10$ ، مدلی از نوع $IMA(2, q)$ شناسایی کنید.

۳.۷- خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی مانده‌های حاصل از برازش یک مدل $ARMA(1, 1)$ در جدول زیر آمده است. مدل جدیدی که برای برازش پیشنهاد می‌کنید چیست؟

h	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\rho}(h)$	0.531	0.260	0.116	0.009	-0.038	-0.101	-0.144	-0.182
$\hat{\phi}_{hh}$	0.531	-0.031	-0.013	-0.059	-0.019	-0.083	-0.067	-0.087
h	9	10	11	12	13	14	15	16
$\hat{\rho}(h)$	-0.133	-0.185	-0.081	-0.094	-0.088	0.001	0.001	0.043
$\hat{\phi}_{hh}$	0.023	-0.150	0.106	-0.121	-0.012	0.053	-0.045	0.030

خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی مانده‌ها در تمرین (۳.۷).

۴.۷- برای سری Se7،

الف) مناسب بودن مدل برازش شده در جدول (۳.۶) را بررسی کنید.

ب) مناسب بودن مدل برازش شده در تمرین (۱۰.۶) را بررسی کنید.

ج) به کمک این دو مدل و با استفاده از $n = 70$ مشاهده اول این سری $\tilde{P}_{70}X_{70+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 8$ یافته و میانگین توانهای دوم خطای این پیش‌بینی‌ها را محاسبه کنید. کدامیک از این دو مدل را برای پیش‌بینی آینده این سری انتخاب می‌کنید.

۵.۷- با استفاده از ملاکهای FPE و CAT مرتبه p را برای سری Se8 تعیین کنید.

۶.۷- مدل $AR(3)$ با میانگین غیر صفر را به سری Se11 برازش دهید. آیا مدل برازش شده مدل مناسبی است؟ مقادیر آماره‌های نیکویی برازش را مشابه آنچه در مثال (۱۰.۷) برای مدل $ARMA(2, 1)$ دیدیم به دست آورید. مقادیر AIC، SBC و AICC برای این دو مدل را محاسبه و با هم مقایسه کنید. به کمک این دو مدل $\tilde{P}_{45}X_{45+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ یافته و میانگین توانهای دوم خطای این پیش‌بینی‌ها را مقایسه کنید. کدامیک از این دو مدل را برای پیش‌بینی آینده این سری انتخاب می‌کنید.

۷.۷- برای سری Se8،

الف) مناسب بودن مدل برازش شده در جدول (۳.۶) را بررسی کنید.

ب) مناسب بودن مدل برازش شده در قسمت (الف) تمرین (۶.۶) را بررسی کنید.

ج) به کمک این دو مدل $\tilde{P}_{74}X_{74+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 10$ یافته و میانگین توانهای دوم خطای این پیش‌بینی‌ها را محاسبه کنید. کدامیک از این دو مدل را برای پیش‌بینی آینده این سری انتخاب می‌کنید.

۸.۷- برای سری Se5 در پیوست ۲ مدل مناسبی پیدا کنید.

۹.۷- برای سری Se6 در پیوست ۲ مدل مناسبی پیدا کنید.

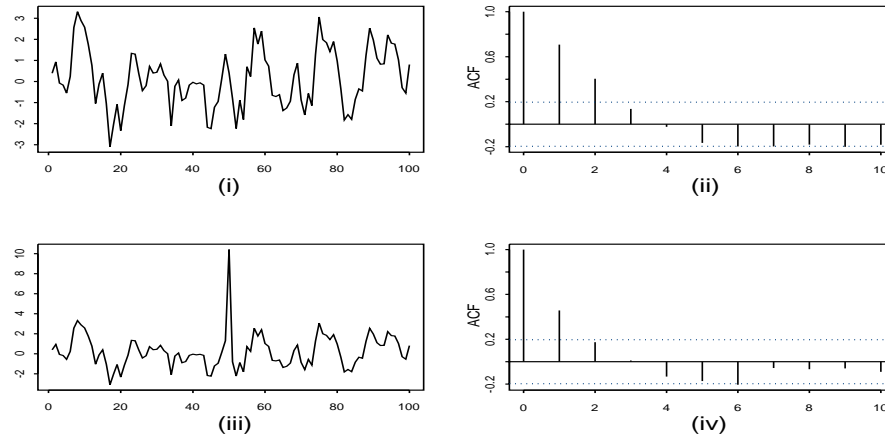
فصل ۸

مشاهدات دور افتاده و تغییر در سطح

در تحلیل داده‌های آماری معمولاً به مشاهداتی بر می‌خوریم که به طور غیر معمول از سایر مشاهدات فاصله دارند. این مشاهدات که به مشاهدات دور افتاده^۱ معروفند در سریهای زمانی نیز دیده می‌شوند. از دلایل عمده در بوجود آمدن چنین مشاهداتی می‌توان به اشتباه در اندازه‌گیری یا ثبت داده‌ها و وقوع پدیده‌هایی چون خشکسالی، سیل یا سایر بلایای طبیعی و جنگ، صلح، انقلاب، اعتصاب و سایر پدیده‌های اجتماعی اشاره کرد. وجود چنین نقاطی در بین داده‌های آماری مشکلات زیادی را در به کارگیری روشهای معمول تجزیه و تحلیل داده‌ها بوجود می‌آورند. در تحلیل سریهای زمانی این مشکلات در شناسایی مدل، برآورد پارامترها و ارزیابی مدل برآزش شده به عبارت دیگر در کلیه مراحل تجزیه و تحلیل یک سری زمانی نمود پیدا می‌کنند. در صورت وجود چنین نقاطی معمولاً یکی از دو شیوه را پیش می‌گیریم. یکی اینکه بر استفاده از مدل مفروض اسرار داشته اما از روشهای تجزیه و تحلیلی استفاده کنیم که نسبت به اثر دور افتاده‌ها استوار^۲ باشند. شیوه دیگر تغییر مدل، و استفاده از مدلی است که بتواند اثر مشاهدات دور افتاده را نیز تبیین کند. هر چند این دور روش می‌تواند مکمل هم باشند اما در این کتاب شیوه دوم مورد بحث قرار می‌گیرد. یکی از مزایای شیوه دوم این است که در صورت رخداد مجدد وقایعی که منجر به این دور افتاده‌ها شده‌اند می‌توان پیش‌بینی‌ها را متناسب با اثر این دور افتاده‌ها تعدیل کرد. در بخش (۱.۸) با انواع دور افتاده‌ها در سریهای زمانی و مدل‌های مناسب در حضور آنها آشنا می‌شویم و اثر غفلت از این دور افتاده‌ها را بر پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای این پیش‌بینی‌ها همچنین بر برآورد پارامترها و رفتار خود همبستگی‌های نمونه بررسی می‌کنیم. در بخش (۲.۸) به برآورد اثر دور افتاده‌ها وقتی زمان وقوع و نوع دور افتاده معلوم است خواهیم پرداخت. نهایتاً در بخش (۳.۸) به چگونگی شناسایی زمان وقوع و نوع یک دور افتاده وقتی هیچیک معلوم نیستند خواهیم پرداخت.

^۱ Outlier

^۲ Robust



شکل ۱.۸: نمودار سری واقعی و خودهمبستگی‌های آن (i, ii) و نمودار سری آلوده به AO و خودهمبستگی‌های آن (iii, iv).

۱.۸ انواع دورافتاده‌ها و اثرات آنها

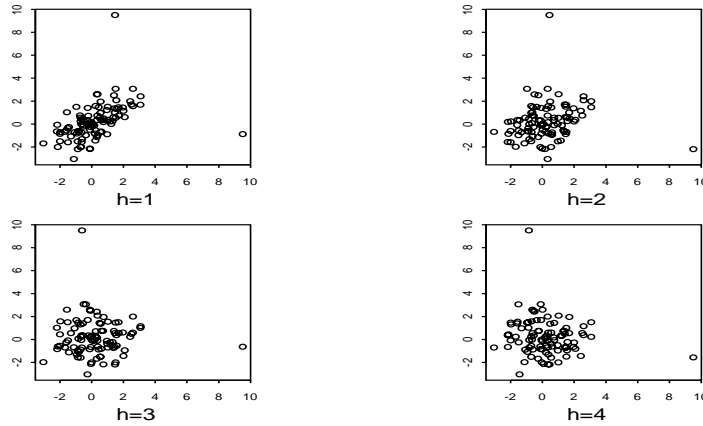
در این بخش با چهار نوع دورافتاده در سریهای زمانی آشنا می‌شویم. دورافتادهٔ جمعی (AO)^۱ و دور افتادهٔ تحولی (IO)^۲ که توسط فاکس^۳ (۱۹۷۲) معرفی شده‌اند و دورافتاده‌های انتقال سطح (LS)^۴ و تغییر گذرا (TC)^۵ در سطح که توسط تسی (۱۹۸۸) و با تأسی از کار باکس و تیائو (۱۹۷۵) بررسی شده‌اند.

اثر این دورافتاده‌ها بر SACF، پیش‌بینی‌های گام بعد، خطای این پیش‌بینی‌ها و برآورد پارامترهای یک مدل ARIMA بسته به مرتبهٔ مدل، زمان وقوع، نوع دورافتاده و بزرگی آن متفاوت خواهد بود. برای رسیدن به یک تصویر کلی، این اثرات را برای هر یک از این دورافتاده‌ها بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۸ دورافتادهٔ جمعی

اگر به جای X_T ، مشاهده $Y_T = X_T + W_{AO}^{(T)}$ شود می‌گوییم در زمان T یک دورافتادهٔ جمعی رخ داده است. در این صورت Y_T را یک دورافتادهٔ جمعی و $W_{AO}^{(T)}$ را اندازهٔ آن می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر سری

^۱ Additive Outlier
^۲ Innovational Outlier
^۳ Fox
^۴ Level Shift
^۵ Transient Change



شکل ۲.۸: نمودارهای پراکنش سری آلوده به AO در شکل (۱.۸).

واقعی $\{X_t\}$ باشد در صورت وجود یک AO در زمان T سری مشاهده شده $\{Y_t\}$ عبارت است از

$$Y_t = \begin{cases} X_t & t \neq T \\ X_t + W_{AO}^{(T)} & t = T \end{cases} \quad (1.8)$$

نمودار (i) در شکل (۱.۸) مصداقی از یک سری $AR(1)$ با پارامترهای $\phi = 0.7$ و $\sigma^2 = 1$ را نشان می‌دهد. در زمان $T = 50$ با اضافه کردن مقدار $W_{AO}^{50} = 10$ واحد در این سری یک AO بوجود آورده‌ایم، نمودار سری جدید یا به تعبیری سری آلوده به AO نیز در شکل (۱.۸-iii) رسم شده است. نمودار خودهمبستگی‌های نمونه‌ای این دو سری در شکل (۱.۸) نشان می‌دهد که این مقادیر برای سری آلوده به AO در مقایسه با سری واقعی کاهش چشمگیری داشته‌اند. برای روشن شدن این مطلب نگاهی به نمودارهای پراکنش سری آلوده در تاخیرهای یک تا چهار در شکل (۲.۸) می‌اندازیم. همانطور که ملاحظه می‌شود این AO منجر به دو نقطه دورافتاده در هر یک از این نمودارهای پراکنش شده است. موقعیت مکانی این نقاط طوری است که در مقایسه با سری واقعی، تغییر در کوواریانس‌ها نسبت به واریانس که به شدت افزایش می‌یابد چشمگیر نیست و این امر باعث می‌شود خودهمبستگی‌های نمونه‌ای سری مشاهده شده به صفر نزدیک شوند. در حالت کلی می‌توان نشان داد که فارغ از زمان وقوع AO وقتی بزرگی AO بدون کران افزایش پیدا کند خودهمبستگی نمونه در تاخیر h به $-\frac{n+h}{n(n-1)}$ میل می‌کند که برای n های بزرگ اختلاف چندانی با صفر ندارد. برای این منظور از تساوی‌های زیر که به سادگی ثابت می‌شوند استفاده می‌کنیم.

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 = \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 + (W_{AO}^{(T)})^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2W_{AO}^{(T)} (X_T - \bar{X}),$$

$$\sum_{t=1}^{n-h} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+h} - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}) + A$$

که

$$A = W_{AO}^{(T)} \left[(X_{T+h} - \bar{X}) + (X_{T-h} - \bar{X}) \right] - \frac{2W_{AO}^{(T)}}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X}) - \frac{(W_{AO}^{(T)})^2}{n} \left(1 + \frac{h}{n}\right).$$

بنابراین

$$\hat{\rho}_Y(h) = \frac{\hat{\rho}_X(h) + (n\hat{\gamma}_X(0))^{-1} \times A}{1 + (n\hat{\gamma}_X(0))^{-1} \left[(W_{AO}^{(T)})^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2W_{AO}^{(T)}(X_T - \bar{X}) \right]} \quad (۲.۸)$$

و در نتیجه

$$\lim_{|W_{AO}^{(T)}| \rightarrow +\infty} \hat{\rho}_Y(h) = -\frac{n+h}{n(n-1)}.$$

برای بررسی اثر غفلت از یک AO در زمان T بر پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها فرض کنید $\{X_t\} \sim ARIMA(p, q)$ عکس پذیر و کلیه پارامترها معلومند. در این صورت

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = -\sum_{j=1}^{+\infty} \pi_j Y_{n+j-1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - \pi_{n-T+1} W_{AO}^{(T)} & n \geq T \end{cases} \quad (۳.۸)$$

و

$$\tilde{\alpha}_n(1) = Y_{n+1} - \tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{e}_n(1) & n < T-1 \\ \tilde{e}_n(1) + \pi_{n-T+1} W_{AO}^{(T)} & n \geq T-1 \end{cases} \quad (۴.۸)$$

تساوی (۳.۸) نشان می‌دهد استفاده از مدل $ARIMA$ برای پیش‌بینی سری مشاهده شده $\{Y_t\}$ نه تنها در پیش‌بینی Y_T مقدار $W_{AO}^{(T)}$ را شناسایی و اعمال نکرده بلکه پیش‌بینی‌های گام بعد از زمان T به بعد نیز به انحراف کشیده شده‌اند. بزرگی و مدت زمان وجود این انحرافات بستگی به مرتبه و پارامترهای مدل دارد. بدیهی است در صورتی که $\{X_t\} \sim AR(p)$ باشد مدت زمان وجود این انحرافات p واحد و در صورتی که $q > 0$ باشد این زمان دائمی است. البته بواسطه همگرایی π_j ها به صفر این انحرافات میرا هستند و این پیش‌بینی‌ها نهایتاً به سطح واقعی خود بر می‌گردند. از (۴.۸) تعبیر مشابهی نیز برای $\tilde{e}_n(1)$ می‌توان ارائه کرد.

برای روشن‌تر شدن بحث فوق دو حالت خاص را در نظر می‌گیریم. اگر $\{X_t\} \sim AR(1)$ باشد از (۳.۸) و (۴.۸) داریم

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n \neq T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} + \phi W_{AO}^{(T)} & n = T \end{cases},$$

و

$$\tilde{a}_n(1) = \begin{cases} \tilde{e}_n(1) & n \neq T-1, T \\ \tilde{e}_n(1) + W_{AO}^{(T)} & n = T-1 \\ \tilde{e}_n(1) - \phi W_{AO}^{(T)} & n = T \end{cases} .$$

که نشان می‌دهند برای این سری که کمترین تأثیر را از نادیده گرفتن یک AO می‌گیرد پیش‌بینی‌های $P_T Y_{T+1}$ و $P_{T-1} Y_T$ و دو تا از مانده‌ها تحت تأثیر قرار گرفته‌اند.

برای سری $MA(1)$ ، $\pi_j = (-\theta)^j$ و

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - (-\theta)^{n-T+1} W_{AO}^{(T)} & n \geq T \end{cases} ,$$

و

$$\tilde{a}_n(1) = \begin{cases} \tilde{e}_n(1) & n < T-1 \\ \tilde{e}_n(1) + (-\theta)^{n-T+1} W_{AO}^{(T)} & n \geq T-1 \end{cases} .$$

که نشان می‌دهد هر دوی پیش‌بینی‌ها و خطای آنها به طور دائمی از نادیده گرفتن این دورافتاده متأثر شده‌اند و هر چه $|\theta|$ به یک نزدیکتر باشد مدت زمان ماندگاری این اثر بیشتر است.

یک دورافتاده AO تأثیر زیادی نیز بر آورد پارامترهای مدل دارد. به عنوان مثال اگر $\{X_t\} \sim AR(1)$ باشد آنگاه $\hat{\rho}_X(1)$ و $\hat{\rho}_Y(1)$ به ترتیب بر آوردکننده‌های کمترین توانهای دوم شرطی برای سری واقعی و سری مشاهده شده هستند. رابطه بین این دو بر آوردکننده را از (۲.۸) به ازای $h=1$ می‌توان تشخیص داد. همانطور که از این رابطه دیده می‌شود با افزایش بزرگی این دورافتاده بر آوردکننده جدید به صفر نزدیکتر می‌شود. به عبارت دیگر وقتی $|W_{AO}^{(T)}|$ بزرگ است بر آوردکننده کمترین توانهای دوم شرطی اریب به صفر می‌شود رفتاری که برای سایر مدلها و سایر روشهای بر آوردی که در فصل ششم دیدیم عمومیت دارد. همانطور که در ابتدای فصل اشاره شد برای تقلیل اثر این دورافتاده می‌توان از روشهای بر آورد استوار استفاده کرد برای آشنایی با این روشها می‌توانید به مارتین^۱ (۱۹۸۵ و ۱۹۸۱) و مارتین و همکاران (۱۹۸۳) مراجعه نمایید. در اینجا ترجیح می‌دهیم از مدلی استفاده کنیم که در عین حالی که چگونگی بوجود آمدن یک AO را بیان می‌کند می‌توان از آن در بر آورد اثر AO استفاده کرد. طبیعی است با داشتن بر آورد AO می‌توان سری مشاهده شده را تعدیل کرده به کمک آن نه تنها بر آوردهایی فارغ از اثر این دورافتاده به دست آورد بلکه با اعمال $\widehat{W}_{AO}^{(T)}$ پیش‌بینی‌ها را نیز تعدیل کرد. این مدل چیزی جز (۱.۸) نیست که آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$Y_t = X_t + W_{AO}^{(T)} I_T(t) \quad (۵.۸)$$

که تابع نشانگر $I_T(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_T(t) = \begin{cases} 1 & t = T \\ 0 & t \neq T \end{cases} .$$

^۱ Martin

و در صورتی که $\{X_t\} \sim ARIMA(p, q)$ باشد،

$$Y_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} Z_t + W_{AO}^{(T)} I_T(t) = \psi(B) Z_t + W_{AO}^{(T)} I_T(t). \quad (6.8)$$

در بخش (۲.۸) با روشی برای برآورد $W_{AO}^{(T)}$ آشنا می‌شویم.

۲.۱.۸ دورافتاده تحولی

دومین دورافتاده‌ای که توسط فاکس (۱۹۷۲) معرفی گردید دورافتاده تحولی (IO) است که با اختلالی که در سری نوفه سفید در زمان T بوجود می‌آورد عناصر یک سری $ARIMA$ را از زمان T به بعد متأثر می‌کند. در صورتی که $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ باشد سری مشاهده شده در حضور یک IO عبارت است از

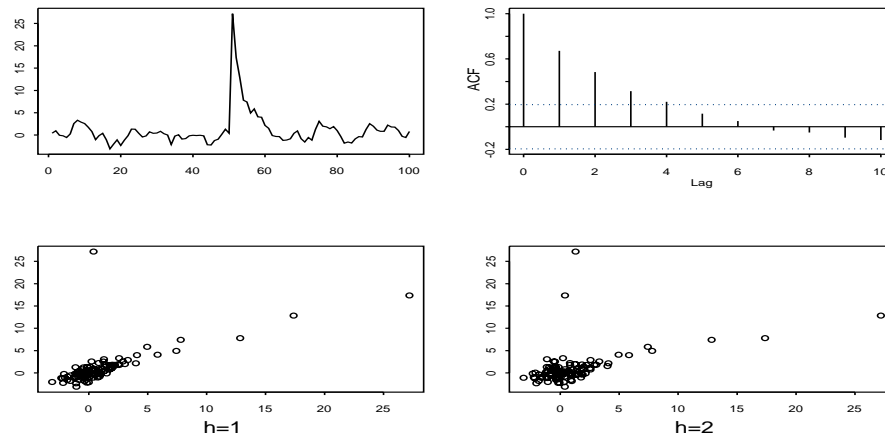
$$Y_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} (Z_t + W_{IO}^{(T)} I_T(t)) = \psi(B) (Z_t + W_{IO}^{(T)} I_T(t)) \quad (7.8)$$

که $W_{IO}^{(T)}$ اندازه دورافتاده تحولی در زمان T است. در واقع یک IO دورافتاده‌ای جمعی در سری نوفه سفید است که منجر به دنباله‌ای از دورافتاده‌ها در سری مشاهده شده می‌شود. برای روشنتر شدن این مطلب مدل (۷.۸) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$Y_t = X_t + W_{IO}^{(T)} \psi(B) I_T(t) = \begin{cases} X_t & t < T \\ X_t + \psi_{t-T} W_{IO}^{(T)} & t \geq T \end{cases} \quad (8.8)$$

که نشان می‌دهد وجود IO در زمان T منجر به انحراف در سری واقعی از این زمان به بعد گردیده است. مقدار این انحراف در زمان $t, t \geq T$ $\psi_{t-T} W_{IO}^{(T)}$ است که برای سریهای سببی به صفر میل می‌کند و نهایتاً سری به سطح اولیه باز می‌گردد. بخصوص برای سریهای $MA(q)$ این انحرافها تا $q+1$ واحد زمان ادامه دارد. برای سریهای ARIMA وضعیت کاملاً متفاوت است (تمرین ۵.۸).

نمودار (i) در شکل (۳.۸) همان سری شکل (۳.۸-i) را نشان می‌دهد که این بار توسط یک IO به اندازه $W_{AO}^{(50)} = 28$ در زمان $T = 50$ آلوده شده است. مقایسه این دو نمودار نشان می‌دهد حدود 10 تا از عناصر سری مشاهده شده از این IO متأثر شده‌اند. مقایسه‌ای هم بین SACF این دو سری نشان می‌دهد که خودهمبستگی‌های نمونه در حضور IO خیلی تغییر نکرده‌اند. برای بررسی بیشتر نمودارهای پراکنش در تأخیرهای یک و دو را نیز در شکل (۳.۸) آورده‌ایم. همانطور که از این دو نمودار استنباط می‌شود این IO نقاط دورافتاده‌ای را در نمودارهای پراکنش بوجود آورده است. این نقاط دورافتاده در دو راستا توزیع شده‌اند که یکی از آنها همسو با راستای سری واقعی است و در تأخیرهای کوچک نقاط بیشتری را شامل می‌شود به همین دلیل اختلاف خودهمبستگی‌های سری واقعی و سری مشاهده شده در تأخیرهای کوچک کم است. از طرفی با افزایش این تأخیرها در عین حال که تعادلی بین تعداد نقاط در این دو راستا برقرار می‌شود این دو راستا به وضعیتی متعامد نزدیک می‌شوند که باعث می‌شود خودهمبستگی‌های نمونه



شکل ۳.۸: نمودارهای سری آلوده به IO و خودهمبستگی‌های آن به همراه نمودارهای پراکنش سری آلوده در تأخیرهای 1, 2.

سری آلوده برای این تأخیرها نزدیک صفر باشند. در حالت کلی رفتار خودهمبستگی‌های نمونه‌ای یک سری آلوده به IO علاوه بر مدل ARMA ی نظیرش به زمان وقوع IO وابستگی زیادی دارد و اگر این زمان اواخر سری نباشد ($n - T$ بزرگ باشد) با افزایش $|W_{IO}^{(T)}|$ این خودهمبستگی‌ها (بخصوص برای تأخیرهای کوچک) به مقادیر نظری سری واقعی‌شان میل می‌کنند. به عنوان مثال در صورتی که $\{X_t\} \sim AR(1)$ باشد با توجه به اینکه $\psi_j = \phi^j$

$$Y_t = \begin{cases} X_t & t < T \\ X_t + \phi^{(t-T)} W_{IO}^{(T)} & t \geq T \end{cases}, \quad (9.8)$$

و با کمی محاسبات جبری می‌توان نشان داد،

$$\lim_{|W_{IO}^{(T)}| \rightarrow +\infty} \hat{\rho}_Y(1) = \frac{\sum_{t=T+1}^n (\phi^{(t-T)} - \frac{k}{n}) (\phi^{(t-T-1)} - \frac{k}{n}) + \frac{k^2(T-1)}{n^2}}{\sum_{t=T}^n (\phi^{(t-T)} - \frac{k}{n})^2 + \frac{k^2(T-1)}{n^2}}, \quad (10.8)$$

که $k = \sum_{t=T}^n \phi^{(t-T)} = \frac{1 - \phi^{(n-T+1)}}{1 - \phi}$ و برای n های بزرگ $\frac{k}{n} \approx 0$ که اگر در تساوی فوق قرار دهیم آنگاه

$$\lim_{|W_{IO}^{(T)}| \rightarrow +\infty} \hat{\rho}_Y(1) \approx \frac{\sum_{t=T+1}^n \phi^{(t-T)} \phi^{(t-T-1)}}{\sum_{t=T}^n \phi^{2(t-T)}} = \phi \times \frac{1 - \phi^{(n-T)}}{1 - \phi^{(n-T+1)}}, \quad (11.8)$$

و در صورتی که زمان وقوع دورافتاده تحولی نزدیک به انتهای سری نباشد آنگاه $\hat{\rho}_Y(1) \approx \phi = \rho_X(1)$. هر چه این دورافتاده به ابتدای سری نزدیک تر باشد تعداد خودهمبستگی‌های نمونه‌ای که به مقدار نظری سری واقعی‌شان میل می‌کنند بیشتر می‌شود. چنین رفتاری برای خودهمبستگی‌های نمونه‌ای

سری آلوده به IO برای سایر مدل‌های ARMA عمومیت دارد. توجیهی ساده برای این مطلب این است که با توجه به (۷.۸) در صورتی که $|W_{IO}^{(T)}|$ بزرگ باشد از زمان T به بعد عملاً مقدار $X_t = \psi(B)Z_t$ تأثیری بر مقدار Y_t ندارد و آنچه مقدار Y_t را تعیین می‌کند تابع (غیر تصادفی) $\psi_{t-T}W_{IO}^{(T)}$ از t است. تابعی که به عنوان مصداقی از یک سری زمانی، خودهمبستگی‌های نمونه‌ای آن با توجه به (۲.۴) به خودهمبستگی‌های نظری سری واقعی نزدیکند. هر چه $W_{IO}^{(T)}$ بزرگتر باشد اثر X_t ها برای $t \geq T$ و هرچه T به ابتدای سری نزدیکتر باشد اثر X_t های اولیه کمتر شده و $\hat{\rho}_Y(h)$ به $\rho_X(h)$ نزدیکتر می‌شود. برای بررسی اثر غفلت از یک IO در زمان T بر پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها با فرض اینکه $\{X_t\}$ یک سری $ARMA(p, q)$ با پارامترهای معلوم است می‌توان نوشت

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - (\sum_{j=1}^{n-T+1} \pi_j \psi_{n-T-j+1}) W_{IO}^{(T)} & n \geq T \end{cases},$$

و با توجه به اینکه $\psi_{n+1-T} = -\sum_{j=1}^{n-T+1} \pi_j \psi_{n-T-j+1}$ (تمرین ۹.۴)،

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} + \psi_{n+1-T} W_{IO}^{(T)} & n \geq T \end{cases},$$

و

$$\tilde{a}_n(1) = \begin{cases} \tilde{e}_n(1) & n \neq T-1 \\ \tilde{e}_n(1) + W_{IO}^{(T)} & n = T-1 \end{cases},$$

در مقایسه با (۸.۸) پیش‌بینی‌های گام بعد حاصل از مدل ARMA بجز $\tilde{P}_{T-1} Y_T$ به خوبی با این IO تطبیق پیدا کرده‌اند و در نتیجه فقط یکی از مانده‌ها توسط این IO آلوده شده است. که خود مشخصه‌ای از وجود یک دورافتاده تحولی است.

با دورافتاده‌های جمعی و تحولی آشنا شدیم، اما در عمل چه عواملی می‌توانند منجر به دور افتاده‌هایی از نوع AO یا IO شوند؟ اشتباه در اندازه‌گیری، ثبت یا ورود داده‌ها به رایانه از دلایل معمول مشاهده دورافتاده‌های جمعی‌اند. همچنین یک AO می‌تواند ناشی از یک شک ناگهانی در پاسخ به یک عامل بیرونی باشد. به عنوان مثال افزایش حجم ترافیک در یک روز برفی، کاهش میزان تولید در یک روز کاری به دلیل تعطیلی یک شیفت کاری بواسطه عواملی چون تعمیرات، حوادث یا اعتراضات صنفی. از طرفی یک IO اختلالی است که در نوبه سفید بوجود می‌آید. با توجه به اینکه عناصر سری نوبه سفید را می‌توان ترکیبی از اثرات عوامل غیر قابل کنترل یا کنترل نشده دانست که در بوجود آمدن انحرافات تصادفی در $\{X_t\}$ دخالت دارند تغییر در این عوامل می‌تواند علتی برای مشاهده یک IO باشد. به عنوان مثال در کنترل کیفیت یک ماده شیمیایی اگر سری مورد بررسی شاخص‌هایی چون غلظت، چسبندگی یا قدرت پاک‌کنندگی و غیره باشد، تغییری در درجه حرارت یا فشار محیط، اشتباه در اندازه‌گیری مواد اولیه و غیره می‌توانند اثری روی این شاخص‌ها بگذارند که تا مدتی باقی بماند.

در بحث فوق به چند عامل اشاره شد که می‌توانند منجر به دورافتاده‌ها در سریهای زمانی شوند. عوامل دیگری که می‌توانند در رفتار یک سری زمانی مداخله کنند عبارتند از عوامل محیطی چون وقوع

خشکسالی، سیل، طوفان عوامل اجتماعی چون وقوع جنگ، اعتصاب، انقلاب و حتی شایعات، در تجارت تغییر در سلیقه مصرف کننده، تغییر در چگونگی عرضه محصول، ظهور محصول مشابه و غیره. طبیعی است که اثر چنین عواملی بر یک سری زمانی متنوع تر از دو حالتی است که تا اینجا بررسی کرده ایم. باکس و تیاو (۱۹۷۵) با مطرح کردن بحث تحلیل مداخله‌ای^۱ به بررسی اثر متغیرهای مداخله‌ای بر سریهای زمانی پرداختند. آنها در حالتی که زمان مداخله (یا مداخله‌ها) معلوم است مدلی کلی ارائه و به کمک آن چند سری از جمله سری آلودگی هوای شهر لوس آنجلس را به منظور بررسی اثر گشودن آزاد راه گلدن گیت بر این سری زمانی تجزیه و تحلیل کردند. مدل مداخله‌ای باکس و تیاو در صورتی که یک مداخله در زمان T صورت گرفته باشد به صورت زیر است.

$$Y_t = \omega V(B)I_T(t) + \psi(B)Z_t, \quad (12.8)$$

که در آن $V(B) = \eta(B)/\zeta(B)$.

مدلهای دورافتاده جمعی (۶.۸) و دورافتاده تحولی (۷.۸) حالات خاصی از مدل فوق به ازای $V(B) = \psi(B)$ و $V(B) = 1$ هستند. دو حالت خاص دیگر از (۱۲.۸) که می‌توان آنها را در مجموعه دورافتاده‌ها مطالعه کرد (تسی ۱۹۹۸ و چانگ^۲ و همکاران ۱۹۸۸) به ازای $V(B) = (1-B)^{-1}$ و $V(B) = (1-\delta B)^{-1}$ حاصل می‌شوند که به ترتیب منجر به مدل برای انتقال سطح (LS^۳) و تغییر گذرا (TC^۴) در سطح می‌شوند. در ادامه با این مدلها و دورافتاده‌های نظیرشان آشنا می‌شویم.

۳.۱.۸ دورافتاده انتقال سطح

در انتقال سطح سری مشاهده شده عبارت است از

$$Y_t = \begin{cases} X_t & t < T \\ X_t + W_{LS}^{(T)} & t \geq T \end{cases}, \quad (13.8)$$

یعنی از زمان T به بعد سطح سری به مقدار $W_{LS}^{(T)}$ انتقال پیدا کرده است. به عبارت دیگر یک انتقال سطح دنباله‌ای از دورافتاده‌های AO با اندازه‌های یکسان است که از زمان T آغاز شده تا انتهای سری ادامه می‌یابد. تساوی (۱۳.۸) را می‌توان به صورت

$$Y_t = X_t + \frac{W_{LS}^{(T)}}{1-B} I_T(t) = \psi(B)Z_t + \frac{W_{LS}^{(T)}}{1-B} I_T(t) \quad (14.8)$$

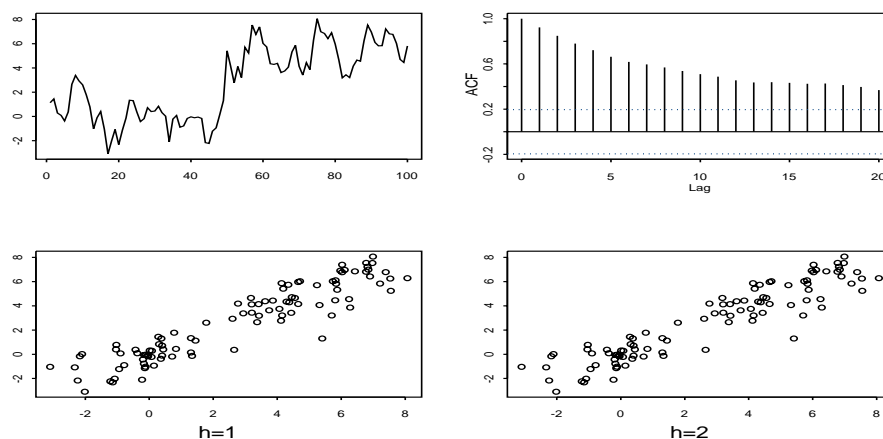
نوشت، که حالت خاصی از (۱۲.۸) به ازای $V(B) = (1-B)^{-1}$ و $\omega = W_{LS}^{(T)}$ است. شکل (۴.۸) نمودار سری در شکل (۱.۸) را نشان می‌دهد که در آن انتقال سطحی به اندازه^۵ $W_{LS}^{(50)}$ در $T = 50$ بوجود آورده ایم. با اینکار سری به یک سری نا ایستا تبدیل شده است و همانطور که ملاحظه می‌شود

^۱ Intervention Analysis

^۲ Chang

^۳ Level Shift

^۴ Transient Change



شکل ۴.۸: نمودارهای سری آلوده به LS و خودهمبستگی‌های آن به همراه نمودارهای پراکنش سری آلوده در تأخیرهای 1, 2.

خودهمبستگی‌های نمونه‌ای آن علاوه بر اینکه به کندی نزول می‌کنند مقادیرشان نیز بزرگ است. البته رفتار خودهمبستگی‌های نمونه‌ای یک سری ARMA ی آلوده به LS بستگی زیادی به زمان وقوع تغییر سطح دارد. در حالت کلی و به شیوه‌ای مشابه آنچه برای حالت AO دیدیم می‌توان ثابت کرد (پیوست ۹.۶ پنا و دیگران، ۲۰۰۱ به ازای $k = n - T + 1$)

$$\lim_{|W_{LS}^{(T)}| \rightarrow +\infty} \hat{\rho}_Y(h) = \begin{cases} \frac{n-T+1-h}{n-T+1} & h \leq n-T \\ 0 & h > n-T \end{cases}$$

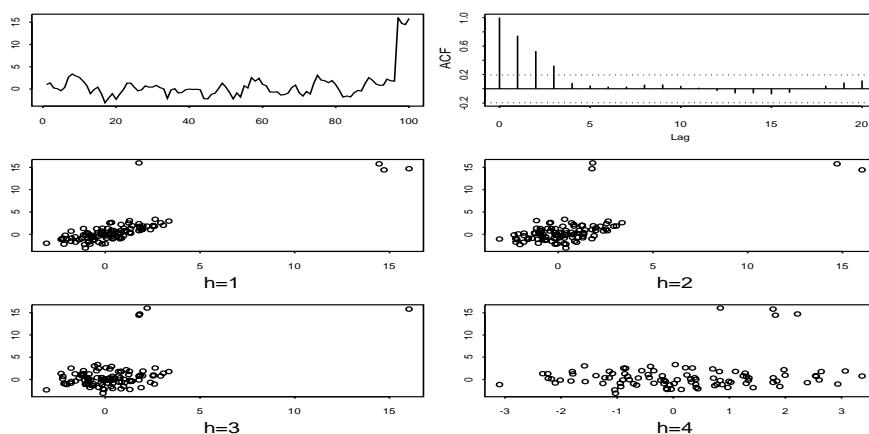
برای اینکه دلیل چنین رفتاری را بهتر درک کنیم نگاهی به شکل (۵.۸) می‌اندازیم. در این شکل تغییر سطحی به اندازه 15 واحد در سری شکل (۱.۸-۱) در زمان $T = 97$ بوجود آورده‌ایم. همانطور که ملاحظه می‌شود رفتار خودهمبستگی‌های نمونه‌ای این سری در مقایسه با سری در شکل (۴.۸) خیلی تغییر کرده است و این خودهمبستگی‌ها از تأخیر $n - T = 3$ به بعد اختلاف معنی داری با صفر ندارند. توزیع نقاط در چهار نمودار دیگر یعنی نمودارهای پراکنش در تأخیرهای یک تا چهار علت این امر را به خوبی توضیح می‌دهند.

برای آشنایی با اثرات غفلت از یک LS بر پیش‌بینی‌های گام بعد و خطای آنها روابط زیر

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - W_{LS}^{(T)}(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{n-T+1}) & n \geq T \end{cases}$$

و

$$\tilde{a}_n(1) = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_n(1) & n \neq T-1 \\ \tilde{\varepsilon}_n(1) + W_{LS}^{(T)}(1 - \pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_{n-T+1}) & n \geq T-1 \end{cases}$$



شکل ۵.۸: نمودارهای سری آلوده به LS و خودهمبستگی‌های آن به همراه نمودارهای پراکنش سری آلوده در تأخیرهای 1, 2, 3, 4.

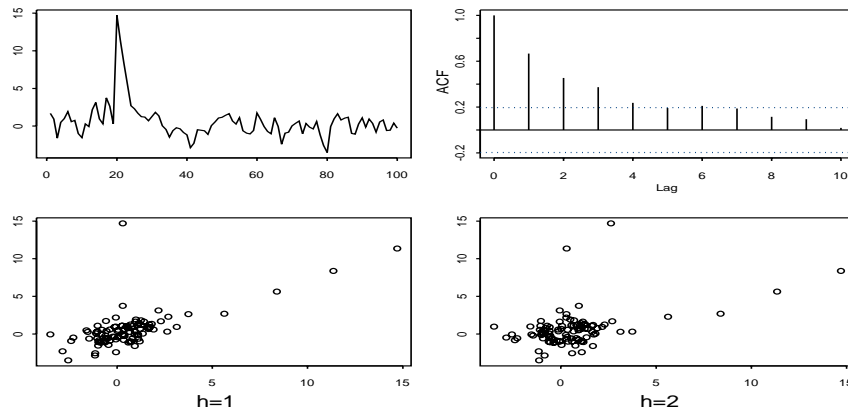
نشان می‌دهند که با استفاده از مدل ARIMA نه تنها در پیش‌بینی Y_T مقدار $W_{LS}^{(T)}$ شناسایی و اعمال نمی‌شود بلکه در پیش‌بینی‌های بعدی مضربی از $W_{LS}^{(T)}$ یعنی $-\sum_{j=1}^{n-T+1} \pi_j W_{LS}^{(T)}$ شناسایی و اعمال شده است. جالب اینکه با افزایش $n - T$ نیز همیشه این پیش‌بینی‌ها به سطح جدید یعنی $W_{LS}^{(T)}$ منتقل نمی‌شوند بلکه به سطح $W_{LS}^{(T)} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$ منتقل می‌شوند که فقط وقتی $d \geq 1$ ، برابر $W_{LS}^{(T)}$ است (تمرین ۱۰.۵ را ببینید). به عنوان مثال وقتی $\{X_t\} \sim AR(1)$ ،

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} + \phi W_{LS}^{(T)} & n \geq T \end{cases},$$

و نشان می‌دهد که این مدل نه تنها در پیش‌بینی Y_T مقدار $W_{LS}^{(T)}$ را شناسایی و اعمال نکرده بلکه از این زمان به بعد این پیش‌بینی‌ها به سطح $\phi W_{LS}^{(T)}$ منتقل شده‌اند. در صورتی که $\phi > 0$ باشد این مدل فقط کسری از تغییر سطح $\phi W_{LS}^{(T)}$ یعنی را شناسایی کرده است. در صورتی که $\phi < 0$ وضعیت بدتر است و تغییر سطح در خلاف جهت صورت گرفته است. فقط در صورتی که $\phi = 1$ یعنی سری قدم زدن تصادفی باشد این تطابق کامل است. اگر $\{X_t\} \sim MA(1)$ باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - [\sum_{j=1}^{n-T+1} (-\theta)^j] W_{LS}^{(T)} & n \geq T \end{cases},$$

که نشان می‌دهد پاسخ این پیش‌بینی‌ها به تغییر سطح گام به گام است و این پیش‌بینی‌ها با افزایش $n - T$ به سطح $W_{LS}^{(T)} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$ که با سطح جدید سری یعنی $W_{LS}^{(T)}$ یکی نیست منتقل می‌شوند. این نتایج



شکل ۶.۸: نمودارهای سری آلوده به TC و خودهمبستگی‌های آن به همراه نمودارهای پراکنش سری آلوده در تأخیرهای 1, 2.

تأکیدی مجدد بر اهمیت شناسایی این دورافتاده و استفاده از مدل (۱۴.۸) به جای مدل ARIMA در صورت وجود چنین دورافتاده‌ای است.

۴.۱.۸ دورافتاده تغییر گذرا در سطح

اگر در (۱۲.۸)، قرار دهیم $V(B) = \frac{1}{1-\delta B}$ و $w = W_{TC}^{(T)}$ مدل حاصل یعنی

$$Y_t = X_t + \frac{W_{TC}^{(T)}}{1-\delta B} I_T(t) = \psi(B) Z_t + \frac{W_{TC}^{(T)}}{1-\delta B} I_T(t) \quad (15.8)$$

را که $0 < \delta < 1$ (در شناسایی نقاط دورافتاده معمولاً $\delta = 0.7$ اختیار می‌شود)، مدل دورافتاده تغییر گذرا (TC) در سطح می‌نامیم. به طور معادل

$$Y_t = \begin{cases} X_t & t < T \\ X_t + \delta^{(t-T)} W_{TC}^{(T)} & t \geq T \end{cases} \quad (16.8)$$

که نشان می‌دهد در زمان T سطح سری به مقدار $W_{TC}^{(T)}$ تغییر می‌کند اما این تغییر سطح برای زمان‌های $T+1, T+2, \dots$ به ترتیب $\delta W_{TC}^{(T)}, \delta^2 W_{TC}^{(T)}, \dots$ است که به طور نمایی کاهش پیدا می‌کند و با افزایش $n - T$ سطح سری به مقدار اولیه بر می‌گردد.

شکل (۶.۸) مصداقی از یک سری میانگین متحرک مرتبه اول با $\theta = 0.6$ و $\sigma^2 = 1$ را نشان می‌دهد که توسط یک TC در زمان $T = 20$ به ازای $W_{TC}^{(20)} = 15$ و $\delta = 0.7$ آلوده شده است. به منظور بررسی

اثر این TC بر خودهمبستگی‌های نمونه، نمودار SACF این سری را به همراه نمودارهای پراکنش در تأخیرهای یک و دو در شکل (۶.۸) رسم کرده‌ایم. نکته قابل توجه تشابه نمودارها در این شکل با شکل (۳.۸) است تشابهی که به هیچ وجه تصادفی نیست. در واقع مقایسه (۱۶.۸) با (۹.۸) روشن می‌کند که یک TC برای سری مفروض $\{X_t\}$ مثل یک IO برای سری اتورگرسیو مرتبه اول با پارامتر δ است. بخصوص وقتی $W_{TC}^{(T)}$ آنقدر بزرگ است که اثر X_t بر Y_t ناچیز است رفتار مصادیق یک سری آلوده به TC و خودهمبستگی‌های نمونه‌ای آنها مثل یک سری اتورگرسیو مرتبه اول، آلوده به IO است. به عنوان نتیجه‌ای از بخش (۲.۱.۸)، حداقل برای تأخیرهای کوچک $\hat{\rho}_Y(h) \approx \delta^h$ در این مثال $\hat{\rho}_Y(1) = 0.67$ ، $\hat{\rho}_Y(2) = 0.45$ و $\hat{\rho}_Y(3) = 0.38$.

البته توجه داریم که تقریب فوق برای $W_{TC}^{(T)}$ های بزرگ معتبر است. در حالت کلی و بسته به مقدار رفتار $W_{TC}^{(T)}$ ، رفتار $\hat{\rho}_Y(h)$ ها بین دو وضعیت حدی تغییر می‌کنند یکی رفتار $\hat{\rho}_X(h)$ ها به ازای $W_{TC}^{(T)} = 0$ و دیگری رفتار خودهمبستگی‌های نمونه‌ای مصادیقی از یک سری اتورگرسیو مرتبه اول با $\phi = \delta$ وقتی $W_{TC}^{(T)} \rightarrow +\infty$.

فرض کنید $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$ با پارامترهای معلوم باشد در صورت غفلت از TC و استفاده از این مدل به جای (۱۵.۸) برای پیش‌بینی سری مشاهده شده یعنی $\{Y_t\}$ داریم،

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} - W_{TC}^{(T)} \left(\sum_{j=1}^{n-T+1} \pi_j \delta^{(n+1-j+T)} \right) & n \geq T \end{cases},$$

و

$$\tilde{a}_n(1) = \begin{cases} \tilde{e}_n(1) & n < T - 1 \\ \tilde{e}_n(1) + W_{TC}^{(T)} \left(\sum_{j=0}^{n-T+1} \pi_j \delta^{(n+1-j+T)} \right) & n \geq T - 1 \end{cases},$$

به عنوان مثال اگر $\{X_t\} \sim AR(1)$ باشد آنگاه

$$\tilde{P}_n Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{P}_n X_{n+1} & n < T \\ \tilde{P}_n X_{n+1} + \phi W_{TC}^{(T)} \delta^{(n-T)} & n \geq T \end{cases},$$

و این پیش‌بینی‌ها از زمان T به بعد به این تغییر سطح پاسخ می‌دهند اما (در صورتی که $\phi > 0$ باشد) این مدل فقط کسر $\phi W_{TC}^{(T)} \delta^{(n-T)}$ از این تغییر سطح را شناسایی و در پیش‌بینی Y_{n+1} اعمال می‌کند. در این بخش با انواع دورافتاده‌ها و اهمیت توجه به آنها در کنترل و کاهش اثراتشان بر نتایج تحلیل یک سری زمانی آشنا شدیم. بعلاوه با مدل‌های مناسب این دورافتاده‌ها یعنی مدل‌های (۶.۸)، (۷.۸)، (۱۴.۸) و (۱۵.۸) نیز آشنا شدیم. برای بحث‌های بعدی مناسبتر است که این چهار مدل را در قالب کلی (۱۲.۸) و به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t + W_{tp}^{(T)} \frac{\eta(B)}{\zeta(B)} I_T(t) \\ &= \frac{\theta_q(B)}{\nabla^d \phi_p(B)} Z_t + W_{tp}^{(T)} \frac{\eta(B)}{\zeta(B)} I_T(t), \end{aligned} \quad (17.8)$$

که

$$W_{tp}^{(T)} = \begin{cases} W_{AO}^{(T)} & tp = AO \\ W_{IO}^{(T)} & tp = IO \\ W_{LS}^{(T)} & tp = LS \\ W_{TC}^{(T)} & tp = TC \end{cases}, \quad \frac{\eta(B)}{\zeta(B)} = \begin{cases} 1 & tp = AO \\ \frac{\theta_q(B)}{\nabla^d \phi_p(B)} & tp = IO \\ \frac{1}{1-B} & tp = LS \\ \frac{1}{1-\delta B} & tp = TC \end{cases}$$

و با توجه به اینکه در یک سری زمانی ممکن است چند دورافتاده وجود داشته باشد می توان این مدل را به شکل کلی تر

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t + \sum_{i=1}^k W_{tp}^{(T_i)} \frac{\eta_i(B)}{\zeta_i(B)} I_{T_i}(t) \\ &= \frac{\theta_q(B)}{\nabla^d \phi_p(B)} Z_t + \sum_{i=1}^k W_{tp}^{(T_i)} \frac{\eta_i(B)}{\zeta_i(B)} I_{T_i}(t). \end{aligned} \quad (18.8)$$

تعمیم داد.

در تحلیل یک سری زمانی شامل نقاط دورافتاد چند مسئله باید حل شود (۱) زمان وقوع دور افتاده ها معلوم گردد. (۲) نوع دورافتاده ها تعیین گردد. (۳) اندازه این دورافتاده ها برآورد گردد. در صورتی که مدل ARIMA ی متناظر با سری واقعی در (۱۸.۸) نیز معلوم نباشد که در عمل اینگونه است باید شناسایی مدل و برآورد پارامترهای آن را نیز به مراحل فوق افزود. در ادامه این فصل با چگونگی حل این مسائل آشنا می شویم. ابتدا و در بخش (۲.۸) مدل ARIMA ی نظیر را معلوم فرض کرده و به چگونگی شناسایی زمان وقوع و نوع دورافتاده ها و برآورد اندازه آنها خواهیم پرداخت. حالت کلی تر را در بخش (۳.۸) مطالعه می کنیم.

۲.۸ شناسایی نقاط دورافتاده

با توجه به اینکه یک دورافتاده در هر زمانی بین ۱ تا n می تواند واقع شود یک روش برای شناسایی این زمان و نوع دورافتاده این است که پارامترهای $W_{tp}^{(T)}$ را برای $tp = AO, IO, LS, TC$ و $T = 1, 2, \dots, n$ برآورد کرده و معنی داری آنها را آزمون کنیم. برای سادگی در آغاز کار فرض می کنیم سایر پارامترها معلومند و قرار می دهیم

$$y_t = \pi(B)Y_t, \quad u_t = \frac{\pi(B)\eta(B)}{\zeta(B)} I_T(t), \quad t = 1, 2, \dots, n$$

که $\pi(B) = \nabla^d \phi_p(B) / \theta_q(B)$ و برای $t \leq 0$ ، قرار می‌دهیم $Y_t = 0$ (یا پس‌بینی‌های را جایگزین آنها می‌کنیم) در این صورت مدل (۱۷.۸) به شکل

$$y_t = W_{tp}^{(T)} u_t + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \quad (19.8)$$

نوشته می‌شود که یک مدل رگرسیونی خطی ساده بدون عرض از مبدأ است و برآوردکننده کمترین توانهای دوم عادی $W_{tp}^{(T)}$ و واریانس آن برابرند با

$$\widehat{W}_{tp}^{(T)} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t u_t}{\sum_{t=1}^n u_t^2}, \quad Var(\widehat{W}_{tp}^{(T)}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (20.8)$$

به این طریق نتایج زیر برای چهار نوع دورافتاده حاصل می‌شود.
برای یک AO:

$$y_t = \pi(B)Y_t = \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j Y_{t-j}, \quad u_t = \pi(B)I_T(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ \pi_{t-T} & t \geq T \end{cases},$$

در نتیجه

$$\widehat{W}_{AO}^{(T)} = \frac{\sum_{t=T}^n \pi_{t-T} y_t}{\sum_{t=T}^n \pi_{t-T}^2}, \quad Var(\widehat{W}_{AO}^{(T)}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=T}^n \pi_{t-T}^2}.$$

برای یک IO:

$$y_t = \pi(B)Y_t, \quad u_t = I_T(t),$$

در نتیجه

$$\widehat{W}_{IO}^{(T)} = y_T, \quad Var(\widehat{W}_{IO}^{(T)}) = \sigma^2.$$

برای یک LS:

$$y_t = \pi(B)Y_t, \quad u_t = \frac{\pi(B)}{1-B} I_T(t) = \tau(B)I_T(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ \tau_{t-T} & t \geq T \end{cases},$$

در نتیجه

$$\widehat{W}_{LS}^{(T)} = \frac{\sum_{t=T}^n \tau_{t-T} y_t}{\sum_{t=T}^n \tau_{t-T}^2}, \quad Var(\widehat{W}_{LS}^{(T)}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=T}^n \tau_{t-T}^2}.$$

برای یک TC:

$$y_t = \pi(B)Y_t, \quad u_t = \frac{\pi(B)}{1-\delta B} I_T(t) = \kappa(B)I_T(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ \kappa_{t-T} & t \geq T \end{cases},$$

در نتیجه

$$\widehat{W}_{TC}^{(T)} = \frac{\sum_{t=T}^n \kappa_{t-T} y_t}{\sum_{t=T}^n \kappa_{t-T}^2}, \quad Var(\widehat{W}_{TC}^{(T)}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=T}^n \kappa_{t-T}^2}.$$

به عنوان مثال برای سری آلوده به AO در شکل (۱.۸)،

$$\widehat{W}_{AO}^{(50)} = 10.18, \quad Var(\widehat{W}_{AO}^{(50)}) = 0.67$$

برای سری آلوده به IO در شکل (۳.۸)،

$$\widehat{W}_{IO}^{(50)} = 27.50, \quad Var(\widehat{W}_{IO}^{(50)}) = 1$$

برای سری آلوده به LS در شکل (۴.۸)،

$$\widehat{W}_{LS}^{(50)} = 5.18, \quad Var(\widehat{W}_{LS}^{(50)}) = 0.18$$

برای سری آلوده به TC در شکل (۶.۸)،

$$\widehat{W}_{TC}^{(20)} = 14.12, \quad Var(\widehat{W}_{TC}^{(20)}) = 0.80$$

در این مثالها زمان و نوع دورافتاده را می دانستیم در حالت کلی برای تشخیص اینکه در زمان T دور افتاده‌ای از نوع $tp = AO, IO, LS, TC$ واقع شده است یا خیر باید فرض $H_0 : W_{tp}^{(T)} = 0$ را در مقابل $H_1 : W_{tp}^{(T)} \neq 0$ آزمون کرد. با توجه به (۱۹.۸) فرض H_0 معادل فرض صفر بودن شیب خط رگرسیون (۱۹.۸) است که می توان آن را به کمک آماره آزمون نسبت درستنمایی،

$$\lambda(T, tp) = \frac{\widehat{W}_{tp}^{(T)}}{\sqrt{Var(\widehat{W}_{tp}^{(T)})}},$$

آزمون کرد. در صورتی که Z_t ها نرمال باشند و فرض H_0 درست باشد این آماره دارای توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین در صورتی که $|\lambda(T, tp)| > Z_{\alpha/2}$ باشد فرض H_0 در سطح معنی داری α رد می شود. از طرفی چون T معلوم نیست بایستی کلیه زمانهای $1 \leq T \leq n$ را آزمون کنیم می توان نشان داد (فاکس ۱۹۷۲ و چانگ و تیائو ۱۹۸۳) آماره آزمون نسبت درستنمایی در این وضعیت عبارت است از:

$$\lambda(T^*, tp) = \max_{1 \leq T \leq n} |\lambda(T, tp)|, \quad tp = AO, IO, LS, TC,$$

که T^* زمان متناظر با مقدار بیشینه است. متأسفانه توزیع این آماره‌ها معلوم نیست، البته به کمک شبیه سازی می توان صدک های این توزیع ها را تقریب کرد (چانگ و همکاران ۱۹۸۸ یا لجانگ ۱۹۹۳) اما در عمل معمولاً از مقادیر 3, 3.5, 4 به عنوان مقادیر بحرانی استفاده می کنیم و اگر $\lambda(T^*, tp) > C$ نتیجه می گیریم در زمان T^* دورافتاده ای از نوع tp واقع شده است.

تکرار	زمان	نوع	$\widehat{W}_{tp}^{(T)}$	$Var(\widehat{W}_{tp}^{(T)})$
1	50	AO	10.179	0.671
2	75	AO	3.973	0.308

جدول ۱.۸: دورافتاده‌های شناسایی شده و برآورد اندازه آنها در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۸).

معمولاً در زمان T^* که یک نوع دورافتاده واقع می‌شود مقدار آماره $\lambda(T^*, tp)$ برای سایر انواع دورافتاده‌ها نیز بزرگ است به این دلیل شیوه فوق ممکن است در یک زمان به اشتباه چند نوع دورافتاده را شناسایی کند. از طرفی این شیوه در تحلیل سریهای زمانی شامل چند دورافتاده نیز کارآمد نیست. برای رفع این مشکلات در عمل از روشی تکراری استفاده می‌شود، به این ترتیب که در هر تکرار یک دور افتاده (محتمل‌ترین آنها) در صورت وجود شناسایی شده و اثر آن از مشاهدات حذف می‌شود سپس این مشاهدات تعدیل شده جایگزین Y_t ها در تکرار بعدی می‌شوند. در این روش به منظور شناسایی زمان و نوع دورافتاده آماره زیر پیشنهاد شده است (چانگ و تیائو ۱۹۸۳ و تسی ۱۹۸۸)

$$\lambda(T^*, tp^*) = \max_{tp} \lambda(T^*, tp) = \max_{tp} \max_{1 \leq T \leq n} |\lambda(T, tp)|, \quad (21.8)$$

که T^* و tp^* زمان و نوع دورافتاده متناظر با مقدار بیشینه‌اند. در صورتی که به ازای مقدار از پیش تعیین شده C (معمولاً 3, 3.5, 4) $\lambda(T^*, tp^*) < C$ ، C (معمولاً 3, 3.5, 4) C شده این صورت نتیجه می‌گیریم که در زمان T^* دورافتاده‌ای از نوع tp^* واقع شده است و با توجه به (۱۷.۸) مشاهدات توسط تساوی

$$\tilde{Y}_t = Y_t - \widehat{W}_{tp^*}^{(T^*)} \frac{\eta(B)}{\zeta(B)} I_{T^*}(t) \quad (22.8)$$

تعدیل می‌شوند. تابع $OUTLIERS(data, \phi, \theta, \sigma^2, delta, mu, C, bf)$ در پیوست ۳ برای انجام محاسبات فوق تهیه شده است. در این تابع به طور پیش فرض $\delta = 0.7$ ، $C = 3.5$ و $\mu = 0$ اختیار شده‌اند که در صورت نیاز می‌توان آنها را تغییر داد. همانطور که اشاره شد در محاسبات فوق مقادیر اولیه Y_t را صفر قرار می‌دهیم. این عمل بخصوص برای سریهای نا ایستا باعث می‌شود y_t های اولیه و آماره‌های آزمون نظیر این زمان‌ها بزرگ شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود از این روش برای شناسایی دورافتاده‌ها از زمان $T \geq p + d + q$ به بعد استفاده شود یا اینکه از پس‌بینی‌ها به جای Y_t های اولیه استفاده کنیم. با شناسه bf در تابع فوق تعداد این پس‌بینی‌ها را مشخص می‌کنیم.

مثال (۱.۸): در سری آلوده به AO در شکل (۱.۸) با اضافه کردن 3 واحد به Y_t ها از $t = 75$ به بعد یک دورافتاده LS نیز اضافه کرده‌ایم. اگر سری جدید را با $\{S_t\}$ نشان دهیم، با محاسبه آماره آزمون (۲۱.۸) و مقایسه مقدار آن با $C = 3.5$ به کمک دستور زیر

$$ou1 < -OUTLIERS(S, 0.7, 0, 1); ou1$$

اولین دورافتاده در زمان $T = 50$ و از نوع AO شناسایی می‌شود، با اجرای این دستور برآورد اندازه این دورافتاده و واریانس آن نیز محاسبه می‌شوند این مقادیر در جدول (۱.۸) آمده‌اند. با اجرای دستور فوق مشاهدات تعدیل شده نیز با استفاده از (۲۲.۸) و به صورت زیر محاسبه

$$\hat{S}_t = S_t - 10.179I_{50}(t) = \begin{cases} S_t & t \neq 50 \\ S_t - 10.179 & t = 50 \end{cases}$$

و در لیست *ou1* با نام *ADJDATA* ذخیره شده‌اند. برای انجام محاسبات در تکرار دوم از دستور زیر استفاده می‌کنیم

$$ou2 < -OUTLIERS(ou1\$ADJDATA, 0.7, 0, 1)$$

در این تکرار دورافتاده LS در زمان $T = 75$ شناسایی می‌شود، برآورد بزرگی این دورافتاده و واریانس آن در جدول (۱.۸) آمده‌اند. در تکرار سوم دورافتاده دیگری شناسایی نمی‌شود بنابراین مدل برازش شده به سری $\{S_t\}$ عبارت است از

$$\hat{S}_t = \frac{1}{1 - 0.7B} Z_t + 10.179I_{50}(t) + \frac{3.973}{1 - B} I_{75}(t), \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1).$$

تا اینجا مدل ARIMA ی متناظر با یک سری شامل دورافتاده و پارامترهای آن را معلوم فرض کردیم. در بخش بعد مسئله را در حالت کلی‌تری که این مدل نیز نامعلوم است بررسی می‌کنیم.

۳.۸ تحلیل سریهای زمانی شامل نقاط دورافتاده

در حالت کلی وقتی با تحلیل یک سری زمانی مشکوک به وجود دورافتاده سروکار داریم کار شناسایی مدل ARIMA و برآورد پارامترهای آن و شناسایی نقاط دورافتاده و برآورد اندازه آنها بایستی همزمان انجام شود. بدیهی است وجود دورافتاده‌ها کار شناسایی مدل را پیچیده‌تر و برآورد پارامترهای آن را آریب می‌کنند. از طرفی در صورت برازش مدلی نامناسب شناسایی دورافتاده‌ها پیچیده می‌شود. روشهایی که برای تحلیل سریهای زمانی شامل دورافتاده‌ها گسترش یافته‌اند سعی در برقراری تعادلی بین این دو وضعیت دارند. از مهمترین این روشها می‌توان به الگوریتم‌هایی که توسط چانگ و تیائو (۱۹۸۳)، تسی (۱۹۸۶ و ۱۹۸۸)، چانگ و همکاران (۱۹۸۸) و چن^۱ و لیو^۲ (۱۹۹۳) اشاره کرد. در اینجا با الگوریتمی آشنا می‌شویم که اساساً توسط چانگ و تیائو (۱۹۸۳) ارائه شده و ساده‌ترین الگوریتم در نوع خود است. مراحل کار در این الگوریتم عبارتند از

۱- برای سری مشاهده شده Y_1, Y_2, \dots, Y_n یک مدل ARIMA شناسایی کرده و برآوردهای بیشترین درست‌نمایی پارامترهای آن را محاسبه می‌کنیم.

^۱ Chen

^۲ Liu

تکرار	$\hat{\phi}$	$\hat{\sigma}^2$	زمان	نوع	$\widehat{W}_{tp}^{(T)}$	$\widehat{Var}(\widehat{W}_{tp}^{(T)})$	$\hat{\sigma}^2$	$\widehat{Var}(\widehat{W}_{tp}^{(T)})$
1	0.747	2.942	50	AO	10.174	1.908	0.771	0.495
2	0.891	1.232	75	LS	4.463	0.950	1.068	0.823
3	0.720	0.916	—	—	—	—	—	—

جدول ۲.۸: دورافتاده‌های شناسایی شده و برآورد اندازه آنها و پارامترهای مدل در تکرارهای مختلف، برای سری مثال (۲.۸).

۲- به کمک مدل مرحله اول مقدار آماره (۲.۸) را محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار کوچکتر از مقدار از پیش تعیین شده C بود الگوریتم متوقف می‌شود در غیر این صورت مرحله سوم اجرا می‌شود.

۳- با توجه به زمان وقوع و نوع دورافتاده شناسایی شده در مرحله دوم و به کمک (۲.۸) مشاهدات تعدیل شده $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n$ را محاسبه و جایگزین Y_t ها می‌کنیم سپس به مرحله اول می‌رویم.

استفاده از این الگوریتم نهایتاً منجر به مدل برازش شده زیر می‌شود

$$\hat{Y}_t = \frac{\hat{\theta}_q(B)}{\nabla^d \hat{\phi}_p(B)} Z_t + \sum_{i=1}^k \widehat{W}_{tp_i}^{(T_i)} \frac{\hat{\eta}_i(B)}{\hat{\zeta}_i(B)} I_{T_i}(t).$$

که در آن

$$\frac{\hat{\eta}_i(B)}{\hat{\zeta}_i(B)} = \begin{cases} 1 & tp_i = AO \\ \frac{\hat{\theta}_q(B)}{\nabla^d \hat{\phi}_p(B)} & tp_i = IO \\ \frac{1}{1-B} & tp_i = LS \\ \frac{1}{1-\delta B} & tp_i = TC \end{cases}$$

(در اینجا $\delta = 0.7$)

مثال (۲.۸): سری $\{S_t\}$ در مثال (۱.۸) را به کمک الگوریتم فوق تحلیل می‌کنیم.
تکرار اول:

۱- از جمع بندی رفتار توابع SACF و SPACF سری $\{S_t\}$ ، مدل مناسب تشخیص داده شده و برآوردهای بیشترین درستی ϕ و σ^2 به ترتیب برابر $\hat{\phi} = 0.747$ و $\hat{\sigma}^2 = 2.972$ به دست می‌آیند.

۲- با اجرای دستور $ou1 < -OUTLIERS(S, 0.747, 0, 2.972)$ اولین دورافتاده از نوع AO در زمان $T = 50$ شناسایی و $\widehat{W}_{AO}^{(50)}$ ، $\widehat{Var}(\widehat{W}_{AO}^{(50)})$ محاسبه می‌شوند (جدول ۲.۸).

۳- با اجرای دستور فوق مشاهدات تعدیل شده نیز محاسبه می‌شوند، به کمک آنها تکرار دوم را آغاز می‌کنیم.

تکرار دوم:

۱- از جمع بندی رفتار توابع SACF و SPACF سری تعدیل شده (ou1\$ADJDATA)، مدل $AR(1)$ مناسب تشخیص داده شده و برآوردهای بیشترین درستنمایی ϕ و σ^2 به ترتیب برابر $\hat{\phi} = 0.891$ و $\hat{\sigma}^2 = 1.232$ به دست می آیند.

۲- با اجرای دستور $OUTLIERS(ou1$ADJDATA, 0.891, 0, 1.232) < ou2$ دور افتاده دوم از نوع LS در زمان $T = 75$ شناسایی و $\widehat{W}_{LS}^{(75)}$ ، $\widehat{var}(\widehat{W}_{LS}^{(75)})$ محاسبه می شوند (جدول ۲.۸).

۳- با اجرای دستور فوق مشاهدات تعدیل شده نیز محاسبه می شوند، به کمک آنها تکرار سوم را آغاز می کنیم.

تکرار سوم:

۱- از جمع بندی رفتار توابع SACF و SPACF سری تعدیل شده (ou2\$ADJDATA)، مدل $AR(1)$ مناسب تشخیص داده شده و برآوردهای بیشترین درستنمایی ϕ و σ^2 به ترتیب برابر $\hat{\phi} = 0.720$ و $\hat{\sigma}^2 = 0.916$ به دست می آیند.

۲- با اجرای دستور $OUTLIERS(ou2$ADJDATA, 0.720, 0, 0.916) < ou3$ دور افتاده دیگری شناسایی نمی شود و در نتیجه الگوریتم متوقف می شود.

در نتیجه مدل مناسب برای سری $\{S_t\}$ عبارت است از

$$S_t = \frac{1}{1 - \phi B} Z_t + W_{AO}^{(50)} I_{50}(t) + \frac{W_{LS}^{(75)}}{1 - B} I_{75}(t), \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2). \quad (23.8)$$

و مدل برازش شده حاصل از اجرای الگوریتم فوق عبارت است از:

$$\hat{S}_t = \frac{1}{1 - 0.720B} Z_t + 10.179 I_{50}(t) + \frac{4.463}{1 - B} I_{75}(t), \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.916).$$

در اینجا ذکر دو نکته ضروری است، اول اینکه در استفاده از الگوریتم فوق برآورد پارامترهای مدل ARIMA و دور افتاده ها در تکرارهای متفاوتی محاسبه می شوند. هر چند این برآوردها معمولاً به برآوردهای بیشترین درستنمایی (همزمان) پارامترهای نظیرشان نزدیکند اما در صورت نیاز می توان این پارامترها را همزمان برآورد کرد. در حالت کلی برآوردهای بیشترین درستنمایی پارامترهای مدل ARIMA و اندازه دور افتاده ها توسط الگوریتم های مناسب تحلیل مداخله ای محاسبه می شوند. برنامه های رایانه ای مثل SAS، SCA، AUTOBOX و STATISTICA محاسبات لازم را انجام می دهند. اما در مواردی مثل مدل (۲۳.۸) می توان از تابع $arima.mle$ در S-PLUS نیز استفاده کرد. برای این منظور دستورات زیر را به کار می بریم

$$reg1 < -rep(0, 100); reg1[50] < -1; reg2 < -c(rep(0, 49), rep(1, 51))$$

[1870]	-0.043	-0.032	-0.014	0.004	0.019	0.049	0.042
[1877]	0.033	0.032	0.021	0.004	-0.005	-0.014	-0.017
[1884]	-0.012	-0.025	-0.030	-0.035	-0.049	-0.043	-0.022
[1891]	-0.005	0.011	0.003	-0.005	0.004	0.020	0.024
[1898]	0.023	0.044	0.047	0.055	0.047	0.037	0.029
[1905]	0.009	-0.003	0.001	0.004	-0.084	-0.065	-0.045
[1912]	-0.053	-0.036	-0.015	0.049	0.006	-0.018	-0.069
[1919]	0.012	0.027	0.025	0.034	0.017	0.022	0.020
[1926]	0.013	-0.006	-0.009	0.003	-0.007	-0.003	-0.021
[1933]	-0.014	-0.017	-0.018	0.005	0.024	0.020	

جدول ۳.۸: سری مانده‌ها در مثال (۳.۸).

`out <- arima.mle(S, model = list(order = c(1, 0, 0)), xreg = matrix(c(reg1, reg2), ncol = 2))`

`out$sigma2`

که منجر به مدل برازش شده

$$\hat{S}_t = \frac{1}{1 - 0.699B} Z_t + 10.179I_{50}(t) + \frac{3.972}{1 - B} I_{75}(t), \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 0.908).$$

برای سری $\{S_t\}$ می‌شود.

نکته دوم که در مثال (۲.۸) نیز کاملاً مشهود است تمایل برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی σ به مقادیر بزرگ در حضور نقاط دورافتاده است. این هم به نوبه خود منجر به مقادیر بزرگ برای $\hat{Var}(\hat{W}_{tp}^{(T)})$ و افزایش خطای نوع دوم می‌شود. به همین دلیل معمولاً از برآوردکننده‌ای استوار برای σ استفاده می‌شود. یکی از این برآوردکننده‌ها میانه قدر مطلق انحرافات (MAD)^۱ مانده‌ها است که به صورت زیر تعریف می‌شود

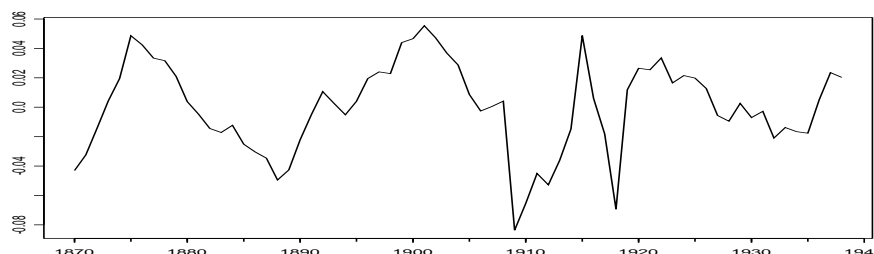
$$\tilde{\sigma} = MAD(\{\hat{Z}_t\}) = 1.483 \times \text{median}\{|\hat{Z}_t - \tilde{Z}|\},$$

که $\tilde{Z} = \text{median}\{\hat{Z}_t\}$ میانه مانده‌ها است و توسط تابع $mad(data)$ در S-PLUS می‌توان مقدار آن را محاسبه کرد. برای سری مثال (۲.۸) برآوردهای استوار σ^2 و $Var(\hat{W}_{tp}^{(T)})$ نیز محاسبه و در جدول (۲.۸) آمده‌اند.

مثال (۳.۸): در تحلیل رابطه بین مقدار مصرف نوشابه‌های الکلی در انگلیس با درآمد سرانه و قیمت این نوشابه‌ها برای سالهای ۱۸۷۰ تا ۱۹۳۸ یک مدل رگرسیونی توسط پرست^۲ (۱۹۴۹) برازش شده

^۱ Median Absolute Deviation

^۲ Prest



شکل ۷.۸: نمودار سری مانده‌ها در مثال (۳.۸).

تکرار	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\sigma}^2$	زمان	نوع	$\widehat{W}_{tp}^{(T)}$	$\widehat{Var}(\widehat{W}_{tp}^{(T)})$
1	0.72	—	0.00042	1909 ($T = 40$)	IO	-0.0867	0.00042
2	0.72	—	0.00031	1918 ($T = 49$)	AO	-0.0663	0.00020
3	0.99	-0.24	0.00020	1915 ($T = 46$)	AO	0.0482	0.00010
4	1.16	-0.35	0.00012	—	—	—	—

جدول ۴.۸: دورافتاده‌های شناسایی شده و برآورد اندازه آنها و پارامترهای مدل در تکرارهای مختلف، برای سری مثال (۳.۸).

است (داده‌های مربوطه و این مدل را می‌توان در فولر ۱۹۷۶، دید). این داده‌ها توسط فولر (۱۹۷۶) نیز تحلیل شد و فولر برای مانده‌های این مدل رگرسیون (جدول ۳.۸) یک مدل $AR(1)$ را مناسب تشخیص داد. اما نمودار این سری در شکل (۷.۸) نقاط مشکوک به دورافتاده بودن در فاصله زمانی ۱۹۰۹ تا ۱۹۱۹ را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم فوق در جدول (۴.۸) علاوه بر تأیید این موضوع و شناسایی سه دورافتاده، برای سری فارغ از اثر این دورافتاده‌ها نیز مدل اتورگرسیون مرتبه دوم را پیشنهاد می‌کند (تسی، ۱۹۸۶ را نیز ببینید). با استفاده از این الگوریتم نهایتاً مدل

$$X_t = \frac{Z_t}{1 - 1.16B + 0.35B^2} - \frac{0.0867}{1 - 1.16B + 0.35B^2}I_{40}(t) + 0.0479I_{46}(t) - 0.0663I_{49}(t),$$

که $\{Z_t\} \sim WN(0, 0.00012)$ به سری باقی مانده‌ها برازش می‌شود. دقت در زمان وقوع این دور افتاده‌ها نشان می‌دهد که دو دورافتاده AO در سالهای ۱۹۱۵ و ۱۹۱۸ را می‌توان ناشی از اثرات جنگ جهانی اول دانست و با توجه به اجرای برنامه اصلاحات اجتماعی توسط للوید جرج^۱ نخست وزیر وقت انگلیس در سال ۱۹۰۹، وضع مالیاتهای سنگین برای این نوشابه‌ها را می‌توان علت IO در تاریخ ۱۹۰۹ دانست.

^۱ Lloyd George

۴.۸ تمرینات

۱.۸ - دستورات زیر

```

data<-arima.sim(model=list(ar=.7),innov=INN)[21:120]
dataA0<-data; dataA0[50]<-dataA0[50]+10
dataLS<-data; dataLS[50:100]<-dataLS[50:100]+5
dataTC<-arima.sim(model=list(ma=-.6),innov=INN)[21:120]
dataTC[20:100]<-dataTC[20:100]+15*(.7)^(0:80)
INN2<-INNE; INN2[70]<-INN[70]+28
dataI0<-arima.sim(model=list(ar=.7),innov=INN2)[21:120]

```

نحوه شبیه‌سازی سریهای رسم شده در شکل‌های (۱.۸)، (۳.۸)، (۴.۸) و (۶.۸) را نشان می‌دهند. سری تحولها (*INN*) در جدول زیر آمده است. این سریها را بسازید و با استفاده از تابع *OUTLIERS* برآوردهایی را که در بخش (۲.۸) برای اثر دورافتاده‌های نظیرشان ارائه شد، حساب کنید. سری $\{S_t\}$ در مثال (۱.۸) را ساخته و نتایج آن مثال را خودتان به دست آورید.

[1]	0.672	-0.161	0.222	-0.593	0.433	-0.056	1.098	-0.679
[9]	2.171	-0.164	0.049	-1.304	-1.164	0.407	-1.080	-0.570
[17]	-0.134	-1.018	0.490	0.588	0.778	0.655	-0.726	-0.117
[25]	-0.432	0.625	2.397	1.519	0.575	0.548	-0.039	-0.468
[33]	-1.574	0.602	0.483	-1.324	-2.366	0.152	0.329	-1.570
[41]	0.487	0.660	1.435	0.365	-0.531	-0.694	0.106	0.849
[49]	-0.098	0.158	0.527	-0.277	-0.202	-2.111	1.246	0.230
[57]	-0.950	-0.152	0.381	0.080	-0.085	0.016	-0.122	-2.055
[65]	-0.717	0.347	-0.093	0.805	1.201	-0.502	-1.098	-1.661
[73]	0.677	-1.181	1.962	-0.249	2.378	-0.005	1.144	-0.644
[81]	0.018	-1.170	-0.250	-0.128	-0.940	-0.289	-0.057	0.976
[89]	0.645	-1.473	-0.979	0.545	-0.745	2.078	2.169	-0.154
[97]	0.451	0.133	0.902	-0.359	-1.025	-1.580	-0.295	-0.693
[105]	0.405	0.248	-0.205	1.558	1.664	0.198	-0.273	0.047
[113]	0.264	1.626	0.270	0.503	-0.216	-1.008	-0.343	1.192

سری تحولها در تمرین (۱.۸).

۲.۸ برای سری (ب) تمرین (۱.۷)،

الف) یک LS به طور مصنوعی در زمان $T = 35$ به اندازه 5 واحد بوجود آورده و نمودار سری آلوده را رسم کنید.

ب) به کمک مدلی که در تمرین (۱.۷) برازش کردید عمل شناسایی این دورافتاده را انجام دهید.

ج) با استفاده از تابع $FORE.INN$ ، پیش‌بینی‌های گام بعد سری آلوده را یکبار به کمک مدلی که در تمرین (۱.۷) برازش کردید و یکبار به کمک مدل (۱۴.۸) محاسبه در یک نمودار به همراه سری (ب) رسم کنید.

۳.۸ در سری (ب) تمرین (۱.۷) یکبار یک AO به اندازه 5 و یکبار یک TC به اندازه 5، (با $\delta = 0.7$) در زمان $T = 50$ بوجود آورده و قسمت‌های (ب) و (ج) تمرین قبل را برای آنها حل کنید.

۴.۸ نشان دهید در سری مانده‌های مثال (۸.۷) مشاهده دورافتاده وجود ندارد.

۵.۸ در صورتی که $d = 1$ ، انتظار دارید رفتار مصادیق یک سری ARIMA ی آلوده به IO چگونه باشد. با شبیه‌سازی یک سری از این نوع و رسم شکل بیشتر توضیح دهید.

۶.۸ تحلیل دورافتاده‌ها را برای سری Se9 انجام دهید.

۷.۸ مدلی مناسب به سری زیر برازش دهید. از شصت مشاهده اول برای شناسایی مدل اولیه استفاده کنید.

[1]	13.63	9.21	12.88	13.12	11.32	13.00	9.44	11.96
[9]	12.26	14.25	7.91	16.31	6.74	13.24	25.90	3.95
[17]	10.69	9.04	13.35	10.45	12.45	12.37	15.18	10.24
[25]	13.34	11.45	12.05	11.42	13.39	7.99	14.26	12.86
[33]	14.79	7.34	16.34	8.81	11.43	11.40	13.41	9.09
[41]	11.58	10.29	16.09	10.85	6.85	17.40	6.43	15.48
[49]	11.83	12.97	11.46	15.84	9.43	11.01	11.22	11.60
[57]	13.53	9.47	14.38	12.31	10.63	12.66	19.67	19.62
[65]	17.56	23.94	18.26	20.54	18.98	19.54	18.13	21.96
[73]	19.88	20.06	18.98	23.17	20.15	19.32	18.60	19.75
[81]	4.07	9.68	7.54	16.15	11.04	14.05	13.39	11.08
[89]	19.37	18.59	17.93	14.87	17.75	19.09	19.46	16.97
[97]	21.12	18.22	20.70	14.47				

سری تمرین (۷.۸).

۸.۸ جدول زیر میانگین تعداد نقایص موجود در هر کامیون تولیدی یک کارخانه است که به طور روزانه ثبت شده است. مدلی مناسب به این سری برازش دهید.

[1]	1.20	1.50	1.54	2.70	1.95	2.40	3.44	2.83	1.76	2.00
[11]	2.09	1.89	1.80	1.25	1.58	2.25	2.50	2.05	1.46	1.54
[21]	1.42	1.57	1.40	1.51	1.08	1.27	1.18	1.39	1.42	2.08
[31]	1.85	1.82	2.07	2.32	1.23	2.91	1.77	1.61	1.25	1.15
[41]	1.37	1.79	1.68	1.78	1.84					

میانگین تعداد نقایص روزانه در هر کامیون (تمرین ۸.۸).

۹.۸ جدول زیر جریان حجمی رودخانه نیل را از سال ۱۸۷۱ تا ۱۹۷۰ که در آسوان ثبت شده نشان می‌دهد. مدلی مناسب به این سری برازش دهید بخصوص اثر سد آسوان را که در سال ۱۸۹۹ روی این رودخانه ساخته شده برآورد کنید. (راهنمایی: با مدل $IMA(1,1)$ ، $C = 3$ و $bf = 10$ شروع کنید. در مراحل دوم و سوم مدل $AR(1)$ با میانگین غیر صفر و $C = 2.5$ را امتحان کنید. برای ادامه قرار دهید $C = 3.5$ انتخاب کنید.)

[1]	1120	1160	963	1210	1160	1160	813	1230	1370	1140
[11]	995	935	1110	994	1020	960	1180	799	958	1140
[21]	1100	1210	1150	1250	1260	1220	1030	1100	774	840
[31]	874	694	940	833	701	916	692	1020	1050	969
[41]	831	726	456	824	702	1120	1100	832	764	821
[51]	768	845	864	862	698	845	744	796	1040	759
[61]	781	865	845	944	984	897	822	1010	771	676
[71]	649	846	812	742	801	1040	860	874	848	890
[81]	744	749	838	1050	918	986	797	923	975	815
[91]	1020	906	901	1170	912	746	919	718	714	740

جریان حجمی رودخانه نیل از سال ۱۸۷۱ تا ۱۹۷۰، تمرین (۹.۸).

۱۰.۸ فرض کنید سری اتورگرسیو مرتبه اول $\{X_t\}$ با پارامترهای معلوم، در زمان T به AO با اندازه نامعلوم $W_{AO}^{(T)}$ آلوده شود.

الف) نشان دهید $\widehat{W}_1 = \tilde{a}_{T-1}(1)$ و $\widehat{W}_2 = -\frac{\tilde{a}_T(1)}{\phi}$ برآوردکننده‌هایی نااریب برای $W_{AO}^{(T)}$ اند. واریانس آنها را بیابید.

ب) c_1 و c_2 را طوری بیابید که برآوردکننده $\widehat{W}_{AO}^{(T)} = c_1\widehat{W}_1 + c_2\widehat{W}_2$ نااریب با کمترین واریانس در بین این نوع برآوردکننده‌ها باشد.

ج) نشان دهید این برآوردکننده همان برآوردکننده (۲۰.۸) برای یک AO است.

د) نشان دهید مشاهده تعدیل شده T ام یعنی $\tilde{Y}_T = Y_T - \widehat{W}_{AO}^{(T)}$ برابر است با

$$\tilde{Y}_T = \frac{\phi(X_{T+1} + X_{T-1})}{1 + \phi^2},$$

که همان $P[X_T | X_t; 1 < t < n, t \neq T]$ (تمرین ۳.۴) و برآوردی از مقدار گمشده X_T است.

ه) در سری شکل (۱.۸-i)، (سری $data$ در تمرین ۱.۸) فرض کنید مشاهده ۲۰ام گمشده است آن را برآورد کنید.

۱۱.۸- فرض کنید سری ARIMA ی $\{X_t\}$ با پارامترهای معلوم، در زمان T به یک AO با اندازه نامعلوم $W_{AO}^{(T)}$ آلوده شود. نشان دهید مشاهده تعدیل شده T ام ترکیبی خطی از مشاهدات بجز مشاهده T ام است. از این نتیجه چگونه در برآورد یک مشاهده گم شده می توان استفاده کرد. با یک مثال توضیح دهید.

فصل ۹

سریهای فصلی

در بخش (۳.۲) با سریهای زمانی فصلی به عنوان سریهایی که رفتار نسبتاً منظمی در فواصل زمانی با طول ثابت از خودشان نشان می‌دهند آشنا شدیم. در آنجا و در تمرین (۱۶.۲) مدل‌هایی معرفی شدند که می‌توانستند چنین مصادیقی را تولید کنند. در مثالهایی که بررسی شد عملکرد نسبتاً خوب توابع پیش‌بینی حاصل از این مدلها را دیدیم. اما عدم وابستگی ϵ_t ها (و X_t ها) که مهمترین ایراد ساختاری این مدلهاست به همراه غیر تصادفی بودن روند و اثرات فصلی که در بسیاری از کاربردها بسیار محدود کننده است از نقاط ضعف این مدلها به حساب می‌آید. در این فصل با مدل‌های اتورگرسیو - میانگین متحرک فصلی (SARMA^۱) و اتورگرسیو - میانگین متحرک جمع بسته فصلی (SARIMA^۲) آشنا می‌شویم. این مدلها علاوه بر اینکه در ساختارشان هیچیک از معایب فوق را ندارند توابع پیش‌بین حاصل از مدل‌های کلاسیک و روشهای هموارسازی نمایی را نیز به عنوان حالت‌های خاص از توابع پیش‌بین غائی خود در بر دارند. هر چند همیشه اینطور نیست ولی معمولاً مصادیق سریهای فصلی ضابطه تابع پیش‌بینی غائی را به خوبی القا می‌کنند. این را انگیزه‌ای قرار داده و در بخش (۱.۹) مدل‌های SARMA را به عنوان حالت خاصی از مدل‌های ARMA و مدل‌های SARIMA را به عنوان تعمیمی از مدل‌های ARIMA تعریف می‌کنیم. در بخش (۲.۹) با توابع ACF و PACF سریهای SARMA آشنا می‌شویم. در بخش (۳.۹) چگونگی شناسایی، برازش و ارزیابی این مدلها را به کمک چند مثال خواهیم دید.

۱.۹ سریهای SARMA و SARIMA

با شناختی که از توابع پیش‌بینی غائی سریهای ARMA و ARIMA پیدا کرده‌ایم بدیهی است با اضافه کردن ریشه‌های مختلط مناسب در عبارت اتورگرسیو مدل می‌توان در ضابطه تابع پیش‌بینی غائی توابعی

^۱ Seasonal ARMA

^۲ Seasonal ARIMA

متناوب اضافه کرده و پیش‌بینی‌هایی مثل مشاهدات متناوب بوجود آورد.
مثال (۱.۹): مدل $ARMA(13, q)$,

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})X_t = \theta_q(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

که $|\phi| < 1$ و $|\Phi| < 1$ را در نظر بگیرید. اگر $\Phi > 0$ (برای حالتی که $\Phi < 0$ تمرین ۳.۹ را ببینید.) با توجه به اینکه ریشه‌های $(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12}) = 0$ برابرند با $\Phi^{-1/12} \exp(\frac{2\pi j}{12}i)$, $j = 1, 2, \dots, 11$ ، $\Phi^{-1/12}$ و Φ^{-1} ، تابع پیش‌بینی غائی این مدل عبارت است از

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} \phi^l + C_2^{(n)} \Phi^{l/12} + \sum_{j=1}^6 \Phi^{l/12} [C_{j1}^{(n)} \cos(\frac{2\pi j}{12}l) + C_{j2}^{(n)} \sin(\frac{2\pi j}{12}l)] \quad (۱.۹)$$

که ضرایب آن از حل معادلات $\tilde{P}_n(l) = \tilde{P}_n X_{n+l}$ به ازای $l = q, q-1, \dots, q-12$ به دست می‌آیند. در حالت خاصی که $q = 13$ از جمله وقتی که $\theta_{13}(B) = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^{12})$ پیش‌بینی‌ها از همان ابتدا در (۱.۹) صدق می‌کنند.
این مثال نشان می‌دهد برای مدل،

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})X_t = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^{12})Z_t \quad (۲.۹)$$

که حالت خاصی از مدل‌های SARMA است تابع پیش‌بینی غائی شامل موجی سینوسی با دوره تناوب 12 است که کلیه امواج سینوسی در فرکانس‌های ممکن $j/12$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ را شامل می‌شود. در حالت کلی تابع پیش‌بینی غائی یک مدل SARMA که به صورت زیر تعریف می‌شود شامل چنین امواج سینوسی است.

تعریف (۱.۹): سری ایستای $\{X_t\}$ که در معادله تفاضلی

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t \quad (۳.۹)$$

صدق می‌کند را سری اتورگرسیو- میانگین متحرک فصلی با دوره تناوب s نامیده می‌نویسیم $\{X_t\} \sim SARMA(p, q)(P, Q)_s$. در این معادله $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ ، $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ عملگرهای اتورگرسیو و میانگین متحرک عادی اند و عملگرهای $\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$ و $\Theta_Q(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs}$ نامیده می‌شوند.

مدل (۳.۹) SARMA نامیده می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود این مدل را می‌توان به صورت $\phi_{p+Ps}^*(B)X_t = \theta_{q+Qs}^*(B)Z_t$ که

$$\phi_{p+Ps}^*(B) = \phi_p(B)\Phi_P(B^s), \quad \theta_{q+Qs}^*(B) = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s), \quad (۴.۹)$$

یعنی یک مدل $ARMA(p + Ps, q + Qs)$ نوشت. به همین دلیل مدل‌های SARMA به عنوان حالت خاصی از مدل‌های ARMA فصلی ضربی نیز نامیده می‌شوند. به عنوان حالت خاصی از مدل‌های

ARMA، در صورتی که ریشه‌های معادلات $\phi_p(B) = 0$ و $\Phi_P(B^s) = 0$ خارج دایره واحد باشند $\{X_t\}$ سببی و در صورتی که ریشه‌های $\theta_q(B) = 0$ و $\Theta_Q(B^s) = 0$ خارج دایره واحد باشند $\{X_t\}$ عکس‌پذیر است. ضرایب فرم سببی و معکوس هم مثل قبل از تساوی‌های زیر محاسبه می‌شوند.

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\psi(B) = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s),$$

$$\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\pi(B) = \phi_p(B)\Phi_P(B^s).$$

به عنوان مثال برای مدل (۲.۹)،

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \phi^{j-1}(\theta + \phi) & j = 1, \dots, s-1 \\ (\Theta + \Phi) + \phi^{s-1}(\theta + \phi) & j = s \\ (\theta + \phi)(\Theta + \Phi + \phi^s) & j = s+1 \\ \phi\psi_{j-1} + \Phi\psi_{j-s} - \phi\Phi\psi_{j-s-1} & j \geq s+1 \end{cases}, \quad (5.9)$$

$$\pi_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ -(-\theta)^{j-1}(\theta + \phi) & j = 1, \dots, s-1 \\ -[(\Theta + \Phi) + (-\theta)^{s-1}(\theta + \phi)] & j = s \\ -[(\theta + \phi)(\Theta + \Phi - (-\theta)^s)] & j = s+1 \\ -\theta\pi_{j-1} - \Theta\pi_{j-s} - \theta\Theta\pi_{j-s-1} & j \geq s+1 \end{cases}. \quad (6.9)$$

برای انجام محاسبات نیز از تابع $CAUS.INV(\phi^*, \theta^*, l)$ استفاده می‌کنیم. که در آن ϕ^* و θ^* به ترتیب بردار ضرایب اتورگرسیو و میانگین متحرک در (۴.۹) هستند. برای محاسبه پیش‌بینی‌های حاصل از مدل‌های SARMA ی سببی و عکس‌پذیر نیز هر یک از روشهای بخش (۷.۴) را می‌توان به کار برد.

مثال (۲.۹): مدل (۲.۹) به ازای $\phi = -0.4$, $\theta = 0.3$, $\Phi = 0.3$, $\Theta = 0.1$ و $\sigma^2 = 1$ را در نظر

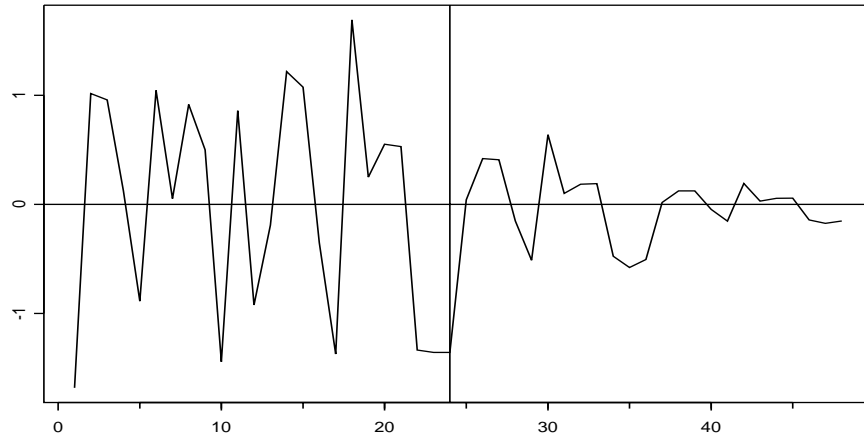
بگیرید در اینحالت

$$\phi_{13}^*(B) = (1 + 0.4B - 0.3B^{12} - 0.12B^{13}), \quad \theta_{13}^*(B) = (1 + 0.3B + 0.1B^{12} + 0.03B^{13})$$

جدول (۱.۹) ضرایب فرم سببی و فرم معکوس این مدل تا تأخیر 24 را نشان می‌دهد. این ضرایب را با اجرای دستور $CAUS.INV(c(-.4, rep(0, 10), .3, .12), c(.3, rep(0, 10), .1, .03), 24)$ محاسبه کرده‌ایم. در این جدول 24 مشاهده آخریک مصداق شبیه‌سازی شده (به طول $n = 120$) از این مدل را نیز آورده‌ایم. برای محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ ها ضرایب $\pi_j^{(l)}$ را مثل قبل از (۳۰.۴) محاسبه می‌کنیم. در اینجا با استفاده از دستور $COEF.FORE(c(-.4, rep(0, 10), .3, .12), c(.3, rep(0, 10), .1, .03), 24, 5)$ ضرایب $\pi_j^{(l)}$ را به ازای $l = 1, 2, 3, 4, 5$ محاسبه و در این جدول آورده‌ایم.

با استفاده از این ضرایب و مشاهدات موجود

$$\tilde{P}_{120} X_{121} \approx \sum_{j=1}^{24} \pi_j^{(1)} X_{120-j} = 0.0462, \quad \tilde{P}_{120} X_{122} \approx \sum_{j=1}^{24} \pi_j^{(2)} X_{120-j} = 0.0424,$$



شکل ۱.۹: نمودار سری مثال (۲.۹) و $\tilde{P}_{120}X_{120+l}$ به ازای $l = 1, 2, \dots, 24$.

$$\tilde{P}_{120}X_{123} \approx \sum_{j=1}^{24} \pi_j^{(3)} X_{120-j} = 0.400, \quad \tilde{P}_{120}X_{124} \approx \sum_{j=1}^{24} \pi_j^{(4)} X_{120-j} = -0.149,$$

$$\tilde{P}_{120}X_{125} \approx \sum_{j=1}^{24} \pi_j^{(5)} X_{120-j} = -0.512.$$

با استفاده از کلیه مشاهدات و دستور

`FORECAST(data, c(-.4, rep(0, 10), .3, .12), c(.3, rep(0, 10), .1, .03), 1, 24)`

نیز $\tilde{P}_{120}X_{120+l}$ و $Var(\tilde{e}_{120})(l)$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 24$ محاسبه و در جدول (۲.۹) آورده‌ایم. نمودار (۱.۹) این پیش‌بینی‌ها را به دنبال ۲۴ مشاهده آخر نشان می‌دهد.

در این مثال همگرایی $\pi_j^{(l)}$ ‌ها به صفر نسبتاً سریع است و سریهای متناهی فوق به خوبی $\tilde{P}_n X_{n+l}$ را تقریب می‌کنند. اما به خصوص وقتی که ریشه‌های $\Theta_Q(B^s) = 0$ نزدیک دایره واحد است این همگرایی بسیار کند است طوری که برای n ‌های کوچک این سریهای متناهی حتی با استفاده از کلیه مشاهدات تقریب خوبی از $\tilde{P}_n X_{n+l}$ فراهم نمی‌کنند. در چنین وضعیتی طبیعی است که از $P_n X_{n+l}$ استفاده می‌کنیم. برای محاسبه $P_n X_{n+l}$ و واریانس خطای آن می‌توان از الگوریتم تحولها و تابع `FORE.INN` استفاده کرد. در اینجا ترجیح می‌دهیم از تابع `arima.forecast(data, model = MODEL, sigma2 = σ^2 , l)` با `MODEL = list(list(ar = ϕ , ma = $-\theta$), list(ar = Φ , ma = $-\Theta$, period = s))` از توابع S-PLUS که سرعت محاسباتی بالاتری دارد استفاده کنیم. نتایج حاصل از این تابع در مثال فوق با آنچه در جدول (۲.۹) آمده یکی است.

j	X_{96+j}	ψ_j	π_j	$\pi_j^{(1)}$	$\pi_j^{(2)}$	$\pi_j^{(3)}$	$\pi_j^{(4)}$	$\pi_j^{(5)}$
1	-1.682	-0.10000	0.10000	-0.10000	0.04000	-0.01600	0.00640	-0.00256
2	1.016	0.04000	-0.03000	0.03000	-0.01200	0.00480	-0.00192	0.00077
3	0.958	-0.01600	0.00900	-0.00900	0.00360	-0.00144	0.00058	-0.00023
4	0.124	0.00640	-0.00270	0.00270	-0.00108	0.00043	-0.00017	0.00007
5	-0.887	-0.00256	0.00081	-0.00081	0.00032	-0.00013	0.00005	-0.00002
6	1.045	0.00102	-0.00024	0.00024	-0.00010	0.00004	-0.00002	0.00001
7	0.053	-0.00041	0.00007	-0.00007	0.00003	-0.00001	0.00000	0.00000
8	0.915	0.00016	-0.00002	0.00002	-0.00001	0.00000	0.00000	0.40000
9	0.500	-0.00007	0.00001	-0.00001	0.00000	0.00000	0.40000	0.00000
10	-1.443	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.40000	0.00000	0.00000
11	0.859	-0.00001	0.00000	0.00000	0.40000	0.00000	0.00000	0.00000
12	-0.922	0.40000	-0.40000	0.40000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
13	-0.191	-0.04000	-0.04000	0.04000	-0.01600	0.00640	-0.00256	0.00102
14	1.217	0.01600	0.01200	-0.01200	0.00480	-0.00192	0.00077	-0.00031
15	1.074	-0.00640	-0.00360	0.00360	-0.00144	0.00058	-0.00023	0.00009
16	-0.351	0.00256	0.00108	-0.00108	0.00043	-0.00017	0.00007	-0.00003
17	-1.372	-0.00102	-0.00032	0.00032	-0.00013	0.00005	-0.00002	0.00001
18	1.691	0.00041	0.00010	-0.00010	0.00004	-0.00002	0.00001	0.00000
19	0.250	-0.00016	-0.00003	0.00003	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
20	0.552	0.00007	0.00001	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	-0.04000
21	0.530	-0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.04000	0.00000
22	-1.336	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	-0.04000	0.00000	0.00000
23	-1.357	0.00000	0.00000	0.00000	-0.04000	0.00000	0.00000	0.00000
24	-1.357	0.12000	0.04000	-0.04000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

جدول ۱.۹: 24 مشاهده آخر مصداقی از سری مثال (۲.۹) به همراه ضرایب فرم سببی، ضرایب فرم معکوس و ضرایب پیش بینی $\pi_j^{(l)}$ به ازای $j = 1, \dots, 24$ و $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

l	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{P}_{120} X_{120+l}$	0.042	0.420	0.409	-0.152	-0.513	0.638	0.101	0.185
$Var(\tilde{e}_{120}(l))$	1.000	1.010	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012
l	9	10	11	12	13	14	15	16
$\tilde{P}_{120} X_{120+l}$	0.190	-0.476	-0.579	-0.506	0.018	0.124	0.123	-0.046
$Var(\tilde{e}_{120}(l))$	1.012	1.012	1.012	1.012	1.172	1.174	1.174	1.174
l	17	18	19	20	21	22	23	24
$\tilde{P}_{120} X_{120+l}$	-0.154	0.191	0.030	0.055	0.057	-0.143	-0.174	-0.152
$Var(\tilde{e}_{120}(l))$	1.174	1.174	1.174	1.174	1.174	1.174	1.174	1.174

جدول ۲.۹: پیش‌بینی‌ها و واریانس خطای آنها برای سری مثال (۲.۹).

دقت در تابع پیش‌بینی غائی (۱.۹) نشان می‌دهد که شرط $|\Phi| < 1$ از شرایط سببیت باعث می‌شود با افزایش l ، دامنه نوسانات فصلی به صفر میل کند (نمودار ۱.۹ را نیز ببینید). این رفتار برای سریهای SARMA ی سببی عمومیت دارد و در واقع برای این سریها $\tilde{P}_n(l)$ با افزایش l به صفر میل کند. در حالی که در غالب کاربردها می‌خواهیم دامنه نوسانات فصلی ثابت بوده یا حتی با افزایش l افزایش یابد. همانطور که در ادامه خواهیم دید با اضافه کردن ریشه‌های s ام واحد به سمت چپ معادله (۳.۹) می‌توان چنین توابع پیش‌بینی غائی به دست آورد. به عنوان مثال در (۱.۹) اگر $\Phi = 1$ ، دامنه نوسانات ثابت خواهد ماند. این مسئله را در مثال زیر بررسی می‌کنیم.

مثال (۳.۹): مدل $(1 + \theta B)(1 + \Theta B^{12})X_t = (1 - \phi B)(1 - B^{12})X_t$ با $|\phi| < 1$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه ریشه‌های $(1 - \phi B)(1 - B^{12}) = 0$ برابرند با $\exp(\frac{2\pi j}{12}i)$ ، $j = 1, 2, \dots, 11$ و 1 و ϕ^{-1} تابع پیش‌بینی غائی این مدل عبارت است از

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} \phi^l + C_2^{(n)} + \sum_{j=1}^6 [C_{j1}^{(n)} \cos(\frac{2\pi j}{12}l) + C_{j2}^{(n)} \sin(\frac{2\pi j}{12}l)]$$

و همانطور که ملاحظه می‌شود موج سینوسی در این تابع دارای دامنه‌ای ثابت است. در صورتی که $\phi = 1$ این مدل به صورت زیر در می‌آید

$$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 + \theta B)(1 + \Theta B^{12}) \quad (۷.۹)$$

در اینحالت ریشه‌های $(1 - B)(1 - B^{12}) = 0$ برابرند با $\exp(\frac{2\pi j}{12}i)$ ، $j = 1, 2, \dots, 11$ و 1 با دو تکرار و در نتیجه تابع پیش‌بینی غائی این مدل عبارت است از

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} + C_2^{(n)}l + \sum_{j=1}^6 [C_{j1}^{(n)} \cos(\frac{2\pi j}{12}l) + C_{j2}^{(n)} \sin(\frac{2\pi j}{12}l)] \quad (۸.۹)$$

که ترکیبی از یک روند خطی و یک موج سینوسی با دوره تناوب ۱۲ و دامنه ثابت است. این همان تابع پیش‌بین (۳.۶) است با این تفاوت که بر خلاف روشهای رگرسیونی یا هموارسازی که ضرایب (۸.۹) را مستقیماً برآورد یا بهنگام می‌کنند در اینجا ابتدا پارامترهای مدل (۷.۹)، (با σ^2 فقط ۳ پارامتر) برآورد شده سپس پیش‌بینی‌ها را از روشهایی که در بخش (۴.۵) یاد گرفتیم محاسبه می‌کنیم.

مدل (۷.۹) که برای اولین بار توسط باکس و جنکینز معرفی شده و برای مدل کردن سری لگاریتم تعداد مسافران خطوط هوایی به کار رفته است به مدل خطوط هوایی معروف است. این مدل حالت خاصی از مدل‌های SARIMA است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف (۲.۹): سری نایستای $\{X_t\}$ که در معادله تفاضلی

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t \quad (۹.۹)$$

صدق می‌کند را سری اتورگرسیو- میانگین متحرک جمع بسته فصلی با دوره تناوب s نامیده می‌نویسیم $\{X_t\} \sim SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$. در این معادله $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ ، $\phi_p(B)$ ،

l	$P_{120}W_{120+l}$	$P_{120}X_{120+l}$	ψ_{l-1}	$Var(e_{120}(l))$	$P_{120}X_{120+l} \pm 1.96\sqrt{Var(e_{120}(l))}$
1	-4.45	94.42	1.00	18.10	(86.08, 102.76)
2	-6.95	99.27	0.16	18.57	(90.82, 107.72)
3	5.22	102.86	0.16	19.03	(94.31, 111.41)
4	-4.26	97.79	0.16	19.49	(89.14, 106.44)
5	4.73	92.82	0.16	19.96	(84.06, 101.58)
6	-4.53	101.81	0.16	20.42	(92.95, 110.67)
7	2.18	86.50	0.16	20.88	(77.54, 95.46)
8	4.56	42.41	0.16	21.35	(33.35, 51.47)
9	-3.62	89.18	0.16	21.81	(80.03, 98.33)
10	2.01	97.64	0.16	22.27	(88.39, 106.89)
11	-2.49	90.63	0.16	22.74	(81.28, 99.98)
12	-3.64	99.49	0.16	23.20	(90.05, 108.93)

جدول ۳.۹: محاسبه پیش‌بینی‌های نقطه‌ای، واریانس خطای آنها و پیش‌بینی‌های فاصله‌ای برای سری مثال (۴.۹).

$\theta_q(B)$ ، $\Phi_P(B^s)$ و $\Theta_Q(B^s)$ عملگرهای اتورگرسیو و میانگین متحرک سببی و عکس پذیر عادی و فصلی‌اند و $\nabla_s = 1 - B^s$ ، عملگر تفاضل‌گیری فصلی نامیده می‌شود. در حالت کلی‌تر اگر $\theta_0 \neq 0$ مدل SARIMA با رانش θ_0 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D X_t = \theta_0 + \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t$$

در صورتی که $D = d = 0$ اضافه کردن θ_0 معادل اضافه کردن میانگین به سری است. در صورتی که $d \neq 0$ یا $D \neq 0$ اینکار معادل اضافه کردن روندی چند جمله‌ای از درجه $d + D - 1$ به سری است که در آن عبارت درجه $d + D - 1$ ام غیر تصادفی است.

در پیش‌بینی‌های حاصل از یک مدل SARIMA، D دامنه موج سینوسی را کنترل می‌کند. در صورتی که $P = 0$ باشد، برای $D = 1$ این دامنه ثابت (مثال ۳.۹) و برای $D = 2$ به طور خطی افزایش می‌یابد (تمرین ۴.۹). در صورتی که $P \neq 0$ این رفتارها به طور مجانبی دیده می‌شوند. برای محاسبه $\tilde{P}_n X_{n+l}$ و واریانس خطای آن می‌توان مشابه آنچه در بخش (۴.۵) برای سریهای ARIMA دیدیم عمل کرد. اما به دلیلی که در بالا به آن اشاره شد ترجیح می‌دهیم از $P_n X_{n+l}$ استفاده کنیم. همانطور که در مثال زیر خواهیم دید مراحل کار مشابه آنچه است که در بخش (۴.۵) برای سریهای ARIMA انجام دادیم.

مثال (۴.۹): سری Sel2 در پیوست ۲، فروش ماهیانه کاغذ چاپ در فرانسه را برای سالهای 1963 تا 1972 نشان می‌دهد. همانطور که در بخش (۳.۹) خواهیم دید مدلی مناسب برای این سری مدل زیر است.

$$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 - 0.84B)(1 - 0.64B^{12})Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 18.1)$$

اگر تعریف کنیم $W_t = (1 - B)(1 - B^{12})X_t = X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13}$ و قرار دهیم $t = n + l$

آنگاه با اعمال P_n ،

$$P_n X_{n+l} = P_n W_{n+l} + P_n X_{n+l-1} + P_n X_{n+l-12} - P_n X_{n+l-13}$$

در اینجا $n = 120$ برای $l = 1$

$$P_{120} X_{121} = P_{120} W_{121} + X_{120} + X_{109} - X_{108}$$

برای $l = 2$

$$P_{120} X_{122} = P_{120} W_{122} + P_{120} X_{121} + X_{110} - X_{109}$$

والی آخر. کافی است $P_{120} W_{120+l}$ ها را حساب کرده در روابط فوق قرار دهیم. برای این منظور از تابع $arima.forecast$ استفاده می‌کنیم. اما ابتدا باید W_t ها را حساب کرد، در S-PLUS های فصلی را با استفاده از تابع $diff(data, lag = s)$ حساب می‌کنیم. با استفاده از دستور

$$arima.forecast(diff(diff(data, lag = 12)), model = MODEL, sigma2 = 18.1, 12)$$

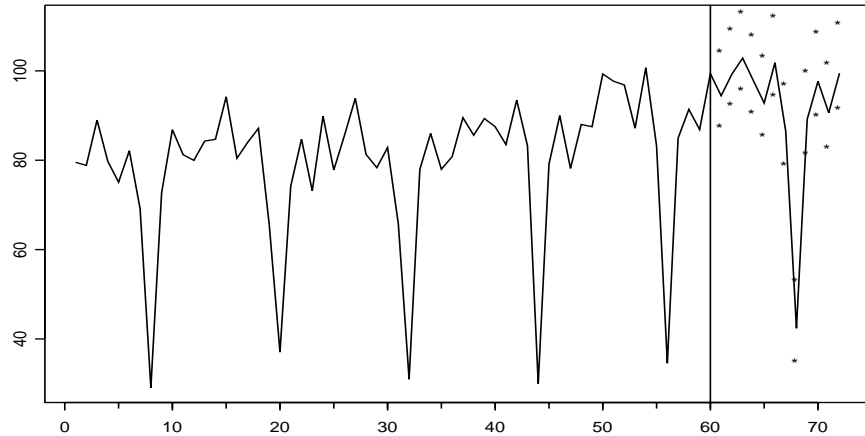
که $(MODEL = list(list(ma = .84), list(ma = .64, period = 12)))$ ، $P_{120} W_{120+l}$ را به ازای $l = 1, 2, \dots, 12$ حساب کرده سپس به کمک روابط بازگشتی فوق $P_{120} X_{120+l}$ ها را محاسبه کرده‌ایم. این پیش‌بینی‌ها را در جدول (۳.۹) می‌توان دید. $Var(e_n(l))$ ها را توسط $Var(\bar{e}_n(l)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$ تقریب می‌کنیم برای این منظور با قرار دادن $\phi = \Phi = 1$ ، $\theta = -0.84$ و $\Theta = -0.64$ در معادلات (۵.۹)، ψ_j ها را حساب کرده به همراه این واریانس‌ها در جدول (۳.۹) آورده‌ایم. همچنین با استفاده از (۱۹.۳) پیش‌بینی‌های فاصله‌ای ۹۵ درصدی را به دست آورده در این جدول آورده‌ایم. نمودار (۲.۹) این پیش‌بینی‌ها را در ادامه مشاهدات نشان می‌دهد.

خوشبختانه، تابع $arima.forecast$ مستقیماً پیش‌بینی‌های یک سری SARIMA و انحراف معیار خطای آنها را حساب می‌کند. برای این منظور کافی است در این تابع $MODEL$ را به صورت زیر معرفی کنیم.

$$list(list(ndiff = d, ar = \phi, ma = -\theta), list(ndiff = D, ar = \Phi, ma = -\Theta, period = s))$$

۲.۹ ACF و PACF سریهای SARMA

در بخش قبل با مدل‌های SARMA و SARIMA از طریق تابع پیش‌بینی غائی آنها آشنا شدیم. آنها را مدلهایی دیدیم که توابع پیش‌بینی متنوعی برای سریهای فصلی ایستا و نایستا به همراه دارند. از طرف دیگر آنچه باعث می‌شود مصادیق سریهای SARMA یا سریهای SARIMA بعد از تفاضل‌گیری رفتار



شکل ۲.۹: سری مثال (۴.۹) به همراه پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای آن.

متناوبی با دوره تناوب s از خود نشان دهند وابستگی‌های زیاد بین عناصر سری در تأخیر s یا مضارب s ، علاوه بر وابستگی‌های معمول است. ساختار این وابستگی‌ها برای سریهای SARMA بسیار متنوع است و مثل قبل به کمک توابع ACF و PACF می‌توان آنها را بررسی کرد. در این بخش با چگونگی محاسبه مقادیر این توابع و رفتار آنها در چند حالت خاص آشنا می‌شویم. در حالت کلی برای محاسبه مقادیر ACF، وقتی $\{X_t\}$ یک سری SARMA سببی و عکس‌پذیر است از معادلات (۲۱.۴) و (۲۲.۴) استفاده می‌کنیم. در موارد خاص هم از هر یک از روشهایی که برای سریهای ARMA ی خاص به کار بردیم می‌توان استفاده کرد.

مثال (۵.۹): فرض کنید $\{X_t\} \sim SARMA(0, 1)(0, 1)_s$ ، $(s \geq 3)$ سببی و عکس‌پذیر باشد. تابع مولد اتوکواریانس‌های این سری عبارت است از

$$\gamma_X(B) = \sigma^2(1 + \theta B)(1 + \Theta B^s)(1 + \theta B^{-1})(1 + \Theta B^{-s})$$

یا

$$\begin{aligned} \gamma_X(B) = & \sigma^2(\theta\Theta B^{-(s+1)} + \Theta(1 + \theta^2)B^{-s} + \theta\Theta B^{-(s-1)} + \theta(1 + \Theta^2)B^{-1} \\ & + (1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)B^0 + \theta(1 + \Theta^2)B^1 + \theta\Theta B^{(s-1)} + \Theta(1 + \theta^2)B^s + \theta\Theta B^{(s+1)}) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2) & h = 0 \\ \sigma^2\theta(1 + \Theta^2) & h = 1 \\ \sigma^2\theta\Theta & h = s - 1 \\ \sigma^2\Theta(1 + \theta^2) & h = s \\ \sigma^2\theta\Theta & h = s + 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

و

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \theta(1 + \theta^2)^{-1} & h = 1 \\ \theta\Theta[(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)]^{-1} & h = s - 1 \\ \Theta(1 + \Theta^2)^{-1} & h = s \\ \theta\Theta[(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)]^{-1} & h = s + 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (10.9)$$

خودهمبستگی‌های جزئی این سری هم که به روشهای معمول محاسبه می‌شوند به طور دنباله‌دار و متناوبی به صفر همگرا می‌شوند. شکل (۳.۹) نمودار این توابع را به ازای $\Theta = 0.6$ و $\theta = -0.5$ ، $s = 12$ نشان می‌دهد.

مثال (۶.۹): فرض کنید $\{X_t\} \sim SARMA(0,1)(1,0)_s$ سببی و عکس‌پذیر باشد. پس

$$X_t = \Phi X_{t-s} + Z_t + \theta Z_{t-1}$$

$$\gamma(0) = \Phi^2 \gamma(0) + \sigma^2(1 + \theta^2) \Rightarrow \gamma(0) = \frac{1 + \theta^2}{1 - \Phi^2} \sigma^2,$$

و

$$\gamma(1) = \Phi \gamma(s-1) + \theta \sigma^2, \quad (11.9)$$

و برای $h \geq 2$

$$\gamma(h) = \Phi \gamma(h-s) \quad (12.9)$$

از این معادله به ازای $h = s-1$ و معادله (۱۱.۹)،

$$\gamma(1) = \frac{\theta \sigma^2}{1 - \Phi^2}, \quad \gamma(s-1) = \frac{\theta \sigma^2}{1 - \Phi^2} \Phi$$

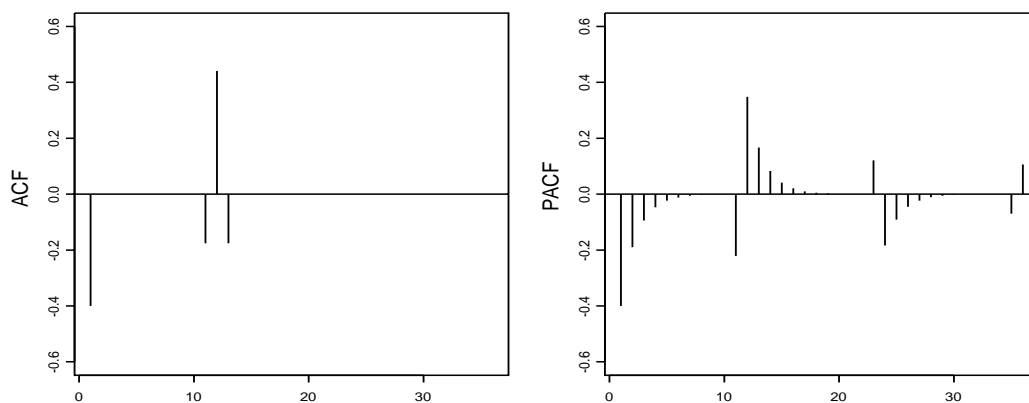
از معادلات (۱۲.۹) به ازای $h = 2, 3, \dots, s-2$ نتیجه می‌شود $\gamma(2) = \gamma(3) = \dots = \gamma(s-2) = 0$

سایر $\gamma(h)$ نیز از رابطه بازگشتی (۱۲.۹) به دست می‌آیند. نهایتاً داریم

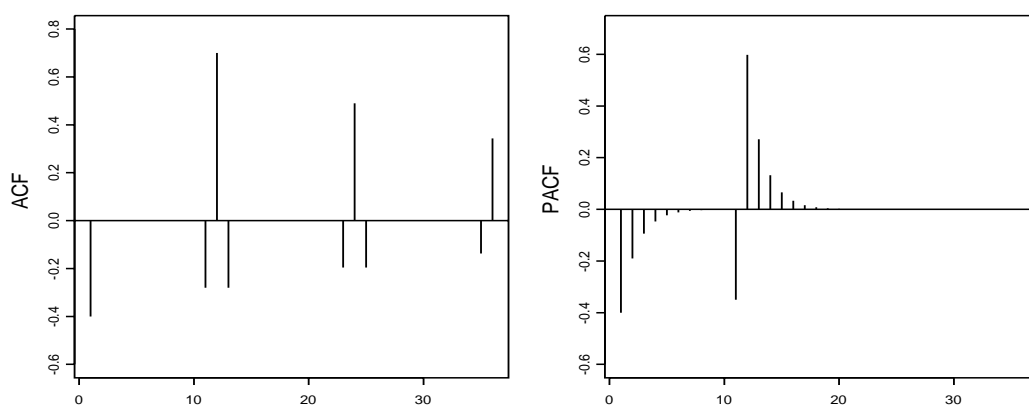
$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2)(1 - \Phi^2)^{-1} & h = 0 \\ \sigma^2\theta(1 - \Phi^2)^{-1} & h = 1 \\ \sigma^2\theta(1 - \Phi^2)^{-1}\Phi^k & h = ks - 1 \\ \gamma(0)\Phi^k & h = ks \\ \sigma^2\theta(1 - \Phi^2)^{-1}\Phi^k & h = ks + 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

و

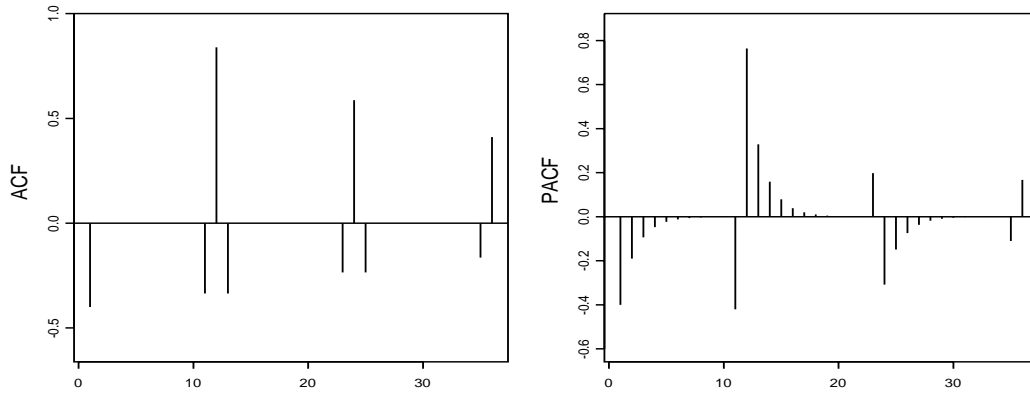
$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \theta(1 + \theta^2)^{-1} & h = 1 \\ \theta(1 + \theta^2)^{-1}\Phi^k & h = ks - 1 \\ \Phi^k & h = ks \\ \theta(1 + \theta^2)^{-1}\Phi^k & h = ks + 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (13.9)$$



شکل ۳.۹: نمودار توابع ACF و PACF سری $SARMA(0,1)(0,1)_{12}$ ، به ازای $\theta = -0.5$ و $\Phi = 0.6$.



شکل ۴.۹: نمودار توابع ACF و PACF سری $SARMA(0,1)(1,0)_{12}$ ، به ازای $\theta = -0.5$ و $\Phi = 0.7$.



شکل ۵.۹: نمودار توابع ACF و PACF سری $SARMA(0,1)(1,1)_{12}$ ، به ازای $\theta = -0.5$ ، $\Theta = 0.6$ و $\Phi = 0.7$.

که $k = 1, 2, \dots$ نمودار این تابع به همراه تابع خودهمبستگی‌های جزئی این سری به ازای $s = 12$ ، $\theta = -0.5$ و $\Phi = 0.7$ در شکل (۴.۹) رسم شده‌اند.

مثال (۷.۹): فرض کنید $\{X_t\} \sim SARMA(0,1)(1,1)_s$ سببی و عکس‌پذیر باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که (تمرین ۷.۹)،

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \theta, \quad \psi_2 = \dots = \psi_{s-1} = 0, \quad \psi_s = \Theta + \Phi, \quad \psi_{s+1} = \theta(\Theta + \Phi),$$

و برای $h = 0, 1, \dots, s+1$ به ازای (۲۱.۴) بنابراین از $\psi_j = \phi\psi_{j-s}$ ، $j \geq s+2$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \Phi\gamma(s) + \sigma^2(1 + \theta^2)(1 + \Theta\Phi + \Theta^2) \\ \gamma(1) &= \Phi\gamma(s-1) + \sigma^2\theta(1 + \Theta\Phi + \Theta^2) \\ \gamma(j) &= \Phi\gamma(s-j), \quad j = 2, \dots, s-2 \\ \gamma(s-1) &= \Phi\gamma(1) + \sigma^2\theta\Theta \\ \gamma(s) &= \Phi\gamma(0) + \sigma^2\Theta(1 + \theta^2) \\ \gamma(s+1) &= \Phi\gamma(1) + \sigma^2\theta\Theta \end{aligned}$$

و برای $h \geq s+2$ ، $\gamma(h) = \Phi\gamma(h-s)$ از حل این معادلات

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2)\left[1 + \frac{(\Theta+\Phi)^2}{1-\Phi^2}\right] & h=0 \\ \sigma^2\theta\left[1 + \frac{(\Theta+\Phi)^2}{1-\Phi^2}\right] & h=1 \\ \sigma^2\theta\left[\frac{(\Theta+\Phi)(1+\Theta\Phi)}{1-\Phi^2}\right]\Phi^{k-1} & h=ks-1 \\ \sigma^2(1+\theta^2)\left[\frac{(\Theta+\Phi)(1+\Theta\Phi)}{1-\Phi^2}\right]\Phi^{k-1} & h=ks \\ \sigma^2\theta\left[\frac{(\Theta+\Phi)(1+\Theta\Phi)}{1-\Phi^2}\right]\Phi^{k-1} & h=ks+1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

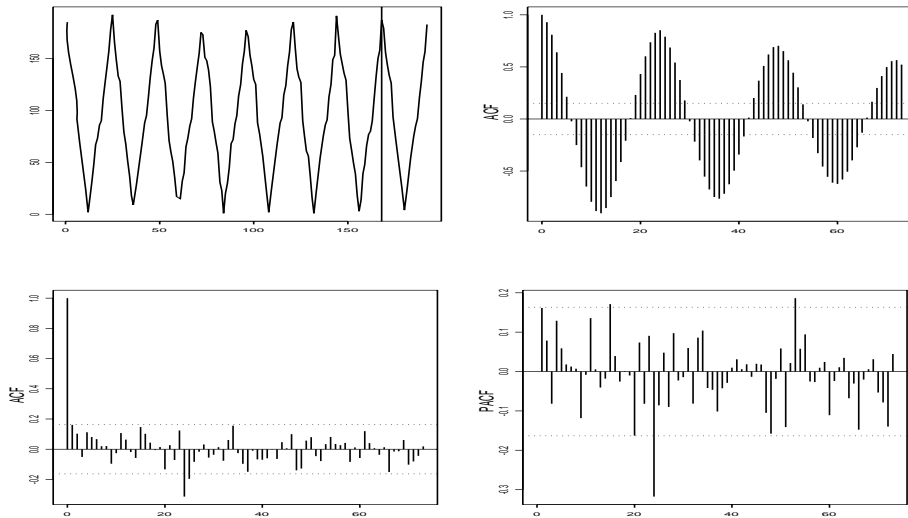
که $k=1, 2, \dots$ با تقسیم اینها بر $\gamma(0)$ ، $\rho(h)$ ها و با روشهای معمول ϕ_{hh} محاسبه می‌شوند. شکل (۵.۹) نمودار توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی این سری را به ازای $\theta = -0.5$ ، $s = 12$ و $\Theta = 0.6$ و $\Phi = 0.7$ نشان می‌دهد.

در این مثالها تا حدودی با رفتار تابع خودهمبستگی سریهای SARMA آشنا شده و تأثیر مرتبه‌های p ، q و P ، Q را بر رفتار این تابع دیدیم (تمرین ۵.۹ را نیز ببینید). برای محاسبه مقادیر و بخصوص مشاهده رفتار توابع ACF و PACF این سریها تابع $ACF.PACF(\phi^*, \theta^*, \sigma^2, l)$ بسیار مفید است.

۳.۹ مدلسازی سریهای فصلی

روشهای شناسایی، برازش و ارزیابی مدل‌های SARIMA شبیه اینکار برای مدل‌های ARIMA است. به طور خلاصه، در ابتدا برای تعیین مرتبه‌های d و D رفتار تابع SACF را ارزیابی می‌کنیم. نزولی کند و متوالی نیاز به تفاضل‌گیری عادی و نزولی کند و متناوب نیاز به تفاضل‌گیری فصلی را نشان می‌دهند. البته در سریهای فصلی رفتار مشاهدات از لحاظ وجود روند و دامنه نوسانات فصلی غالباً شکل خاصی از تابع پیش‌بینی غائی را پیشنهاد می‌کند که خود در تعیین مرتبه‌های d و D بسیار مفید است. برای تعیین p ، q و P ، Q رفتار توابع SACF و SPACF بعد از تفاضل‌گیری را مد نظر قرار می‌دهیم. در این مرحله شناختی که از توابع ACF و PACF این مدلها داریم کمک بسیاری به ما می‌کند. با دقت در مثال‌های بخش قبل و حل تمرین‌های (۵.۹ و ۶.۹) همچنین استفاده از تابع $ACF.PACF$ می‌توان بر قدرت تشخیص خود افزود. در صورتی که این تشخیص امکان پذیر نبود یا بیش از یک مدل شناسایی شد از ملاکهای اطلاعاتی می‌توان در تشخیص مدل نهایی استفاده کرد. البته همانطور که در مدلسازی سریهای غیر فصلی دیدیم بعد از برازش مدل با آزمون فرض‌هایی که انجام می‌دهیم یا در مرحله بازرسی تشخیصی نیز می‌توان اصلاحات لازم را روی مدل‌های شناسایی شده انجام داد. در ادامه به کمک سه مثال با مدلسازی سریهای فصلی بیشتر آشنا می‌شویم.

مثال (۸.۹): سری Sel3 در پیوست ۲، تعداد سیکلوپها در نیم لیتر آب از سطح یک استخر آزمایشی را که به طور ساعتی در طول شبانه روز به مدت یک هفته شمرده شده‌اند نشان می‌دهد. سیکلوپ نوعی پلانکتون است که مهاجرت آنها از سطح آب به اعماق مورد توجه زیست‌شناسان است. شکل (۶.۹) این سری را که یک سری فصلی با دوره تناوب $s = 24$ است نشان می‌دهد. نمودار SACF این سری در این



شکل ۶.۹: تعداد سیکل‌ها و پیش‌بینی آنها به کمک مدل برازش شده در مثال (۸.۹)، به همراه نمودار SACS این سری و SPACF و SACS این سری بعد از یکبار تفاضل‌گیری فصلی.

شکل، نزولی کند و متناوب با دوره تناوب $s = 24$ را نشان می‌دهد بنابراین یک بار تفاضل‌گیری فصلی لازم است. دو نمودار دیگر در این شکل توابع SACS و SPACF سری تفاضلی شده را نشان می‌دهند. دقت در مقادیر این توابع در مضارب 24، یعنی $\hat{\rho}(24) = -0.31$ ، $\hat{\rho}(48) = -0.14$ ، $\hat{\rho}(72) = -0.04$ و $\hat{\rho}(24) = -0.31$ ، $\hat{\rho}(48) = -0.14$ ، $\hat{\rho}(72) = -0.04$ را نشان می‌دهد و با توجه به معنی دار بودن مقادیر خودهمبستگی‌های جزئی را چند بعضی از خودهمبستگی‌ها و خودهمبستگی‌های جزئی سری تفاضلی شده اختلاف معنی داری با صفر دارند اما الگوی خاصی را پیشنهاد نمی‌کنند. بنابراین مدل میانگین متحرک جمع بسته فصلی زیر برای برازش به سری Se13 پیشنهاد می‌شود.

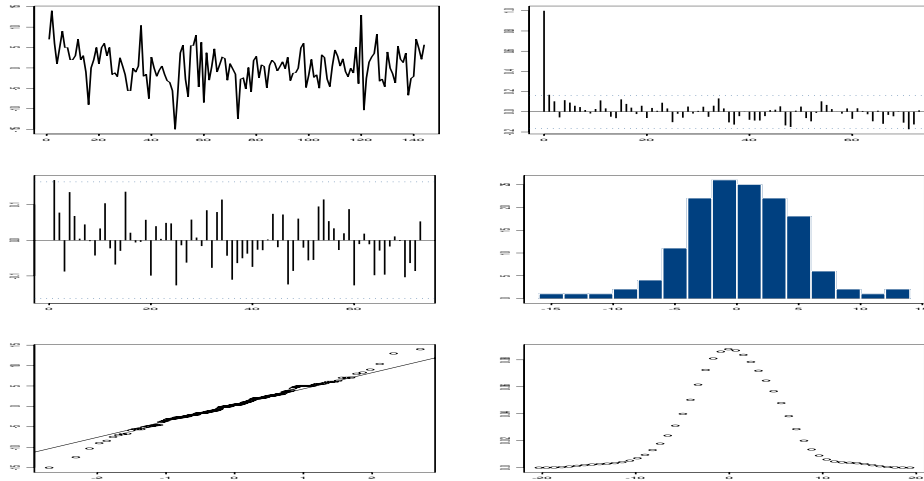
$$\nabla_{24}X_t = (1 + \Theta B^{24})Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

برآوردهای بیشترین درست‌نمایی پارامترهای یک سری SARIMA را با استفاده از تابع `arma.mle(data, model = MODEL)` حساب می‌کنیم. که در ساده‌ترین حالت

$$MODEL = list(list(order = c(p, d, q)), list(order = c(P, D, Q), period = s))$$

است. در این مثال

$$out <- arma.mle(model = list(order = c(0, 1, 1), period = 24))$$



شکل ۷.۹: نمودار مانده‌ها، SACF، SPACF مانده‌ها، نمودار ستونی، نمودار چندک‌های مانده‌ها در مقابل چندک‌های توزیع نرمال و نمودار برآورد تابع چگالی مانده‌ها برای سری Se13 در مثال (۸.۹).

و از $out\$model$ و $out\$sigma2$ به ترتیب $\hat{\Theta} = -0.77$ و $\hat{\sigma}^2 = 17.43$ به دست می‌آیند. در نتیجه مدل برازش شده به این سری عبارت است از

$$\nabla_{24} X_t = (1 - 0.77B^{24})Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 17.43).$$

به منظور ارزیابی این مدل به کمک $out2 <- arima.diag(out, resid = T, gof.lag = 40)$ مانده‌ها را حساب کرده و با اجرای دستورات زیر نمودارهای شکل (۷.۹) را رسم کرده‌ایم.

```
par(mfrow = c(3, 2)), tsplot(out2$resid[25 : 168], acf(out2$resid[25 : 168])
```

```
acf(out2$resid[25 : 168], type = "p"), hist(out2$resid[25 : 168]), box(1)
```

```
qqnorm(out2$resid[25 : 168]), qqline(out2$resid[25 : 168]), plot(density(out2$resid[25 : 168]))
```

نمودار مانده‌ها و SACF و SPACF آنها همچنین جدول آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته آنها (جدول ۴.۹) انحراف قابل توجهی از نوبه سفید بودن خطا را نشان نمی‌دهند. البته مقدار $\hat{\rho}(0, 1) = \hat{\rho}(1) = \hat{\phi}_{11} = 0.17$ اختلاف معنی داری با صفر را نشان می‌دهد. اما با توجه به اینکه مقدار آماره آزمون برای آزمون فرض $H_0 : \rho(1) = 0$ ، $Z = 2.04$ ، بسیار نزدیک نقطه بحرانی 1.96 است، این همبستگی کوچک و کوتاه مدت را نادیده گرفته اعلام می‌کنیم که مانده‌ها انحرافی از

		MA							
AR	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	×	0	0	0	0	0	0	0	0
1	×	0	0	0	0	0	0	0	0
2	×	0	0	0	0	0	0	0	0
3	×	0	×	0	0	0	0	0	0
4	×	0	×	×	0	0	0	0	0
5	0	×	×	×	0	0	0	0	0

جدول ۴.۹: جدول نتایج آزمون خودهمبستگی‌های گسترش یافته مانده‌ها در مثال (۸.۹).

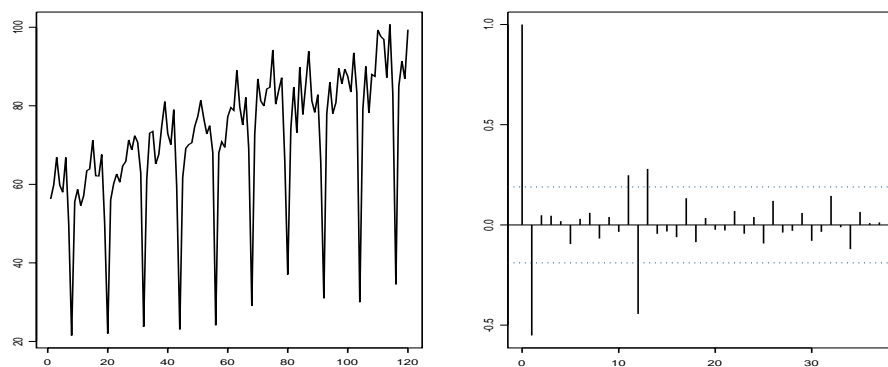
نوفه سفید بودن $\{Z_t\}$ را نشان نمی‌دهند. برای اطمینان بیشتر آزمون‌های نیکویی برازش بخش (۵.۷) را نیز به ازای $K = 12, 24, 36$ انجام داده‌ایم. مقادیر آماره‌ها و نقاط بحرانی نظیرشان در جدول (۵.۹) نیز بر مناسب بودن مدل برازش شده تأکید دارند. علاوه بر این سایر نمودارها در شکل (۷.۹) و آزمون کولموگروف - اسمیرنوف با مقدار آماره 0.0542 و $-p$ مقدار 0.345 نرمال بودن توزیع Z_t ها را تأیید می‌کنند. در انتها پیش‌بینی‌های حاصل از این مدل برازش شده را با اجرای دستور `arima.forecast(data, model = list(ndiff = 1, ma = .77, period = 24), sigma2 = 17.43, 24)` برای دوره تناوب بعدی حساب کرده در ادامه سری در شکل (۶.۹) رسم کرده‌ایم.

مثال (۹.۹): در این مثال برای سری Se12، فروش کاغذ چاپ در فرانسه از سال 1963 تا 1972 مدلی مناسب شناسایی می‌کنیم. نمودار این سری در شکل (۸.۹) روندی خطی و دامنه نوسانات فصلی ثابت با دوره $s = 12$ را نشان می‌دهد. برای رسیدن به یک تابع پیش‌بینی غائی با این مؤلفه‌ها یکبار تفاضل‌گیری عادی و یکبار تفاضل‌گیری فصلی لازم است. نمودار SACF این سری بعد از این تفاضل‌گیری‌ها در شکل (۸.۹) شبیه نمودار ACF در شکل (۳.۹) است به همین دلیل مدل مثال (۵.۹) برای سری تفاضلی شده پیشنهاد می‌شود. به این ترتیب مدل پیشنهادی برای این سری همان مدل خطوط هوایی است. با برازش این مدل به روش بیشترین درست‌نمایی داریم

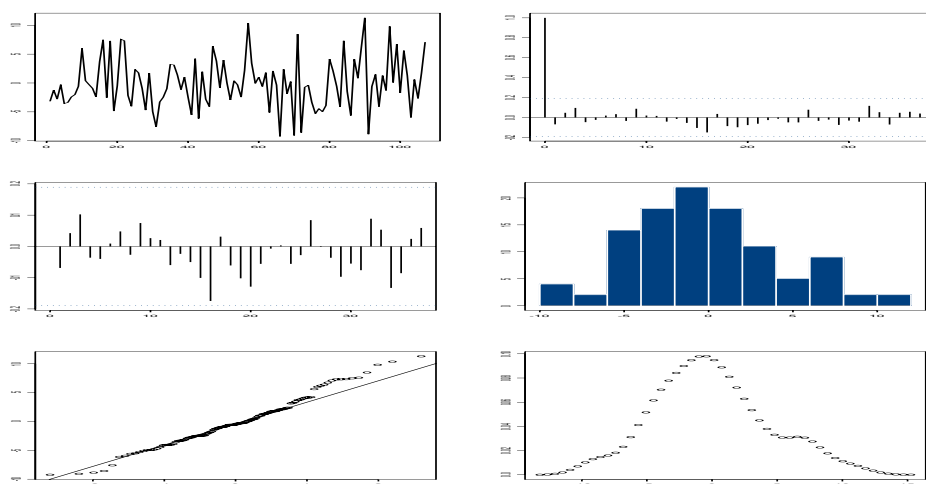
$$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 - 0.84B)(1 - 0.64B^{12})Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 18.1).$$

از بررسی سه نمودار اول در شکل (۹.۹) ایستایی سری مانده‌ها و عدم وابستگی بین آنها نتیجه می‌شود. سایر نمودارها انحراف از توزیع نرمال برای Z_t ها و توزیعی با دنباله بالایی چاقتر برای Z_t را پیشنهاد می‌کنند. اما آماره آزمون کولموگروف - اسمیرنوف با مقدار آماره 0.0696 و $-p$ مقدار 0.211 انحراف معنی داری از نرمال بودن توزیع مانده‌ها را نشان نمی‌دهد. بررسی‌های بیشتر در این مورد و مناسب بودن مدل را به عهده خواننده گرامی می‌گذاریم.

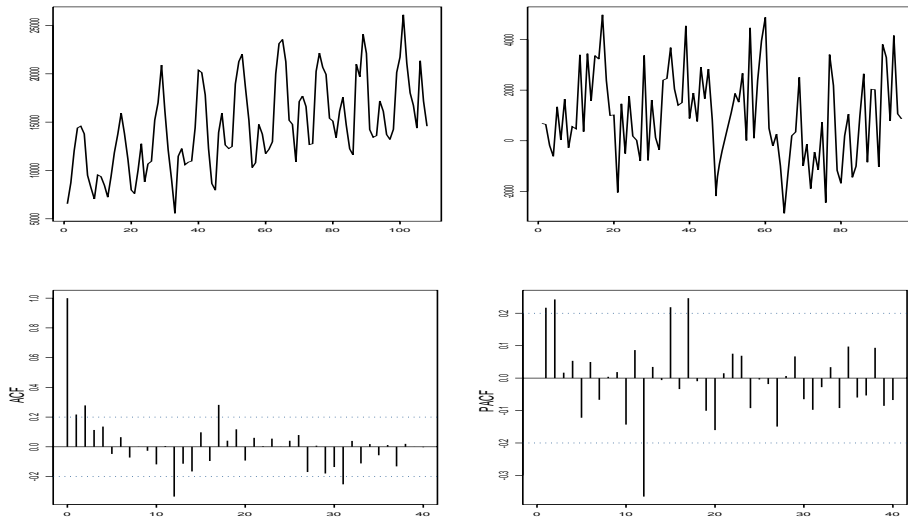
مثال (۱۰.۹): سری Se14 در پیوست ۲ فروش ماهانه اتومبیل در کبک کانادا را نشان می‌دهد. این سری در شکل (۱۰.۹) رسم شده است. نمودار این سری بعد از یک بار تفاضل‌گیری فصلی و



شکل ۸.۹: نمودار سری Se12 و خودهمبستگی‌های نمونه‌ای آن بعد از تفاضل‌گیری.



شکل ۹.۹: نمودار مانده‌ها، SACF، SPACF مانده‌ها، نمودار ستونی، نمودار چندک‌های مانده‌ها در مقابل چندک‌های توزیع نرمال و نمودار برآورد تابع چگالی مانده‌ها برای سری Se12 در مثال (۹.۹).



شکل ۹.۱۰: نمودار سری Se14 قبل و بعد از یکبار تفاضل‌گیری فصلی به همراه نمودار SACF و SPACF این سری بعد از تفاضل‌گیری.

نمودارهای SACF و SPACF سری تفاضلی شده در (۹.۱۰) بیانگر مصداقی از یک سری فصلی ایستا است. نمودارهای SACF و SPACF مدل SARMA ی خاصی را پیشنهاد نمی‌کنند اما به نظر می‌رسد یک مدل از مرتبه پایین مناسب باشد. برای تعیین این مرتبه از ملاک اطلاعاتی AIC کمک می‌گیریم. اما قبل از آن به این نکته توجه می‌کنیم که مدل بایستی دارای رانش باشد زیرا اگر قرار دهیم $W_t = \nabla_{12} X_t$ ، با استفاده از تابع $VAR.MEAN$ ،

$$\bar{W} = 1005.2, \quad \hat{Var}(W) = 67230.27$$

که منجر به مقدار $Z = 3.88$ و رد فرض صفر بودن μ_w می‌شود. جدول (۵.۹) مقادیر AIC را برای مدل‌هایی با مرتبه پایین نشان می‌دهد. مدلی با کمترین AIC مدل 25 است اما مدل‌های دیگری هستند که مقادیر AIC آنها اختلاف اساسی با 1452.2 ندارد و در بین آنها مدل 16 کمترین تعداد پارامتر را دارد به همین دلیل مدل $SARIMA(2, 0, 0)(1, 1, 0)_{12}$ با رانش را برای برازش به سری Se14 پیشنهاد می‌کنیم. مدل برازش شده عبارت است از

$$(1 - 0.227B - .162B^2)(\nabla_{12} X_t - 975.26) = Z_t, \quad Z_t \sim WN(0, 2629641).$$

از خواننده محترم می‌خواهیم مناسب بودن این مدل را بررسی کند. توجه داشته باشید که مدل خطوط هوایی نیز مدل پیشنهادی خوبی برای این سری است. اما با توجه به اینکه برای این مدل $AIC = 1675.6$ ، تا وقتی که از ملاک AIC برای انتخاب مدل استفاده می‌کنیم در بین مدل‌های مطرح جایی ندارد.

	P	Q	p	q	AIC
1	0	1	0	0	1695.7
2	0	1	0	1	1692.2
3	0	1	0	2	1690.7
4	0	1	1	0	1673.2
5	0	1	1	1	1672.1
6	0	1	1	2	1673.8
7	0	1	2	0	1655.3
8	0	1	2	1	1657.0
9	0	1	2	2	1658.8
10	1	0	0	0	1492.7
11	1	0	0	1	1489.9
12	1	0	0	2	1489.9
13	1	0	1	0	1469.7
14	1	0	1	1	1468.3
15	1	0	1	2	1468.3
16	1	0	2	0	1452.9
17	1	0	2	1	1453.7
18	1	0	2	2	1454.9
19	1	1	0	0	1493.2
20	1	1	0	1	1490.0
21	1	1	0	2	1489.2
22	1	1	1	0	1469.6
23	1	1	1	1	1467.3
24	1	1	1	2	1469.2
25	1	1	2	0	1452.2
26	1	1	2	1	1452.7
27	1	1	2	2	1454.2

جدول ۵.۹: مقادیر AIC برای مدل‌های مختلف در مثال (۱۰.۹).

۴.۹ تمرینات

۱.۹ - روابط (۵.۹) و (۶.۹) را ثابت کنید.

۲.۹ - ضرایب نمایش سببی و نمایش معکوس سری سببی و عکس پذیر $SARMA(0,1)(1,1)_{12}$ را به دست آورید.

۳.۹ - در مثال (۱.۹) وقتی $\phi < 0$ است نشان دهید

$$\tilde{P}_n(l) = C_1^{(n)} \phi^l + C_2^{(n)} (-\Phi)^{l/12} + \sum_{j=1}^6 (-\Phi)^{l/12} [C_{j1}^{(n)} \cos(\frac{\pi(2j+1)}{12}l) + C_{j2}^{(n)} \sin(\frac{\pi(2j+1)}{12}l)].$$

دقت کنید که دوره تناوب موج سینوسی در رابطه فوق ۲۴ است.

۴.۹ - ضابطه عمومی تابع پیش‌بینی غائی سریهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } SARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 0)_{12}$$

$$\text{ب) } SARIMA(0, 1, 0)(1, 1, 0)_{12}$$

$$\text{ج) } SARIMA(0, 0, 0)(0, 2, 2)_{12}$$

ضابطه‌های فوق را در حالتی که این سریها دارای رانش θ_0 هستند نیز به دست آورید. (راهنمایی: در حالت کلی یک جواب خصوصی خصوصاً عبارت است از $\tilde{P}_n^{(0)}(l) = \frac{\mu_W}{(d+D)!s^D} l^{d+D}$ که $(\mu_W = \theta_0(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i)^{-1}(1 - \sum_{i=1}^p \Phi_i)^{-1})$

۵.۹ - تابع خودهمبستگی سریهای زیر را بیابید.

$$\text{الف) } SARMA(0, 0)(1, 0)_{12} \quad \text{ب) } SARMA(0, 0)(0, 1)_{12}$$

$$\text{ج) } SARMA(0, 2)(0, 1)_{12} \quad \text{د) } SARMA(0, 1)(0, 2)_{12}$$

$$\text{ه) } SARMA(0, 2)(1, 0)_{12} \quad \text{و) } SARMA(1, 0)(0, 1)_{12}$$

۶.۹ - با استفاده از تابع $ACF.PACF$ ، نمودار توابع ACF و $PACF$ سریهای تمرین قبل را به ازای مقادیر مختلف و دلخواه پارامترها رسم کنید.

۷.۹ - اگر در تابع پیش‌بینی غائی (۸.۹) قرار دهیم $S^{(n)}(l) = \sum_{j=1}^6 [C_{j1}^{(n)} \cos(\frac{2\pi j l}{12}) + C_{j2}^{(n)} \sin(\frac{2\pi j l}{12})]$ نشان دهید.

الف) $\sum_{j=0}^{11} S^{(n)}(l-j) = 0$ (راهنمایی: از اینکه $(1 - B^{12}) = (1 - B)(1 + B + \dots + B^{11})$ و $S^{(n)}(l)$ جواب یک معادله تفاضلی است استفاده کنید.)

$$\text{ب) } S^{(n)}(l) = \tilde{P}_n X_{n+l} - C_1^{(n)} - C_2^{(n)} l \quad \text{و} \quad C_1^{(n)} = \bar{P}_n(l) - \frac{13}{2} C_2^{(n)}, \quad C_2^{(n)} = \frac{\tilde{P}_n X_{n+13} - \tilde{P}_n X_{n+1}}{12}$$

$$\text{که} \quad \bar{P}_n(l) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \tilde{P}_n X_{n+i}$$

۸.۹ - مدل خطوط هوایی را به لگاریتم سری Se2 در پیوست ۲ برآزش داده و بازرسی‌های تشخیصی را انجام دهید. پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای 95 درصد را برای تعداد ماهانه مسافران در سال 1961 به دست آورده در ادامه سری رسم کنید.

۹.۹ - تابع پیش‌بینی غائی مدل $(1 - B^s)X_t = \theta_0 + (1 + \Theta B^s)Z_t$ همان (۸.۹) با $C_2^{(n)} = \frac{\theta_0}{n}$ است. این مدل را به سری مثال (۹.۹) برآزش داده و بازرسی‌های تشخیصی را انجام دهید. مقایسه‌ای بین این مدل و مدل مثال (۹.۹) انجام دهید.

۱۰.۹ - با برآزش مدلی مناسب به سری Se3 در پیوست ۲ پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای 95 درصد را برای سال 1987 بیابید.

۱۱.۹- سری زیرمتوسط درجه حرارت ماهانه یکی از شهرهای کشور را از سال ۱۳۷۲ تا ۱۳۸۰ نشان می‌دهد. با برازش مدلی مناسب پیش‌بینی‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای 95 درصد را برای سال ۱۳۸۱ بیابید.

1372:	12.3	14.9	21.0	26.5	27.5	25.4	19.0	12.2	7.9	7.6	5.2	8.0
1373:	13.4	17.7	24.2	27.3	29.0	25.9	19.7	13.3	6.3	6.2	6.5	9.5
1374:	12.4	16.6	23.3	27.4	30.0	25.8	18.5	14.0	6.1	4.7	6.4	8.7
1375:	12.6	17.9	23.6	28.6	29.9	25.1	19.7	13.6	9.9	7.6	3.6	7.3
1376:	10.2	18.1	24.0	28.1	29.2	24.7	20.3	13.2	8.1	3.2	5.6	8.1
1377:	14.2	18.6	24.6	29.5	30.6	27.1	20.6	14.3	10.6	8.7	7.0	9.1
1378:	13.3	20.1	26.3	29.0	30.5	25.9	21.7	13.4	8.6	5.6	4.8	8.0
1379:	14.9	19.5	24.5	29.7	30.7	25.3	18.6	13.7	7.5	6.3	5.9	9.8
1380:	14.5	18.8	24.4	28.3	31.3	25.1	21.5	13.8	9.3	6.7	5.7	10.5

سری تمرین (۱۱.۹).

۱۲.۹- سری زیرتعداد مسافران اتوبوس در شهر آیوا از سپتامبر ۱۹۷۱ تا دسامبر ۱۹۸۲ را نشان می‌دهد. مدل خطوط هوایی را به این سری برازش داده و مشاهدات دورافتاده را شناسایی کنید.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1971:	—	—	—	—	—	—	—	—	3603	4448	4734	4353
1972:	5438	5954	4838	4532	3599	3248	3230	2790	4738	5043	5367	5262
1973:	5065	5824	4612	4823	3564	3651	3625	3170	5022	5018	5326	5412
1974:	6345	6698	5605	5260	3789	4023	3775	3384	5303	5506	5645	5168
1975:	6173	6776	5957	5777	3833	4200	3891	5996	5862	5719	5957	5226
1976:	6467	6383	5589	5296	3943	4188	3673	3475	5392	5583	5738	4944
1977:	6552	6451	5354	5081	3874	3973	3751	3621	5328	5427	5419	5983
1978:	6568	8346	6800	6308	4857	4663	4499	3878	6031	6325	6764	6929
1979:	7557	8182	6892	6860	5181	5462	5328	4331	7279	7772	8262	7499
1980:	8081	10121	8745	8045	5906	5274	5283	4956	7879	8289	8422	7832
1981:	7857	10008	8057	7791	6147	5438	5494	5253	8154	8604	8832	7815
1982:	10179	11460	9641	9243	6824	6149	6161	5962	9068	9538	9988	7916

سری تمرین (۱۲.۹).

مراجع

Abraham, B. and Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. Jhon Wiley, New York.

Akaike, H. (1969). Fitting Autoregressive Models for Prediction. *Ann. Inst. Statist. Math.* **21**, 407-419.

Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. *2nd Inter. Symposium on Information Theory*. B. N Petrov and F. Csáki , Eds. Akadémiai Kiadó, Budapest, 267-281.

Ansley, C. F. (1979). An Algorithm for the Exact Likelihood of Mixed Autoregressive-Moving Average Process. *Biometrika.* **66**, 547-553.

Bartlett, M. S. (1946). On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series. *J. Royal. Stat. Soc.*, **B8**, 27-41.

Bowerman, B. L., O'Connell, R. and Koehler, A. (2005). *Forecasting, Time Series, and Regression*, 4nd ed. Duxbury, California.

Box, G. E. P and Pierce, D. A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *J. Amer. Statist. Assoc.* **65**, 1509-1526.

Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1975). Intervention Analysis with Applications to Environmental and Economic Problems. *J. Amer. Statist. Assoc.* **70**, 70-79.

* Box, G. E. P and Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2nd ed. Holden-Day, San Francisco.

- Brockwell, P. J, and Davis, R. A. (1988). Simple Consistent Estimation of the Coefficients of a Linear Filter. *Stoch. Processes and Their Applications*, **22** , 47-59.
- Brockwell, P. J, and Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed. Springer–Verlag, New York.
- Brockwell, P. J, and Davis, R. A. (1994). *ITSM for Windows: A User's Guide to Time Series Modelling and Forecasting*. Springer–Verlag, New York.
- Brockwell, P. J, and Davis, R. A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 2nd ed. Springer–Verlag, New York.
- Brown, R. G. (1962). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time series*. Prentice- hall, New Jersey.
- Burg, J. P. (1967). Maximum Entropy Spectral Analysis. 37th Annual International S.E.G. Meeting, Oklahoma City, Oklahoma. Reprinted in *Modern Spectrum Analysis*, D. G. Childers, Ed. (1978). New York: IEEE Press, 34-41.
- Chang, I. and Tiao, G. C. (1983). Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers. Technical Report 8, University of Chicago, Statistics Research Center.
- Chang, I., Tiao, G. C. and Chen, C. (1988). Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers. *Technometrics*. **30**, 193-204.
- Chen, C. Liu, L. (1993). Joint Estimation of Model Parameters and Outlier effects in Time Series. *J. Amer. Statist. Assoc.* **88**, 284-297.
- Choi, B. S. (1986). An Algorithm for Solving the Extended Yule – Walker Equations of an Autoregressive Moving Average Time Series. *IEEE, Trans. Information Theory*. **IT-32**, 417-419.
- Choi, B. S. (1987). A Newton–Raphson Solution for MA Parameters of mixed Autoregressive Moving Average Time Series. *j. Korean Statist. Soc.* **16**, 1-9.
- Choi, B. S. (1992). *ARMA Model Identification*. Springer–Verlag, New York.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *J. Amer. Statist. Assoc.* **74**, 427-431.

- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica*. **49**, 1057-1072.
- Durbin, J. (1960). Estimation of Parameters in Time Series Regression Models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **22**, 139-153.
- Findley, D. F. (1980). Limiting Autocorrelations and their use in the Identification of Nonstationary ARMA Models. *Bulletin of the Institute of Mathematical Statistics*. **7**, 293-294.
- Fox, A. J. (1972). Outliers in Time Series. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **34**, 350-363.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. Jhon Wiley, New York.
- Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979). The Determination of the Order of an Autoregression. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **41**, 190-195.
- Hannan, E. J. and Rissanen, J. (1982). Recursive Estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order. *Biometrika*. **69**, 81-94. Correction: **70** (1983), 303.
- Holt, C. C. (1957). Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *ONR Research Memorandum*. **52**, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pennsylvania.
- Hurvich, C. M. and Tsay, C. L. (1989). Regression and Time Series Model Selection in Small Sample. *Biometrika*. **76**, 297-307.
- Ljung, G. M. (1993). On Outlier Detection in Time Series. *J. Roy. Stat. Soc.* **B55**(2), 559-567.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, **65**, 297-303. **B55**(2), 559-567.
- Martin, R. D. (1980). Robust Estimation of Autoregressive Models. *Directions in Time Series*, eds. D. R. Brillinger and G. C. Tiao, Hayward, CA:Institute of Mathematical Statistics, 228-254.
- Martin, R. D. (1981). Robust Methods for Time Series. *Applied Time Series Analysis II*, ed D. F. Findley, New York: John Wiley, 638-759.

Martin, R. D., Samarov, A. and Vandaele, W. (1983). Robust Methods for ARIMA Models. *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, ed A. Zellner, Washington, DC: U.S. Bureau of the Census, 153-169.

Melard, G. (1984). A Fast Algorithm for the Exact Likelihood of Autoregressive-Moving Average models. *Appl. Stat.* **33**, 104-114.

* Montgomery, D.C, and Johnson, L.A. and Gardiner, J. (1990). *Forecasting and Time Series Analysis*. McGraw-Hill, New York.

Montgomery, D.C, and Peck, E. A. (1992). *Introduction to linear Regression Analysis*. 2nd ed. Jhon Wiley & Sons, New York. New York: McGraw-Hill.

Monti, A. C. (1994). A Proposal for Residuals Autocorrelation Test in Linear Model. *Biometrika*, **88**, 776-780.

Parzen, E. (1977). Multiple Time Series: Determining the Order of Approximating Autoregressive Schemes. *Multivariate Analysis IV*, P. R. Krishnaiah, Ed., North-Holland, Amsterdam, 283-295.

Peña, D. Tiao, G. C. Tsay, R. S. (2001). *A Course in Time Series Analysis*. Jhon Wiley & Sons, New York.

Peña, D. and Rodriguez, J. (2002). A Powerful Portmanteau Test of Lack of Fit for Time Series. *J. Amer. Statist. Assoc.* **97**, 601-610.

Phillips, P. C. B. and Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time series regression. *Biometrika*. **75**, 335-346.

Prest, A. R. (1949). Some Experiments in Demand Analysis. *Review of Economics and Statistics*, *31*, 33-49.

Quenouille, M. H. (1949). Approximate Test of Correlation in Time Series. *J. Royal. Stat. Soc*, **B11**, 68-84.

Quinn, B. G. (1980). Limiting Behaviour of Autocorrelation function of ARMA Process as Several Roots of Characteristic Equation Approach Unit Circle. *Commun. Statist.* **42**, 195-198.

Rissanen, J. (1983). Order Estimation in Box-Jenkins Model for Time Series. *Methods of Operations Research*. **44**, 143-150.

- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Ann. Statist.* **7**, 147-160.
- Slutsky, E. (1927). The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes (in Russian). *Problems in Economic Conditions*. **3**. English Translation in *Econometrica*. **5** (1937), 105-146.
- Tiao, G. C. (1986). Time Series Model Specification in the Presence of Outliers. *J. Amer. Statist. Assoc.* **81**, 132-141.
- Tiao, G. C. (1988). Outliers, Level Shifts and Variance Changes in Time Series. *J. Forecasting*. **7**, 1-20.
- Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1984). Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Model. *J. Amer. Statist. Assoc.* **79**, 84-96.
- * Wei, W. W. S. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Addison-Wesley.
- Wegman, E. J. (1986). Another Look at Box–Jenkins Forecasting Procedure. *Commun. Statist. Simula*, **15**(2), 523-530.
- Wilson, G. (1969). Factorization of the Covariance Generating Function of a Pure Moving Average Process. *SIAM J. Numer. Anal.*, **6**, 1-7.
- Winters, P. R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science.*, **6**, 324-342.
- Wold, H. O. A. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Almqvist and Wiksel, Uppsala Sweden.
- Yule, G. U. (1927). On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*. Ser. A, **226**, 267-298.

کتاب‌هایی که با * مشخص شده‌اند به فارسی ترجمه شده‌اند. این ترجمه‌ها عبارتند از:

فاطمی قمی، م. ت. (۱۳۷۳). پیش‌بینی و تجزیه و تحلیل سریهای زمانی. نشر دانش امروز، تهران.

مشکانی، م. ر. (۱۳۷۱). تحلیل سریهای زمانی: پیش‌بینی و کنترل. انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

نیرومند، ح. (۱۳۷۶). تحلیل سریهای زمانی روشهای یک متغیری و چند متغیری. انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.

پیوست ۱: معادلات تفاضلی خطی

معادله

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_k y_{t-k} = 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{پ ۱.۱})$$

که در آن y_t تابعی از t و a_i ها مقادیری حقیقی اند ($a_k \neq 0$) را معادله تفاضلی خطی همگن مرتبه k می نامیم. با استفاده از عملگر پسبرنده B این معادله به صورت

$$A_k(B)y_t = 0 \quad (\text{پ ۲.۱})$$

نوشته می شود که در آن $A_k(B) = 1 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_k B^k$. اگر B را متغیری مختلط فرض کنیم، $A_k(B)$ چند جمله ای کمکی این معادله تفاضلی نامیده می شود. همانطور که در قضیه زیر آمده است جواب عمومی این معادله تفاضلی به ریشه های چند جمله ای کمکی بستگی دارد.

قضیه (پ ۱.۱): اگر برای $i = 1, 2, \dots, m$ B_i ها ریشه های مجزای $A_k(B) = 0$ با r_i تکرار باشند ($\sum_{i=1}^m r_i = k$) به عبارت دیگر $A_k(B) = \prod_{i=1}^m (1 - B_i^{-1} B)^{r_i}$ آنگاه جواب عمومی معادله (پ ۲.۱) عبارت است از

$$y_t = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \right) B_i^{-t} \quad (\text{پ ۳.۱})$$

اثبات: برای اثبات اینکه $A_k(B)y_t = \prod_{i=1}^m (1 - B_i^{-1} B)^{r_i} \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \right) B_i^{-t} \right] = 0$ کافی است نشان دهیم برای $i = 1, 2, \dots, m$

$$(1 - B_i^{-1} B)^{r_i} \left(\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \right) B_i^{-t} = (1 - B_i^{-1} B)^{r_i} P_{r_i-1}(t) B_i^{-t} = 0$$

به عبارت دیگر حاصل اعمال $(1 - B_i^{-1} B)^{r_i}$ بر $P_{r_i-1}(t) B_i^{-t}$ صفر است. برای اینکار ابتدا $(1 - B_i^{-1} B)$ را بر $P_{r_i-1}(t) B_i^{-t}$ اعمال می کنیم،

$$(1 - B_i^{-1} B) P_{r_i-1}(t) B_i^{-t} = P_{r_i-1}(t) B_i^{-t} - B_i^{-1} P_{r_i-1}(t-1) B_i^{-(t-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= [P_{r_i-1}(t) - P_{r_i-1}(t-1)] B_i^{-t} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} (t^j - (t-1)^j) \right] B_i^{-t}
\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه یک چند جمله‌ای درجه $r_i - 2$ از t است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که از هر بار اعمال $(1 - B_i^{-1}B)$ بر $P_{r_i-1}(t) B_i^{-t}$ یک درجه از چند جمله‌ای $P_{r_i-1}(t)$ کم می‌شود. در نتیجه پس از r_i بار اعمال این عملگر یعنی اعمال $(1 - B_i^{-1}B)^{r_i}$ بر $P_{r_i-1}(t) B_i^{-t}$ حاصل صفر می‌شود. از (پ ۳.۱) نتیجه می‌شود که جواب عمومی معادله تفاضلی خطی همگن مرتبه k ترکیب خطی k تابع از t است. توجه به چهار حالت زیر در تشخیص سریعتر این توابع و جواب عمومی مفید است.

الف: ریشه‌های $A_k(B) = 0$ حقیقی و غیر تکراری‌اند، در این حالت جواب عمومی ترکیب خطی k تابع $B_1^{-t}, B_2^{-t}, \dots, B_k^{-t}$ است. یعنی

$$y_t = C_1 B_1^{-t} + C_2 B_2^{-t} + \dots + C_k B_k^{-t}.$$

مثال ۱: معادله $(1 - 1.5B)(1 + 0.6B)(1 - 0.8B)y_t = 0$ را حل کنید. ریشه‌های معادله کمکی $A_3(B) = (1 - 1.5B)(1 + 0.6B)(1 - 0.8B) = 0$ عبارتند از $B_1 = \frac{1}{1.5}, B_2 = -\frac{1}{0.6}, B_3 = \frac{1}{0.8}$ و در نتیجه جواب عمومی این معادله عبارت است از $y_t = C_1(1.5)^t + C_2(-0.6)^t + C_3(0.8)^t$.

ب: ریشه‌های $A_k(B) = 0$ حقیقی ولی بعضی از آنها تکراری‌اند، در این حالت متناظر با ریشه B که r بار تکرار شده است در جواب عمومی ترکیب خطی r تابع $B^{-t}, tB^{-t}, t^2B^{-t}, \dots, t^{r-1}B^{-t}$ را خواهیم داشت. به عنوان مثال اگر B_1 تنها ریشه تکراری با r_1 تکرار باشد و سایر ریشه‌ها را با $B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_k$ نشان دهیم آنگاه

$$y_t = C_1 B_1^{-t} + C_2 t B_1^{-t} + \dots + C_r t^{r-1} B_1^{-t} + C_{r+1} B_{r+1}^{-t} + \dots + C_k B_k^{-t}.$$

مثال ۲: معادله $(1 - 1.5B)^2(1 + 0.6B)^3 y_t = 0$ را حل کنید. ریشه‌های معادله کمکی $A_5(B) = (1 - 1.5B)^2(1 + 0.6B)^3 = 0$ عبارتند از $B_1 = \frac{1}{1.5}$ با ۲ تکرار و $B_2 = -\frac{1}{0.6}$ با سه تکرار در نتیجه $y_t = C_1(1.5)^t + C_2 t(1.5)^t + C_3(-0.6)^t + C_4 t(-0.6)^t + C_5 t^2(-0.6)^t$.

ج: بعضی از ریشه‌های $A_k(B) = 0$ مختلط و غیر تکراری‌اند، با توجه به اینکه اگر $B = Re^{i\theta}$ ریشه معادله $A_k(B) = 0$ باشد مزدوج B یعنی $\bar{B} = Re^{-i\theta}$ نیز ریشه این معادله است، ریشه‌های مختلط همیشه به صورت جفت مشاهده می‌شوند. در چنین حالتی متناظر با این جفت ریشه مختلط، در جواب عمومی ترکیب خطی توابع $R^{-t} \cos(t\theta)$ و $R^{-t} \sin(t\theta)$ را خواهیم داشت. به عنوان مثال در حالت خاصی که $B_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ و $B_2 = \bar{B}_1 = R_1 e^{-i\theta_1}$ تنها ریشه‌های مختلط باشند و سایر ریشه‌ها B_3, B_4, \dots, B_k حقیقی غیر تکراری باشند آنگاه

$$y_t = C_1 R_1^{-t} \cos(t\theta_1) + C_2 R_1^{-t} \sin(t\theta_1) + C_3 B_3^{-t} + \dots + C_k B_k^{-t}.$$

مثال ۳: معادله $(1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 - B)^2 y_t = 0$ را حل کنید. ریشه‌های معادله کمکی $A_4(B) = (1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 - B)^2 = 0$ عبارتند از $B_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i(\pi/6)}$ و $B_2 = \overline{B_1} = e^{-i(\pi/6)}$ و $B_3 = 1$ با دو تکرار در نتیجه $y_t = C_1 \cos(\frac{\pi t}{6}) + C_2 \sin(\frac{\pi t}{6}) + C_3 + C_4 t$.

د: بعضی از ریشه‌های $A_k(B) = 0$ مختلط و تکراری‌اند، در این حالت متناظر با جفت ریشه مختلط $B = Re^{i\theta}$ و $\overline{B} = Re^{-i\theta}$ که r بار تکرار شده‌اند در جواب عمومی ترکیب خطی $2r$ تابع $R^{-t} \cos(t\theta), tR^{-t} \cos(t\theta), \dots, t^{r-1} R^{-t} \cos(t\theta)$ و $R^{-t} \sin(t\theta), tR^{-t} \sin(t\theta), \dots, t^{r-1} R^{-t} \sin(t\theta)$ را خواهیم داشت.

مثال ۴: معادله $(1 - \sqrt{3}B + B^2)^2(1 - B)^2 y_t = 0$ را حل کنید. ریشه‌های معادله کمکی $A_6(B) = (1 - \sqrt{3}B + B^2)^2(1 - B)^2 = 0$ عبارتند از زوج $B_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i(\pi/6)}$ و $B_2 = \overline{B_1} = e^{-i(\pi/6)}$ با دو تکرار و $B_3 = 1$ با دو تکرار در نتیجه

$$y_t = C_1 \cos(\frac{\pi t}{6}) + C_2 \sin(\frac{\pi t}{6}) + C_3 t \cos(\frac{\pi t}{6}) + C_4 t \sin(\frac{\pi t}{6}) + C_5 + C_6 t.$$

به عنوان تمرین معادلات زیر را حل کنید.

$$y_t - 0.8y_{t-1} + 0.16y_{t-2} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y_t - 2y_{t-1} + 1.5y_{t-2} - 0.5y_{t-3} = 0 \quad (\text{ب})$$

ج ($(1 - 0.7B)(1 - B)^2 y_t = 7$)، این معادله همگن نیست، جواب چنین معادلاتی مجموع جواب عمومی معادله همگن نظیرش و یک جواب خصوصی است. ابتدا نشان دهید $y_t^* = \frac{7t^2}{0.6}$ جواب خصوصی این معادله است.

$$(1 - B^{12})(1 - B)y_t = 0 \quad (\text{د})$$

ه ($(1 - B^{12})(1 - B)y_t = 2$)، یک جواب خصوصی برای این معادله $y_t^* = \frac{2t^2}{24}$ است.

$$(1 - B)(1 - B + B^2 - B^3)y_t = 0 \quad (\text{و})$$

پیوست ۲: سریها

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1974:	7750	6981	8038	8422	8714	9512	10120	9823	8743	9129	8710	8680
1975:	8162	7306	8124	7870	9387	9556	10093	9620	8285	8433	8160	8034
1976:	7717	7461	7776	7925	8634	8945	10078	9179	8037	8488	7874	8647
1977:	7792	6957	7726	8106	8890	9299	10625	9302	8314	8850	8265	8796
1978:	7836	6892	7791	8129	9115	9434	10484	9827	9110	9070	8633	9240

سری Se1: تعداد مرگهای ماهانه ناشی از حوادث در آمریکا ۱۹۷۳-۱۹۷۸ (هزار نفر).

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1949:	112	118	132	129	121	135	148	148	136	119	104	118
1950:	115	126	141	135	125	149	170	170	158	133	114	140
1951:	145	150	178	163	172	178	199	199	184	162	146	166
1952:	171	180	193	181	183	218	230	242	209	191	172	194
1953:	196	196	236	235	229	243	264	272	237	211	180	201
1954:	204	188	235	227	234	264	302	293	259	229	203	229
1955:	242	233	267	269	270	315	364	347	312	274	237	278
1956:	284	277	317	313	318	374	413	405	355	306	271	306
1957:	315	301	356	348	355	422	465	467	404	347	305	336
1958:	340	318	362	348	363	435	491	505	404	359	310	337
1959:	360	342	406	396	420	472	548	559	463	407	362	405
1960:	417	391	419	461	472	535	622	606	508	461	390	432

سری Se2: تعداد مسافران ماهانه پروازهای بین المللی در انگلیس ۱۹۶۰-۱۹۴۹ (هزار نفر).

	Q1.	Q2.	Q3.	Q4.		Q1.	Q2.	Q3.	Q4.
1960:	160.1	129.7	84.8	120.1	1974:	449.9	286.6	179.3	403.4
1961:	160.1	124.9	84.8	116.9	1975:	491.5	321.8	177.7	409.8
1962:	169.7	140.9	89.7	123.3	1976:	593.9	329.8	176.1	483.5
1963:	187.3	144.1	92.9	120.1	1977:	584.3	395.4	187.3	485.1
1964:	176.1	147.3	89.7	123.3	1978:	669.2	421.0	216.1	509.1
1965:	185.7	155.3	99.3	131.3	1979:	827.7	467.5	209.7	542.7
1966:	200.1	161.7	102.5	136.1	1980:	840.5	414.6	217.7	670.8
1967:	204.9	176.1	112.1	140.9	1981:	848.5	437.0	209.7	701.2
1968:	227.3	195.3	115.3	142.5	1982:	925.3	443.4	214.5	683.6
1969:	244.9	214.5	118.5	153.7	1983:	917.3	515.5	224.1	694.8
1970:	244.9	216.1	188.9	142.5	1984:	989.4	477.1	233.7	730.0
1971:	301.0	196.9	136.1	267.3	1985:	1087.0	534.7	281.8	787.6
1972:	317.0	230.5	152.1	336.2	1986:	1163.9	613.1	347.4	782.8
1973:	371.4	240.1	158.5	355.4					

سری Se3: مصرف فصلی گاز در انگلیس ۱۹۸۶-۱۹۶۰ (میلیون ترم).

[1]	-1.248	-1.528	-0.599	-1.338	-0.803	-0.740	-1.654	-0.946	-0.098
[10]	0.291	1.272	0.945	-0.359	-0.600	-1.773	-1.199	0.014	1.711
[19]	1.152	0.176	1.934	2.193	-1.161	-2.407	-1.110	-1.334	-2.304
[28]	-1.610	-0.449	0.763	-0.980	-0.260	-0.652	-1.772	-0.726	-1.249
[37]	-0.208	0.278	0.998	1.473	0.731	1.419	0.174	0.138	-0.414
[46]	-0.647	-1.049	-0.563	0.708	-0.837	-0.566	-0.253	1.493	0.409
[55]	1.013	0.608	1.219	0.639	-0.657	-2.531	-0.569	0.178	1.011
[64]	2.048	0.333	0.338	-0.413	0.640	0.873	2.138	1.282	0.646
[73]	-1.084	-0.835	-0.861	-0.518	-1.090	0.658	2.144	2.674	2.099
[82]	1.191	-0.078	0.519	0.030	-1.296	-0.026	0.016	1.538	-0.130
[91]	-1.899	-0.604	-1.112	-0.159	0.251	0.840	0.851	-0.233	0.020
[100]	-0.625								

سری Se4: سری شبیه سازی شده.

[1]	206.9	201.1	199.1	175.9	154.0	148.6	167.2	126.5	119.0	99.1
[11]	90.4	99.2	96.1	85.9	87.0	53.3	65.0	44.2	25.0	20.0
[21]	37.7	28.8	30.3	27.5	13.8	17.7	-1.9	2.8	3.7	2.6
[31]	9.2	5.9	16.2	21.4	9.5	1.6	1.9	-4.9	15.8	2.0
[41]	18.1	18.8	27.4	33.5	50.6	47.9	52.3	51.3	66.0	59.0
[51]	66.5	85.0	80.6	93.3	110.0	125.8	129.6	146.6	145.6	148.8
[61]	169.3	184.4	197.6	218.4	211.7	207.4	243.2	266.0	256.9	287.4
[71]	305.8	321.8	343.7	344.4	365.5	360.8	399.2	431.8	447.1	442.2
[81]	476.4	493.0	496.8	500.9	547.6	583.2	603.1	632.2	637.1	654.0
[91]	707.6	684.5	713.4	754.9	782.0	814.6	836.1	856.5	879.6	894.2

سری Se5: سری شبیه سازی شده.

1871:	327	385	382	217	609	466	621	455	472	469	426	579
1883:	509	580	611	609	469	661	525	648	747	757	767	767
1895:	745	760	703	909	870	852	886	960	976	857	939	973
1907:	886	836	1054	1142	941	1117	992	1037	1157	1207	1326	1445
1919:	1444	1509	1005	1254	1518	1245	1376	1289	1211	1373	1533	1648
1931:	1565	1018	1372	1085	1302	1163	1569	1386	1881	1460	1262	1408
1943:	1406	1951	1991	1315	2107	1980	1969	2030	2332	2256	2059	2244
1955:	2193	2176	1668	1736	1796	1944	2061	2315	2344	2228	1855	1887
1967:	1968	1710	1804	1906	1705	1749	1742	1990	2182	2137	1914	2025
1979:	1527	1786	2064	1994	1429	1728						

سری Se6: تولید سالانه توتون در آمریکا ۱۹۸۴-۱۸۷۱.

[1]	110.94	110.69	110.43	110.56	110.75	110.84	110.46	110.56	110.46
[10]	110.05	109.60	109.31	109.31	109.25	109.02	108.54	108.77	109.02
[19]	109.44	109.38	109.53	109.89	110.56	110.56	110.72	111.23	111.48
[28]	111.58	111.90	112.19	112.06	111.96	111.68	111.36	111.42	112.00
[37]	112.22	112.70	113.15	114.36	114.65	115.06	115.86	116.40	116.44
[46]	116.88	118.07	118.51	119.28	119.79	119.70	119.28	119.66	120.14
[55]	120.97	121.13	121.55	121.96	122.26	123.79	124.11	124.14	123.37
[64]	123.02	122.86	123.02	123.11	123.05	123.05	122.83	123.18	122.67
[73]	122.73	122.86	122.67	122.09	122.00	121.23			

سری Se7: شاخص DOW-JONES در بازار بورس نیویورک از ۲۸ آگوست تا ۱۸ دسامبر ۱۹۷۲.

1700:	5.0	11.0	16.0	23.0	36.0	58.0	29.0	20.0	10.0	8.0
1710:	3.0	0.0	0.0	2.0	11.0	27.0	47.0	63.0	60.0	39.0
1720:	28.0	26.0	22.0	11.0	21.0	40.0	78.0	122.0	103.0	73.0
1730:	47.0	35.0	11.0	5.0	16.0	34.0	70.0	81.0	111.0	101.0
1740:	73.0	40.0	20.0	16.0	5.0	11.0	22.0	40.0	60.0	80.9
1750:	83.4	47.7	47.8	30.7	12.2	9.6	10.2	32.4	47.6	54.0
1760:	62.0	85.9	61.2	45.1	36.4	20.9	11.4	37.8	69.8	106.1
1770:	100.8	81.6	66.5	34.8	30.6	7.0	19.8	92.5	154.4	125.9
1780:	84.8	68.1	38.5	22.8						

سری Se8: تعداد سالانه لکه‌های خورشیدی ۱۷۸۳-۱۷۰۰.

[1]	17.0	16.6	16.3	16.1	17.1	16.9	16.8	17.4	17.1
[10]	17.0	16.7	17.4	17.2	17.4	17.4	17.0	17.3	17.2
[19]	17.4	16.8	17.1	17.4	17.4	17.5	17.4	17.6	17.4
[28]	17.3	17.0	17.8	17.5	18.1	17.5	17.4	17.4	17.1
[37]	17.6	17.7	17.4	17.8	17.6	17.5	16.5	17.8	17.3
[46]	17.3	17.1	17.4	16.9	17.3	17.6	16.9	16.7	16.8
[55]	16.8	17.2	16.8	17.6	17.2	16.6	17.1	16.9	16.6
[64]	18.0	17.2	17.3	17.0	16.9	17.3	16.8	17.3	17.4
[73]	17.7	16.8	16.9	17.0	16.9	17.0	16.6	16.7	16.8
[82]	16.7	16.4	16.5	16.4	16.6	16.5	16.7	16.4	16.4
[91]	16.2	16.4	16.3	16.4	17.0	16.9	17.1	17.1	16.7
[100]	16.9	16.5	17.2	16.4	17.0	17.0	16.7	16.2	16.6
[109]	16.9	16.5	16.6	16.6	17.0	17.1	17.1	16.7	16.8
[118]	16.3	16.6	16.8	16.9	17.1	16.8	17.0	17.2	17.3
[127]	17.2	17.3	17.2	17.2	17.5	16.9	16.9	16.9	17.0
[136]	16.5	16.7	16.8	16.7	16.7	16.6	16.5	17.0	16.7
[145]	16.7	16.9	17.4	17.1	17.0	16.8	17.2	17.2	17.4
[154]	17.2	16.9	16.8	17.0	17.4	17.2	17.2	17.1	17.1
[163]	17.1	17.4	17.2	16.9	16.9	17.0	16.7	16.9	17.3
[172]	17.8	17.8	17.6	17.5	17.0	16.9	17.1	17.2	17.4
[181]	17.5	17.9	17.0	17.0	17.0	17.2	17.3	17.4	17.4
[190]	17.0	18.0	18.2	17.6	17.8	17.7	17.2	17.4	

سری Se9: غلظت ماده شیمیایی که در فرآیند ساخت هر دو ساعت یکبار اندازه گیری شده است.

[1]	-2.96	2.81	-1.40	0.38	-2.96	1.18	-1.21	-0.26	0.93
[10]	0.57	-0.14	-0.86	-1.72	2.32	0.70	-1.91	-0.11	2.33
[19]	-2.91	1.34	1.49	-2.45	3.21	-1.95	1.02	0.33	2.16
[28]	-2.23	2.60	-0.85	-1.59	2.94	-3.13	2.32	-1.14	-0.44
[37]	1.51	-0.77	0.68	-0.80	-0.78	1.63	-1.24	1.82	-2.01
[46]	0.85	1.21	-1.15	0.08	-0.17	1.03	-0.21	-0.33	-0.92
[55]	2.02	-0.98	0.97	-0.59	1.62	-1.00	0.04	0.28	-0.72
[64]	-0.24	0.21	0.75	-1.92	0.71	-0.43	2.72	-2.49	0.74
[73]	1.21	0.50	-1.92	1.82	-0.99	-0.45	0.98	-0.44	-0.62
[82]	3.23	-4.28	3.85	-2.02					

سری Se10: سری شبیه سازی شده.

1857:	23362	31642	33757	23226	15178	7272	4448	4926	5437
1866:	16498	35971	76556	68392	37447	25686	7942	5123	7106
1875:	11250	18774	30508	42834	27345	17834	15386	9443	7599
1884:	8061	27187	51511	74050	78773	33899	18886	11520	8352
1893:	8660	12902	20331	36853	56407	39437	26761	15185	4473
1902:	5781	9117	19267	36116	58850	61478	36300	9704	3410
1911:	3774								

سری Se11: تعداد پوستهای Lynx (نوعی گربه وحشی) فروخته شده توسط شرکت Hudson's Bay در کانادا طی سالهای ۱۹۱۱-۱۸۵۷.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1963:	56.27	59.90	66.85	59.78	57.99	66.82	49.92	21.52	55.58	58.69	54.61	57.11
1964:	63.47	63.93	71.22	62.16	62.10	67.60	50.13	22.03	56.07	60.25	62.64	60.55
1965:	64.68	65.84	71.29	68.77	72.39	70.72	62.90	23.75	61.33	73.04	73.49	65.18
1966:	67.62	74.82	81.07	72.94	70.11	79.01	59.46	23.07	61.72	69.14	70.11	70.58
1967:	74.76	77.34	81.38	76.67	72.89	74.92	68.10	24.14	68.02	70.83	69.42	77.21
1968:	79.53	78.84	89.00	79.74	75.10	82.13	69.16	29.07	72.71	86.84	81.24	79.96
1969:	84.30	84.70	94.20	80.43	84.03	87.15	65.63	37.05	74.20	84.72	73.17	89.85
1970:	77.81	85.61	93.88	81.30	78.34	82.81	65.73	31.00	78.00	86.00	78.00	80.80
1971:	89.52	85.61	89.33	87.50	83.51	93.46	83.25	30.00	79.14	90.00	78.17	88.00
1972:	87.50	99.30	97.68	96.87	87.17	100.69	83.20	34.56	84.95	91.39	86.87	99.37

سری Se12: فروش کاغذ چاپ در فرانسه طی سالهای ۱۹۷۲-۱۹۶۳.

[1]	185	151	142	132	123	92	74	63	50	35	15	2
[13]	16	32	48	67	73	86	90	111	126	142	157	178
[25]	192	165	148	133	128	101	79	68	52	37	18	9
[37]	18	35	47	58	73	88	95	112	131	148	160	183
[49]	187	157	143	135	126	95	71	60	51	35	17	16
[61]	15	32	40	65	73	85	92	112	127	142	155	175
[73]	173	151	148	139	123	89	80	69	59	31	23	1
[85]	20	30	45	68	72	87	95	114	125	145	157	177
[97]	171	153	143	130	125	88	78	68	51	35	19	2
[109]	18	34	46	64	73	88	93	115	124	143	156	178
[121]	185	161	140	132	127	90	75	61	56	37	16	1
[133]	18	37	48	65	75	86	91	113	125	149	153	191
[145]	171	154	145	136	129	100	73	62	49	39	18	3
[157]	14	39	48	66	77	80	90	111	133	150	158	187

سری Se13: تعداد سیکلویها در نیم لیتر آب سطح یک استخر آزمایشی که به طوری ساعتی ثبت شده است.

	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1960:	6550	8728	12026	14395	14587	13791	9498	8251	7049	9545	9364	8456
1961:	7237	9374	11837	13784	15926	13821	11143	7975	7610	10015	12759	8816
1962:	10677	10947	15200	17010	20900	16205	12143	8997	5568	11474	12256	10583
1963:	10862	10965	14405	20379	20128	17816	12268	8642	7962	13932	15936	12628
1964:	12267	12470	18944	21259	22015	18581	15175	10306	10792	14752	13754	11738
1965:	12181	12965	19990	23125	23541	21247	15189	14767	10895	17130	17697	16611
1966:	12674	12760	20249	22135	20677	19933	15388	15113	13401	16135	17562	14720
1967:	12225	11608	20985	19692	24081	22114	14220	13434	13598	17187	16119	13713
1968:	13210	14251	20139	21725	26099	21084	18024	16722	14385	21342	17180	14577

سری Se14: فروش ماهیانه اتومبیل در کبک کانادا طی سالهای ۱۹۶۸-۱۹۶۰.

پیوست ۳: برنامه‌های رایانه‌ای

```
MOV.AVER1<-function(DATA, k, l)
{
  n<-length(DATA)
  ma<-NA; forecast<-NA; error<-NA; FORECAST<-0
  for(i in k:n) {
    ma[i]<-mean(DATA[(i - k + 1):i])  }
  for(j in (k + 1):n) {
    forecast[j]<- ma[j - 1]
    error[j]<-DATA[j] - forecast[j]      }
  for(i in 1:l) { FORECAST[i]<-ma[n]      }
  MA1<-data.frame(DATA, ma, forecast, error)
  return(MA1, ma, error, forecast, FORECAST)
}
```

```
MOV.AVER2<-function(DATA, k, l)
{
  n<-length(DATA)
  forecast<-NA; error<-NA; FORECAST<-0; ma2<-NA
  MA1.out<-MOV.AVER1(DATA, k, l)
  ma1<-MA1.out$ma
  MA1.out<-MOV.AVER1(ma1, k, l)
  ma2[(2 * k - 1):n]<-MA1.out$ma[(2*k-1):n]
  for(i in (2 * k):n) {
```

۲۵۴

```
    forecast[i]<-(2*ma1[i-1]-ma2[i-1]+(2/(k-1))*(ma1[i-1] -
        ma2[i - 1]))
    error[i]<-DATA[i] - forecast[i] }
for(i in 1:l) {
    FORECAST[i]<-(2*ma1[n]-ma2[n]+i*(2/(k-1))*(ma1[n]-ma2[n]))
}
MA2<-data.frame(DATA, ma1, ma2, forecast, error)
return(MA2, forecast, error, FORECAST)
}
```

```
EXP.SM01<-function(DATA, alpha, s0, l)
{
    esm<-0; forecast<-0; error<-0; FORECAST<-0
    esm[1]<-alpha * DATA[1] + (1 - alpha) * s0
    n<-length(DATA)
    for(i in 2:n) {
        esm[i]<-(alpha*DATA[i]+(1-alpha)*esm[i-1]) }
    forecast[1]<-s0
    error[1]<-DATA[1] - forecast[1]
    for(j in 2:n) {
        forecast[j]<-esm[j - 1]
        error[j]<-DATA[j] - forecast[j] }
    for(i in 1:l) {
        FORECAST[i]<-esm[n] }
    EXSM1<-data.frame(DATA, esm, forecast, error)
    return(EXSM1, esm,forecast, error, FORECAST)
}
```

```
EXP.SM02<-function(DATA, alpha, s10, s20, l)
{
    forecast<-0; error<-0; FORECAST<-0
    ES.out<-EXP.SM01(DATA, alpha, s10, l)
```

۲۵۵

```
s1<-ES.out$esm
ES.out<-EXP.SM01(s1, alpha, s20, 1)
s2<-ES.out$esm
n<-length(DATA)
forecast[1]<-(2+alpha/(1-alpha))*s10-(1+alpha/(1-alpha))*s20
error[1]<-DATA[1] - forecast[1]
for(i in 2:n) {
  forecast[i]<-(2+alpha/(1-alpha))*s1[i-1]-(1+alpha/(1 -
  alpha)) * s2[i - 1]
  error[i]<-DATA[i] - forecast[i] }
for(i in 1:l) {
  FORECAST[i]<-(2+(alpha*i)/(1-alpha))*s1[n]-(1+(alpha * i)/(1
  - alpha)) * s2[n] }
EXSM2<-data.frame(DATA, s1, s2, forecast, error)
return(EXSM2,forecast, error, FORECAST)
}
```

```
DEC.ADD<-function(DATA, d, l)
{
  n<-length(DATA); W<-rep(NA, times = n); D<-rep(NA, times = n)
  s0<-rep(0, times = n); m<-rep(0, times = d); y<-0
  forecast<-0; shat<-rep(0, times = n); seaseffect<-0
  Time<-seq(1:n)
  q<-floor(d/2)
  if(d %% 2 == 0)
    for(i in (q + 1):(n - q)) {
      W[i]<-(0.5 * (DATA[i - q] + DATA[i + q]) +
      sum(DATA[(i - q + 1):(i + q - 1)]))/d }
  else
    for(i in (q + 1):(n - q)) {
      W[i]<-mean(DATA[(i - q):(i + q)])}
  for(i in (q + 1):(n - q)) {
    D[i]<-DATA[i] - W[i]
```

۲۵۶

```
if(i %% d == 0) {
  s0[d]<-s0[d] + D[i]
  m[d] <-m[d] + 1 }
else
  for(j in 1:(d - 1)) {
    if(i %% d == j) {
      s0[j]<-s0[j] + D[i]
      m[j]<-m[j] + 1 }
    }
  }
for(j in 1:d) {
  seaseffect[j]<-s0[j]/m[j] - mean(s0[1:d]/m) }
shat<-rep(seaseffect, length.out = n)
y<-DATA - shat
betahat<-lm(y ~ Time)$coefficients
yhat<-predict(lm(y ~ Time))
forecast<-as.vector(yhat + shat)
error<-as.vector(DATA - forecast)
FORECAST<-0
for(i in 1:l) {
  if((n + i) %% d == 0) {
    FORECAST[i]<-(betahat[1] + betahat[2] * (n + i)) + seaseffect[d]
  }
  else
    FORECAST[i]<-(betahat[1] + betahat[2] * (n + i)) +
      seaseffect[(n + i) %% d]
}
DECAD<-data.frame(DATA, W, D, shat, y, yhat, forecast , error)
return(DECAD, betahat, seaseffect,forecast, FORECAST)
}
```

```
DEC.MULT<-function(DATA, d, l)
{
```

```

n<-length(DATA); W<-rep(NA, times = n); D<-rep(NA, times = n)
s0<-rep(0, times = n); m<-rep(0, times = d); y<-0
Time<-seq(1:n); forecast<-0; shat<-rep(0, times = n)
seaseffect<-0; q<-floor(d/2);
if(d %% 2 == 0)
  for(i in (q + 1):(n - q)) {
    W[i]<-(0.5 * (DATA[i - q] + DATA[i + q]) +
              sum(DATA[(i - q + 1):(i + q - 1)]))/d }
else
  for(i in (q + 1):(n - q)) {
    W[i]<-mean(DATA[(i - q):(i + q)]) }
for(i in (q + 1):(n - q)) {
  D[i]<-DATA[i]/W[i]
  if(i %% d == 0) {
    s0[d]<-s0[d] + D[i]
    m[d]<-m[d] + 1 }
  else for(j in 1:(d - 1)) {
    if(i %% d == j) {
      s0[j]<-s0[j] + D[i]
      m[j]<-m[j] + 1 }
    }
}
for(j in 1:d) {
  seaseffect[j]<-(s0[j]/m[j]) * (d/sum(s0[1:d]/m)) }
shat<-rep(seaseffect, length.out = n)
y<-DATA/shat
betahat<-lm(y ~ Time)$coefficients
yhat<-predict(lm(y ~ Time))
forecast<-as.vector(yhat * shat)
error<-as.vector(DATA - forecast)
FORECAST<-0
for(i in 1:l) {
  if((n + i) %% d == 0) {
    FORECAST[i]<-(betahat[1]+betahat[2]*(n+i))*seaseffect[d]
  }
}

```

۲۵۸

```
    }
    else FORECAST[i]<-(betahat[1] + betahat[2] * (n + i)) *
      seaseffct[(n + i) %% d]
  }
  DECMU<-data.frame(DATA, W, D, shat, y, yhat, forecast, error)
  return(DECMU, betahat, seaseffect,forecast, FORECAST)
}
```

```
WINTERS<-function(DATA, d, alpha, beta, gama, l)
{
  n<-length(DATA); betahat<-0; trendhat<-0; shat<-0
  xhat<-0; error<-0; FORECAST<-0

  s0hat<-DEC.MULT(DATA, d, l)$seaseffect
  betahat0<-(mean(DATA[(n-d+1):n])-mean(DATA[1:d]))/(n - d)
  trendhat0<-mean(DATA[1:d]) - (d/2) * betahat0
  trendhat[1]<-alpha*(DATA[1]/s0hat[1])+(1-alpha)*(trendhat0 +
    betahat0)
  betahat[1]<-beta*(trendhat[1]-trendhat0)+(1-beta)*betahat0
  shat[1]<-gama*(DATA[1]/trendhat[1])+(1-gama)*s0hat[1]
  for(t in 2:d) {
    trendhat[t]<-alpha*(DATA[t]/s0hat[t])+(1-alpha)*(trendhat[t-1]
      + betahat[t - 1])
    betahat[t]<-beta*(trendhat[t]-trendhat[t - 1])+(1 - beta) *
      betahat[t - 1]
    shat[t]<-gama * (DATA[t]/trendhat[t])+(1-gama)*s0hat[t] }
  for(t in (d + 1):n) {
    trendhat[t]<-alpha*(DATA[t]/shat[t-d])+(1-alpha)*(trendhat[t -
      1]+betahat[t-1])
    betahat[t]<-beta*(trendhat[t]-trendhat[t-1])+(1-beta)*
      betahat[t-1]
    shat[t]<-gama * (DATA[t]/trendhat[t])+(1-gama)*shat[t-d] }
  xhat[1]<-(trendhat0 + betahat0) * s0hat[1]
```


۲۵۹

```
for(t in 2:d) {
  xhat[t]<-(trendhat[t-1]+beta1hat[t-1]) * s0hat[t]
}
for(t in (d + 1):n) {
  xhat[t]<-(trendhat[t - 1] + beta1hat[t - 1]) * shat[t - d]
}
error<-as.vector(DATA - xhat)
for(j in 1:l) {
  if(j %% d == 0) {
    FORECAST[j]<-(trendhat[n] + beta1hat[n] * j) * shat[n]
  }
  FORECAST[j]<-(trendhat[n] + beta1hat[n] * j) * shat[n - (d - j %% d)]
}
WIN<-data.frame(DATA, trendhat, beta1hat, shat, xhat, error)
return(s0hat, beta1hat0, trendhat0, WIN, xhat, error, FORECAST)
}
```

```
CAUS.INV<-function(phi,theta,lags,cont=1)
{
  Psi<-0; Pi<-0; p<-length(phi)
  q<-length(theta); n<-max(p+q,lags); M<-0

  if (sum(abs(phi))==0){
    Psi<-c(theta,rep(0,n-q))}
    else{
  theta2<-c(theta ,rep(0, (n-q)))
Psi[1]<-phi[1]+theta[1]
if(p!=1) for (i in 2:p) {
  Psi[i]<-Psi[(i-1):1]*%phi[1:(i-1)]+phi[i]+theta2[i]}
  for (i in (p+1):n) {
  Psi[i]<-Psi[(i-1):(i-p)]*% phi+theta2[i]}
  }
  if (sum(abs(theta))==0) {
```

```

    Pi<-c(-phi,rep(0,n-p))}
    else{
phi2<-c(phi,rep(0,n-p))
Pi[1]<--theta[1]-phi[1]
if(q!=1) for(i in 2:q){
    Pi[i]<--Pi[(i-1):1]*%theta[1:(i-1)]-phi2[i]-theta[i]}
    for(i in (q+1):n){
    Pi[i]<--Pi[(i-1):(i-q)]*%theta-phi2[i]}
    }
Pi<-c(1,round(Pi[1:lags],4))
Psi<-c(1,round(Psi[1:lags],4))
ARroot<-polyroot(c(1,-phi))
if (sum(abs(phi))==0 |round(min(abs(ARroot)),5)>1){
    M[1]<-"model is causal"}
    else{
    M[1]<-"model not causal"}
MAroot<-polyroot(c(1,theta))
if(sum(abs(theta))==0 |round(min(abs(MAroot)),5)>1) {
    M[2]<-"model is invertible" }
    else {
    M[2]<-"model not invertible"}
if(cont!=1){
    return(M,Pi,Psi)}
    else
if(M[1]=="model is causal" & M[2]=="model is invertible"){
    return(M,Pi,Psi)}
    else
if(M[1]=="model not causal" & M[2]=="model is invertible"){
    return(M,Pi)}
    else
if(M[1]=="model is causal" & M[2]=="model not invertible"){
    return(M,Psi)}
    else
return(M,)

```

۲۶۱

```
    }

DUR.LEV<-function(cov)
{
  n<-length(cov); v0<-0; v<-0
  phi<-matrix(rep(0, (n - 1) * (n - 1)), ncol = (n - 1))
  v0<-cov[1]
  phi[1, 1]<-cov[2]/cov[1]
  v[1]<-v0 * (1 - phi[1, 1]^2)
  for(i in 2:(n - 1)) {
    phi[i,i]<-(cov[i+1]-cov[i:2] %*% phi[(i-1),1:(i-1)])*
              (v[i-1]^(-1))
    v[i]<-v[i - 1] * (1 - phi[i, i]^2)
    for(j in 1:(i - 1)) {
      phi[i,j]<-phi[(i-1),j]-phi[i,i]*phi[(i-1),(i-j)]
    }
  }
  v<-round(c(v0, v), 3)
  phi<-round(phi, 3)
  return(v, phi)
}
```

```
ACF.PACF<-function(phi, theta, sigma2, lag, PLOT)
{
  MM<-CAUS.INV(phi, theta, 1)$M
  if(MM[1] == "model is causal" & MM[2] == "model is invertible") {
    p<-length(phi); q<-length(theta); lags<-max(lag, p + q + 2)
    ACVF<-0; ACF<-0; L<-max(p + 1, q + 1); n<-(p + q) * 100
    Psi<-CAUS.INV(phi, theta, n)$Psi
    ACVF[1]<-sigma2 * sum(Psi^2)
    for(h in 2:L) {
      ACVF[h]<-sigma2 * (Psi[1:(n - h + 1)] %*% Psi[h:n]) }
  }
```

۲۶۲

```
for(h in (L + 1):(lags + 1)) {
  ACVF[h]<-phi %% ACVF[(h - 1):(h - p)] }
PACF<-diag(DUR.LEV(ACVF)$phi)[1:lag]
ACF<-round((ACVF[2:(lags + 1)]/ACVF[1])[1:lag], 3)
ACVF<-round(ACVF[1:(lag + 1)], 3)
if(PLOT == T) {
graphics.off()
  win.graph(width = 12, height = 5)
  par(mfrow = c(1, 2))
  plot(ACF, type = "h",ylim=c(min(ACF,-0.5)-0.1,max(ACF,0.5)+
    0.1),xlab="lags")
  abline(h = 0)
  plot(PACF,type="h",ylim=c(min(PACF,-0.5)-0.1,max(PACF,0.5)+
    0.1),xlab="lags")
  abline(h = 0)
  }
return(ACVF, ACF, PACF)
}
else return(MM)
}
```

```
FORE.INN<-function(DATA, phi, theta, sigma2, l)
{
M<-CAUS.INV(phi, theta, l)$M
if(M[1] == "model is causal" & M[2] == "model is invertible") {
  n<-length(DATA)
  if(l == 0){l<-1}
  acv<-ACF.PACF(phi, theta, sigma2, n + l + 1, F)$ACVF
  v<-0
  v[1]<-acv[1]
  Theta<-matrix(rep(0, (n + l - 1)^2), nrow = n + l - 1)
  Theta[1, 1]<-acv[2]/acv[1]
  v[2]<-acv[1] - Theta[1, 1]^2 * v[1]
}
```

```

if(n != 1)
  for(j in 2:(n + 1 - 1)) {
    Theta[j, j]<-v[1]^(-1) * acv[j + 1]
    for(i in 1:(j - 1)) {
      Theta[j, (j-i)]<-v[i+1]^(-1)*(acv[j-i+1]-Theta[i, i:1]%%
      (Theta[j, j:(j - i + 1)] * v[1:i]))
      v[j + 1]<-acv[1] - Theta[j, j:1]^2 %% v[1:j]
    }
  }
Theta<-round(Theta, 5)
v<-round(v[1:n], 5)
forecast<-0
innovation<-0
innovation[1]<-DATA[1]
for(k in 2:n) {
  forecast[k]<-innovation[1:(k-1)]%%Theta[(k-1), (k-1):1]
  innovation[k]<-DATA[k] - forecast[k]
}
forecast<-round(forecast, 4)
FORECAST<-0
VAR<-0
for(h in 1:l) {
  FORECAST[h]<-innovation[n:1]%%Theta[(n+h-1), h: (n+h-1)]
  VAR[h]<-acv[1]-Theta[(n+h-1), h: (n+h-1)]^2 %% v[n:1]
}
FORECAST<-round(FORECAST, 4)
VAR<-round(VAR, 4)
innovation<-round(innovation, 4)
return(innovation, v, forecast, FORECAST, VAR)
}
return(M)
}

COEF.FORE<-function(phi, theta, n, l)

```

۲۶۴

```
{
  if(l == 0){l<-1}
  Pi<-0; Psi<-0; Pil<-matrix(rep(0, n * 1), ncol = 1)
  p<-length(phi); q<-length(theta); N<-n; n<-n + 1

  CAIN.out<-CAUS.INV(phi, theta, l-1,-1)
  M<-CAIN.out$M
  Psi<-CAIN.out$Psi

  if(sum(abs(phi)) == 0)
    ARroot<-2
  else ARroot<-polyroot(c(1, - phi))
  S<-round(min(abs(ARroot)), 1) >= 1)
  SS<-(M[2] == "model is invertible")
  if(S == T & SS == T) {
    phi2<-c(phi, rep(0, n - p))
    Pi[1]<-- theta[1] - phi[1]
    if(q != 1)
      for(i in 2:q) {
        Pi[i]<-- Pi[(i-1):1]%%theta[1:(i-1)]-phi2[i]-theta[i]
      }
    for(i in (q + 1):n) {
      Pi[i]<-- Pi[(i - 1):(i - q)] %% theta - phi2[i]
    }
    Pi<-round(Pi[1:n], 4)
    Pil[, 1]<-- Pi[1:N]
    if(l != 1) {
      for(j in 2:l) {
        for(i in 1:N) {
          Pil[i,j]<-- (Pi[i+j-1]+Pi[1:(j-1)]%%Pil[i,(j-1):1])
        }
      }
    }
    Pil<-round(Pil, 3)
  }
}
```

270

```
    Psi<-round(Psi, 3)
    return(Psi, Pil)
  }
  else return(" model not invertible, or some AR root's are in unit circle")
}
```

```
FORECAST<-function(DATA, phi, theta, sigma2, l,theta0=0,PLOT=T)
{
  cil<-0
  if(theta0!=0){
    cil[1]<-theta0/(1+sum(theta))
  }
  pphi<--COEF.FORE(phi,theta,l,1)$Pil
  for(i in 2:l){cil[i]<-cil[1]-pphi[1:(i-1)]**cil[(i-1):1]}
  }
  M<-CAUS.INV(phi,theta,1)$M
  if(sum(abs(phi)) == 0)
    ARroot<-2
  else ARroot<-polyroot(c(1,- phi))
  S<-(round(min(abs(ARroot)), 1) >= 1)
  SS<-(M[2] == "model is invertible")
  if(S == T & SS == T) {
    n<-length(DATA)
    FORECAST<-0
    VAR<-0
    COFO.out<-COEF.FORE(phi, theta, n, l)
    Psi<-COFO.out$Psi
    A<-COFO.out$Pil
    FORECAST<-as.vector(t(A)**DATA[n:1]+cil)
    VAR<-sigma2*cumsum(Psi^2)
    FORECAST<-round(FORECAST,3)
    VAR<-round(VAR,3)
  }
  if(PLOT==T){
    graphics.off()
  }
}
```

277

```
win.graph(width = 12, height = 5)
tsplot(c(DATA, FORECAST))
abline(v = n)}
return(FORECAST, VAR)
}
return(" model not invertible,or some AR root's are in unit circle")
}
```

```
MA.INN<-function(DATA,q,m=floor(log(length(DATA))^2))
{
n<-length(DATA)
acv<-acf(DATA,lag=m,type="cov",plot=F)$acf
v<-0
v[1]<-acv[1]
Theta<-matrix(rep(0, m^2), nrow =m)
Theta[1, 1]<-acv[2]/acv[1]
v[2]<-acv[1] - Theta[1, 1]^2 * v[1]
for(j in 2:m) {
Theta[j, j]<-v[1]^(-1) * acv[j + 1]
for(i in 1:(j - 1)) {
Theta[j, (j-i)]<-v[i+1]^(-1)*(acv[j-i+1]-Theta[i, i:1]
%% (Theta[j, j:(j-i+1)]*v[1:i]))
v[j+1]<-acv[1]-Theta[j, j:1]^2 %% v[1:j] }
}
Theta<-round(Theta,10)
vm<-round(v[m+1], 10)
Var<-0
Var[1]<-1/n
for(i in 2:m){
Var[i]<-1/n*(1+sum(Theta[m, 1:(i-1)]^2))}
Var<-round(Var,3)
Thetahat<-Theta[m, 1:q]
Varhat<-Var[1:q]
```


۲۶۷

```
sigma2hat<-vm
Z<-round(Thetahat/(sqrt(Varhat)),3)
return(Thetahat,Varhat,sigma2hat,Z,)
}
```

```
ARMA.HANRIS<-function(DATA,p,q)
```

```
{
  if(p!=0 & q!=0){
    pq<-max(p,q)
    MEAN<-mean(DATA)
    Data<-DATA-mean(DATA)
    n<-length(Data)
    P1<-max(floor(log(n)^2),2*pq)
    Ztil1<-ar.yw(Data,aic=F,order.max=P1)$resid
    t0<-P1+q
    DEP1<-Data[(t0+1):n]
    DATA1<-matrix(rep(0,(n-t0)*(p+q)),nrow=n-t0)
    for(i in 1:p){DATA1[,i]<-Data[(t0-i+1):(n-i)]}
    for(i in (p+1):(p+q)){DATA1[,i]<-Ztil1[(t0-i+p+1):(n-i+p)]}
    OUT1<-lsfit(DATA1,DEP1,intercept=F)
    Beta1<-OUT1$coef
    if(pq==q){
      BEta<-0; DATA<-0; Ztil2[1:(n+q)]<-0
      BEta<-c(Beta1[1:p],rep(0,(q-p)),Beta1[(p+1):(p+q)])
      DATA<-c(rep(0,pq),Data)
      for(i in (pq+1):(n+pq)){ Ztil2[i]<-DATA[i]-BEta[1:q]
        %*%DATA[(i-1):(i-q)]-
        BEta[(q+1):(2*q)]%*%Ztil2[(i-1):(i-q)]}
      Ztil2<-Ztil2[(q+1):(n+q)]}
    else{
      BEta<-0; DATA<-0; Ztil2[1:(n+p)]<-0
      BEta<-c(Beta1,rep(0,(p-q)))
      DATA<-c(rep(0,pq),Data)
```

```

for(i in (pq+1):(n+pq)){ Ztil2[i]<-DATA[i]-BEta[1:p]
                                %*%DATA[(i-1):(i-p)]-
    BEta[(p+1):(2*p)]%*%Ztil2[(i-1):(i-p)]}
Ztil2<-Ztil2[(p+1):(n+p)]}
VAR1<-sum(Ztil2^2)/n
# Ut<-0;Vt<-0
Ut[1:p]<-0
for(i in (p+1):(n+p)){
    Ut[i]<-Beta1[1:p]%*%Ut[(i-1):(i-p)]+Ztil2[i-p]}
    Ut<-Ut[(p+1):(n+p)]
Vt[1:q]<-0
for(i in (q+1):(n+q)){
    Vt[i]<-Beta1[(p+1):(p+q)]%*%Vt[(i-1):(i-q)]+Ztil2[i-q]}
    Vt<-Vt[(q+1):(n+q)]
DEP2<-Ztil2[(pq+1):n]
DATA2<-matrix(rep(0,(n-pq)*(p+q)),nrow=n-pq)
    for(i in 1:p){DATA2[,i]<-Ut[(pq-i+1):(n-i)]}
    for(i in (p+1):(p+q)){DATA2[,i]<-Vt[(pq-i+p+1):(n-i+p)]}
OUT2<-lsfit(DATA2,DEP2,intercept=F)
Beta2<-OUT2$coef+Beta1
if(pq==q){
    BEta2<-0; DATA2<-0
    Ztil3[1:(n+q)]<-0
BEta2<-c(Beta2[1:p],rep(0,(q-p)),Beta2[(p+1):(p+q)])
DATA2<-c(rep(0,pq),Data)
for(i in (pq+1):(n+pq)){ Ztil3[i]<-DATA2[i]-BEta2[1:q]
                                %*%DATA2[(i-1):(i-q)]-
    BEta2[(q+1):(2*q)]%*%Ztil3[(i-1):(i-q)]}
    Ztil3<-Ztil3[(q+1):(n+q)]}
else{
BEta2<-0; DATA2<-0
    Ztil3[1:(n+p)]<-0
BEta2<-c(Beta2,rep(0,(p-q)))
DATA2<-c(rep(0,pq),Data)

```

۲۶۹

```
for(i in (pq+1):(n+pq)){ Ztil3[i]<-DATA2[i]-BETA2[1:p]
                        %%DATA2[(i-1):(i-p)]-
      BETA2[(p+1):(2*p)]%%Ztil3[(i-1):(i-p)]}
Ztil3<-Ztil3[(p+1):(n+p)]}
VAR2<-sum(Ztil3^2)/n
return(MEAN,P1,Beta1,VAR1,Beta2,VAR2)}
else return(" p and q must be greater than 0")
}
```

```
VAR.MEAN<-function(DATA)
{
  MEAN<-mean(DATA)
  n<-length(DATA)
  L<-floor(sqrt(n))
  OUT1<-acf(DATA,plot=F,type="cov")$acf[1:(L+1)]
  VARMEAN<-round(((OUT1[1]+2*(sum(OUT1[2:(L+1)]*(1-seq(1:L)/L))))/n),4)
  Z<-MEAN/sqrt(VARMEAN)
  return(MEAN,VARMEAN,Z)
}
```

```
WT<-function(DATA,phi){
  wt<-0
  p<-length(phi)
  n<-length(DATA)
  for(i in (p+1):n){
    wt[i]<-DATA[i]-DATA[(i-1):(i-p)]%%phi
  }
  Wt<-wt[(p+1):n]
  return(Wt)
}
SEACF<-function(DATA,K,L){
  RHOKJ<-matrix((rep(0,(K+1)*(L+1))),nrow=K+1)
```

۲۷۰

```
TESTRHOKJ<-matrix((rep(0,(K+1)*(L+1))),nrow=K+1)
TEST<-matrix((rep(0,(K+1)*(L+1))),nrow=K+1)
n<-length(DATA)
DATA<-DATA-mean(DATA)
phihat<-0
  Data<-matrix(rep(0,n*(K+1)),ncol=(K+1))
  for(i in 1:(K+1)){Data[1:(n-i+1),i]<-DATA[i:n]}
  Err<-matrix(rep(0,n*(L+2)),ncol=L+2)
  for(k in 1:K){
Out<-lm(Data[1:(n-k),(k+1)]~Data[1:(n-k),1:k])
  Err[1:n,1]<-c(Out$resid,rep(0,k))
Out<-lm(Data[2:(n-k),(k+1)]~Data[2:(n-k),1:k]+Err[1:(n-k-1),1])
  phihat[1:k]<-Out$coeff[2:(k+1)]
  RHOKJ[k+1,1]<-acf(WT(DATA,phihat[k:1]),plot=F)$acf[2]
  Err[1:n,2]<-c(Out$resid,rep(0,k+1))
  for(l in 2:(L+1)){
Out<-lm(Data[(l+1):(n-k),(k+1)]~Data[(l+1):(n-k),1:k]
  +Err[1:(n-k-1),1:1])
  Err[1:n,(l+1)]<-c(Out$resid,rep(0,k+1))
  phihat[1:k]<-Out$coeff[2:(k+1)]
  RHOKJ[k+1,l]<-acf(WT(DATA,phihat[k:1]),plot=F
  ,lag=l+1)$acf[l+1]
}
  Err<-matrix(rep(0,n*(L+2)),ncol=L+2) }
RHOKJ[1,]<-acf(DATA,plot=F,lag=L+2)$acf[2:(L+2)]
RHOKJ<-round(RHOKJ,2)

for(i in 1:(K+1)){
for(j in 1:(L+1)){
  if(abs(RHOKJ[i,j])> 2*sqrt((n-i-j)^(-1)))
    TESTRHOKJ[i,j]<-1
  TEST[i,j]<-round(abs(RHOKJ[i,j])/(2*sqrt((n-i-j)^(-1))),2)
}
}
```

271

```
dimnames(RHOKJ)<-list(paste("p=",0:K),paste("q=",0:L))
dimnames(TESTRHOKJ)<-list(paste("p=",0:K),paste("q=",0:L))

return(RHOKJ,TESTRHOKJ,TEST)
}
```

```
PORT.TEST<-function(N, OUT, K)
{
  tilRH01<-matrix(rep(0, (K + 1) * (K + 1)), ncol = K + 1)

  acfer<-OUT$acf.list$acf[1:(K + 1)]
  pacfer<-OUT$pacf.list$acf[1:K]

  QBP<-sum(acfer[2:(K + 1)]^2) * N
  QLB<-N * (N + 2) * sum(acfer[2:(K + 1)]^2 * (N - 1:K)^(-1))
  QMT<-N * (N + 2) * sum(pacfer[1:K]^2 * (N - 1:K)^(-1))

  for(i in 1:(K + 1)) {
    for(j in 1:(K + 1)) {
      tilRH01[i, j]<-acfer[abs(i-j) + 1]
    }
  }

  HATD<-N * (1 - (prod(eigen(tilRH01)$values ))^(1/K))

  return(QBP, QLB, QMT, HATD)
}
```

```
CORD<-function(A,K){
  Cord<-0
  for(i in 1:dim(A)[1]){
    for(j in 1:dim(A)[2]){
```

२४२

```
        if(A[i,j]==K){ Cord<-c(i,j);break}
            }
        }
return(Cord)
    }

OUTLIERS<-function(DATA,phi,theta,sigma2,delta=.7,C=3.5,mu=0,bf=0){
  MM<-CAUS.INV(phi,theta,1,-1)$M
  if( MM[2]=="model is invertible"){

DATA1<-0; HatWIO<-0; HatWAO<-0; HatWLS<-0; HatWTC<-0
HatVarWIO<-0; HatVarWAO<-0; HatVarWLS<-0; HatVarWTC<-0
LambWIO<-0; LambWAO<-0; LambWLS<-0; LambWTC<-0; nbf<-0;BI<-1;RI<-1
n<-length(DATA)
nbf<-bf
if(nbf !=0){
FOR<-FORECAST(DATA[n:1]-mu,phi,theta,sigma2,nbf,PLOT=F)$FORECAST+mu
DATA<-c(FOR[nbf:1],DATA)}
DATA<-DATA-mu
n<-n+nbf
CAIN<-CAUS.INV(phi,theta,n,-1)
PI<-CAIN$Pi
PSI<-CAIN$Psi
for(i in 2: (n+1)){
  RI[i]<-1+sum(PI[2:i])
  BI[i]<-delta^((i-1):0)%*%PI[1:i]
}

for(i in 1:n){
DATA1[i]<-PI[1:i]%*%DATA[i:1]}
for(i in 1:n){
HatWIO[i]<-DATA1[i]
HatVarWIO[i]<-sigma2

HatVarWAO[i]<-(sum(PI[1:(n-i+1)]^2))^( -1)
```

२४३

```
HatWAO[i]<-HatVarWAO[i]*(PI[1:(n-i+1)]**%DATA1[i:n])
HatVarWAO[i]<-HatVarWAO[i]*sigma2

HatVarWLS[i]<-(sum(RI[1:(n-i+1)]^2))^-1)
HatWLS[i]<-HatVarWLS[i]*(RI[1:(n-i+1)]**%DATA1[i:n])
HatVarWLS[i]<-HatVarWLS[i]*sigma2

HatVarWTC[i]<-(sum(BI[1:(n-i+1)]^2))^-1)
HatWTC[i]<-HatVarWTC[i]*(BI[1:(n-i+1)]**%DATA1[i:n])
HatVarWTC[i]<-HatVarWTC[i]*sigma2

LambWAO[i]<-HatWAO[i]/sqrt(HatVarWAO[i])
LambWIO[i]<-HatWIO[i]/sqrt(HatVarWIO[i])
LambWLS[i]<-HatWLS[i]/sqrt(HatVarWLS[i])
LambWTC[i]<-HatWTC[i]/sqrt(HatVarWTC[i])
}

n<-n-nbf
TEST<-matrix(rep(0,n*4),ncol=4)
TEST[,1]<-LambWAO[(nbf+1):(nbf+n)]
TEST[,2]<-LambWIO[(nbf+1):(nbf+n)]
TEST[,3]<-LambWLS[(nbf+1):(nbf+n)]
TEST[,4]<-LambWTC[(nbf+1):(nbf+n)]

DATA<-DATA[(nbf+1):(n+nbf)]
DATA<-DATA+mu
if(max(abs(TEST))<C){
ADJDATA<-DATA
return("not found OUTLIER",ADJDATA)}
COrd<-CORD(round(abs(TEST),5),max(round(abs(TEST),5)))
Time<-COrd[1]
if(COrd[2]==1){HatW<-HatWAO[Time+nbf]
VarHatW<-HatVarWAO[Time+nbf]
Kind<-"AO"
ADJDATA<-DATA
```

२१५

```
ADJDATA[Time]<-ADJDATA[Time]-HatW}
  else
  if (COrd[2]==2){HatW<-HatWIO[Time+nbf]
                  VarHatW<-HatVarWIO[Time+nbf]
                  Kind<-"IO"
ADJDATA<-DATA
for( i in Time:n){
ADJDATA[i]<-ADJDATA[i]-HatW*PSI[(i-Time+1)]}}

  else
  if (COrd[2]==3){HatW<-HatWLS[Time+nbf]
                  VarHatW<-HatVarWLS[Time+nbf]
                  Kind<-"LS"
ADJDATA<-DATA
ADJDATA[Time:n]<-ADJDATA[Time:n]-HatW}
  else
    { HatW<-HatWTC[Time+nbf]
      VarHatW<-HatVarWTC[Time+nbf]
      Kind<-"TC"
ADJDATA<-DATA
ADJDATA[Time:n]<-ADJDATA[Time:n]-HatW*delta^(0:(n-Time))}
  return(ADJDATA,Time,Kind,HatW,VarHatW)}
else
  return(MM)}
```