

فصل اول

خطاها

داناترین مردم کسی است که دانش مردم را به دانش خود جمع کند.
علم گنج و کلید آن سؤال است، پس سؤال کنید.
پیامبر اکرم (ص)

فصل اول – خطاها

با توجه به اینکه روشهای عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد می باشد و همچنین برای حل هر مسئله ای ابتدا مدلی ریاضی تعیین شده و سپس با استفاده از روشهایی آن مدل حل می شود، لذا در این فرآیند خطاهایی رخ می دهد.

۱.۱ منابع خطا

در علوم مختلف، عوامل گوناگونی وجود دارند که باعث ایجاد خطا می شوند که مهمترین آنها شامل موارد زیر است:

الف: **خطای مدل:** شامل صرف نظر نمودن از یک سری شرایط جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.
ب: **خطای داده:** این خطا در هنگام اندازه گیری فرضیات مسئله توسط شخص یا وسیله اندازه گیری صورت می گیرد.

ج: **خطای نمایش اعداد:** که در تقریب برخی اعداد با آن مواجه هستیم. به طور مثال برای تقریب عدد π چند رقم از ارقام اعشاری این عدد را در نظر گرفته و از سایر ارقام اعشاری صرف نظر می شود.

د: **خطای اعمال حسابی:** جواب حاصل از انجام برخی از اعمال حسابی دارای نامتناهی رقم است که تعدادی متناهی از ارقام را به عنوان جواب در نظر می گیریم، یا اینکه داده های اولیه دارای خطا هستند که انجام اعمال حسابی ممکن است این خطا را افزایش دهد.

ه: **خطای روش:** همه روشهای محاسبات عددی، تقریبی از جواب دقیق را به دست می دهند.
از خطاهای فوق تنها خطای نمایش اعداد، اعمال حسابی و روش از عوامل ایجاد خطا در محاسبات عددی بوده و دو خطای مدل و داده، ارتباطی با محاسبات عددی ندارند.

خطای نمایش اعداد

هر عدد حقیقی دارای یک بسط اعشاری منحصر به فرد است. این بسط اعشاری می تواند مختوم یا نامختوم باشد. بسط اعشاری نامختوم، یا متناوب است یا نامتناوب. اگر بسط اعشاری یک عدد، مختوم یا نامختوم و متناوب باشد آن عدد گویا است. بسط اعشاری اعداد گنگ، نامختوم و نامتناوب است.

انتخاب تقریبی از یک عدد

در اکثر محاسبات با اعدادی مواجه ایم که دارای بی نهایت رقم اعشار بوده و ما بسته به نوع وسیله محاسباتی تعدادی متناهی از این ارقام را انتخاب می کنیم. این انتخاب به دو روش انجام می گیرد:

الف: روش قطع کردن: در این روش بسط عدد را از رقم معینی به بعد قطع می‌کنیم. به طور نمونه عدد $\pi \approx 3/14$ تا دورقم اعشار و $e \approx 2/718$ تا سه رقم اعشار قطع شده‌اند.

ب: روش گرد کردن: در این روش تقریبی از عدد را بنا به دستورالعمل زیر انتخاب می‌کنیم:
فرض کنید انتخاب تقریبی از عدد A با n رقم اعشار مدنظر بوده و $(n+1)$ امین رقم اعشاری برابر b باشد. اگر $b < 5$ ، از این رقم اعشاری به بعد حذف می‌شود و اگر $b > 5$ ، به رقم اعشار قبلی یک واحد اضافه شده و از رقم $n+1$ ام به بعد حذف می‌شوند. اما در حالتی که $b = 5$ ، رقم ماقبل باید زوج شود. (در حالتی که $b = 5$ دیدگاه‌های دیگری نیز مطرح است) در هر حالت اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، حداکثر خطا برابر است با $10^{-n} \times 5/10$ که به طور معمول این خطا نصف خطای قطع کردن عدد تا n رقم اعشار است.

مثال: اگر عدد $1/32571$ تا 1 ، 2 یا 3 رقم اعشار گرد شود، به ترتیب اعداد $1/3$ ، $1/32$ و $1/326$ حاصل می‌شود. $1/42$ گرد شده عدد $1/4151$ تا دو رقم اعشار است.

سنجش خطا

۱- خطای مطلق که آن عبارت است از:

$$e(a) = |A - a| \quad \text{اگر } a \text{ تقریبی از } A \text{ باشد آنگاه}$$

۲- خطای نسبی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|}$$

خطای اعمال حسابی

خطای عمل جمع: هرگاه a و b به ترتیب مقادیر تقریبی A و B باشند و همه این اعداد مثبت باشند، آنگاه:

$$e(a + b) \leq e(a) + e(b)$$

$$\delta(a + b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\} \quad (1.1)$$

فصل اول - خطاها

خطای عمل تفریق:

همانند خطای مطلق عمل جمع می‌توان ثابت نمود که:

$$e(a-b) \leq e(a) + e(b) \quad (۲.۱)$$

و بنا بر تعریف خطای نسبی:

$$\delta(a-b) \leq \frac{e(a-b)}{|a-b|} \quad (۳.۱)$$

نکته: بنا بر خطای نسبی عمل تفریق، هرگاه A و B دو عدد نزدیک به هم باشند، آنگاه $\delta(a-b)$ می‌تواند عددی بزرگ باشد. لذا بهتر است از تفریق دو عدد نزدیک به یکدیگر پرهیزید. در چنین مواردی ارقام با معنای $a-b$ کمتر از ارقام با معنای a و b است.

خطای عمل ضرب:

در مورد ضرب اعداد تقریبی داریم:

$$\begin{aligned} e(ab) &\leq |a|e(b) + |b|e(a) \\ \delta(ab) &\leq \delta(a) + \delta(b) \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

خطای عمل تقسیم:

بنا به تعریف خطای مطلق تقسیم اعداد تقریبی به صورت زیر است:

$$e\left(\frac{a}{b}\right) = \left| \frac{A}{B} - \frac{a}{b} \right| \quad (۵.۱)$$

همچنین خطای نسبی نیز از رابطه زیر قابل محاسبه است که اثبات آن به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \left| \frac{e(a)}{a} - \frac{e(b)}{b} \right| \quad (۶.۱)$$

خطای روش

در محاسبات عددی، به منظور تعیین مقدار تقریبی جواب مسئله، روش های متنوعی به کار می رود. این روشها ممکن است پایدار یا ناپایدار باشند. یک روش (الگوریتم) عددی **ناپایدار** است اگر خطاهای کوچک مرتکب شده در یک مرحله از الگوریتم، در مراحل بعدی افزایش یافته و دقت محاسبات نهایی را بسیار کاهش دهد. اما اگر خطای کوچک اولیه در جواب نهایی تأثیر چندانی نداشته باشد، آن روش را **پایدار** می نامند.

مثال: نمونه دیگری از ناپایداری عددی، توسط محاسبه انتگرال زیر فراهم می گردد:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \quad n \geq 1$$

به کمک انتگرال گیری جزء به جزء ثابت می شود

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = n x^{n-1} dx \\ dv = e^{x-1} dx \Rightarrow v = e^{x-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = x^n e^{x-1} \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx$$

$$\Rightarrow I_n = 1 - n I_{n-1} \quad n \geq 2 \quad (۷.۱)$$

همچنین چون $0 \leq x \leq 1$ لذا $-1 \leq x-1 \leq 0$ و بنابراین $e^{-1} \leq e^{x-1} \leq e^0$ یا

$$e^{-1} x^n \leq x^n e^{x-1} \leq x^n$$

که با انتگرال گیری از طرفین نامساوی داریم:

$$e^{-1} \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \frac{e^{-1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

فصل اول - خطاها

بنابراین، همواره $I_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

اینک فرض کنید بخواهیم مقدار تقریبی I_9 را محاسبه کنیم. با توجه به اینکه

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx = e^{-1} \approx 0.367879$$

از رابطه (۷.۱) به دست می آوریم:

$$I_2 = 1 - 2I_1 = 0.264242, \quad I_3 = 1 - 3I_2 = 0.207274$$

$$I_4 = 1 - 4I_3 = 0.170904, \quad I_5 = 1 - 5I_4 = 0.145748$$

$$I_6 = 1 - 6I_5 = 0.127120, \quad I_7 = 1 - 7I_6 = 0.11016$$

$$I_8 = 1 - 8I_7 = 0.11872, \quad I_9 = 1 - 9I_8 = -0.06848$$

مشاهده می شود که مقدار I_9 منفی است که نادرست می باشد. علت چیست؟

دلیل، آن است که 0.367879 تقریبی از I_1 بوده که خطایی حدود $4/4 \times 10^{-7}$ دارد. خطای

I_2 دو برابر خطای I_1 و خطای I_3 سه برابر خطای I_2 و شش برابر خطای I_1 می باشد. با ادامه این

روند مشخص می شود: $e(I_9) = 9! \times e(I_1)$

یعنی خطای اولیه $4/4 \times 10^{-7}$ منجر به خطای نهایی حدود 0.16 شده است و لذا رابطه (۷.۱) برای

محاسبه دنباله I_n ناپایدار است، اما اگر این رابطه را به صورت

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \quad n \geq 2 \quad (8.1)$$

بازنویسی کرده و قرار دهیم $I_{16} \approx 0$ نتایج زیر حاصل می شود:

$$I_{15} = \frac{1 - I_{16}}{16} \approx 0.0625, \quad I_{14} = \frac{1 - I_{15}}{15} \approx 0.0625$$

$$I_{13} \approx 0.0669643, \quad I_{12} \approx 0.0717720$$

$$I_{11} \approx 0.0773523, \quad I_{10} \approx 0.0838771$$

$$I_9 \approx 0.0916123$$

مقدار بدست آمده برای I_9 به اندازه کافی دقیق است. زیرا بنابر رابطه (۸.۱) داریم:

$$\frac{1}{17} < I_{16} < \frac{1}{17} \quad \square \quad I_{16} \text{ خطایی به اندازه } \varepsilon \text{ مرتکب شده ایم که } \varepsilon \leq \frac{1}{17}, \text{ اما}$$

برای محاسبه I_{15} این خطا بر ۱۶ تقسیم می شود و بعد در محاسبه I_{14} بر ۱۵ و با ادامه این روند

$$e(I_9) \square \frac{1}{17 \times 16 \times 15 \times \dots \times 9} \square 1/0.2 \times 10^{-9}$$

که مقداری ناچیز است و لذا رابطه فوق برای محاسبه دنباله I_n پایدار است.