تمرینات مروری فصل ۴

۱) $(-۵،۰)$ min مطلق

۲) min مطلق : $\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}-۳\\۰\end{matrix}\right.$

max مطلق : $\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$

۳) $(۳ ، ۰)$ min مطلق

$(۰ ، ۹)$ max مطلق

یعنی min (۵ و ۲-)

۴) min مطلق : $\left|\begin{matrix}\sqrt{۶}\\۰\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}۰\\۳۶\end{matrix}\right.$

max مطلق : $\left|\begin{matrix}۵\\۳۶۱\end{matrix}\right.$

۵) min مطلق : $(\frac{-\pi}{۲},-۲)$

max مطلق : $(\frac{\pi}{۶},۲)$

۶) $f'(\frac{۸-\sqrt{۵۴}}{۵})=-۱۷۵۱۷$

۷) $f(-۲)=۰$

۸) $f'(\frac{8-\sqrt{54}}{5})=129/04$

۹)

۱۰)

۱۱)

۱۲)

$c=-۲ \quad b=۱۸ \quad a=-۹$

۱۳) ؟

۱۴) ؟

۱۵) ؟

۱۶) در $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ min دارد و در $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ ماکزیمم دارد.

۱۷)

الف) $f(x)=x^r-rx+k \quad r\neq ۱, r>۰$

$f'(x)=rx^{r-۱}-r \quad x^{r-۱}=۱ \quad r-۱>۰ \quad r=۱$

$۰<r<۱ \quad f'(x)=\frac{r}{x^{۱-r}}-r$

$f''(x)=\frac{-r\overset{>۰}{(۱-r)}\overset{>۰}{x^{-r}}}{(x^{۱-r})^۲>۰}<۰\Rightarrow$ نسبی‌دارد

در $\max x=1$

ب) $r>۱ \quad f''(x)=(r-۱)\ ,\ x^{r-۲}>۰\Rightarrow$

در $\min x=۱$ نسبی دارد

۱۹) $c=\frac{\pi}{۶}$

۲۰)

۲۱) $c=\pm\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲۲)

۲۳)

۲۴) $x=\frac{-b}{۲a}$

۲۵)

$y=x^4+8m^3-270x^2$

$y'+6x^3+24x^2-540x\Rightarrow x(4x^2+24x-540)=-$

علف $y''=12x^2+48x-540 \left\langle \begin{array}{l} -\frac{17}{2} \\ \frac{9}{2} \end{array} \right.$

۲۶) الف) Max نسبی = ۲

ب) Min نسبی = ۴

۲۷) خیر زیرا y' در اطراف صفر تغییر علامت نمی‌دهد.

۲۸) ب درست است .

۲۹) $y_{Max}=۵$

۳۰) $\frac{٤}{۳}$

۳۱) $b=-۶$

۳۲)

۳۳) $a=-۱ \quad b=۳$

۳۴)

$a=٤ \qquad b=-۱۲ \qquad c=۱۰$

۳۵)

۳۶)

۳۷)

$e=۰ \qquad a=\frac{۱}{۵} \qquad c=\frac{٦}{۵} \qquad b=d=۰$

۳۸)

$$f(x)=\begin{cases}[x] & x\in z\\ [x]+\sqrt{p} & x\notin z\end{cases}$$

تابع f در $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و از آنجا که f' همواره صعودی مثبت است درنتیجه f صعودی است.

۳۹)

۴۰)

۴۱)

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & ۰<x<۱\\ -|x| & ۱<x<۳\\ |x| & x>۳\end{cases}$$

۴۲) نقطه $(x,\frac{Ax+c}{B})$ را روی خط درنظر بگیرید داریم

$$d=\sqrt{(x-x_۱)^۲+(-(\frac{Ax+c}{B})-y_۱)^۲}$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم داریم

$$d'=\frac{۲(x-x_۱)+۲(\frac{A}{B})(-\frac{Ax+c}{B}-y_۱)}{۲\sqrt{(x-x_۱)^۲+(-(\frac{Ax+c}{B})-y_۱)^۲}}=۰\Rightarrow$$

۴۳)

$xy+z=۱ \qquad f(x)=۱$

چون

$(x^۲+۱),(z^۲+۱),(y^۲+۱)>۰\Rightarrow$ عبارت ≥ ۸

۴۴)

۴۵) شیب بین دو نقطه برابر $\frac{۸}{۳}$ پس چون تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است طبق قضیه مقدار میانگین باید نقطه‌ای وجود داشته باشد c که $\frac{۸}{۳}$ از طرفی طبق فرض مسئله $f(x)>۳$ این امر غیرممکن است.

۴۶)

$y'=101x^{100}+51x^{50}+1$

به ازای هیچ مقداری y' صفر نمی‌شود.

$\begin{array}{l} f(۰)=-۱ \\ f(۱)=۲ \end{array}$ $f(۰)f(۱)<۰$ ریشه بین صفر و یک می‌باشد

۴۷)

$s_\Delta=h\times$ قائده

s وقتی Max است که h Max باشد

$$h=\frac{۱-y_۱+mx_۱+b}{\sqrt{۱+m^۲}}=\frac{۱-x_۱^۲+x_۱+b_۱}{\sqrt{۲}}$$

از h اکنون نسبت به $x_۱$ مشتق می‌گیریم داریم

$$h'=۰=\frac{۱}{\sqrt{۱+m^۲}}\times(-۱+m)\frac{|-y_۱+mx_۱+b|}{-y+mx_۱+b}=۰$$

$$m=۱ \qquad \frac{(۲x_۱+m)}{|\quad|}\Rightarrow$$

$$h'=\frac{۱}{\sqrt{m^۲+۱}}(-۲x_۱+m)\frac{-x_۱^۲+mx+b}{|-x_۱^۲+mx+b|}=۰\Rightarrow$$

$$x_۱=\frac{m}{۲}$$

ماکزیمم

$$\text{برای } s\; h=\frac{\left|-(\frac{m}{۲})^۲+m(\frac{m}{۲})+b\right|}{\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{\frac{m^۲}{٤}+b}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

نقطه‌ایجاد ماکزیمم مساحت

بنابراین نقطه $p(\frac{m}{۲},\frac{m^۲}{٤})$ است

(۴۸

$$y'=۲x \qquad ۱=\frac{|۰+y|}{\sqrt{٤+۱}} \qquad y=\sqrt{٥}$$

$$o'=(۰,\sqrt{۲}) \quad x_۱=۰ \quad x+y=۰$$

(۴۹

(۵۰

$$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{33^3}-\sqrt{32^2}}{33-32}$$

$$\max f'(x)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۳۳} \quad \min f'(x)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۳۲}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{32}<\sqrt{33^3}-\sqrt{32^2}<\frac{3}{2}\sqrt{33}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{32}+\sqrt{32^2}<\sqrt{(33)^3}<\frac{3}{2}\sqrt{33}+\sqrt{32^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{32^2}+\sqrt{32^3}}<\sqrt{32}<\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{33}+\sqrt{32^2}}$$

(۵۱

آنگاه حداکثر یک نقطه $f'(x)<۱$ $\quad f(x_.)=x_.$ ثابت دارد

(۵۲

$$f(۰)=۸$$

$f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است حداقل یک ریشه بین ۰ و ۱ دارد. برهان خلف : فرض می‌کنیم f در (a,b) بیش از یک ریشه دارد در نتیجه f' در (a,b) حداقل دو ریشه دارد.

$$f'(x)=۲۰x^٤+۹x^۲+۳=۰$$

$$f''(x)=80x^3+18x=0 \quad x=0$$

$$۸۰x^۲=-۱۸ \text{ غ م} \qquad x=۰\not\in(a,b)$$

تناقض حکم ثابت شده

(۵۳

$$٤x+٤y+٤z\le ۱۰۸ \quad x+y+z\le ۲۷ \quad x=y=z$$

$$۳x\le ۲۷ \quad x\le ۹$$

(۵۴

(۵۵

$$y=\cos\theta \quad x=۱\times\sin\theta\Rightarrow x=\sin\theta$$

$$N=s\times h=\frac{(۲+۲x)y\times h}{۲}<y(۱+x)=$$

$$(۱+\sin\theta)\cos\theta\times h$$

$$N=20\cos\theta(1+\sin\theta)$$

ب) $N'_\theta=20\left[-\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta\right]=0$

$$-\sin\theta-\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۰\Rightarrow$$

$$\sin^۲\theta+\sin\theta-\cos^۲\theta=۰$$

$$۲\sin^۲\theta+\sin\theta-۱=۰ \qquad ۲x^۲+x-۱=۰$$

$$\frac{-۱\pm۳}{٤} \quad \sin\theta=-۱ \text{ غ ق} \quad \sin\theta=\frac{۱}{۲} \quad \theta=۳۰$$

(۵۶

(۵۷

(۵۸

(۵۹

(۶۰

$$\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + x^{۲} \Rightarrow$$
$$BC = \sqrt{٦٤ + x^{۲}}$$

طبق قضیه تالس در مثلث (ABC) و مثلث (EDC) تشابه وجود دارد :

$$\frac{AC}{EA} = \frac{BC}{DB} \Rightarrow \frac{x}{۲۷} = \frac{\sqrt{٦٤ + x^{۲}}}{DB} \Rightarrow DB = \frac{۲۷\sqrt{٦٤ + x^{۲}}}{x}$$

اگر $DC = L$ داریم :

$$L = BC + BD \Rightarrow L = \sqrt{٦٤ + x^{۲}} + \frac{۲۷\sqrt{٦٤ + x^{۲}}}{x} \quad (۱)$$

از L مشتق گرفته و برابر با صفر می‌کنیم :

$$L' = \frac{۲x}{۲\sqrt{٦٤ + x^{۲}}} + \frac{۲۷\dfrac{۲x^{۲}}{٥٤\sqrt{٦٤ + x^{۲}}} - ۲۷\sqrt{٦٤ + x^{۲}}}{x^{۲}} \Rightarrow$$

$$L' = \frac{x^{۳} - ٦٤}{x^{۲}\sqrt{٦٤ + x^{۲}}} \overset{L'=۰}{\Longrightarrow} x^{۳} - ٦٤ = ۰ \Rightarrow x^{۳} = ٦٤ \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[۳]{٦٤} \Rightarrow x = ٤$$

x=۴ را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم :

$$L = \sqrt{٦٤ + x^{۲}} + \frac{۲۷\sqrt{٦٤ + x^{۲}}}{x} \Rightarrow$$
$$\sqrt{64+16} + \frac{27\sqrt{64+16}}{4} \Rightarrow L = 8/9 + 60/08$$
$$\Rightarrow L = ٦٨/۹۸(cm)$$

(۶۱

$$y' = ۳x^{۲} - ٦x + ٥$$
$$y'' = ٦x - ٦ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$
$$(۱,۳) \quad y - ۳ = ۲(x - ۱) \qquad y = ۲x + ۱$$

(۶۲

$$p = 2b + a + \frac{\pi}{4}a \qquad s = ab + \frac{1}{2} + \frac{\pi a^2}{4}$$

$$b = \frac{p - a - \frac{\pi}{4}a}{2} \Rightarrow s = \frac{ap - a^2 - \frac{\pi}{2}a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{8}$$

$$s' = \frac{p - ۲a - \pi a}{۲} + \frac{\pi}{٤}a = ۰$$

$$\frac{p}{۲} + a(-۱ - \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{٤}) = ۰ \qquad a = \frac{۲p}{\pi + ٤}$$

$$b = \frac{p}{۲} - \frac{۲p + p\pi}{۲\pi + ۸}$$

(۶۳

(۶۴

(۶۵

$$x^{۲} + r^{۲} = a^{۲} \qquad r^{۲} = a^{۲} - x^{۲}$$
$$h = a + x$$
$$N = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(a^{۲} - x^{۲})(a + x)$$
$$N = \frac{۱}{۳}(a - x)(a + x)^{۲} \Rightarrow$$
$$N'_x = \frac{۱}{۳}\left[-(a + x)^{۲} + ۲(a^{۲} - x^{۲})\right] = ۰$$
$$-a^{۲} - ۲ax - x^{۲} + ۲a^{۲} - ۲x^{۲} = ۰$$
$$a^{۲} - ۳x^{۲} - ۲ax = ۰$$
$$۳x^{۲} + ۲ax - a^{۲} = ۰$$
$$x = \frac{-a + \sqrt{a^{۲} + ۳a^{۲}}}{۳} = \frac{a}{۳}$$
$$h = x + a = \frac{٤}{۳}a$$

(۶۶

$$h \times x^{۲} = ٦ \qquad x = ۱٥$$

(۶۷

(۶۸

$$f'(x) \leq ۲ \qquad \frac{f(x) - f(۰)}{x} \leq ۲ \Rightarrow f(x) \leq ۲x + f(۰)$$
$$[۰,۲] \qquad \frac{f(x) - f(٦)}{x - ٦} \leq ۲ \Rightarrow f(x) \leq ۲x - ۱۲ - f(٦)$$

(۶۹

(۷۰

$$D_f = R$$

$$f(x)=\frac{x}{۱+x^{۲}} \qquad f'(x)=\frac{x^{۲}+۱-۲x^{۲}}{N^{۲}}=۰$$

$$x=\pm ۱ \left\langle \begin{array}{ll} f(۱)=\frac{۱}{۲} & \max \\ f(-۱)=-\frac{۱}{۲} & \min \end{array} \right.$$

ب) با توجه به عدد بالا و اینکه $f'(x)=\frac{x}{۱+x^{۲}}$

پس f' بر b,a پیوسته مشتق‌پذیر است

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$|f'(x)|=\frac{۱}{۲} \qquad |f'(x)|\leq \frac{۱}{۲}$$

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq \frac{۱}{۲} \qquad |f(b)-f(a)|\leq \frac{۱}{۲}(b-a)$$

(۷۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(۳+x)^{۲}-\sin a}{x}=\frac{۲\sin(۳ax)\cos(۳ax)}{۱}$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۳\cos ۳=\sin ٦^{o}$$

(۷۲

(۷۳

$$\lim(\frac{m}{۱-x^{m}}-\frac{n}{۱-x^{n}})=\lim_{x\to ۱}\frac{m(۱-x^{n})-n(۱-x^{m})}{(۱-x^{m})(۱-x^{n})}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{-mn(x)^{n-۱}+mnx^{m-۱}}{-mx^{m-۱}(۱-x^{n})-nx^{n-۱}(۱-x^{m})}$$

$$=\lim\frac{m+n(x^{n-۱}x^{m-۱})}{-(x^{m-۱}\cdot x^{n-۱})(m(۱-x^{n})+n(۱-x^{m}))}=\frac{m+n}{mn}$$

(۷۴

(۷۵

$$\lim_{x\to +\infty} ۲\sin(\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{۲})\cos(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲})=۰$$

(۷۶

$$y=۳t \quad , \quad x=۲t^{۲} \quad y=۳t \quad t=\frac{\sqrt{x}}{۲}$$

$$y'=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲x}}$$

(۷۸

$$\sqrt{۳۷/٥}\Rightarrow$$

$$\Delta y= f(37/5)-f(36)\Rightarrow \Delta y=\sqrt{37/5}-\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\sqrt{۳۷/٥}-٦,\sqrt{۳۷/٥}=\sqrt{۳٦+۱/٥}\Rightarrow$$

$$\sqrt{۳۷/٥}=٦+۰/۰٤۱\Rightarrow \sqrt{۳۷/٥}=٦/۰٤۱$$

(۷۹

$$۸۲^{\frac{۱}{٤}}=\sqrt[٤]{۸۲}\Rightarrow$$

$$\Delta y= f(۸۲)-f(۸۱)\Rightarrow \Delta y=\sqrt[٤]{۸۲}-\sqrt[٤]{۸۱}\Rightarrow$$

$$\Delta y=\sqrt[٤]{۸۲}-۳,\sqrt[٤]{۸۲}=\sqrt[٤]{۸۱}+۱\Rightarrow \sqrt[٤]{۸۲}=۳+۰/۰۱۲$$

$$\Rightarrow \sqrt[٤]{۸۲}=۳/۰۱۲$$

(۸۰

$$(0/00098)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{0/00098}\Rightarrow$$

$$\Delta y= f(0/001)-f(0/00098)\Rightarrow$$

$$\Delta y\sqrt[۳]{۰/۰۰۱}-\sqrt[۳]{۰/۰۰۰۹۸}\Rightarrow$$

$$\Delta y=۰/۱-\sqrt[۳]{۰/۰۰۰۹۸}=\sqrt[۳]{۰/۰۰۱-۰/۰۰۰۰۲}\Rightarrow$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۰۰۹۸}=۰/۱-۰/۰۲\Rightarrow \sqrt[۳]{۰/۰۰۰۹۸}=۰/۰۸$$

(۸۱

$$\cos(۱٤۸^{o})\Rightarrow$$

$$\Delta y= f(150)-f(148)\Rightarrow \Delta y=\cos 150^{o}-\cos 148^{o}$$

$$\Rightarrow \Delta y=-0/866-\cos 148^{o}=\cos(150-2)\Rightarrow$$

$$\cos 148^{o}=-0/866+0/013\Rightarrow \cos 148^{o}=-0/853$$

(۸۲

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=۲\sqrt{a}\,f'(a)$$

۸۳)

$$y=\sin^{٤}x+\cos^{٤}x$$
$$y^{(۱)}=٤\sin^{۳}x\cos x-٤\sin x\cos^{۳}x=$$
$$٤\sin x\cos x(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)=٤\cos(٤x+\frac{\pi}{۲})$$
$$y^{(۲)}=-٤\cos ٤x=٤\cos(٤x+\frac{۲\pi}{۲})$$
$$y^{(3)}=16\sin 4x=4^2\cos(4x+\frac{3\pi}{2})$$
$$y^{n}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$

۸۴)

۸۵)

$$۱-\sqrt{۲-\sqrt{۳-x}}\geq ۰\quad ۱\geq\sqrt{۲-\sqrt{۳-x}}$$
$$۱\geq ۲-\sqrt{۳-x}\qquad \sqrt{۳-x}\geq ۱\qquad ۳-x\geq ۱$$
$$x\leq ۲\to D_f$$

$$f'(x)=\frac{(۱-\sqrt{۲-\sqrt{۳-x}})'}{۲f(x)}=\frac{\frac{-(\sqrt{۳-x})}{۲\sqrt{۲-\sqrt{۳-x}}}}{۲f(x)}$$

$$\frac{\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲\sqrt{۲-\sqrt{۳-x}}}}{۲f(x)}$$

۸۶)

۸۷)

$$\overset{\Delta}{ABC}$$
$$\Rightarrow BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}\Rightarrow$$
$$BC^2=6^2+15^2\Rightarrow BC=16/15$$

طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AC}{EA}=\frac{BC}{DB}\Rightarrow\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۱٦/۱۵}{x}\Rightarrow x=۲۱/٥$$

$$L=BC+BD\Rightarrow L=۱٦/۱٥+۲۱/٥\Rightarrow L=۳۷/٦٥$$

$$EC=EA+AC\Rightarrow EC=۲۰+۱٥\Rightarrow EC=۳٥$$
$$L^{۲}=(EC)^{۲}+h^{۲}\Rightarrow h^{۲}=L^{۲}-(EC)^{۲}\Rightarrow$$
$$h=\sqrt{L^2-(EC)^2}\Rightarrow h=\sqrt{14170/5-1225}$$
$$\Rightarrow h\cong 40/4m$$