معادلات دیفرانسیل مقدماتی[16]

معادلات دیفرانسیل قبلاً در بخشهای ۶.۲ و ۶.۴ آمده‌اند، و در فصل ۶ معادلات دیفرانسیلی از نوع خاص، به نام معادلات جدایی‌پذیر، در حل چند مسئلهٔ کار بسته‌به طور وسیع به کار گرفته شد. در این فصل کوتاه، مبحث معادلات دیفرانسیل را کمی بیشتر تعقیب می‌کنیم. این مبحث بسیار وسیع بوده، و در فرصت باقیمانده فقط می‌توانیم چند مطلب مقدماتی مهم را مطرح سازیم. ما خود را به معادلات دیفرانسیل معمولی محدود می‌کنیم؛ یعنی، معادلاتی که شامل یک یا چند مشتق تابع $y = y(x)$ از تنها متغیر مستقل x اند. البته، معادلات دیفرانسیل جزئی نیز وجود دارند که شامل مشتقات جزئی تابع $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ از چند متغیر مستقل $x_1, \ldots, x_n$ اند، ولی بررسی اصولی این معادلات از حوصلهٔ این درس خارج می‌باشد.

منظور از مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق تابع مجهول y که در معادله آمده است. گوییم یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n خطی است اگر بتوان آن را به شکل زیر نوشت:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x),$$

که در آن $y', y'', \ldots, y^{(n)}$، n مشتق اول y بوده، و $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ فقط تابع متغیر مستقل x باشند (بعضی یا تمام آنها ممکن است ثابت باشند)؛ در غیر این صورت، معادله را غیرخطی خواهیم نامید. مثلاً،

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - xy = e^x$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است، ولی

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \qquad y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0, \qquad x\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$$

همه معادلات دیفرانسیل غیرخطی‌از مرتبهٔ اول می‌باشند. اکثر معادلات بخش ۱۶.۱غیر خطی‌اند، ولی بقیهٔ فصل عمدتاً به معادلات خطی مراتب اول و دوم و کاربردهـا یشان می‌پردازد.

۱۶.۱ معادلات کامل و عاملهای انتگرالگیری

فرض کنیم $U = U(x, y)$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر دومتغیره بوده، و معادلهٔ

$$U(x, y) = C \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد. با این فرض که (۱) y را به‌طور ضمنی به صورت تابع مشتقپذیری از x تعریف می‌کند، از قاعدهٔ زنجیره‌ای معلوم می‌شود که

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0, \tag{۲}$$

که درآن توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ مشتقات جزئی U می‌باشند:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{۳}$$

لذا، **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول معادلهٔ (۲) با (۱) داده می‌شود. این یعنی به ازای هر مقدار از C، معادلهٔ (۱) یک تابع ضمنی مانند $y = y(x)$ تعریف می‌کند که در معادلهٔ (۲) صدق می‌نماید. همچنین، ممکن است (۲) *جوابهای منفرد* داشته باشد؛ یعنی، جوابهایی که نظیر به هیچ مقداری از C نیستند؛ مثلاً"، در مثال ۴ زیر یک‌جواب‌منفرد داریم. توجه کنید که معادلهٔ (۲) برحسب دیفرانسیلها شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{۲'}$$

معادلات کامل. به عکس، اگر معادلهٔ دیفرانسیلی به شکل (۲) داده شده باشد که درآن $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند، فرض می‌کنیم تـابعی چون $U = U(x, y)$ موجود باشد که در شرایط (۳) صدق نمایند. در این صورت، گوییم (۲) یک *معادلهٔ دیفرانسیل کامل* است، و در این وضع

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$$

یک دیفرانسیل کامل نام دارد (مفهوم اخیر در مسئلهٔ ۲۹ ، صفحهٔ ۱۴۵۸، پیش‌بینی شده بود) . ما قبلاً " از فصل ۱۵ می‌دانیم که $P\,dx + Q\,dy$ بر قلمرو همبند سادهٔ D دیفرانسیل کامل است ، یا معادلاً " $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D میدان گرادیان است اگر و فقط اگر شرط

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{۴}$$

در هر نقطه از D برقرار باشد . در واقع ، (۳) رابطهٔ (۴) را ایجاب می‌کند ، زیرا

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

و همانطور که در قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۴۵۳، برای قلمرو مستطیلی ، و درنتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۴۸۲، برای قلمرو همبند سادهٔ کلی نشان دادیم ، رابطهٔ (۴) رابطهٔ (۳) را ایجاب خواهد کرد .

مثال ۱ . در بخش ۶.۶ معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر ، یعنی معادلاتی به شکل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (g(y) \neq 0), \tag{۵}$$

شامل تابع مجهول $y = y(x)$ و دو تابع معلوم $f(x)$ و $g(y)$ را معرفی کردیم . **هر معادلهٔ جدایی پذیر کامل است** . برای مشاهدهٔ این امر ، فرض کنیم $f(x)$ و $g(y)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند ، و قرار می‌دهیم

$$P = f(x), \qquad Q = -g(y).$$

در این صورت ، رابطهٔ (۵) را می‌توان به شکل (۲) نوشت ، و شرط کامل بودن خودبه‌خود برقرار است ، زیرا $\partial Q/\partial x = 0 = \partial P/\partial y$.

مثال ۲ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$(2x + y) + (x + y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{۶}$$

را درنظر می‌گیریم . این معادله با آنکه جدایی‌پذیر نیست (چرا ؟) کامل است . درواقع ، $P = 2x + y$ و $Q = x + y$ ؛ درنتیجه ، $\partial Q/\partial x = 1 = \partial P/\partial y$. معادلهٔ (۶) را می‌توان به طرق مختلف حل کرد . یک طریق نوشتن (۶) به شکل معادل زیر است :

$$(y\,dx + x\,dy) + 2x\,dx + y\,dy = 0, \tag{۶'}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$d(xy) + d(x^2) + d(\tfrac{1}{2}y^2) = 0.$$

لذا، ($۶'$) به صورت زیر درمی‌آید:

$$d(xy + x^2 + \tfrac{1}{2}y^2) = 0,$$

که فوراً به جواب عمومی

$$xy + x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = C \tag{۷}$$

منجر می‌شود، که در آن C یک ثابت دلخواه است. لذا، معادلهٔ (۶) را به آسانی با *امتحان* حل کرده‌ایم.

راه دیگری برای حل (۶) این است که بنویسیم

$$P = 2x + y = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = x + y = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{۸}$$

که در آن $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ می‌گوید که باید تابع U صادق در این دستگاه معادلات موجود باشد. با انتگرالگیری از معادلهٔ اول (۸) نسبت به x و ثابت گرفتن y، به‌دست‌می‌آوریم

$$U = x^2 + xy + f(y), \tag{۹}$$

که در آن $f(y)$ تابع مشتقپذیری فقط از متغیر y است. پس، برحسب مشتق $f'(y)$، داریم

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + f'(y)$$

با گذاردن این عبارت $\partial U/\partial y$ در معادلهٔ دوم (۸)، به دست می‌آوریم $x + y = x + f'(y)$ یا $f'(y) = y$؛ درنتیجه، با تقریب یک‌ثابت‌جمعی، $f(y) = \frac{1}{2}y^2$. به ازای این $f(y)$، معادلهٔ (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$U = x^2 + xy + \tfrac{1}{2}y^2,$$

و با متحد گرفتن U و C، مجدداً فرمول (۷) به دست خواهد آمد.

راه سوم حل (۶) استفاده از فرمول

$$U = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt$$

است که در صفحهٔ ۱۴۵۴ ثابت شد. به ازای $x_0 = y_0 = 0$، معلوم می‌شود که، با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه،

$$U = \int_0^x 2t\,dt + \int_0^y (x + t)\,dt = \Big[t^2\Big]_0^x + \Big[xt + \frac{1}{2}t^2\Big]_{t=0}^{y} = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

که مجددا" فرمول (۷) برای جواب عمومی به دست می‌آید .

هر وقت معادلهٔ دیفرانسیلی را حل کردید ، باید جواب را با مشتقگیری مستقیم از آن و گذاردن در معادلهٔ دیفرانسیل‌اصلی امتحان‌نمایید . مثلا" ، در مثال فوق ، مشتقگیری (ضمنی) از جواب عمومی (۷) فورا" به معادلهٔ دیفرانسیل (۶) منجر می‌شود .

مثال ۳. جواب خصوصی معادلهٔ کامل (۶) را چنان بیابید که در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند .

حل. با فرض $x = 0$ و $y = 1$ در فرمول (۷) فورا" نتیجه می‌شود که $C = \frac{1}{2}$ ، و در این صورت (۷) به شکل $xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}$ یا معادلا"

$$y^2 + 2xy + (2x^2 - 1) = 0 \qquad (10)$$

درمی‌آید . به آسانی می‌توان معادلهٔ (۱۰) را نسبت به y حل کرد . در واقع ، طبق‌فرمول جواب یک معادلهٔ درجهٔ دو ،

$$y = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 1)}}{2} = -x + \sqrt{1 - x^2},$$

زیرا اگر y بخواهد در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند ، باید علامت به‌علاوه اختیار شود . لذا ، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

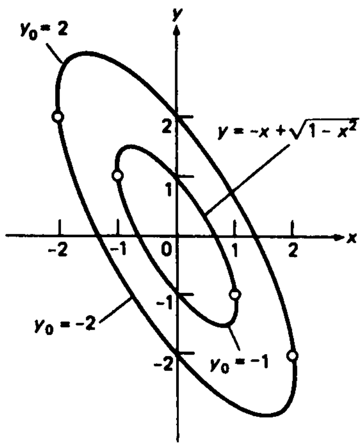
$$y = -x + \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 < x < 1), \qquad (11)$$

که در آن صدق معادلهٔ اصلی (۶) در (۱۱) باید مستقیما" با مشتقگیری امتحان شود . شرط $-1 < x < 1$ وجود و مشتقپذیری y را تضمین می‌کند .

نمودار هر جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل منحنی *انتگرال* نام دارد . در شکل ۱ نه فقط منحنی انتگرال (۱۱) معادلهٔ (۶) را نشان داده‌ایم ، بلکه ، به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، منحنیهای انتگرال نظیر به جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = y_0 \qquad (y_0 = -1, 2, -2)$$

را نیز رسم کرده‌ایم . توجه کنید که چگونه جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ $y(0) = 2$ و $y(0) = -2$ بر بازهٔ بزرگتر $(-2 < x < 2)$ از آنهایی‌که درشرایط $y(0) = 1$ و $y(0) = -1$ صدق می‌کنند تعریف شده‌اند .



شکل ۱

عاملهای انتگرالگیری. اغلب می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل به شکل

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۱۲)$$

را با ضرب در تابع مناسبی چون $\mu = \mu(x, y)$ ، به نام *عامل انتگرالگیری*، به معادلهٔ *کامل*

$$\mu\left(P + Q\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (۱۲')$$

تبدیل کرد. در واقع، هرگاه μ هرگز صفر نشده یا فقط در (x, y) صفر شود که هر دوی P و Q صفرند، آنگاه جواب (۱۲′) نیز جوابی از معادلهٔ اصلی (۱۲) خواهد شد.

مثال ۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y + xy^2 - x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۱۳)$$

یا معادلاً

$$(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0 \qquad (۱۳')$$

را حل کنید.

حل. در اینجا $P = y + xy^2$ ، $Q = -x$ ، $\partial P/\partial y = 1 + 2xy$ ، و $\partial Q/\partial x = -1$ ؛

درنتیجه $\partial Q/\partial x \neq \partial P/\partial y$. بنابراین، (۱۳) یک معادلهٔ کامل‌نیست. اما حدسی‌زیرکانه نشان می‌دهد که $\mu = 1/y^2$ یک عامل انتگرالگیری برای (۱۳) است . در واقع ، بـا ضرب (۱۳') در $1/y^2$ ، با امتحان به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2}\, dy = \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2} + x\, dx = d\left(\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{1}{2} x^2\right)$$

واضح است که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 = C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی است . با حل نسبت به y ، معلوم می‌شود که

$$y = \frac{2x}{2C - x^2}, \qquad (۱۴)$$

که به‌آسانی می‌توان صدق کردن آن را در معادلهٔ غیرکامل اصلی (۱۳) امتحـان کرد . توجه کنید که در تقسیم بر y^2 خطر ازدست‌دادن جواب $y \equiv 0$ وجود دارد؛ و در واقع ، این صورت می‌گیرد ، زیرا $y \equiv 0$ بوضوح جواب (۱۳) می‌باشد . این یک جواب **منفرد** است ، زیرا نمی‌توان آن را از جواب " عمومی " (۱۴) به ازای مقداری از C به دست آورد .

معادلهٔ (۱۳) غیرخطی است (چرا؟) . می‌توان نشان داد که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی جواب منفرد ندارد . لذا ، در سایر بخشها با این پیچیدگی مواجه نخواهیم شد .

مسائل

ابتدا تحقیق کنید که معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به شکل $P\,dx + Q\,dy = 0$ کامـل است ، و سپس جواب عمومی آن را بیابید .

۱ . $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$

۲ . $(y^2 - x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

۳ . $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x}\, dy = 0$

۴ . $\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy = 0$

۵ . $y^2 \cos xy\, dx + (\sin xy + xy \cos xy)\, dy = 0$

۶ . $y \cosh y\, dx + (x \cosh y + xy \sinh y)\, dy = 0$

۰۷ $[(x+y)e^x - e^y]\,dx + [e^x - (x+y)e^y]\,dy = 0$

۰۸ $e^x y\,dx + (e^x - 2)\,dy = 0$

۰۹ $(2xye^{x^2} - \frac{1}{2}y^2)\,dx + (e^{x^2} - xy)\,dy = 0$

۰۱۰ $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

۰۱۱ $\left(3x^2 \tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 2y + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

۰۱۲ $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + 3x^2 y - \dfrac{y}{x}\right)dx + (\sqrt{x^2+1} + x^3 - \ln|x|)\,dy = 0$

۱۳. نشان دهید که جواب خصوصی معادلهٔ (۶) صادق در شرط اولیهٔ $y(0) = y_0 \neq 0$ عبارت است از

$$y = \begin{cases} -x + \sqrt{y_0^2 - x^2}\ , & \text{اگر}\quad y_0 > 0 \\ -x - \sqrt{y_0^2 - x^2}\ , & \text{اگر}\quad y_0 < 0 \end{cases}$$

آیا جوابی خصوصی‌که در شرط اولیهٔ $y(0) = 0$ صدق کند وجود دارد؟ نشان دهیدکه همانطور که از شکل ۱ برمی‌آید، هر منحنی انتگرال (۶) قوسی از یک بیضی است‌که محور اطولش در امتداد خط $x + y = 0$ می‌باشد.

۱۴. نشان دهید هرگاه $\mu = \mu(x, y)$ یک عامل انتگرالگیری معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیر کامل $P\,dx + Q\,dy = 0$ باشد، آنگاه μ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (\text{یک})$$

صدق می‌کند، که به

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \qquad (\text{دو})$$

تحویل می‌شود اگر μ فقط تابعی از x باشد، و به

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (\text{دو}')$$

تحویل می‌شود اگر μ فقط تابعی از y باشد؛ دراینجا، البته، فرض است که طرف راست (دو) یا (دو') فقط تابعی از x یا y می‌باشد. حل معادلهٔ (یک) به صورت کلی ناممکن است، ولی حل (دو) یا (دو') آسانتر می‌باشد. مثلاً، نشان دهیدکه‌چطور

می‌توان عامل انتگرالگیری مثال ۴ را با حل (دُو) به دست آورد.
عامل انتگرالگیری μ معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل داده شده را تعیین کرده، و سپس جواب عمومی آن را بیابید.

۱۵. $(3xy + 2)\,dx + x^2\,dy = 0$

۱۶. $y\,dx - x\,dy = 0$

۱۷. $y\,dx - 3x\,dy = 0$

۱۸. $2x \tan y\,dx + x^2\,dy = 0$

۱۹. $(e^x - y^2)\,dx + 2y\,dy = 0$

۲۰. $\cos x\,dx + (e^{-y} + \sin x)\,dy = 0$

۲۱. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

۲۲. $(x^2\sqrt{x^2 + 1} + y^2)\,dx + 2xy \ln |x|\,dy = 0$

۲۳. $xy^2\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0$

۲۴. $(y^2 \cos x + y \ln |y|)\,dx + (x + y \sin x)\,dy = 0$

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به شکل $y' = dy/dx = f(x, y)$ را همگن گوییم اگر تابع یک متغیره‌ای مانند g موجود باشد به‌طوری که $f(x, y) = g(y/x)$. مثلاً، معادلهٔ

$$y' = \frac{2x^2 - y^2}{xy} = \frac{2 - (y/x)^2}{y/x} \qquad (xy \neq 0) \tag{سه}$$

همگن بوده و در آن $g(u) = (2 - u^2)/u$. برای حل یک معادلهٔ همگن جانشانی $y = xu$ را انجام می‌دهیم. در این صورت، $y' = u + xu'$؛ درنتیجه، $y' = g(u)$ شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u),$$

یا معادلاً

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - g(u)} = 0$$

که در آن متغیرهای x و u از هم جدا شده‌اند. این معادله دارای جواب عمومی زیر است:

$$\ln |x| + \int \frac{du}{u - g(u)} = C. \tag{چهار}$$

حال جواب عمومی معادلهٔ همگن اصلی را می‌توان با گذاردن $u = y/x$ در (چهار) یافت.

۲۵. با استفاده از روشی که هم‌اکنون توصیف شد، جواب عمومی (سه) را بیابید.

۲۶. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $y(1) = 2$ را بیابید
۲۷. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $y(2) = 1$ را بیابید
جواب عمومی معادلهٔ همگن داده شده را بیابید.

۲۸. $x^2y' = x^2 - xy + y^2$ ۲۹. $xyy' = x^2 + y^2$

۳۰. $xy' = y - 2\sqrt{xy}$

۲.۱۶ معادلات خطی مرتبهٔ اول

هر معادله به شکل

$$y' + py = q, \tag{۱}$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابع پیوسته‌ای از متغیر مستقل x اند، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نام دارد. برای حل معادلهٔ (۱)، فرض کنیم $P = \int p(x)\,dx$ پاد مشتق ثابتی از p بوده، و سپس (۱) را در e^P ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$y'e^P + pe^P y = qe^P,$$

و چون $(e^P)' = P'e^P = pe^P$، عبارت سمت چپ مشتق حاصل‌ضرب ye^P نسبت به x است. بنابراین،

$$\frac{d}{dx}(ye^P) = qe^P,$$

که رابطهٔ

$$ye^P = \int qe^P\,dx + C,$$

یا معادلاً

$$y = e^{-P}\left(\int qe^P\,dx + C\right) = e^{-P}\int qe^P\,dx + Ce^{-P} \tag{۲}$$

را ایجاب می‌کند. این فرمول، که شامل ثابت دلخواه C است، جواب عمومی معادلهٔ (۱) می‌باشد. اگر معادلهٔ (۲) را به صورت باز بنویسیم، به شکل زیر درمی‌آید:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{۲'}$$

برای هماهنگی با اصطلاح آمده در صفحهٔ ۱۵۳۵، تابع $\mu = e^P$ را یک ***عامل انتگرالگیری*** معادلهٔ (۱) می‌نامیم. ما μ را با "امتحان" به دست آوردیم، یعنی با کار حدسی، ولی μ را می‌توان به صورت مکانیکی‌تری به دست آورد. در واقع، فرض کنیم (۱) در μ ضرب

شده باشد و بخواهیم طرف چپ معادلهٔ حاصل

$$\mu y' + \mu p y = \mu q$$

به شکل $(\mu y)'$ باشد؛ درنتیجه، می‌توان از آن به راحتی انتگرال گرفت. در این صورت، شرط $\mu y' + \mu p y = (\mu y)'$ فوراً" به معادلهٔ جدایی‌پذیر $\mu' = p\mu$ نسبت به μ ، که جواب $\mu = e^P$ را دارد، منجر می‌شود.

مثال ۱. جواب عمومی

$$y' + ay = bx \tag{۳}$$

را درصورتی بیابید که a و b ثابتهای ناصفری باشند.

حل. معادلهٔ (۳) به شکل (۱) است که در آن $p = a$ و $q = bx$؛ درنتیجه،

$$P = \int p\,dx = ax, \qquad \int qe^P\,dx = b\int xe^{ax}\,dx.$$

با انتگرالگیری جزء به جزء، معلوم می‌شود که

$$\int xe^{ax}\,dx = \int x d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}.$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۲)، جواب عمومی (۳) خواهد شد

$$y = be^{-ax}\left(\frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\right) + Ce^{-ax} = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a^2} + Ce^{-ax}$$

مثال ۲. جواب خصوصی

$$xy' - y = x^4 \tag{۴}$$

صادق در شرط اولیهٔ $y(1) = 3$ را بیابید.

حل. از تقسیم (۴) بر x به دست می‌آوریم

$$y' - \frac{1}{x}y = x^3, \tag{۴'}$$

که به شکل (۱) به ازای $p = -1/x$ و $q = x^3$ است. بنابراین،

$$P = \int p\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x, \qquad e^P = \frac{1}{x}, \qquad \int qe^P\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3, \tag{۴''}$$

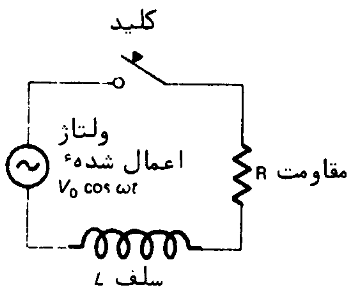
و از (۲) معلوم می‌شود که جواب عمومی ('۴) ، و درنتیجه (۴) ، مساوی است با

$$y = \frac{1}{3}x^4 + Cx. \tag{۵}$$

با آنکه $p = -1/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است ، این جواب بر تمام خط حقیقی در (۴) صدق می‌کند (چرا؟) . برای یافتن جواب خصوصی صادق در شرط $y(1) = 3$ ، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = 3$ ، خواهیم داشت $C = \frac{8}{3}$. لذا ، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

$$y = \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x.$$

مثال ۳. کلیدی را به‌طور ناگهانی زده ، ولتاژ $V = V_0 \cos \omega t$ را در مدار الکتریکی شکل ۲ مرکب مقاومت R اهم که با سلف L هانری سری شده است برقرار می‌کنیم . شدت جریان $i = i(t)$ مدار را پیدا نمایید .



شکل ۲

حل. واحد i آمپر است . ثابت V_0 ولتاژ اوج است ، یعنی ماکزیمم V ، و ω فرکانس زاویه‌ای مساوی $2\pi f$ است ، که در آن f فرکانس به دور برثانیه است (ر.ک. صفحه ۱۵۶۰) . درمثال ۳ . صفحه ۵۵۳ ، حالت dc (جریان مستقیم) را درنظر گرفتیم ، که در آن V ثابت است ، و دیدیم شدت جریان i در معادله دیفرانسیل خطی

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V,$$

یا معادلاً

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}. \tag{۶}$$

صدق می‌کند، و سپس (۶) را با جداسازی متغیرها حل کردیم. معادلهٔ (۶) در حالت فعلی ac (جریان متناوب) نیز برقرار است، ولی در اینجا V تابعی از t است که ازجدایی پذیر بودن (۶) ممانعت می‌کند. بااینحال، هنوز می‌توان با استفاده از روشی که هم‌اکنون عرضه شد به (۶) پرداخت.

برای این کار، ملاحظه می‌کنیم که (۶) به شکل (۱) است با t به جای x، i به‌جای y، و

$$p = \frac{R}{L}, \qquad q = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L}\cos\omega t,$$

درنتیجه،

$$P = \int p\,dt = \frac{Rt}{L}, \qquad \int qe^{P}\,dt = \frac{V_0}{L}\int e^{Rt/L}\cos\omega t\,dt.$$

بنابر فرمول (۹)، صفحهٔ ۶۰۸،

$$\int e^{Rt/L}\cos\omega t\,dt = e^{Rt/L}\,\frac{(R/L)\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{(R/L)^2 + \omega^2},$$

و درنتیجه،

$$\int qe^{P}\,dt = V_0 e^{Rt/L}\,\frac{R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

لذا، طبق فرمول (۲)، جواب عمومی (۶) به ازای $V = V_0\cos\omega t$ عبارت است از

$$i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + Ce^{-Rt/L} \tag{۷}$$

برای تعیین ثابت C، شرط اولیهٔ $i(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم (تا لحظهٔ $t = 0$ که کلید زده می‌شود شدت جریانی وجود ندارد). با قراردادن $t = 0$ و $i = 0$ در (۷)، معلوم می‌شود که

$$C = -\frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

و در این صورت، (۷) به شکل زیر درمی‌آید:

$$i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) - Re^{-Rt/L}\right]. \tag{۸}$$

توجه کنید که این فرمول شامل جواب مثال ۳، صفحهٔ ۵۵۳، به عنوان حالتی خاص است، و این را می‌توان با فرض $\omega = 0$ و حذف زیرنویس V_0 تحقیق کرد.

بنابر (۸) ، i تفاضل دوجمله است ، یکی شدت جریان متناوب *حالت پایدار*

$$i_{ac} = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R\cos\omega t + \omega L \sin\omega t) \qquad (۹)$$

و دیگری شدت جریان *گذرای*

$$i_{tr} = \frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-Rt/L},$$

که مثل حالت dc سریعا " مستهلک می‌شود (ر.ک. شکل ۵۵۵) . فرمول (۹) پیچیده می‌نماید، ولی می‌توان آن را به شکل بسیار ساده‌تر

$$i_{ac} = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \phi), \qquad (۹')$$

برحسب *مقاومت ظاهری*

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

و زاویهٔ

$$\phi = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

نوشت (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . لذا ، i_{ac} دارای همان فرکانس ولتاژ اعمال شدهٔ V است ، ولی نسبت به V به اندازهٔ ϕ رادیان " تأخیر دارد " ، ولی شدت *جریان اوج* i_0 ، یعنی ماکزیمم i_{ac} ، با فرمول

$$i_0 = \frac{V_0}{Z},$$

شامل مقاومت ظاهری ، به ولتاژ اوج V_0 مربوط شده است .

مسائل

جواب عمومی معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول داده شده را بیابید .

۱. $y' + ay = b$

۲. $y' + ay = e^{bx}$

۳. $y' - xy = x$

۴. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$

۵. $y' + 2y = x^2 + x$

۶. $y' + y = \sin x$

۷. $y' - \frac{1}{x}y = x$

۸. $y' + \frac{2}{x}y = x^2$

۹. $y' + \frac{1}{x} y = x \cos x$

۱۰. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{1}{x^n}$

۱۱. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x$

۱۲. $xy' = y - 1$

۱۳. $x(x-1)y' + y = x + 1$

۱۴. $(x^2+1)y' - 4xy = (x^2+1)^2$

۱۵. $(x^2+1)y' - y = \arctan x$

۱۶. $y' + y \cos x = \sin^2 x \cos x$

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را حل کنید.

۱۷. $y' + 3y = 4, y(0) = 2$

۱۸. $y' - y = e^{2x}, y(1) = 0$

۱۹. $y' - 2y = \cos x, y(\pi/2) = 0$

۲۰. $y' - \frac{1}{x} y = x \sin x, y(\pi) = 1$

۲۱. $y' \cos x + y \sin x = 1, y(0) = -1$

۲۲. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 2, y(\frac{1}{2}) = 0$

۲۳. $y' + \frac{xy}{1+x^2} = x, y(0) = 1$

۲۴. $y' - \frac{y}{x \ln x} = \ln x, y(e) = 1$

۲۵. نشان دهید که در فرمول

$$y = e^{-P} \int q e^P dx + C e^{-P} \qquad (P = \int p\, dx)$$

برای جواب عمومی معادلهٔ خطی $y' + py = q$ جملهٔ اول یک جواب خصوصی این معادله است، ولی جملهٔ دوم جواب عمومی معادلهٔ $y' + py = 0$ با صفرکردن q به دست می‌آید.

۲۶. معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی

$$y' + py = qy^n \qquad (n \neq 0, 1), \qquad \text{(یک)}$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابعی پیوسته‌اند، به **معادلهٔ برنولی**[1] معروف است.

1. *Bernoulli*

نشان دهید که ضرب معادلهٔ (یک) در $(1-n)y^{-n}$ آن را به معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی

$$u' + (1-n)pu = (1-n)q \qquad (\text{یک})$$

از متغیر جدید $u = y^{1-n}$ تبدیل می‌کند.

با استفاده از روش مسئلهٔ قبل، معادلهٔ برنولی داده شده را حل کنید.

۲۷. $y' + xy = xy^2$ ۲۸. $xy' - y = y^3 \ln x$

۲۹. $y' - y = xy^{-3}$

۳۰. کلیدی را ناگهان زده، ولتاژ متناوب $V = V_0 \cos \omega t$ را در یک‌مدار الکتریکی مرکب‌از مقاومت R اهم که با خازن C فاراد سری است برقرار می‌کنیم. شدت جریان حاصل $i = i(t)$ مدار را بیابید. نشان دهید که شدت جریان متناوب حالت پایدار مساوی است با

$$i_{ac} = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t + \phi),$$

که در آن

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}, \qquad \phi = \arctan \frac{1}{\omega RC}.$$

لذا، i_{ac} همان فرکانس ولتاژ اعمال شدهٔ V است، ولی به اندازهٔ ϕ نسبت به V " تقدم " دارد.

راهنمایی. مسئلهٔ ۲۳، صفحهٔ ۵۵۹، را به یاد آورید.

۳۱. معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی $e^y(y' + 1) = x$ را با تحویل آن به معادلهٔ خطی نسبت به e^y حل کنید.

۳۲. نشان دهید که اگر در معادلهٔ خطی $y' + py = q$ توابع $p = p(x)$ و $q = q(x)$ هردوثابت باشند، این معادله را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد.

۳.۱۶ معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

حال به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم پرداخته، خود را به بررسی معادلات‌به‌شکل‌سادهٔ

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (1)$$

محدود می‌کنیم، که در آن y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع مجهول $y = y(x)$ اند، a و b ثابتهایی حقیقی‌اند، و $f(x)$ تابع پیوستهٔ معلومی از متغیر مستقل x می‌باشد. هر معادلهٔ دیفرانسیل از این نوع یک **معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت** نام دارد. اگر $f(x)$ متحد صفر نباشد، گوییم معادلهٔ (۱) **غیرهمگن** است، ولی اگر $f(x) \equiv 0$، معادله به

معادلهٔ همگن

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (۲)$$

ساده می‌شود (در اینجا اصطلاح " همگن " معنی کاملا" متفاوتی با این اصطلاح درمسائل ۲۵ تا ۳۰، صفحات ۱۵۳۸ تا ۱۵۳۹ ، دارد.)

برای حل معادلهٔ غیرهمگن (۱) ، ابتدا معادلهٔ همگن مربوطهٔ (۲) را مشروحا" بررسی می‌کنیم . قضیهٔ زیر دلیلش را توضیح خواهد داد.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن) . *جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن (۱) مساوی مجموع یک جواب خصوصی (۱) و جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) می‌باشد .*

برهان . فرض کنیم y_1 جوابی دلخواه و y_2 جواب ثابتی از معادلهٔ عیر همگن (۱) باشد . در این صورت ، $y_2'' + ay_2' + by_2 = f(x)$ و $y_1'' + ay_1' + by_1 = f(x)$ ، و با تفریق معادلهٔ دوم از اول ، به دست می‌آوریم

$$(y_1'' + ay_1' + by_1) - (y_2'' + ay_2' + by_2) = f(x) - f(x) = 0,$$

یا معادلا"

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0.$$

بنابراین ، $y_1 - y_2$ در معادلهٔ همگن (۲) صدق می‌کند؛ یعنی ، $y_1 = y_2 + u$ که درآن u جوابی از (۲) می‌باشد . برای اتمام برهان ، باید نشان دهیم که مجموع y_2 و یک جواب دلخواه u از (۲) جوابی از (۱) است . اما این فورا" از این نتیجه می‌شود که $y_2'' + ay_2' + by_2 = f(x)$ و $u'' + au' + bu = 0$ باهم ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned}(y_2 + u)'' + a(y_2 + u)' + b(y_2 + u) &= (y_2'' + ay_2' + by_2) + (u'' + au' + bu)\\ &= f(x) + 0 = f(x).\end{aligned}$$

ما بررسی معادلهٔ همگن (۲) را با این امر شروع می‌کنیم که *هرگاه y_1 و y_2 دو جواب از (۲) باشند ، آنگاه هر ترکیب خطّی از y_1 و y_2 نیز چنین است؛* یعنی ، *هر عبارت به شکل $C_1y_1 + C_2y_2$ که درآن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند .* این نتیجهٔ فوری آن است که هرگاه $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ و $y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}&(C_1y_1 + C_2y_2)'' + a(C_1y_1 + C_2y_2)' + b(C_1y_1 + C_2y_2)\\ &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + aC_1y_1' + aC_2y_2' + bC_1y_1 + bC_2y_2\end{aligned}$$

$$= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2)$$
$$= C_1(0) + C_2(0) = 0.$$

حال طبیعی است بپرسیم که ، به عکس، آیا هر جواب (۲) به صورت ترکیبی خطی از دو جواب معلوم y_1 و y_2 هست یا نه؛ درنتیجه ، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی (۲) می‌باشد. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد ، این درصورتی که جوابهای y_1 و y_2 نامحدودند درست نیست .

مثال ۱ . معادلهٔ خطی همگن

$$y'' - y = 0 \qquad (۳)$$

را درنظر می‌گیریم . واضح است که $y_1 \equiv 0$ جواب (۳) است؛ و همین‌طور $y_2 = e^x$ ، زیرا $(e^x)'' = (e^x)' = e^x$. اما $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_2e^x$ نمی‌تواند جواب عمومی (۳) باشد ، زیرا (۳) نیز دارای جواب $y = e^{-x}$ می‌باشد (این را امتحان کنید) ، که مضرب ثابتی از e^x نیست . حتی اگر y_1 و y_2 هر دو ناصفر باشند ، ممکن‌است $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب‌عمومی (۳) نباشد . مثلا" ،اگر $y_1 = 2e^x$ را اختیار کنیم ، که جواب دیگری‌از (۳)است ، می بینیم $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (2C_1 + C_2)e^x = ke^x$ که در آن $k = 2C_1 + C_2$ ، ولی این نیز ، به همان دلیل قبل ،جواب‌عمومی (۳)نیست؛ یعنی ،ثابتی‌چون k وجودندارد که $e^{-x} = ke^x$.

مثال فوق نشان می‌دهد که اگر یکی از توابع y_1 و y_2 متحد صفر بوده یا یکی مضرب ثابتی از دیگری باشد ، نمی‌توان گفت $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) است . اما ، بنابر قضیهٔ زیر ، که بدون برهان ذکر شده است ، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ بااستثنا کردن حالات فوق جواب عمومی (۲) خواهد بود .

قضیهٔ ۲ (جواب عمومی معادلهٔ همگن) . *فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ همگن (۲) باشند به‌طوری که هیچیک متحد صفر و مضرب ثابتی از دیگری‌نباشد (ذیلا" نشان‌می‌دهیم این‌جوابهاهمیشه وجود دارند) . در این صورت ، جواب عمومی (۲) عبارت است از*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند .

گوییم دو جواب y_1 و y_2 صادق در شرایط قضیهٔ ۲ یک مجموعهٔ *اساسی* از جوابهای معادلهٔ (۲) را تشکیل می‌دهند . لیکن ، این مجموعه منحصر به فرد نمی‌باشد .

مثال ۲. در مثال ۱ دیدیم که هر دو تابع e^x و e^{-x} جواب معادلهٔ (۳) اند. هیچیک از توابع متحدصفر و یا مضرب ثابتی از دیگری نیست. لذا، $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای (۳) را تشکیل می‌دهند؛ و درنتیجه، (۳) جواب عمومی $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ را خواهد داشت. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که توابع $y_1 = \cosh x$ و $y_2 = \sinh x$ مجموعهٔ اساسی دیگری از جوابهای (۳) را تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ وجودی و یکتایی. دلیل حذف برهان قضیهٔ ۲ این است که بر قضیهٔ وجودی و یکتایی زیر مبتنی است که اگرچه معنی آن کاملا" روشن است، برهانش از حوصلهٔ این درس خارج می‌باشد. *به ازای هر سه عدد حقیقی x_0، y_0، و y'_0، یک و فقط یک جواب مانند $y = y(x)$ از معادلهٔ همگن (۲) وجود دارد که در شرایط اولیهٔ*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0$$

صدق می‌کند.

ما از این نتیجه در حل مسائل مقدار اولیه برای معادلهٔ (۲) تلویحا" استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. جواب عمومی معادلهٔ همگن

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega > 0) \tag{۴}$$

را بیابید. همچنین، جواب خصوصی (۴) صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1 \tag{۴'}$$

را پیدا کنید.

حل. هر تابع که با ضرب در ω^2 قرینهٔ مشتق دوم خود شود جوابی از (۴) است. $\cos \omega x$ و $\sin \omega x$ دو تابع از این نوعند، زیرا

$(\cos \omega x)'' = (-\omega \sin \omega x)' = -\omega^2 \cos \omega x$ و $(\sin \omega x)'' = (\omega \cos \omega x)' = -\omega^2 \sin \omega x$

به‌علاوه، هیچیک از این توابع متحدصفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نیست (چرا نیست؟). لذا، طبق قضیهٔ ۲، جواب عمومی (۴) مساوی است با

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \tag{۵}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند. با مشتقگیری از (۵) نتیجه می‌شود که

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x. \tag{۵'}$$

برای یافتن جوابی از (۴) که در شرایط (۴') صدق کند، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 0, y = 1$ و در (۵') می‌گذاریم $x = 0, y' = -1$ و فورا" به دست می‌آوریم $C_1 = 1, C_2 = -1/\omega$. با

انتخاب این مقادیر از C_1 و C_2 در (۵)، جواب خصوصی مطلوب

$$y = \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

به دست می‌آید.

مثال زیر موارد استعمال قضیهٔ ۱ را در یافتن جواب عمومی یک معادلهٔ خطی غیر همگن نشان می‌دهد.

مثال ۴. معادلهٔ

$$y'' - y = 2 - 3x \tag{۶}$$

را حل کنید.

حل. بنابر قضیهٔ ۱، جواب عمومی (۶) مجموع یک جواب خصوصی (۶) و جواب عمومی معادلهٔ همگن مربوطهٔ $y'' - y = 0$ است. ما قبلاً از مثال ۲ می‌دانیم که جواب عمومی $y'' - y = 0$ مساوی است با $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$، و نگاهی به معادلهٔ (۶) آشکار می‌سازد که این معادله دارای جواب خصوصی $y = 3x - 2$ می‌باشد (توجه کنید که به ازای این y، $y'' = 0$). لذا، جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 3x - 2.$$

تحلیل معادلهٔ همگن. حال، به کمک قضیهٔ ۲، به مسئلهٔ حل معادلهٔ خطی همگن کلی (۲) می‌پردازیم. برای این کار، نمایی $y = e^{rx}$ را در (۲) می‌گذاریم، به این امید که مقادیر ثابت r را بیابیم که به ازای آنها (۲) برقرار باشد. هرگاه $y = e^{rx}$، آنگاه $y' = re^{rx}$ و $y'' = r^2e^{rx}$؛ درنتیجه، این جانشانی $y'' + ay' + by = 0$ را به

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \tag{۷}$$

تبدیل می‌کند. اما e^{rx} هرگز صفر نیست؛ و درنتیجه، (۷) برقرار است اگر و فقط اگر r جواب معادلهٔ درجهٔ دو

$$r^2 + ar + b = 0, \tag{۸}$$

به نام *معادلهٔ مشخص* (۲)، باشد.

با کامل کردن مربعها در (۸)، به دست می‌آوریم

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0,$$

یا معادلاً

$$\left(r+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-4b}{4},$$

که از این نتیجه می‌شود که (۸) دو ریشهٔ متمایز

$$r_1=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}, \qquad r_2=-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

دارد اگر $a^2-4b>0$ ، یا فقط یک ریشهٔ (مضاعف)

$$r_1=r_2=-\frac{a}{2} \tag{۹}$$

دارد اگر $a^2-4b=0$ ، و ریشهٔ حقیقی ندارد اگر $a^2-4b^2<0$. هر یک از این سه حالت به مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۲) منجر می‌شود ، ولی ماهیت جوابها در هر حالت متفاوت می‌باشد .

هرگاه $a^2-4b^2>0$ ، آنگاه e^{r_1x} و e^{r_2x} قبلاً مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند ، زیرا هیچیک متحد صفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نمی‌باشد ؛ درواقع ، هر تساوی به شکل $e^{r_1x}=ke^{r_2x}$ (k ثابت) فقط می‌تواند در نقطهٔ $x=(\ln k)/(r_1-r_2)$ برقرار باشد . لذا ، قضیهٔ ۲ در این حالت به ما می‌گوید که جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) به صورت زیر است :

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

مثال ۵. جواب عمومی

$$y''+y'-6y=0 \tag{۱۰}$$

را بیابید .

حل. معادلهٔ مشخص عبارت است از

$$r^2+r-6=(r-2)(r+3)=0,$$

که ریشه‌های متمایز $r_1=2$ و $r_2=-3$ دارد . لذا ، جواب عمومی (۱۰) مساوی است با

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x},$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند .

هرگاه $a^2-4b=0$ ، آنگاه $y_1=e^{r_1x}=e^{-ax/2}$ جواب معادلهٔ همگن $y''+ay'+by=0$

است ، ولی برای تشکیل یک مجموعهٔ اساسی با y_1 به جواب دیگری چون y_2 نیازداریم. برای یافتن آن به ترفند سادهٔ زیر پناه می‌بریم . فرض کنیم $y = ue^{-ax/2}$ ، که در آن $u = u(x)$ تابع مجهول جدیدی است . در این صورت ،

$$y' = u'e^{-ax/2} - \frac{a}{2}ue^{-ax/2},$$

$$y'' = u''e^{-ax/2} - au'e^{-ax/2} + \frac{a^2}{4}ue^{-ax/2},$$

درنتیجه ، $y'' + ay' + by = 0$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$(11)\quad \left(u'' - au' + \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} + a\left(u' - \frac{a}{2}u\right)e^{-ax/2} + bue^{-ax/2}$$
$$= \left(u'' + bu - \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = u''e^{-ax/2} = 0,$$

که در آن از $4b - a^2 = 0$ استفاده شده است . چون $e^{-ax/2}$ هرگز صفر نیست ، نتیجه می‌شود که $u'' = 0$ ، ایجابگر آنکه

$$u' = A, \qquad u = Ax + B,$$

که در آن A و B ثابت می‌باشند . چون فقط به جواب u نیاز داریم ، انتخاب سادهٔ $A = 1$ و $B = 0$ را می‌کنیم که نتیجه می‌دهد که $u = x$. در این صورت ، معلوم می‌شود که

$$y_2 = ue^{-ax/2} = xe^{-ax/2}$$

جواب دیگری از معادلهٔ همگن است . هیچیک از جوابهای $y_1 = e^{-ax/2}$ و $y_2 = xe^{-ax/2}$ متحد صفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نیست ؛ در واقع ، یک معادله به شکل $e^{-ax/2} = kxe^{-ax/2}$ (k ثابت) فقط می‌تواند در نقطهٔ $x = 1/k$ برقرار شود . لذا ، در این حالت ، جواب عمومی (۲) مساوی است با

$$y = C_1e^{-ax/2} + C_2xe^{-ax/2}.$$

مثال ۶. جواب عمومی

$$(12)\qquad y'' - 4y' + 4y = 0$$

را بیابید .

حل . معادلهٔ مشخص عبارت است از

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0,$$

که فقط یک ریشهٔ (مضاعف) $r_1 = r_2 = 2$ را دارد . از (۹) معلوم می‌شود که این مقدار

ثابت$-a/2$ نیز هست . لذا ، جواب عمومی (۱۲) مساوی است با
$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

اگر $a^2 - 4b < 0$ ، معادلهٔ مشخص (۸) ریشهٔ حقیقی ندارد ؛ درنتیجه ،جوابی به شکل e^{rx} وجود ندارد . با اینحال ، می‌توان یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای (۲) را به آسانی به دست‌آورد .برای‌این‌کار ،ازهمان جانشانی $y = ue^{-ax/2}$ در حالت $a^2 - 4b = 0$ استفاده می‌کنیم . باتوجه به (۱۱) ، معلوم می‌شود که معادلهٔ $y'' + ay' + by = 0$ "مجددا" ایجاب می‌کند که

$$\left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = 0, \qquad (۱۳)$$

ولی در اینجا ضریب u صفر نبوده بلکه عددی مثبت می‌باشد . در واقع ، فرض کنیم
$$\omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} > 0.$$
در این صورت ، (۱۳) معادل است با
$$u'' + \omega^2u = 0,$$
زیرا$e^{-ax/2}$ هرگزصفر نیست ، و همانطور که از مثال ۳ می‌دانیم ، جواب عمومی این معادله مساوی است با
$$u = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$
لذا ، جواب عمومی (۲) ، یعنی $y = ue^{-ax/2}$ ، خود مساوی است با
$$y = e^{-ax/2}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

مثال ۷. جواب عمومی
$$y'' + 8y' + 25y = 0 \qquad (۱۴)$$
را بیابید .

حل. در اینجا $a = 8$ و $b = 25$ ؛ در نتیجه ، $a^2 - 4b = 64 - 100 = -36 < 0$ و $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$. لذا ، جواب عمومی (۱۴) مساوی است با
$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

روش ضرایب نامعین . درخاتمه ،به‌حل‌معادلهٔ غیرهمگن (۱) به‌شکل $y'' + ay' + by = f(x)$

می‌پردازیم . از قضیهٔ ۱ به یاد دارید که جواب عمومی (۱) مجموع یک جواب‌خصوصی(۱) و جواب عمومی معادلهٔ همگن مربوطهٔ $y'' + ay' + by = 0$ ، که اغلب معادلـهٔ *تحویـل یافتهٔ* (۱) نام دارد ، می‌باشد . اما هم اینک طرز به دست آوردن جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافته را نشان دادیم . لذا ، آنچه اکنون بدان نیاز داریم یک جواب‌خصوصی خود معادلهٔ غیرهمگن (که اغلب معادلهٔ *تام* نامیده می‌شود) است . یافتن این جواب در حالت کلی مشکل‌است ،ولی خوشبختانه تکنیک مؤثری ، به نام *روش ضرایب نامعین* ، وجود دارد که درصورتی کارگر است که$f(x)$توابع متداولی چون

$$P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{۱۵}$$

و

$$P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{۱۵'}$$

شامل چندجمله‌ای معلوم

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

از درجهٔ n باشد . در واقع ، فرض کنیم

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

و

$$B_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

دوچندجمله‌ای دیگر از درجهٔ n ولی باضرایب‌نامعین (یعنی ،فعلا "مجهول)$a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ بوده ، و$f(x)$به شکل (۱۵) یا (۱۵') باشد . در این صورت ،می‌توان‌نشان داد که جانشانی

$$\begin{aligned} y &= [A_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]x^k \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_ix^{i+k}e^{\alpha x}\cos\beta x + b_ix^{i+k}e^{\alpha x}\sin\beta x) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

معادلهٔ غیرهمگن$y'' + ay' + by = f(x)$ را به معادله‌ای تبدیل می‌کند که بـا انتخاب مناسبی از ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ متحدا" برقـرار است . در اینجـا x^k $(k = 0, 1, 2)$ کوچکترین توان لازم از x است که هیچیک از جملات $a_ix^{i+k}e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $b_ix^{i+k}e^{\alpha x}\sin\beta x$ سمت راست (۱۶) جوابی از معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' + ay' + by = 0$ نباشد . جانشانی (۱۶) را می‌توان فقط با

$$y = A_n(x)x^k \tag{۱۷}$$

تعویض کرد اگر$f(x) = P_n(x)$ ، نظیر به $\alpha = \beta = 0$ در (۱۶) ، و فقط با

$$y = A_n(x)x^ke^{\alpha x} \tag{۱۷'}$$

عوض‌کرد اگر $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ، نظیر به $\beta = 0$ در (۱۶) . از آن‌سو ، اگر $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$ یا $f(x) = P_n(x)\sin\beta x$ ، نظیر به $\alpha = 0$ در (۱۵) یا (۱۵′) ، تمام عبارت

$$y = [A_n(x)\cos\beta x + B_n(x)\sin\beta x]x^k \tag{۱۸}$$

مورد نیاز می‌باشد .

مثال ۸. جواب عمومی

$$y'' - y' - 2y = x^2 + x - 4 \tag{۱۹}$$

را بیابید .

حل . طرف راست (۱۹) به شکل (۱۵) است به ازای $n = 2$ و $\alpha = \beta = 0$. چون هیچیک از توابع $y = a_i x^i\ (i = 0, 1, 2)$ جواب معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - y' - 2y = 0$ نیست ، جانشانی

$$y = Ax^2 + Bx + C, \tag{۱۹′}$$

نظیر به فرمول (۱۷) به‌ازای $n = 2$ و $k = 0$ را انجام می‌دهیم ؛ برای سادگی ، ضرایب نامعین را با حروف متوالی A ، B ، و C نشان می‌دهیم . در این صورت ،

$$y' = 2Ax + B, \qquad y'' = 2A,$$

و جانشانی (۱۹′) معادلهٔ (۱۹) را به معادلهٔ

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می‌کند ، که نسبت به x همانی است اگر و فقط اگر توانهای یکسان x درطرفین معادله ضرایب یکسان داشته باشند . این شرط به دستگاه " مثلثی " از معادلات جبری خطی

$$-2A = 1,$$
$$-2A - 2B = 1,$$
$$2A - B - 2C = -4$$

منجر می‌شود با جواب $A = -\frac{1}{2},\ B = 0,\ C = \frac{3}{2}$ (متوالیا "نسبت به A ، B ، و C حل کنید). معادلهٔ (۱۹) به ازای این ضرایب به شکل زیر درمی‌آید :

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2},$$

که یک جواب خصوصی (۱۹) است . معادلهٔ مشخص معادلهٔ تحویل‌یافتهٔ $y'' - y' - 2y = 0$ عبارت است از $r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$ ، که دارای ریشه‌های متمایز $r_1 = 2$ و $r_2 = -1$ می‌باشد . لذا ، جواب عمومی معادلهٔ تحویل‌یافته عبارت است از $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$

و از قضیهٔ ۱ معلوم می‌شود که جواب عمومی معادلهٔ (۱۹) مساوی است با

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

مثال ۹. جواب عمومی

$$y'' - y' = x^2 + x - 4 \tag{۲۰}$$

را بیابید.

حل. توجه کنید که طرف چپ (۲۰) با (۱۹) در غیبت جملهٔ $2y-$ فرق دارد. درنتیجه، یکی از توابع $y = a_ix^i$ $(i=0, 1, 2)$، یعنی $y = a_0x^0 = a_0$، جواب معادلهٔ‌تحویل یافتهٔ $y'' - y' = 0$ است. لذا، به جای جانشانی (۱۹')، باید جانشانی

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \tag{۲۰'}$$

نظیر به فرمول (۱۷) به ازای $n = 2$ و $k = 1$ را انجام دهیم. در این صورت،

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

و جانشانی (۲۰') معادلهٔ (۲۰) را به معادلهٔ

$$(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می‌کند. از متحد گرفتن ضرایب توانهای یکسان x در دو طرف این معادله، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ 6A - 2B &= 1, \\ 2B - C &= -4, \end{aligned}$$

که دارای جواب $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{3}{2}, C = 1$ می‌باشد. معادلهٔ (۲۰') به ازای این ضرایب به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$

معادلهٔ مشخص معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - y' = 0$ عبارت است از $r^2 - r = r(r-1) = 0$ با ریشه‌های متمایز $r_1 = 0$ و $r_2 = 1$. لذا، جواب عمومی معادلهٔ تحویل‌یافته مساوی است با $y = C_1 + C_2e^x$، و بنابر قضیهٔ ۱، جواب عمومی معادلهٔ (۲۰) عبارت است از

$$y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$

مثال ۱۰. جواب عمومی

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + \cos x \tag{۲۱}$$

را بیابید.

حل. هرگاه y_1 جواب خصوصی

$$y'' - 2y' + y = 2e^x \tag{۲۲}$$

و y_2 جواب خصوصی

$$y'' - 2y' + y = \cos x \tag{۲۲'}$$

باشد، آنگاه $y_1 + y_2$ جواب خصوصی (۲۱) است. هر دو معادلهٔ (۲۲) و (۲۲′) دارای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ و معادلهٔ مشخص $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ با ریشهٔ (مضاعف) $r_1 = r_2 = 1$ می‌باشند. لذا، طبق استدلال بعداز مثال ۵، جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافته عبارت است از $y = C_1e^x + C_2xe^x$. پس e^{2x} و xe^{2x} جوابهای معادلهٔ تحویل یافته می‌باشند. لذا، برای حل (۲۲)، جانشانی

$$y = y_1 = Ax^2e^x,$$

نظیر به فرمول (۱۷′) به ازای $n = 0$، $\alpha = 1$، و $k = 2$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_1' = (2x + x^2)Ae^x, \qquad y_1'' = (2 + 4x + x^2)Ae^x,$$

این جانشانی (۲۲) را به

$$[(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2]Ae^x = 2Ae^x = 2e^x$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 1$ نتیجه می‌شود. لذا، به‌آسانی معلوم می‌شود که $y_1 = x^2e^x$ جواب خصوصی (۲۲) می‌باشد.

و اما در مورد معادلهٔ (۲۲′)، چون $\sin x$ و $\cos x$ جواب معادلهٔ تحویل یافته‌نیستند، جانشانی

$$y = y_2 = A\cos x + B\sin x,$$

نظیر به فرمول (۱۸) به ازای $n = 0$، $\beta = 1$، و $k = 0$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_2' = -A\sin x + B\cos x, \qquad y_2'' = -A\cos x - B\sin x,$$

این جانشانی (۲۲′) را به

$$(-A\cos x - B\sin x) - 2(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x)$$
$$= 2A\sin x - 2B\cos x = \cos x$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 0, B = -\frac{1}{2}$ نتیجه خواهد شد. لذا، به‌آسانی معلوم می‌شود که $y_2 = -\frac{1}{2}\sin x$ جواب خصوصی (۲۲′) می‌باشد. با افزودن جوابهای خصوصی y_1 و y_2

معادلات (۲۲) و (۲۲') به هم ، جواب خصوصی

$$y_1 + y_2 = x^2e^x - \frac{1}{2}\sin x$$

معادلهٔ اصلی (۲۱) به دست می‌آید. ولی جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ عبارت است از $y = C_1e^x + C_2xe^x$ ؛ و درنتیجه، جواب عمومی (۲۱) خواهد بود

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x^2e^x - \frac{1}{2}\sin x.$$

تبصره. درحالاتی‌که روش ضرایب نامعین به‌کار نمی‌روند، سعی کنید از روش ***تغییرپارامتر***، که مقدم بر مسائل ۱۹ تا ۲۴، صفحه۱۵۷۴ توصیف شده است، استفاده نمایید.

مسائل

جواب عمومی معادلهٔ خطی همگن داده شده را بیابید.

۱. $y'' - 2y' - y = 0$

۲. $y'' - 6y' + 9y = 0$

۳. $y'' - 4y' + 13y = 0$

۴. $y'' + 4y' + 29y = 0$

۵. $y'' + 10y' + 25y = 0$

۶. $5y'' + 3y' = 0$

۷. $\frac{1}{4}y'' - 2y' + 4y = 0$

۸. $y'' + 9y' + 14y = 0$

۹. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

۱۰. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

۱۱. $3y'' + 7y' + 2y = 0$

۱۲. $y'' - 12y' + 52y = 0$

جواب خصوصی $y = y(x)$ معادلهٔ خطی‌همگن داده‌شده را که در شرایط ذکر شده‌صدق می‌کند پیدا نمایید؛ بعضی شرایط اولیه‌اند، بقیه شرایط مرزی می‌باشند (ر.ک.صفحهٔ ۴۲۲).

۱۳. $y'' + y' - 2y = 0.\ y(0) = 1,\ y(\ln 2) = 0$

۱۴. $y'' + y' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 3$

۱۵. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

۱۶. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$

۱۷. $7y'' + 19y' + 13y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$

۱۸. $y'' + y = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(\pi/4) = 0$

یک جواب خصوصی معادلهٔ خطی‌غیرهمگن $y'' + y = f(x)$ را، که در آن $f(x)$ تابع داده‌شده است، بیابید.

۱۹. $(x + 1)^3$

۲۰. $\cos x + 4x - 5$

۲۱. $\cos 3x$

۲۲. $\sinh x$

۲۳. $e^x + \sin x$

۲۴. $\sin x \sin 2x$

۲۵. $x \sin x$

۲۶. $e^x \cos x$

جواب عمومی معادلهٔ خطی غیرهمگن داده شده را بیابید.

۲۷. $y'' + 4y' = 3x^2 - x + 2$

۲۸. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$

۲۹. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

۳۰. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$

۳۱. $y'' - 2y' + y = xe^x$

۳۲. $y'' + 3y' = xe^{-3x}$

۳۳. $y'' - y' = x^4$

۳۴. $y'' + 2y' + y = 2 \cosh x$

۳۵. $y'' - 2y' - 8y = e^{6x}$

۳۶. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + e^{2x}$

۳۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$ را حل نمایید.

۳۸. مسئلهٔ مقدار مرزی $y'' + y' = x,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$ را حل نمایید.

۴.۱۶ حرکت توافقی ساده؛ نوسانات میرا و واداشته

فرض کنیم P ذره‌ای باشد که موضعش با تنها مختص $y = y(t)$ که تابعی از زمان t است مشخص شود. در این صورت، گوییم P **حرکت توافقی ساده** دارد اگر مختص y در یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به شکل

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega > 0) \tag{1}$$

صدق نماید. همانطور که از مثال ۳، صفحهٔ ۱۵٤۸، می‌دانیم (پس از تغییر متغیر مستقل به t)، جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{2}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند.

برای توضیح ماهیت حرکت P، معادلهٔ (۲) را به طریقی دیگر می‌نویسیم. فرض کنیم A و ϕ $(A > 0)$ مختصات قطبی نقطهٔ (C_2, C_1)، به عنوان نقطه‌ای در دستگاه مختصات

قائم ، باشد . در این صورت ،

$$A\cos\phi = C_2, \qquad A\sin\phi = C_1, \tag{۳}$$

درنتیجه ، $C_1^2 + C_2^2 = A^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = A^2$ ، یا معادلا"

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \tag{۴}$$

همچنین ، از تلفیق فرمولهای (۲) و (۳) معلوم می‌شود که

$$y = A\cos\omega t\sin\phi + A\sin\omega t\cos\phi,$$

که به

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \tag{۵}$$

ساده می‌گردد . به‌بیان دیگر ، با انتخاب A و ϕ به عنوان مختصات‌قطبی نقطهٔ $(C_1, -C_2)$، داریم $A\cos\phi = C_1$ و $A\sin\phi = -C_2$ ، که A مجددا" از (۴) به دست می‌آید ، ولی اینجا به‌آسانی معلوم می‌شود که به جای (۵)

$$y = A\cos(\omega t + \phi). \tag{۵'}$$

توجه کنید که مقدار زاویهٔ ϕ در ('۵) $\pi/2$ از مقدار در (۵) کمتر است .

از روابط (۵) و ('۵) واضح است که یک ذره با حرکت توافقی ساده در امتداد محور y بالا و پایین می‌رود و پس از مدت زمان

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

به نام دورهٔ **تناوب** نوسانات ، حرکتش را تکرار می‌کند . توجه کنید که T دورهٔ تناوب اساسی هر دو تابع $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ است . گوییم نوسانات توصیف شده با (۵) یا ('۵) **نوسانات توافقی سینوس گون** می‌باشند . متقابل T ، یعنی

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

فرکانس نام دارد ، و اگر زمان به ثانیه باشد ، f به **دور بر ثانیه** (cps) خواهد بود؛ واژهٔ " دور " دلالت بر یک‌دور کامل حرکت‌ذره‌می‌باشد . یک‌دور بر ثانیه را به افتخار فیزیکدان تجربی آلمانی ، هنریش هرتـــز[1] (۱۸۹۴–۱۸۵۷) ، اولین کسی که امواج رادیویی تولید کرد ، یک **هرتز** (Hz) می‌نامند . کمیت ω **فرکانس زاویه‌ای** نام دارد ، و با رادیان بر ثانیه سنجیده می‌شود . کمیت A را **دامنهٔ** A می‌نامند ، و عبارت است از ماکزیمم $|y|$. درواقع ،

---

1. Heinrich Hertz

ذرهٔ P بین دو موضع اکستریم $y = A$ و $y = -A$ جلو و عقب می‌رود. شناسهٔ $\omega t + \phi$ هر دو تابع $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ فاز نام دارد، و زاویهٔ ϕ که مقدار فاز درلحظهٔ $t = 0$ است، فاز اولیه نامیده می‌شود. برحسب فرکانس f، می‌توان رابطهٔ (۵) را به صورت

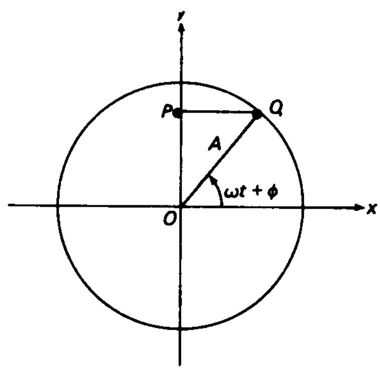
$$y = \sin(2\pi f t + \phi) \tag{۶}$$

و رابطهٔ (۵′) را به صورت

$$y = \cos(2\pi f t + \phi) \tag{۶′}$$

نوشت.

ارتباط جالب و مهمی بین حرکت توافقی ساده و حرکت مستدیر یکنواخت وجود دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۰۷). فرض کنیم نقطهٔ Q با تندی زاویه‌ای ω در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول دایرهٔ $x^2 + y^2 = A^2$ به شعاع A و به مرکز O دوران کند. در این صورت، زاویهٔ بین شعاع OQ و محور x مثبت در لحظهٔ t مساوی است با $\omega t + \phi$، که در آن ϕ زاویهٔ بین OQ و محور x مثبت در لحظهٔ $t = 0$ است (ر.ک. شکل ۳). فرض کنیم P تصویر Q روی محور y باشد. دراین‌صورت، وقتی Q حول‌دایرهٔ $x^2 + y^2 = A^2$ می‌چرخد، نقطهٔ



شکل ۳

P در امتداد محور y بالا و پایین رفته حرکت توافقی سادهٔ (۵′) را با دامنهٔ A، فرکانس زاویه‌ای ω، فاز $\omega t + \phi$، و فاز اولیهٔ ϕ انجام می‌دهد. همچنین، وقتی Q حول دایره می‌چرخد، تصویر Q روی محور x حرکت توافقی سادهٔ (۵′) با x به جای y خواهدداشت.

مثال ۱. حرکت توافقی سادهٔ

$$y = 3\cos 4\pi t + 4\sin 4\pi t \tag{۷}$$

را توصیف کنید.

حل. معادلهٔ (۷) به شکل (۲) است که در آن $C_1 = 3$ و $C_2 = 4$. لذا، طبق (۴)،

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

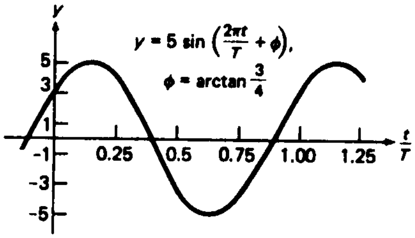
و معادلهٔ (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = 5 \sin (2\pi ft + \phi) = 5 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right), \tag{۷'}$$

که در آن $f = 2$ cps، $T = 1/f = 0.5$ sec، و

$$\phi = \arctan \frac{3}{4} \approx 0.6435 \text{ rad} \approx 36.87°$$

(معادلهٔ دوم (۳) را بر معادلهٔ اول تقسیم کرده و آن را نسبت به ϕ حل می‌کنیم). نمودار تابع (۷') در شکل ۴ نموده شده است، که در آن می‌بینید که مقدار y در $t = 0$ مساوی است با $5 \sin \phi = C_1 = 3$



شکل ۴

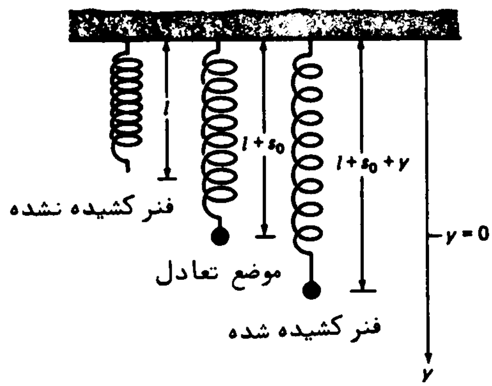
نوسانگر توافقی (حالت غیر میرا). هر دستگاه مکانیکی با حرکت توافقی ساده یک **نوسانگر توافقی** نام دارد. این دستگاه در مثال زیر توصیف می‌شود.

مثال ۲. یک گلوله به جرم m به انتهای پایینی فنری وصل شده است، و انتهای بالایی آن به تکیه‌گاه افقی محکمی متصل گشته است. فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ به گلوله تغییر مکان اولیهٔ y_0 و سرعت v_0 داده شده باشد. حرکت گلوله را درصورتی تعیین کنید که گلوله (به عنوان ذره) تحت اثر هیچ نیرویی جز وزنش و کشش فنر نباشد.

حل. بنابر قانون هوک[1] (ر.ک. صفحهٔ ۴۳۱)، برگلوله نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$

1. *Hooke*

وارد می‌شود، که در آن k ثابت مثبتی به نام سختی یا ثابت فنر بوده و s اختلاف طول فنرکشیده شده و کشیده نشده یا طول طبیعی l می‌باشد. بر گوی نیروی وزنش mg نیز اثر دارد، که فنر را به طول تعادلش $l + s_0$ می‌کشاند، که در آن $mg = ks_0$ (چرا؟). همانند شکل ۵، فرض کنیم محور y قائم و روبه‌پایین با مبداء ($y = 0$) درموضع



شکل ۵

تعادل گلوله باشد. در این صورت، نیروی کل وارد بر گلوله در موضع جابجا شده‌به‌مختص $y = y(t)$ مساوی است با

$$F = mg - ks = mg - k(s_0 + y) = -ky,$$

و درنتیجه، طبق قانون دوم حرکت نیوتن،

$$my'' = -ky, \qquad (۸)$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد، یا معادلاً، برحسب ثابت مثبت $\omega = \sqrt{k/m}$،

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

اما این معادلهٔ دیفرانسیلی است‌که به‌حرکت توافقی ساده منجر می‌شود. لذا، موضع گلولد در لحظهٔ $t \geq 0$ مساوی است با

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \qquad (۹)$$

برای تعیین ثابتهای C_1 و C_2، شرایط اولیهٔ $y(0) = y_0$ و $y'(0) = v_0$ را اعمال می‌کنیم. با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در فرمول (۹) و $t = 0, y' = v_0$ در فرمول

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t, \qquad (۹')$$

حاصل از مشتقگیری از (۹) نسبت به t، خواهیم داشت $C_1 = y_0$ و $C_2 = v_0/\omega$. لذا،

(۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$y = A \sin (\omega t + \phi), \tag{۱۰}$$

که در آن دامنهٔ A و فاز اولیهٔ ϕ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \phi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega y_0}{v_0}.$$

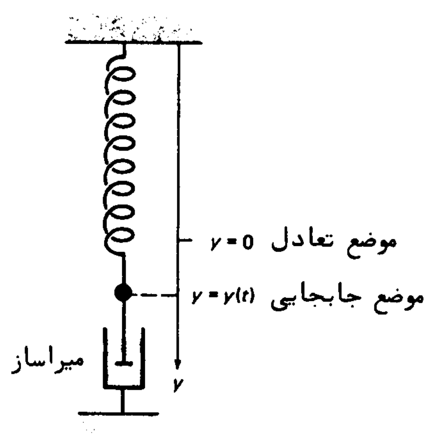
توجه کنید که هرقدر جرم گلوله کمتر و فنر سفت‌تر باشد ، فرکانس

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

نوسانات (۱۰) بزرگتر است . همچنین ، اگر گلوله وقت رهاشدن درحال سکون باشد($v_0 = 0$) ، $y = y_0 \cos \omega t$.

نوسانگر توافقی (حالت میرا) . نوسانات مثال قبل *غیرمیرا* هستند ؛ یعنی ، با دامنه‌ای ثابت تا بی‌نهایت می‌روند . این یک وضع ایده آل است ، زیرا در عمل دامنهٔ نوسانات با زمان تحلیل می‌رود ، و این به‌خاطر نیروهای ذاتی مقاومت ، مانند اصطکاک در فنر یا مقاومت هوا ، می‌باشد . در واقع ، در بعضی حالات ، عمدا "یک نیروی مقاومت وارد می‌شود تا نوسانات " مستهلک شوند " ، یا حتی از رویداد نوسانات در اول کار جلوگیری نماید .

مثلا" ، شکل ۶ تعدیلی از دستگاه مکانیکی مثال ۲ را نشان می‌دهد ، که در آن پیستونی که به ته گلوله وصل شده در یک استوانه پر از مایعی چسبنده فرورفته است . اثر



شکل ۶

این مکانیسم میراکن ،به‌نام *میراساز* ،این‌است‌که برگلوله نیروی مقاومت‌اضافی $F_R = -bv$ وارد کند ، که در آن b ثابت مثبتی است که **ضریب میرایی** نام دارد و $v = dy/dt = y'$ سرعت گلوله می‌باشد . حال قانون دوم نیوتن به جای (۸) نتیجه می‌دهد که

$$my'' = -by' - ky \qquad (۱۱)$$

یا معادلا"

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0, \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$2\lambda = \frac{b}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

هرگاه دستگاه مکانیکی که از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲) تبعیت کند یک **نوسانگرتوافقی میرا** نام دارد .

معادلهٔ مشخص (۱۲) عبارت است از

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0,$$

یا معادلا"

$$(r + \lambda)^2 = \lambda^2 - \omega^2,$$

با دو ریشهٔ $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ اگر $\lambda > \omega$ ،یک ریشهٔ $r = -\lambda$ اگر $\lambda = \omega$ ،وبدون‌ریشهٔ حقیقی اگر $\lambda < \omega$. فرض کنیم

$\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ اگر $\lambda > \omega$ ، $\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ اگر $\lambda < \omega$.

در این صورت ،بنابر روش توصیف‌شده در بخش ۳.۱۶ ، جواب معادلهٔ (۱۲) مساوی است با

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) \qquad (۱۳)$$

اگر $\lambda > \omega$ (*حالت فوق میرا*) ،

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) \qquad (۱۴)$$

اگر $\lambda = \omega$ (*حالت به‌طور بحرانی میرا*) ، و

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \qquad (۱۵)$$

اگر $\lambda < \omega$ (*حالت تحت میرا*) .بااین فرض که گلوله ابتدا در موضع $y = y_0$ درحال‌سکون است که از آن با سرعت صفر رها شده است ، شرایط اولیهٔ

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = 0$$

را داریم ، که حال با استفاده از آنها ثابتهای C_1وC_2را در هر یک از فرمولهای (۱۳)،(۱۴)

و (۱۵) تعیین می‌کنیم .

در حالت فوق میرا $(\lambda > \omega)$ ، از (۱۳) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) + \alpha e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} - C_2 e^{-\alpha t}).$$

با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در (۱۳) و $t = 0, y' = 0$ در فرمول اخیر ، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید :

$$C_1 + C_2 = y_0, \qquad (\alpha - \lambda)C_1 - (\alpha + \lambda)C_2 = 0,$$

که جواب

$$C_1 = \frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} y_0, \qquad C_2 = \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} y_0.$$

را دارد ؛ درنتیجه ، (۱۳) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$y = y_0 e^{-\lambda t}\left(\frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} e^{\alpha t} + \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} e^{-\alpha t}\right)$$

(۱۶)

$$= y_0 e^{-\lambda t}\left(\cosh \alpha t + \frac{\lambda}{\alpha} \sinh \alpha t\right).$$

در حالت به‌طور بحرانی میرا $(\lambda = \omega)$ ، از (۱۴) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-\lambda t}.$$

با گذاردن $t = 0, y' = 0$ در فوق و $t = 0, y = y_0$ در (۱۴) ، فورا" خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \qquad -\lambda C_1 + C_2 = 0,$$

یا معادلا" $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0$ ؛ درنتیجه ، (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید :

(۱۷)
$$y = y_0 e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).$$

در حالت تحت میرا $(\lambda < \omega)$ ، مشتق (۱۵) مساوی است با

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + \beta e^{-\lambda t}(-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t).$$

لذا ، با قرار دادن $t = 0, y' = 0$ در فوق و $t = 0, y = y_0$ در (۱۵) ،بلافاصله خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \qquad -\lambda C_1 + \beta C_2 = 0,$$

یا معادلا" $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0/\beta$ ؛ درنتیجه ، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید :

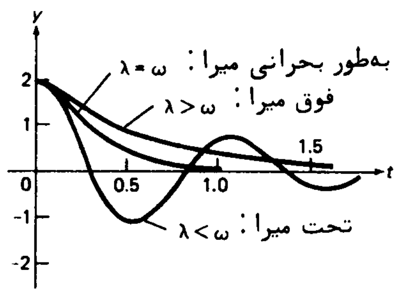
(۱۸)
$$y = y_0 e^{-\lambda t}\left(\cos \beta t + \frac{\lambda}{\beta} \sin \beta t\right).$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که (۱۸) شکل زیر را نیز دارد :

(۱۸')
$$y = y_1 e^{-\lambda t} \sin (\beta t + \phi),$$

که در آن $y_1 = y_0\sqrt{1 + (\lambda/\beta)^2}$ و $\phi = \arctan(\beta/\lambda)$.

از رابطهٔ (۱۸') واضح است که حرکت گلوله در حالت **تحت میرا** نوسانی است ، ولی وقتی $t \to \infty$ ، نوسانات به خاطر وجود عامل نمایی $e^{-\lambda t}$ به میزانی متناسب با اندازهٔ λ " مستهلک می‌شوند " (اگر λ کوچک باشد ، نوسانات می‌توانند مدت مدیدی دوام بیاورند ، ولی در غیر این صورت به‌سرعت از بین می‌روند) . فرکانس این نوسانات "بامیرایی نمایی" $\beta/2\pi$ است ، و از فرکانس $\omega/2\pi$ نوسانات غیرمیرا که در غیاب نیروهای مقاوم روی می‌دهند ($\lambda = 0$) کوچکتر است ؛ درواقع ، $\beta/2\pi$ را باید " شبه فرکانس " و $2\pi/\beta$ را " شبه‌دورهٔ تناوب" نامید ، زیرا نوسانات واقعا " متناوب نیستند . حرکت در حالات **فوق میرا** و **به‌طور بحرانی میرا** غیرنوسانی است . درواقع ، تحلیل توابع (۱۶) و (۱۷) نشان می‌دهد که هردو وقتی $t \to \infty$ تدریجا " به صفر نزول کرده ، و هرگز از محور t رد نمی‌شوند . شکل ۷ نمودارهای (۱۶) تا (۱۸) را به ازای $y_0 = 2$ و $\omega = 6$ نشان می‌دهد ؛ با $\lambda = 10$ درحالت فوق میرا ،



شکل ۷

درنتیجه $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = 8$ ، و $\lambda = 1$ درحالت تحت میرا ، درنتیجه

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{35} \approx 5.92$$

توجه کنید که حرکت در حالت به‌طور بحرانی میرا سریعتر از حالت فوق میرا " مستهلک می‌شود " .

نوسانات واداشته. بالاخره ، *نوسانات واداشته* را درنظرمی‌گیریم که درآن دستگاه نوسانات آزاد نبوده ، بلکه تحت اثر مداوم نیرویی خارجی به شکل $F_0 \cos \omega_0 t$ می‌باشد (یک نوسان توافقی با فرکانس $\omega_0/2\pi$ و دامنهٔ F_0) . فرض کنیم این نیرو بر گلولهٔ شکل ۶ وارد شده باشد ، و برای سادگی میراساز را برمی‌داریم ؛ درنتیجه ، نیروی مقاوم وجود ندارد . دراین صورت ، از قانون دوم نیوتن به جای (۸) داریم

$$my'' = -ky + F_0 \cos \omega_0 t$$

یا معادلا "

$$y'' + \omega^2 y = f_0 \cos \omega_0 t, \tag{۱۹}$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ و $f_0 = F_0/m$ ، و فرض است که $\omega_0 \neq \omega$. معادلهٔ (۱۷) را به روش بخش ۳.۱۶ حل می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t. \tag{۲۰}$$

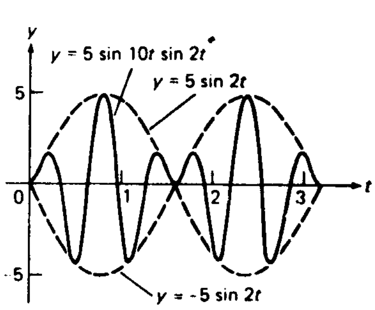
به آسانی معلوم می‌شود که دوجملهٔ اول سمت راست جواب عمومی معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' + \omega^2 y = 0$ را تشکیل می‌دهند ، ولی جملهٔ آخر جواب خصوصی معادلهٔ تام (۱۹) است . فرض کنیم گلوله ابتدا جابجا نشده و در حال سکون باشد . در این صورت، $y(0) = y'(0) = 0$ ،وبه‌آسانی می‌توان ثابتهای موجود در (۲۰) را یافت: $C_1 = -f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ و $C_2 = 0$ ؛ درنتیجه ، رابطهٔ (۲۰) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t),$$

که می‌توان آن را به‌کمک فرمول مسئلهٔ ۶۲ ، صفحهٔ ۱۰۰، به صورت زیر درآورد :

$$y = \frac{2f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin (\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)t) \sin (\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0)t). \tag{۲۱}$$

فرض کنیم $|\omega - \omega_0|$ درمقایسه با $\omega + \omega_0$ کوچک‌باشد . در این صورت ، (۲۱) نوسانی با تغییر سریع متناسب با $\sin (\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t)$ است که درنوسان‌باتغییربطئی $\sin (\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t)$ " ضرب شده است " . لذا ، نوسان (۲۱) سریع است ، ولی " پوش " آن تغییرات متناوب کند دارد که به **تپش** معروفند . صدای تپشها در برد فرکانس قابل شنیدن ناموزون به گوش می‌رسد ؛ برای تحقیق این امر ، دو مهرهٔ مجاور یک پیانو را همزمان فشار دهید . شکل ۸ پدیدهٔ تپشها را برای حرکت $y = 5 \sin 10t \sin 2t$ ، که از (۲۱) با فرض $\omega = 12$ ، $\omega_0 = 8$



شکل ۸

و $5 = 2f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ به دست می‌آید، نشان می‌دهد.

اگر $\omega = \omega_0$ ، درنتیجه فرکانس " تابع نیروی " $F = F_0 \cos \omega_0 t$ با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی باشد، جواب دیگری از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۹) به دست می‌آید که به پدیدهٔ مهم **تشدید** منجر خواهد شد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱).

مسائل

۱. نشان دهید هر نوسان به‌شکل (۵′) را می‌توان به صورت (۵) با همان‌دامنه‌وفرکانس نوشت.

۲. نشان دهید هر نوسان توافقی با فرکانس منفی را می‌توان به صورت یک‌نوسان‌توافقی با فرکانس مثبت نوشت. لذا، فرض $\omega > 0$ خللی به کلیت وارد نمی‌سازد.

۳. طول تقریبی (در امتداد شیار) یک دورهٔ تناوب از نوسانی سینوس‌گون به فرکانس 440 cps (A زیر وسط C) خارجی‌ترین شیار یک صفحهٔ ۱۲ اینچی گرامافون که با سرعت $33\frac{1}{3}$ rpm (دور در دقیقه) می‌گردد را بیابید.

۴. نشان دهید که مجموع دو نوسان توافقی با فرکانس معلوم نوسان توافقی دیگری با همان فرکانس است.

۵. نشان دهید که تندی یک‌ذره با حرکت توافقی ساده در لحظاتی صفر است که فاصلهٔ ذره تا نقطهٔ تعادل ماکزیمم باشد.

۶. نشان دهید که تندی یک ذره با حرکت توافقی ساده در زمانهایی ماکزیمم است که ذره از موضع تعادل می‌گذرد.

۷. یک ذره‌دارای‌حرکت‌توافقی‌ساده‌بادورهٔ‌تناوب $T = \pi$ sec ، موضع اولیهٔ $y(0) = -8$ cm و سرعت اولیهٔ $y'(0) = 12$ cm/sec است. دامنهٔ A ، فرکانس زاویه‌ای ω ، و فاز اولیه ϕ حرکت را بیابید. ذره در چه لحظهٔ t_1 از وضعیت تعادل عبور می‌کند؟

۸. فنری با وزنهٔ 3-lb به‌اندازهٔ 1.5 in کشیده شده است. فرض کنید وزنهٔ 6 in زیروضعیت تعادل کشیده شده و سپس با سرعت اولیهٔ صفر رها گردد. موضع y و سرعت y' وزنه را یکچهارم ثانیه بعد پیدا کنید. (شتاب ثقل را مساوی $g = 32$ ft/sec² بگیرید.)

۹. برای تعیین وزن جسم مسئلهٔ قبل واقعا" به چه چیز نیاز داریم؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱۰. دورهٔ تناوب نوسان جسمی که از یک فنر آویزان است 1 sec می‌باشد. فرض کنید جسم از فنر قطع شود. فنر پس از رسیدن به حالت سکون چقدر کوتاهتر خواهد بود؟

زمین را به‌طور ایده‌آل یک گوی کروی همگن به شعاع $R = 3960$ میل گرفته، و فرض کنید در

امتداد قطری از آن‌حفره‌ای ایجاد کرده باشیم . می‌توان (به کمک مسائل ۳۵ و ۳۶ بخش ۲۰۱۵) نشان داد که بر یک جسم داخل حفره نیروی جاذبه‌ای متناسب با فاصله‌اش‌تا‌مرکز زمین وارد می‌شود . فرض کنید جسمی از حال سکون به داخل حفره افتاده باشد .

۱۱ . زمان لازم T برای آنکه جسم به موضع اولیه‌اش در سطح زمین برسد چقدر است ؟

۱۲ . تندی v جسم را حین عبور از مرکز زمین پیدا نمایید .

۱۳ . نشان دهید که T و v دورهٔ تناوب و تندی ماهواره‌ای هستند که مدار مستدیر آن با زمین تماس دارد .

۱۴ . فرض کنید K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل یک نوسانگر توافقی غیرمیرا باشند . مستقیماً " با محاسبه نشان دهید که انرژی کل $E = K + V$ نوسانگر ثابت است .

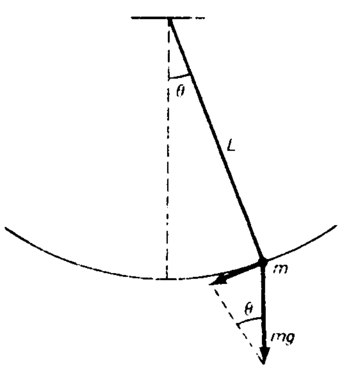
۱۵ . فنری با وزنهٔ 8-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی $b = 5$ lb sec/ft وصل است به اندازهٔ 4 in کشیده شده است . فرض کنید وزنه به اندازهٔ 6 in زیر وضعیت تعادل کشیده و سپس به آرامی رها شود . حرکت وزنه را تعیین نمایید .

۱۶ . فنری با وزنهٔ 4-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی b lb sec/ft وصل است به اندازهٔ 6 in کشیده شده است . حرکت به ازای چه مقادیری از b فوق‌میراست ؟ به‌طور بحرانی میراست ؟ تحت میراست ؟

۱۷ . فرض کنید A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ماکزیممهای متوالی نوسانات توافقی میرای (۱۸) باشند در این صورت ، کمیت $\delta = \ln (A_n/A_{n+1})$ **نزول لگاریتمی** نام دارد . δ را برحسب ثابت λ و شبه دورهٔ تناوب $T = 2\pi/\beta$ ی نوسانات میرا بیان دارید .

۱۸ . نشان دهید که تغییرمکان y نوسانات به‌طور بحرانی میرای (۱۷) از تغییرمکان نوسانات تحت میرای (۱۶) به ازای هر $t > 0$ کمتر است .

۱۹ . شکل ۹ یک دستگاه مکانیکی آشنا ، به نام **پاندول** (ساده) را نشان می‌دهد ،که در



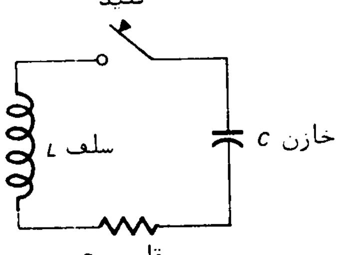
شکل ۹

آن گلوله‌ای به جرم m به نخی به طول L وصل بوده و در صفحهٔ قائمی‌نوسان می‌کند. فرض کنید $\theta = \theta(t)$ تغییرمکان زاویه‌ای گلوله از وضعیت سکون بوده، و نخ بدون وزن باشد. نشان دهید که θ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

صدق می‌کند. حرکت پاندول را به ازای θ های آنقدر کوچک که تعویض $\sin\theta$ با θ موجه است توصیف نمایید. این تقریب " خطی‌سازی" معادل حذف تمام جملات سری توانی $\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$ جز اولی است. دورهٔ تناوب T پاندول در این حالت چقدر است؟

۲۰. یک مدار الکتریکی از سلف L هانری، مقاومت R اهم، و خازن C فاراد تشکیل شده است که به طور سری به هم وصل شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۰). فرض کنید $q = q(t)$ و $i = i(t)$ بار خازن و شدت جریان مدار در لحظهٔ t بوده، و ابتدا خازن بار داشته باشد ولی شدت جریانی در مدار موجود نباشد. نشان دهید که q و i نوسانی‌اند اگر و فقط اگر $R < 2\sqrt{L/C}$.



شکل ۱۰

۲۱. فرض کنید در معادلهٔ (۱۹) $\omega = \omega_0$؛ درنتیجه، فرکانس ω_0 تابع نیرو با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی است. معادلهٔ (۱۹) را حل کرده و نشان دهید نوسانات حاصل بزرگ می‌شوند تا جایی که فنر پاره می‌شود. این پدیده به پدیدهٔ **تشدید** معروف بوده، و می‌تواند به در هم شکستن ساختارهای مکانیکی منجر شود. برای احتراز از تشدید است که در عبور از پلهای کوچک به سربازان دستور می‌دهند تا قدمهایشان را بشکنند.

۲۲. معادلهٔ (۱۹) را برای نوسانات واداشته درحالتی که میرایی وجود دارد، درنتیجه

(۱۹) جملهٔ اضافی داشته و به شکل

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = f_0 \cos \omega_0 t$$

است ، حل کنید . با فرض $\lambda^2 < \frac{1}{2}\omega^2$ ، **فرکانس تشدید** را بیابید؛ یعنی ، فرکانسی که به ازای آن نوسانات حالت پایدار حاصل ماکزیمم می‌باشند . دامنهٔ نوسانات را به ازای $\omega_0 = \omega$ بیابید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

معادلات دیفرانسیل خطی در مقابل غیرخطی

معادلات کامل ، شرط کامل بودن

منحنیهای انتگرال

عاملهای انتگرالگیری

معادلات خطی مرتبهٔ اول

معادلات خطی مرتبهٔ دوم همگن (با ضرایب ثابت)

معادلات خطی مرتبهٔ دوم غیرهمگن

قضیهٔ وجودی و یکتایی

مجموعهٔ اساسی از جوابها

معادلهٔ مشخص

روش ضرایب نامعین

حرکت توافقی ساده ، نوسانات توافقی

دورهٔ تناوب ، فرکانس ، دامنه ، و فاز

نوسانگر توافقی غیرمیرا و میرا

فوق‌میرایی ، میرایی بحرانی ، تحت میرایی

نوسانات واداشته

مسائل تکمیلی

فرض کنید F خانواده‌ای از منحنیها در صفحهٔ xy باشد . یک منحنی که به هر عضو F عمود باشد یک **مسیر قائم** F نام دارد . به آسانی معلوم می‌شود که اگر F از منحنیهای انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل

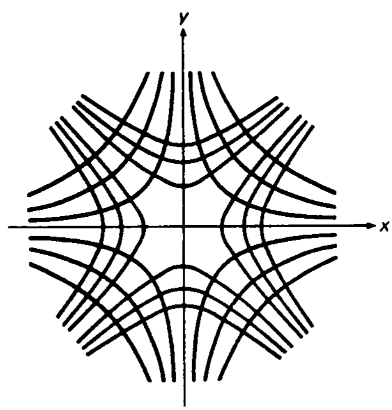
$$y' = f(x, y). \qquad \text{(یک)}$$

تشکیل شده باشد که در آن $f(x, y) \neq 0$ ، آنگاه هر مسیر قائم F یک منحنی انتگرال معادلهٔ

دیفرانسیل

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \qquad \text{(دو)}$$

است ، زیرا حاصل‌ضرب شیب یک منحنی انتگرال (یک) در شیب یک منحنی انتگرال (دو) در هر نقطهٔ اشتراک دو منحنی مساوی -1 است . مثلاً ، فرض کنیم F از تمام هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ تشکیل شده است ، که در آن C ثابت دلخواهی است . در این صورت ، هر عضو F منحنی انتگرال معادلهٔ $y' = x/y$ است (از $x^2 - y^2 = C$ به‌طور ضمنی مشتق گرفته و سپس نسبت به y' حل کنید) ؛ و لذا ، هر مسیر قائم F منحنی انتگرال معادلهٔ $y' = -y/x$ یا معادلاً $y\,dx + x\,dy = 0$ ، است با جواب عمومی $xy = k$ ، که در آن k ثابت دلخواه دیگری است . لذا ، هر هذلولی $xy = k$ یک مسیر قائم خانـــواده هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ است ، و در همین وضع ، هر هذلولی $x^2 - y^2 = C$ مسیر قائم خانوادهٔ هذلولیهای $xy = k$ می‌باشد ؛ ر.ک. شکل ۱۱ .



شکل ۱۱

با استفاده از این روش ، مسیرهای قائم خانوادهٔ داده شده از منحنیها را بیابید .

۱ . خطوط $y = Cx$

۲ . سهمیهای $y^2 = Cx$

۳ . دوایر $x^2 + y^2 = Cx$

۴ . بیضیهای $x^2 + 2y^2 = C$

۵ . هذلولیهای $x^2 - 2y^2 = C$

۶ . معادلهٔ دیفرانسیل خطی $y' + py = q$ را با جانشانی $y = uv$ حل کنید ، که در آن u و

v دو تابع مجهول‌اند، v را طوری بگیرید که ضریب u صفر شود، و سپس از معادلهٔ حاصل انتگرال بگیرید.

۷. اغلب می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل را با تعویض نقشهای x و y حل کرد. مثلاً، معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}(\ln y - x) = y, \qquad \text{(سه)}$$

که نسبت به y غیرخطی است، نسبت به x خطی است، و این را می‌توان با نوشتن آن به شکل معادل

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y} \qquad \text{(سهʹ)}$$

دید. جواب عمومی (سهʹ)، و درنتیجه (سه)، را بیابید.

معادلهٔ داده شده را با استفاده از روش مسئلهٔ قبل حل کنید.

۸. $(y - x)y' = 1$ ۹. $(x - y^2)y' = y$

۱۰. $(e^y + 2x)y' = 1$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' = f(x, y') \qquad \text{(چهار)}$$

را در نظر بگیرید، که در آن طرف راست تابع متغیر مستقل x و مشتق y' است، ولی به تابع مجهول y بستگی ندارد. در این صورت، معادلهٔ (چهار) فوراً به‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$p' = f(x, p) \qquad \text{(چهارʹ)}$$

نسبت به متغیر جدید

$$p = y'$$

تحویل می‌شود. توجه کنید که معادلهٔ اخیر یک معادلهٔ دیفرانسیل مانند $y' = p$ از نوع بسیار ساده است. لذا، اگر $p = p(x, C_1)$ جواب عمومی (چهارʹ) به شکل صریح (شامل ثابت دلخواه C_1) باشد، جواب عمومی معادلهٔ اصلی (چهار) عبارت‌است از $y = \int p(x, C_1)\,dx + C_2$، که در آن C_2 ثابت دلخواه دیگر می‌باشد. مثلاً، هرگاه $y'' - y' = x$، آنگاه $p' - p = x$، و جواب عمومی این معادلهٔ خطی نسبت به p مساوی است با $p = -x - 1 + C_1 e^x$. پس نتیجه می‌شود که

$$y = \int p\,dx = -\tfrac{1}{2}x^2 - x + C_1 e^x + C_2 .$$

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

۱۱. $xy'' + y' = 0$ ۱۲. $y'' - y' = e^x$

۱۳. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ ۱۴. $x^2y'' + xy' = 1$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' = f(y, y') \qquad \text{(پنج)}$$

را در نظـــــربگیرید ، که در آن طرف راست به تابع مجهول y و مشتقش y' وابسته است ولــــی تابــــع متغیر مستقل x نیست ،و مثل مجموعه‌مسائل قبل قراردهید $p = y' = dy/dx$ دراین صورت ،

$$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p,$$

درنتیجه ، (پنج) به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \qquad \text{(پنج')}$$

تحـــویـــل مـــی‌شود . لذا ، اگر $p = p(y, C_1)$ جواب عمومی (پنجَ) به شکل صریح ، شـــامل ثابـــــت دلخـــواه C_1 ، باشد ، جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

جـــــواب عمــــومی (پنج) می‌باشد . مثلا" ، هرگاه $yy'' - y'^2 = 0$ ، آنگاه $yp(dp/dy) - p^2 = 0$ یـــــا ، پـــــس از تقسیم بر p ، $y\,dp - p\,dy = 0$.با ضرب معادلهٔ اخیردرعامل‌انتگرالگیری $1/y^2$ نتیجـــــــه می‌شودکه $(y\,dp - p\,dy)/y^2 = d(p/y) = 0$ لذا ، $p/y = C_1$ یا $dy/dx = p = C_1y$ جـــــواب عمـــومی معادلهٔ اخیر (که جدایی پذیر است) ، و درنتیجه معادلـــهٔ اصلـــی $yy'' - y'^2 = 0$ ، مســـــاوی اســـــت با $y = C_2e^{C_1x}$. توجه کنید که جواب ثابت $y \equiv$ ، که در تقسیـــــــم بـــر p مفقود شد ، با قراردادن $C_1 = 0$ به دست می‌آید .

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

۱۵. $yy'' + y'^2 = 0$ ۱۶. $yy'' - y'^2 = 1$

۱۷. $y''(1 + y) = y'(1 + y')$ ۱۸. $\sqrt{y}y'' = y'$

روش زیر برای حل معادلهٔ خطی غیرهمگن مرتبهٔ دوم $y'' + ay' + by = f(x)$ **روش تغییر پارامتر** نام دارد . فرض کنید $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ یک مجموعهٔ اساسی ازجوابهای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' + ay' + by = 0$ را تشکیل داده ، و $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مجهول باشند . $y = uy_1 + vy_2$ را در معادلهٔ غیرهمگن گذارده ، و شرط $u'y_1 + v'y_2 = 0$ را برمشتقات

u' و v' اعمال می‌کنیم. در این صورت، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $(uy_1 + vy_2)'' + a(uy_1 + vy_2)' + b(uy_1 + vy_2) = f(x)$ به $u'y'_1 + v'y'_2 = f(x)$ ساده می‌شود. نتیجه عبارت است از دستگاه دو معادلهٔ

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0, \\ u'y'_1 + v'y'_2 &= f(x), \end{aligned} \qquad \text{(شش)}$$

و می‌توان نشان داد که این دستگاه همواره نسبت به u' و v' قابل حل است. در این‌صورت، با محاسبهٔ انتگرالهای $u = \int u'\,dx$ و $v = \int v'\,dx$ (در حالتی که میسر است) توابع u و v به دست می‌آیند، و جواب خصوصی نظیر $y = uy_1 + vy_2$ را از معادلهٔ غیرهمگن‌را خواهیم داشت. مثلا"، هرگاه $y'' - 2y' + y = 2e^x$، آنگاه، همانطورکه در مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۵۵۶، دیدیم، $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای معادلهٔ تحویل یافتهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ را تشکیل می‌دهند، و دستگاه (شش) به صورت

$$\begin{aligned} u'e^x + v'xe^x &= 0, \\ u'e^x + v'(e^x + xe^x) &= 2e^x, \end{aligned}$$

با جواب $u' = -2x,\ v' = 2$ درمی‌آید. بنابراین، $u = \int -2x\,dx = -x^2,\ v = \int 2\,dx = 2x$؛ درنتیجه، همانطور که در مثال فوق دیدیم، $y = -x^2e^x + 2x^2e^x = x^2e^x$ یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن $y'' - 2y' + y = 2e^x$ می‌باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید.

۱۹. $y'' + y = \tan x$

۲۰. $y'' + y = \sec x$

۲۱. $y'' - y = 2\sin^2 x$

۲۲. $y'' - 2y' + y = e^x/x$

۲۳. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

۲۴. $y'' + 3y' + 2y = \cos(e^x)$

معادلهٔ خطی همگن $y'' + ay' + by = 0$ با مجموعهٔ اساسی داده شده از جوابها را بیابید.

۲۵. $e^{-4x}\cos 5x,\ e^{-4x}\sin 5x$

۲۶. $e^{-10x},\ xe^{-10x}$

۲۷. $e^{3x},\ \sinh 3x$

۲۸. $e^{-99x},\ e^{100x}$

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول داده‌شده، شامل دو تابع مجهول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ از متغیر مستقل t، را حل کنید. (ابتدا، با حذف تابع y، یک معادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبهٔ دوم نسبت به x بیابید.)

۲۹. $\dfrac{dx}{dt} = y,\ \dfrac{dy}{dt} = -x$

۳۰. $\dfrac{dx}{dt} = x + y,\ \dfrac{dy}{dt} = x - y$

۳۱. $\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = t + x + y$

۳۲. $\frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = x + 2y$

۳۳. یک جسم استوانه‌ای روی یک دریاچه شناور است. فرض کنید جسم را کمی به‌پایین فشار داده و سپس به آرامی رها کنیم. نشان دهید که جسم حرکت توافقی ساده در راستای قائم می‌یابد (از نیروهای مقاومت صرف‌نظر می‌شود). دورهٔ تناوب T نوسانات را درصورتی بیابید که جسم در حال تعادل 2 ft در آب فرورفته باشد.

۳۴. فرض کنید E انرژی کل یک نوسانگر توافقی میرا باشد. نشان دهید که E به‌میزان hv^2 کاهش می‌یابد، که در آن v سرعت نوسانگر بوده و h ضریب میرایی آن می‌باشد.

یک معادلهٔ دیفرانسیل را اغلب می‌توان باگرفتن‌جوابی از آن به صورت سری‌توانی همگرای

$$y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(هفت)}$$

حل کرد. مثلاً، معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = 2xy' + 4y$ را درنظر بگیرید. با دوبارمشتقگیری از (هفت)، به کمک قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، سریهای توانی

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad \text{(هفت')}$$

را به دست می‌آوریم که همان شعاع همگرایی (هفت) را دارد. با گذاردن (هفت) و (هفت') در $y'' = 2xy' + 4y$، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

یا معادلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

هرگاه این معادله بخواهد اتحاد باشد، آنگاه توانهای یکسان x باید ضرایب یکسان داشته باشند (مثال ۴، صفحهٔ ۸۷۰، را به یاد آورید). بنابراین، $2a_2 = 4a_0$ یا $a_2 = 2a_0$، و

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+4)a_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

لذا، ضرایب سری (هفت) در فرمول بازگشتی

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(هشت)}$$

صدق می‌کنند. به ضرایب a_0 و a_1 می‌توان مقادیر دلخواه داد، ولی به محض انتخاب این ضرایب، سایر ضرایب $a_2, a_3, \ldots$ از فرمول (هشت) به دست می‌آیند. در واقع، به آسانی معلوم می‌شود که از (هشت) داریم

$$a_{2k} = \frac{2^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}\,a_0, \qquad a_{2k+1} = \frac{1}{k!}\,a_1$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (هفت)، بالاخره معلوم می‌شود که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = 2xy' + 4y$ مساوی است با $y = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$، که در آن توابع $y_0 = y_0(x)$ و $y_1 = y_1(x)$ دارای بسطهای سری توانی

$$y_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}, \qquad y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$$

می‌باشند. از آزمون نسبت نتیجه می‌شود که این دوسری به ازای هر x همگراست (درواقع، فورا" معلوم می‌شود که y_1 تابع xe^{x^2} است).

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید.

۳۵. $y'' = 2xy' - 4y$

۳۶. $y'' + xy' + y = 0$

۳۷. $y'' = xy$

۳۸. $y'' = x^2 y$