EbiMath.com

ریاضیات:

$$z^5 = e^{2\pi i} = 1$$

۳۱- اگر $z = e^{\frac{۲\pi i}{۵}}$ باشد، حاصل عبارت $A = \underbrace{z + z^۲ + z^۳ + z^۴}_{\text{دنباله هندسی}}$ کدام است؟ $i = \sqrt{-۱}$

۱) $+i$

۲) $\boxed{-۱}$

۳) $-i$

۴) $+۱$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_4 = \frac{z(1-z^4)}{1-z} = \frac{z - z^5}{1-z} = \frac{z-1}{1-z} = -1$$

۳۲- حاصل $\int_{-۱}^{۱} |xe^x|\,dx$ کدام است؟

۱) $۲ + \frac{۲}{e}$

۲) ۰

۳) $\frac{۲}{e}$

۴) $\boxed{۲ - \frac{۲}{e}}$

ابتدا بازه را جدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$= \int_{-1}^{0} -xe^x\,dx + \int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= -e^x(x-1)\Big|_{-1}^{0} + e^x(x-1)\Big|_0^1$$

$$= \left(1 - \frac{2}{e}\right) + (0+1) = 2 - \frac{2}{e}$$

۳۳- مساحت محصور به دو منحنی $f(x)=e^x$ و $g(x)=e^{e^x+x}$ در فاصله $[۰,۱]$ کدام است؟

$$S=\int_a^b |g(x)-f(x)|dx=\int_0^1 (e^{e^x+x}-e^x)\,dx$$

$$=\int_0^1 (e^{e^x}\cdot e^x-e^x)\,dx=\int_0^1 e^x(e^{e^x}-1)\,dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} e^x=u \\ e^x dx=du \end{cases}$$

$$=\int_1^e (e^u-1)\,du=e^u-u\Big|_1^e=e^e-e-(e-1)=e^e-2e+1$$

۱) $e^e+۲e+۱$

۲) $e^e-۱$

۳) $e^e+۱$

۴) $\boxed{e^e-۲e+۱}$

۳۴- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n+۲)-\sin n}{\cos(n+۲)+\cos n}$ کدام است؟

$$\sin(\alpha\pm\beta)=S\alpha C\beta\pm C\alpha S\beta \rightarrow S(\alpha+\beta)-S(\alpha-\beta)=2S\alpha C\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=C\alpha C\beta\mp S\alpha S\beta \rightarrow C(\alpha+\beta)+C(\alpha-\beta)=2C\alpha C\beta$$

$$\text{حد}=\lim\frac{2S\alpha C\beta}{2C\alpha C\beta}=\underline{tg\,\alpha}$$

۱) $\cot ۱$

۲) ۰

۳) $\boxed{\tan ۱}$

۴) موجود نیست.

۳۵- در ارتباط با همگرایی و واگرایی سری‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۱}{n+۱۳۹۸}\ ,\ B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^n}{n^۳}$$

$$A \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1398}=\operatorname{Ln}(x+1398)\Big|_1^{\infty}=\infty$$

$$B \xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{n^3}}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{(n+1)^3}}\right|=2>1$$

۱) $\boxed{\text{هردو واگرا}}$

۲) A همگرا و B واگرا

۳) A واگرا و B همگرا

۴) هردو همگرا

۳۶- کدام‌یک از موارد زیر معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم بر بیضی‌گون $\dfrac{x^۲}{۴}+\dfrac{y^۲}{۹}+\dfrac{z^۲}{۱۶}=۱$ در نقطهٔ $(\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳},۱,\dfrac{۴\sqrt{۵}}{۳})$ هستند؟

ابتدا بردار عمود بر سطح بیضی‌گون (گرادیان) را می‌یابیم؛

۱) صفحه مماس $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}x+\dfrac{۱}{۹}y+\dfrac{\sqrt{۵}}{۶}z=\dfrac{۱۷}{۹}$ و خط قائم $\dfrac{۳x-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۹(y-۱)=\dfrac{۶z-۸\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}$

۲) صفحه مماس $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}x+y+\dfrac{۴\sqrt{۵}}{۳}z=\dfrac{۱۰۱}{۹}$ و خط قائم $\dfrac{۳x-۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=y-۱=\dfrac{۳z-۴\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}}$

۳) صفحه مماس $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}x+y+\dfrac{۴\sqrt{۵}}{۳}z=\dfrac{۱۰۱}{۹}$ و خط قائم $\dfrac{۳x-۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=۹(y-۱)=\dfrac{۳z-۴\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}}$

۴) $\boxed{\text{صفحه مماس } \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}x+\dfrac{۲}{۹}y+\dfrac{\sqrt{۵}}{۶}z=۲ \text{ و خط قائم } \dfrac{۳x-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\dfrac{۹(y-۱)}{۲}=\dfrac{۶z-۸\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}}$

$$g:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1 \xrightarrow{\text{گرادیان}} \vec{\nabla}g=\left(\frac{1}{2}x,\frac{2}{9}y,\frac{1}{8}z\right) \xrightarrow{\text{حال از نقطه}} \underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{9},\frac{\sqrt{5}}{6}\right)}$$

بردار نرمال صفحه مماس و بردار هادی خط قائم

$$\xrightarrow{\text{صفحه}} \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{2}{9}(y-1)+\frac{\sqrt{5}}{6}\left(z-\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)=0$$

$$\xrightarrow{\text{خط}} \frac{x-2\sqrt{3}/3}{\sqrt{3}/3}=\frac{y-1}{2/9}=\frac{z-4\sqrt{5}/3}{\sqrt{5}/6}$$

۳۷- اگر $u=\ln\frac{x^۴+y^۴}{x+y}$ باشد حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

ساده‌سازی $\longrightarrow u=\ln(x^4+y^4)-\ln(x+y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{1}{x+y}\xrightarrow{\times x}x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4x^4}{x^4+y^4}-\frac{x}{x+y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4y^3}{x^4+y^4}-\frac{1}{x+y}\xrightarrow{\times y}y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4y^4}{x^4+y^4}-\frac{y}{x+y}$

جمع $\longrightarrow =4-1=3$

۱) $۳e^u$

۲) $\boxed{۳}$

۳) $۳u$

۴) $۳\ln u$

۳۸- حاصل انتگرال $\iiint_{x^۲+y^۲+z^۲\le a^۲}|x|\,dx\,dy\,dz$ کدام است؟ $I=$

$I=2\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a}(r\cos\theta\sin\phi)\,r^2\,dr\,d\theta\,\sin\phi\,d\phi$

$=(2)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{a}r^3\,dr\right)$

$=(2)\left(\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi\right)\Big|_0^{\pi}\right)\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{a}\right)=2\times2\times\frac{\pi}{2}\times\frac{a^4}{4}$

۱) $۲\pi a^۴$

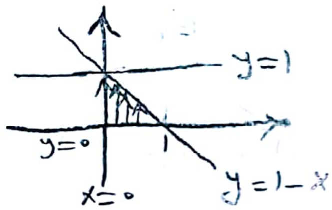
۲) صفر

۳) $\boxed{\frac{\pi a^۴}{۲}}$

۴) $\pi a^۴$

۳۹- مقدار $\int_۰^۱\int_۰^{۱-y}e^{x^۲-۲x}\,dx\,dy$ کدام است؟

تعویض کران $\longrightarrow$



$x=1-y\rightarrow y=1-x$

$=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}e^{x^2-2x}\,dy\right)dx$

$y\,e^{x^2-2x}\Big|_0^{1-x}$

$=\int_{x=0}^{1}(1-x)e^{x^2-2x}\,dx$ $\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}\begin{cases}x^2-2x=u\\(2x-2)dx=du\end{cases}=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^u\,du=-\frac{1}{2}e^u\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$

۱) $\boxed{\frac{e-۱}{۲e}}$

۲) $\frac{e-۱}{۲}$

۳) $e-۱$

۴) $\frac{e-۱}{e}$

۴۰- رویهٔ s قسمتی از کرهٔ $x^۲+y^۲+(z-\sqrt{۳})^۲=۴$ می‌باشد که در بالای صفحهٔ $z=۰$ قرار دارد. انتگرال $\iint_s(\nabla\times\vec F).\vec n\,ds$ کدام است؟ $\vec n$ بردار عمود بر s و به طرف بیرون سطح کروی بوده و $\vec F$ به‌صورت $\vec F(x,y,z)=(xe^{z^۲-۲z},\frac{۱}{x}+y+\sin xyz,e^{z^۲}\sin z^۲)$ می‌باشد.

$\xrightarrow{z=0}F=\left(x,\frac{1}{x}+y,0\right)$

$\rightarrow x^2+y^2+3=4\rightarrow x^2+y^2=1\rightarrow r=(\cos t,\sin t)$

$\rightarrow dr=(-\sin t,\cos t)\,dt\ ,\ F=\left(\cos t,\frac{1}{\cos t}+\sin t,0\right)$

استوکس $\longrightarrow \oint F\cdot dr=\iint \mathrm{curl}F\cdot n\,ds=\int_{t=0}^{2\pi}(-\sin t\cos t+1+\sin t\cos t)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}dt=t\Big|_0^{2\pi}=2\pi$

۱) $\boxed{۲\pi}$

۲) صفر

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) π

-۴۱ جواب عمومی معادله $y' = \frac{2y}{5y-2x}$ کدام است؟

۱) $5y^2+4xy=c$
۲) $5y^2-2xy=c$
۳) $5y^2+2xy=c$
۴) $\boxed{5y^2-4xy=c}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{5y-2x} \longrightarrow \underbrace{2y}_{M}\,dx \underbrace{-(5y-2x)}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \to$ کامل

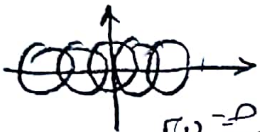
$c = \int M dx + \int^{*} N dy \to C = \int 2y\,dx + \int -5y\,dy$

$c = 2xy - \frac{5y^2}{2} \xrightarrow{\times -2} -2c = -4xy + 5y^2$

C_1

-۴۲ معادله دیفرانسیل دسته دوایری در صفحه که مرکز آن‌ها روی محور xها باشد، کدام است؟

۱) $\boxed{1+yy''+y'^2=0}$
۲) $1-y^2y''+y'=0$
۳) $1+yy''+y'=0$
۴) $1-yy''+y'^2=0$



$\to (x-a)^2 + y^2 = c \xrightarrow{\text{مشتق}} 2(x-a) + 2yy' = 0$

$\xrightarrow{\text{مشتق}\,(1)} 2 + 2y'^2 + 2yy'' = 0 \xrightarrow{\div 2} 1 + y'^2 + yy'' = 0$

-۴۳ جواب خصوصی معادله $y''-6y'+9y=6e^{3x}-\ln 2$ کدام است؟

۱) $\boxed{3x^2e^{3x}-\frac{1}{9}\ln 2}$
۲) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{1}{9}x\ln 2$
۳) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{1}{9}\ln 2$
۴) $3x^2e^{3x}-\frac{1}{9}x\ln 2$

$\xrightarrow{\text{اپراتور معکوس}} D^2y - 6Dy + 9y = 6e^{3x} - \ln 2$

$\to y = \frac{1}{D^2-6D+9}(6e^{3x} - \ln 2)$

$D=3 \to \times x \to \frac{6xe^{3x}}{2D-6} \xrightarrow{D=3} \times x \to \boxed{\frac{6x^2e^{3x}}{2}}$

$\boxed{D=0 \to -\frac{1}{9}\ln 2}$

-۴۴ کدام گزینه در مورد معادله $x^2(x-2)y''-y'\sin x+y=0$ صحیح است؟

۱) نقاط $x=0$ و $x=2$ تکین نامنظم هستند.
۲) $\boxed{\text{نقاط } x=0 \text{ و } x=2 \text{ تکین منظم هستند.}}$
۳) نقطه $x=0$ تکین نامنظم و $x=2$ تکین منظم است.
۴) نقطه $x=0$ تکین منظم و $x=2$ تکین نامنظم است.

ساده است ندارد

$\to y'' \underbrace{-\frac{\sin x}{x^2(x-2)}}_{P} y' + \underbrace{\frac{1}{x^2(x-2)}}_{q} y = 0$

$x=0 \to P_0 = \lim_{x\to 0} xP = \frac{1}{2} \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q = \frac{-1}{2}$

$x=2 \to P_0 = \lim_{x\to 2} (x-2)P = -\frac{\sin 2}{4} \qquad q_0 = \lim_{x\to 2} (x-2)^2 q = 0$

-۴۵ تبدیل لاپلاس جواب معادله $xy''+(1+x)y'+y=0$ که در آن $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{s-1}{s^2+s}$
۲) $\frac{1}{s-1}$
۳) $\boxed{\frac{1}{s+1}}$
۴) $\frac{s+1}{s^2-s}$

$\ell(y) = F(s) \qquad \ell(y') = SF(s) - f(0) \qquad \ell(y'') = S^2F(s) - Sf(0) - f'(0)$

$\ell(xy) = -(\ell(y))'$

روش تستی: معادله غیر کوشی اویلر یکی از جواب‌ها را می‌توان حدس زد $y = e^{-x} \to \ell(y) = \frac{1}{s+1}$

$\xrightarrow{\text{از طرفین لاپلاس می‌گیریم}} \ell(xy'') + \ell(y') + \ell(xy') + \ell(y) = 0$

$\to -(S^2F(s) - S + 1)' + SF(s) - 1 - (SF(s) - 1)' + F(s) = 0$

$\to -2SF(s) - S^2F'(s) \cancel{+1} + SF(s) \cancel{-1} - \cancel{F(s)} - SF'(s) + \cancel{F(s)} = 0$

$\to F'(s)(-S^2 - S) + F(s)(-S) = 0 \to \frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{S}{S^2+S} = \frac{-1}{S+1}$

$\xrightarrow{\int} \ln(F(s)) = -\ln(S+1) = \ln(S+1)^{-1} \longrightarrow F(s) = (S+1)^{-1} = \frac{1}{S+1}$

تحلیل درس «ریاضیات»

کنکور کارشناسی ارشد مهندسی عمران ۹۸

ریاضی ۱:

۳۱- اعداد مختلط (متوسط)

۳۲- انتگرال جزء به جزء (ساده)

۳۳- کاربرد انتگرال (مساحت) (متوسط)

۳۴- حد (سخت)

۳۵- سری (همگرایی-واگرایی) (ساده)

ریاضی ۲:

۳۶- خط و صفحه (گرادیان) (ساده)

۳۷- مشتقات جزئی (ساده)

۳۸- انتگرال سه‌گانه (متوسط)

۳۹- انتگرال دوگانه (تعویض کران) (ساده)

۴۰- انتگرال روی سطح (متوسط)

معادلات:

۴۱- مرتبه اول (کامل) (نسبتاً ساده)

۴۲- تشکیل معادله دیفرانسیل (ساده)

۴۳- مرتبه ۲ خطی با ضرایب ثابت (ناهمگن) (ساده)

۴۴- سری (ساده)

۴۵- لاپلاس (متوسط)

ابراهیم شاه ابراهیمی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه و کنکور ارشد

خرداد ۹۸