بسمه تعالی

دانشکده ریاضی

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

شماره آزمون:

وقت: ۱۲۰ دقیقه

تاریخ: ۱۳۹۸/۳/۲۶

نام و نام‌خانوادگی:

ابراهیم شاه ابراهیمی

شماره دانشجویی:

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشکده:

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

رشته تحصیلی:

math-teacher.blog.ir

استاد درس:

«خرداد ۹۸»

سوال۱	سوال۲	سوال۳	سوال۴	سوال۵	سوال۶	جمع

توضیحات:

الف) به هیچ وجه برگه‌ها از محل دوخت جداً نشود.

ب) از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی پاسخ نامه جداً خودداری نمایید.

ج) پاسخ هر سوال بر روی برگه مربوط به همان سوال داده شود. در غیر این صورت از تصحیح برگه خودداری می‌شود.

مشابه سوال ۵ اردیبهشت ۹۷

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

math-techer.blog.ir

مسئله ۱. نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی‌گون $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ را از نقطه $(-1,0,0)$ بیابید. (۱۵ نمره)

حل.

تابع لاگرانژ = تابع هدف + λ (تابع شرط)

هدف = $d = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$

$$L = (x+1)^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} - 1\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \to 2x + 2 + \frac{1}{2}\lambda x = 0 \longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\lambda=-2} x+2=0 \to \boxed{x=-2} \\ \xrightarrow{\lambda=-1} \frac{3}{2}x+2=0 \to \boxed{x=-\frac{4}{3}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \to 2y + 2\lambda y = 0 \to 2y(1+\lambda) = 0 \begin{cases} \boxed{y=0} \; * \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \to 2z + \lambda z = 0 \to z(2+\lambda) = 0 \begin{cases} \boxed{z=0} \; ** \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \to \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} - 1 = 0 \xrightarrow{*,\,**} \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \to x^2 = 4 \to \boxed{x = \pm 2}$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{4}{3}} \begin{cases} \xrightarrow{y=0} \frac{4}{9} + \frac{z^2}{2} - 1 = 0 \to \frac{z^2}{2} = \frac{5}{9} \to z^2 = \frac{10}{9} \to \boxed{z = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}} \\ \xrightarrow{z=0} \frac{4}{9} + y^2 - 1 = 0 \to y^2 = \frac{5}{9} \to \boxed{y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}} \end{cases}$$

پس نقاط عبارتند از:

$$\left(-\frac{4}{3}, 0, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right), (\pm 2, 0, 0)$$

$$d = \sqrt{(2+1)^2 + 0 + 0} = \boxed{3} \quad \text{Max}$$

$$d = \sqrt{(-2+1)^2 + 0 + 0} = 1$$

$$d = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}+1\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 0} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}} \quad \text{min}$$

$$d = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}+1\right)^2 + 0 + \left(\pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - خرداد ۹۸

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۲. مطلوب است انتگرال $\iiint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dV$ که در آن D ناحیه محصور در درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ و درون استوانهٔ $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ است. (۲۰ نمره)

حل.

مختصات استوانه‌ای $\longrightarrow$

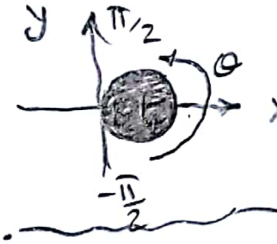
$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\cos\theta}\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1-r^2}\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

نحوه نوشتن کران‌ها:

$$x^2+y^2+z^2=1 \to r^2+z^2=1 \to z^2=1-r^2 \to z=\pm\sqrt{1-r^2}$$

$$(x-\tfrac{1}{2})^2+y^2=\tfrac{1}{4} \to \underline{\underline{x^2}}-x+\cancel{\tfrac{1}{4}}+\underline{\underline{y^2}}=\cancel{\tfrac{1}{4}} \to r^2-r\cos\theta=0$$

$$r(r-\cos\theta)=0 \begin{cases} r=0 \\ r=\cos\theta \end{cases}$$



نحوه انتگرال‌گیری $\longrightarrow$

$$\int_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1-r^2}\,dz = \sqrt{1-r^2}\,z\Big|_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} = (1-r^2)+(1-r^2)=2(r-r^2)$$

$$\int_{r=0}^{\cos\theta} 2(r-r^3)\,dr = r^2-\frac{r^4}{2}\Big|_{r=0}^{\cos\theta} = \cos^2\theta-\frac{\cos^4\theta}{2}$$

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos^4\theta\right)d\theta \overset{\text{زوج}}{=} 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+2\cos2\theta+\cos^2\theta}{4}\right)$$

$$=\boxed{\frac{5\pi}{16}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی خرداد ۹۸

ترکیبی

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

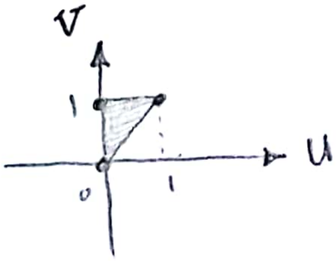
مسئله ۳. فرض کنید D مثلثی با رئوس $(1,0)$، $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$، $(0,0)$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_D \cos\pi\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA$ را به دست آورید. (۲۰ نمره)

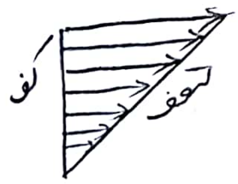
حل.

تغییر متغیر خطی

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \rightarrow J=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\begin{array}{ccc} x\ y & & u\ v \\ (0,0) & \rightarrow & (0,0) \\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \rightarrow & (0,1) \\ (1,0) & \rightarrow & (1,1) \end{array}$$





$$= \frac{1}{2}\int_{v=0}^{1} \boxed{\int_{u=0}^{v} \cos\left(\frac{u\pi}{v}\right) du}\, dv$$

$$\frac{v}{\pi}\sin\left(\frac{u\pi}{v}\right)\Big|_{u=0}^{v} = \frac{v}{\pi}\left(\cancel{\sin(\pi)}-\cancel{\sin(0)}\right)=0$$

$$= \frac{1}{2}\int_{v=0}^{1} 0\, dv = \boxed{\text{صفر}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی ـ خرداد ۹۸

math-techer.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

سوال خرداد ۹۵

math-techer.blog.ir

مسئله ۴. مقدار انتگرال

$$\int_C (۲xyz^۲)\, dx + (x^۲z^۲ + z\cos(yz))\, dy + (۲x^۲yz + y\cos(yz))\, dz$$

روی منحنی $\mathbf{r}(t) = \left(\ln\left(۱ + \frac{۲t}{\pi}(e-۱)\right), \frac{\pi}{۴}\sin t, ۱ + \sin t\right)$ را از $t = ۰$ تا $t = \frac{\pi}{۲}$ محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

حل. انتگرال داده شده همان انتگرال خم است. پایستار بودن یا نبودن میدان آن را چک می کنم.

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & J & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2 + z\cos(yz) & 2x^2yz + y\cos(yz) \end{vmatrix}$$

$$= \left(2x^2z + \cos(yz) - yz\sin(yz) - 2x^2z - \cos(yz) + yz\sin(yz)\right)\vec{i}$$

$$- (4xyz - 4xyz)\vec{J} + (2xz^2 - 2xz^2)\vec{k} = \boxed{(0, 0, 0)}$$

بنابراین میدان پایستار است و کافیست تابع پتانسیل آن را بیابیم.

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz$$

$$= \int_C 2xyz^2\,dx + \int_C z\cos(yz)\,dy + \int_C 0\,dz$$

$$= x^2yz^2 + \sin(yz) \Big|_{t=0 \xrightarrow{\text{نقطه}} (0, 0, 1)}^{t=\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{نقطه}} (1, \frac{\pi}{4}, 2)}$$

$$= \left((1)(\tfrac{\pi}{4})(2)^2 + \sin(\tfrac{\pi}{4} \times 2)\right) - \cancel{(0 - \sin 0)}$$

$$= \boxed{\pi + 1}$$

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

$\boxed{\text{مشابه سؤال ۶ دی ۹۷}}$

مسئله ۵. درستی قضیه استوکس برای میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y^2)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

روی بخشی از کرهٔ $z^2 = 2 - x^2 - y^2 - 2x$ که بالای صفحه $z = 0$ قرار دارد را بررسی کنید. (۲۵ نمره)

حل.

$$\xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} \iint \operatorname{curl}F\cdot n\,ds = \int F\cdot dr$$

$\int F\cdot dr$ $\xrightarrow[z=0]{\text{تلاقی صفحه}}$ $0 = 2 - x^2 - y^2 - 2x \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 3$ $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t + 1 \\ y = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$

$$r = (\sqrt{3}\cos t + 1, \sqrt{3}\sin t) \longrightarrow dr = (-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t)\,dt$$

$$\xrightarrow{z=0} F = (x-y, x+y^2) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} F = (\sqrt{3}\cos t + 1 - \sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t + 1 + 3\sin^2 t)$$

$$\underrightarrow{\int F\cdot dr} = \int_0^{2\pi} (-3\sin t\cos t - \sqrt{3}\sin t + 3\sin^2 t + 3\cos^2 t + \sqrt{3}\cos t + 3\sqrt{3}\cos t\sin^2 t)\,dt$$

$$\overset{\text{ساده‌سازی}}{=} \int_0^{2\pi} (-\frac{3}{2}\sin 2t - \sqrt{3}\sin t + 3 + \sqrt{3}\cos t + 3\sqrt{3}\cos t\cdot\sin^2 t)\,dt$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cos 2t + \sqrt{3}\cos t + 3t + \sqrt{3}\sin t + 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \boxed{6\pi}$$

$\iint \operatorname{curl}F\cdot n\,ds$ $\xrightarrow{g: z=0}$ $n\,ds = \dfrac{\nabla g}{|\nabla g\cdot k|} = \dfrac{(0,0,1)}{|(0,0,1)\cdot(0,0,1)|}\,dA = (0,0,1)\,dA$

$$\operatorname{curl}F = \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \left|\begin{array}{ccc} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x-y & x+y^2 & z^2 \end{array}\right| = (0, 0, 1-(-1)) = (0,0,2)$$

$$\underrightarrow{\iint \operatorname{curl}F\cdot n\,ds} = \iint (0,0,2)\cdot(0,0,1)\,dA = 2\iint dA \xrightarrow[\text{دایره‌ای به شعاع } \sqrt{3}]{(x-1)^2+y^2=\sqrt{3}}$$

$$= 2(\pi(\sqrt{3})^2) = 2(3\pi) = \boxed{6\pi}$$

math-techer.blog.ir

مشابه سوال ۵ خرداد ۹۷

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۶. انتگرال سطح (رویه ای) $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ که در آن

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\langle ۲xz, ۱-۴xy^۲, ۲z-z^۲\rangle$$

و S رویه ای است که از بالا به سهمی گون $z=۶-۲x^۲-۲y^۲$ و از پایین به صفحهٔ $z=۲$ محدود است را به دست آورید. (۲۰ نمره)

حل. باتوجه به محدود بودن سطوح می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد:

$$\iint \mathbf{F}.\mathbf{n}ds=\iiint div\mathbf{F}.dv$$

$$div\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\cancel{2z}+(-8xy)+2-\cancel{2z}=2-8xy$$

$$=\iiint(2-8xy)dv \qquad \begin{cases} z=6-2(x^2+y^2) \\ z=2\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 6-2(x^2+y^2)=2$$

$$x^2+y^2=2$$

مختصات استوانه‌ای

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}}\underbrace{\int_{z=2}^{6-2r^2}(2-8(r\cos\theta)(r\sin\theta))dz}_{(2-4r^2\sin 2\theta)(\cancel{6-2r^2-2})\ 4-2r^2}.rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\underbrace{\int_{r=0}^{\sqrt{2}}(8r-4r^3-16r^3\sin2\theta+8r^5\sin2\theta)dr}_{(4r^2-r^4-4r^4\sin2\theta+\frac{4r^6}{3}\sin2\theta)\Big|_0^{\sqrt{2}}=8-4-16\sin2\theta+\frac{32}{3}\sin2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}(4-\frac{16}{3}\sin2\theta)d\theta$$

$$=(4\theta+\frac{8}{3}\cos(2\theta))\Big|_{\theta=0}^{2\pi}=\boxed{8\pi}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - خرداد ۹۸