بسمه تعالی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

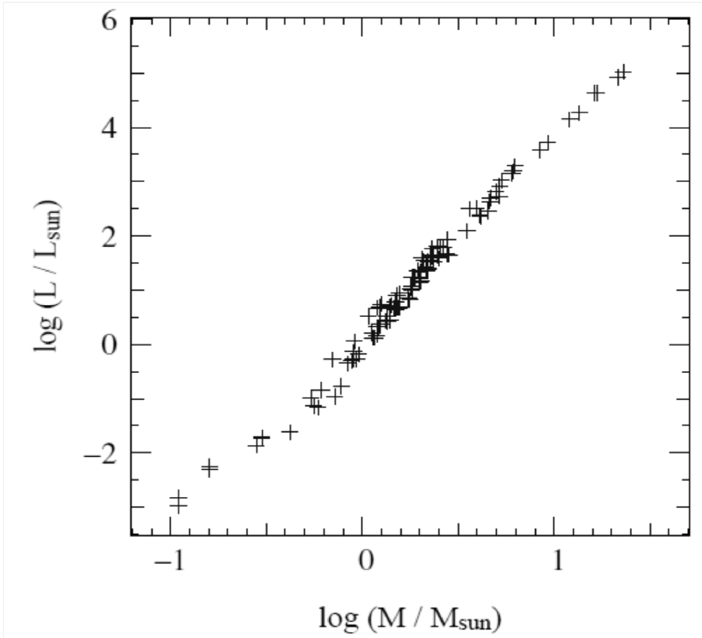
۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

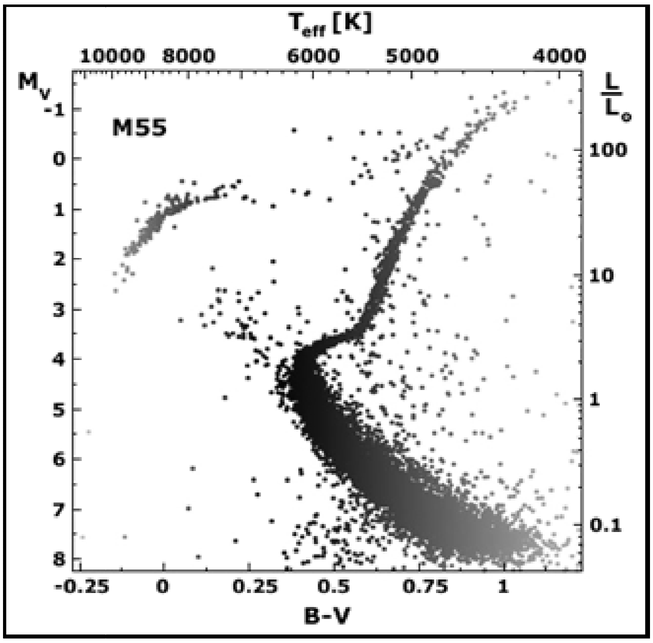
کد ملی:

سؤال۱ : (۵۰ نمره)

نمودار جرم-درخشندگی ستارگان در مقیاس لگاریتمی (شکل ۱) و نمودار رنگ-قدر یک خوشه‌ی کروی (شکل ۲) داده شده است. از این نمودارها می‌توان برای تخمین سن و جرم ستاره‌ای خوشه استفاده کرد.



شکل ۱: نمودار جرم-درخشندگی ستاره‌ای



شکل ۲: نمودار رنگ-قدر یک خوشه‌ی کروی

الف) به کمک این نمودارها، درخشندگی و جرم ستاره‌ای از خوشه را بیابید که در حال خروج از رشته‌ی اصلی است. (جواب‌ها را برحسب درخشندگی و جرم خورشید به‌دست آورید.)

ب) با فرض این‌که این خوشه از ستارگان هم‌سن تشکیل شده‌است، سن خوشه را بر حسب سال به‌دست آورید.

ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای، معرف تعداد ستاره‌هایی (dN) از خوشه است که جرمشان در بازه‌ی M و $M + dM$ قرار دارد. فرض کنید تابع جرم اولیه‌ی این خوشه به صورت زیر است:

$$\frac{dN}{dM} \propto \begin{cases} M^{-۱} & ۰/۱ < M < ۰/۵ \\ M^{-۲/۳۵} & ۰/۵ < M < ۲۰ \end{cases}$$

هم‌چنین فرض کنید مدت زمانی که ستارگان نمایش داده‌شده در نمودار شکل ۲، در مراحل بعد از خروج از رشته‌ی اصلی (پَسارشته‌ی اصلی) سپری می‌کنند حداکثر ۱۰ درصد مدت زمانی است که در رشته‌ی اصلی می‌گذرانند. حد بالا و پایینی برای جرم ستاره‌هایی که در مرحله‌ی پسارشته‌ی اصلی قرار دارند، را به‌دست آورید.

د) اگر در شکل ۲، در مجموع ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسارشته‌ی اصلی موجود باشند، جرم کل این خوشه‌ی ستاره‌ای را به‌دست آورید.

سؤال ۲: (۳۰ نمره)

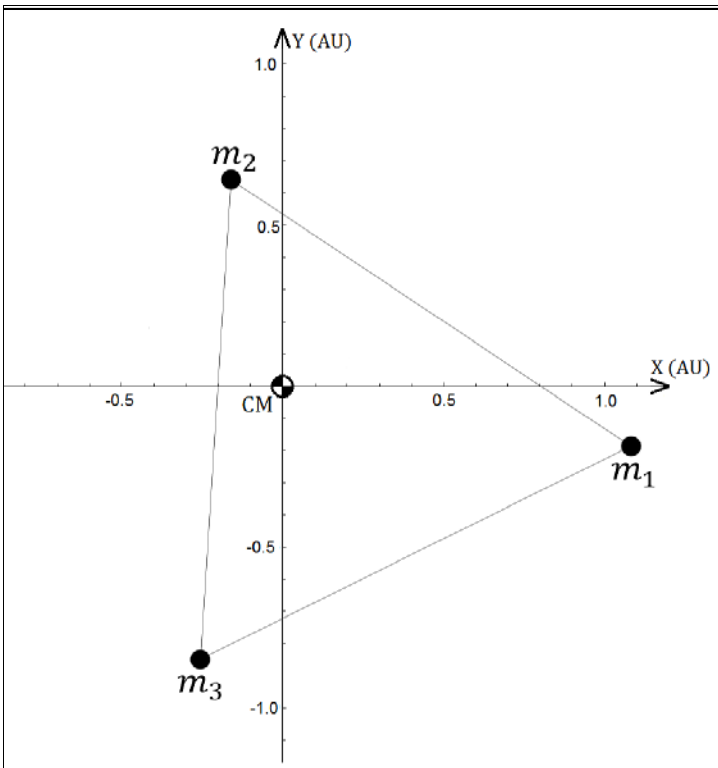
پرتوهای کیهانی از عوامل مزاحم در تصویربرداری‌های عمیق از آسمان هستند. این پرتوها با برخورد به سی‌سی‌دی‌ها و آزاد کردن الکترون باعث اشباع پیکسل‌های سی‌سی‌دی و در نتیجه از بین رفتن اطلاعات نورسنجی آن بخش از سی‌سی‌دی‌ها می‌شوند. برای برطرف کردن این مشکل، منجمان زمان کلِ نوردهیِ سی‌سی‌دی را معمولاً به چند زمان کوتاه‌تر تقسیم می‌کنند تا در مجموع اطلاعات همه‌ی پیکسل‌های یک سی‌سی‌دی را در اختیار داشته باشند. یعنی اگر در یک نوردهی، پرتوی کیهانی موجب اشباع یک پیکسل شود، در نوردهی بعدی از این امر در امان بماند.

منجمی از تلسکوپ فضایی هابل برای تصویربرداری استفاده می‌کند. در این مورد، پرتوهای کیهانی با آهنگ ۱۰۰ پرتو در ثانیه در سانتی‌مترمربع، به‌طور تصادفی اما با توزیع یکنواخت فرود می‌آیند. این تلسکوپ دارای فاصله‌ی کانونیِ $57/6$ متر است و میدان دید آشکارساز آن مربعی به ضلع ۱۶۰ ثانیه‌ی قوسی است. پهنای زاویه‌ای (ضلع) هر پیکسل مربعی‌شکل این سی‌سی‌دی $0/04$ ثانیه قوسی است. اگر مدت زمان نورگیری از یک منطقه از آسمان ۲ ساعت باشد، حداقل تعداد تصاویری را که تلسکوپ هابل باید عکس‌برداری کند تا کمتر از ۵٪ پیکسل‌های هر عکس به دلیل برخورد پرتوهای کیهانی اشباع شده‌باشد؛ را بیابید. فرض کنید هر پرتوی کیهانی به هنگام اصابت به سی‌سی‌دی، تنها یک پیکسل را به اشباع می‌رساند.

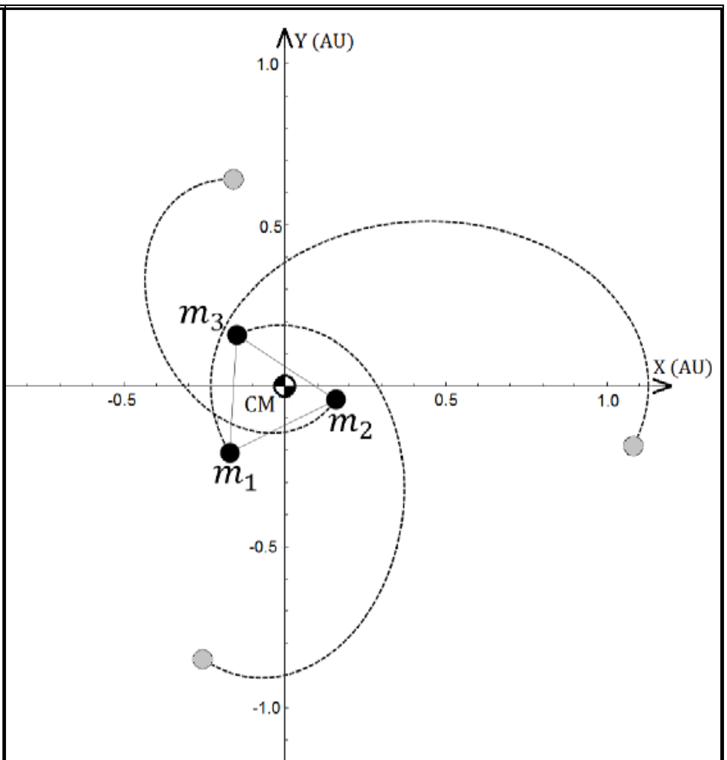
سؤال ۳: (۵۰ نمره)

سه جرم m_1 ، m_2 و m_3 مطابق شکل ۱، بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. موقعیت اولیه‌ی این سه جرم به گونه‌ای است که مرکز جرمشان (CM) منطبق بر مبدأ مختصات است. این اجرام طوری پرتاب می‌شوند که اولاً، مکان مرکز جرمشان ثابت مانده و ثانیاً، همواره بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باقی بمانند، به‌طوری که اندازه‌ی این مثلث بر حسب زمان تغییر می‌کند. بعد از پرتاب، هریک از این اجرام تحت تأثیر نیروی گرانشِ دو جرم دیگر، مسیری می‌پیماید که در شکل ۲ نمایش داده شده است. واحد محورهای مختصات در این شکل‌ها واحد نجومی است.

اگر مقدار جرم m_1، برابر جرم خورشید باشد، مدت زمانی را بیابید که اجرام از وضعیت شکل ۱ به مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ۲ برسند.



شکل ۱



شکل ۲

سؤال ۴: (۲۰ نمره)

باقی‌مانده‌های انفجارهای ابرنواختری عموماً ستاره‌های نوترونی هستند. طیِ یک انفجار ابرنواختری، ستاره‌یِ نوترونی ایجادشده، انرژی‌ای در حدود $E_\nu = 10^{46}\mathrm{J}$ تابش می‌کند. فرض کنید این تابش فقط ناشی از نوترینوهای سریع است، کاملاً همسان‌گرد نیست و عدمِ تقارنی در حدود ۱٪ دارد که باعث پس‌زنیِ ستاره‌ی نوترونی در یک جهت خاص می‌شود. سرعت این ستاره‌ی نوترونی را در پایان انفجار ابرنواختری بر حسب کیلومتر بر ثانیه تخمین بزنید.

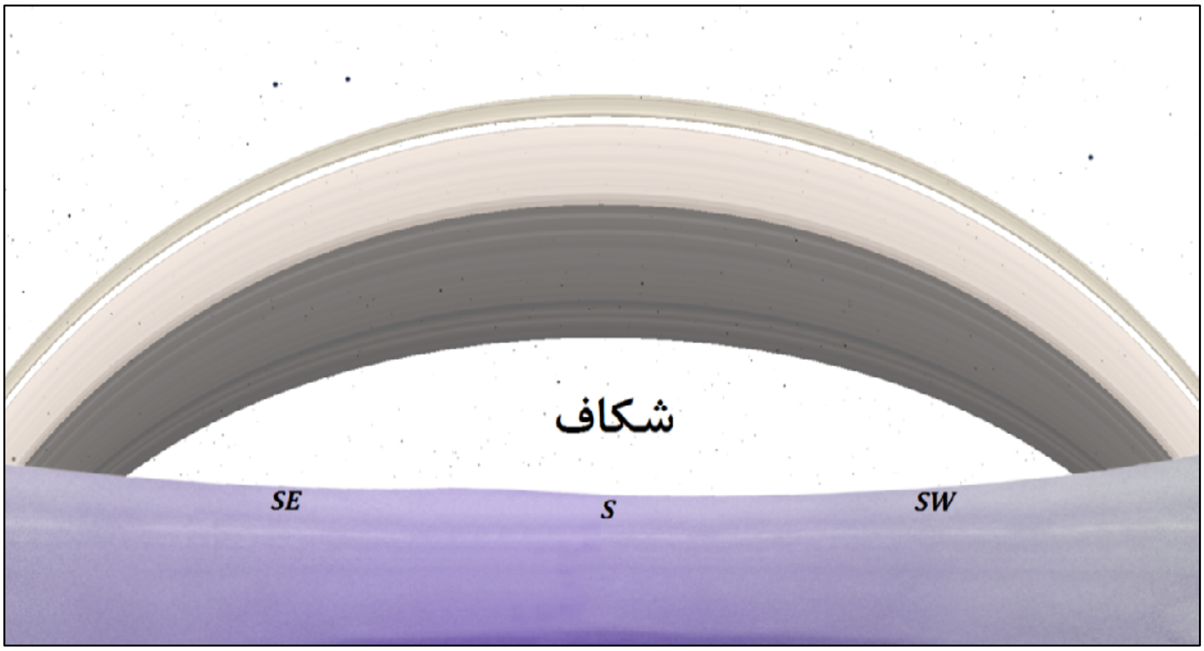
معاونت دانش‌پژوهان جوان

کد ملی:

سؤال ۵: (۶۰ نمره)

سیاره‌ی زحل را می‌توان کره‌ای به شعاع $R = 60268 \text{ km}$ در نظر گرفت که حلقه‌های زیبای آن در صفحه‌ی استواییِ سیاره از ارتفاع $h = 14030\ km$ تا $H = 79552\ km$ بالاتر از سطح سیاره قرار گرفته‌اند. این سیاره هر ۱۰ ساعت و ۳۴ دقیقه یک بار به دور محور خود می‌چرخد.

الف) ناظری که در عرض‌های کمِ شمالیِ سیاره قرار دارد؛ در سمت جنوب، منظره‌ای همانند تصویر زیر را مشاهده می‌کند. از دید او شکافی بین حلقه‌ها و افق وجود دارد که برای ناظرهای نزدیک قطب، این شکاف دیگر دیده نمی‌شود. کم‌ترین عرض جغرافیایی شمالی‌ای که در آن، فاصله‌ی بین افق و حلقه‌ها دیده نمی‌شود، چند درجه است؟



حال فرض کنید، ناظری در عرض جغرافیایی‌ای که در قسمت الف به‌دست آوردید، قرار دارد. او قصد دارد در روزی که میل خورشید از دید زحل $\delta = -18°$ است، بالا آمدن خورشید را از میان حلقه‌ها نظاره کند.

ب) با صرف نظر کردن از قطر زاویه‌ای خورشید، مدت زمانی را که خورشید از دید این ناظر پشت حلقه‌ها پنهان است (از طلوع تا بیرون آمدن خورشید از پشت حلقه‌ها)، بیابید.

ج) هنگام خروج خورشید از میان حلقه‌ها، مسیر ظاهری خورشید در آسمان، چه زاویه‌ای با لبه‌ی بالایی حلقه‌ها می‌سازد؟

سؤال ۶: (۲۰ نمره)

فرض کنید آهنگ تشکیل ستاره در یک کهکشان متناسب با e^{-t/t_s} کاهش می‌یابد که در آن $t_s = 3\ Gyr$ مقیاس زمانی است. عمر رشته‌ی اصلی ستاره‌ای به جرم ۳ برابر جرم خورشید ۳۵۰ میلیون سال است. محاسبه کنید چند درصد از ستارگانی با جرم ۳ برابر جرم خورشید که از ابتدا تشکیل شده‌اند، هم‌چنان بر روی رشته‌ی اصلی حضور دارند؟ فرض کنید که سن این کهکشان ۱۰ میلیارد سال باشد.

سؤال ۷: (۶۰ نمره)

کِریکلو سیارکی بین زحل و اورانوس است که سال گذشته چندین رصدخانه اختفای یک ستاره با آن را ثبت کردند، منجمان با بررسی داده‌ها متوجه وجود حلقه‌ای نازک اطراف سیارک شدند. هنگام اختفا، کریکلو در فاصله‌ی $13/54$ واحد نجومی از زمین قرار داشت.

از دید یکی از رصدخانه‌ها، ستاره دو بار پشت حلقه قرار گرفت که موقعیت این دو نقطه نسبت به سیارک در جدول زیر آورده شده‌است. از دید رصدخانه‌ای در مکان دیگر نیز ستاره دو بار ولی این بار به علت اختلاف‌منظر در نقاط متفاوتی پشت حلقه قرار گرفت. موقعیت یکی از این دو نقطه نیز در جدول زیر داده شده‌است. موقعیت این نقاط، در دستگاه مختصات دکارتی‌ای در صفحه‌ی آسمان بیان شده‌است که مرکزش روی مرکز سیارک، جهت x به سمت غرب و y به سمت شمال است.

		(میلی‌ثانیه‌ی قوسی)	(میلی‌ثانیه‌ی قوسی)
داده‌های رصدخانه‌ی اول	۱	۱۷/۲۵	۱۶/۱۷
	۲	-۲۷/۱۳	۷/۷۲
داده‌ی رصدخانه‌ی دوم	۳	-۱۰/۹۶	-۲۴/۰۷

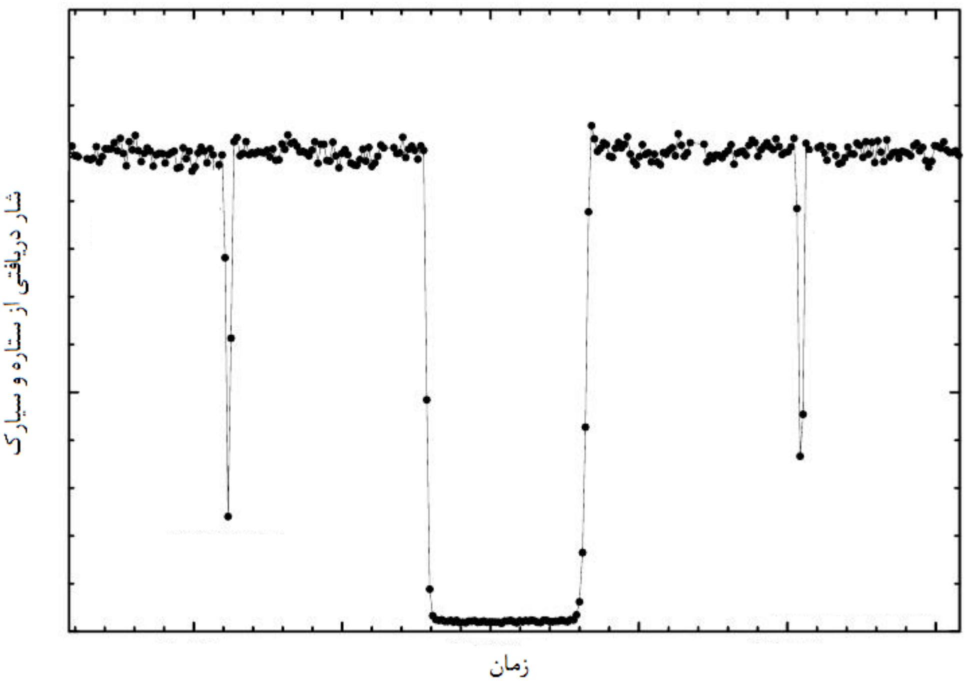
الف) شعاع حلقه (R) چند کیلومتر است؟

راهنمایی: در دستگاه مختصات دکارتی، معادله‌ی یک بیضی که مرکز آن روی مبدأ است و قطر بزرگ آن نسبت به محور x به اندازه‌ی θ به‌طور پادساعتگرد دوران یافته، به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ است که نیم‌محور بزرگ(a)، نیم‌محور کوچک (b) و اندازه‌ی θ برای این بیضی از روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$b = \sqrt{\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}}\ a = \sqrt{\frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}}\ , \tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}\ ,$$

ب) سیارک کریکلو یخ است و می‌توان آن را یک بیضی‌گون فرض کرد که از دوران بیضی‌ای با نیم‌قطر بزرگ r_l و نیم‌قطر کوچک r_s حول قطر کوچک حاصل شده است. حلقه در صفحه‌ی شامل نیم‌قطر بزرگ و عمود بر نیم‌قطر کوچک واقع شده‌است.

رصدخانه‌ی اول منحنیِ نوریِ صفحه‌ی بعد را از ستاره و سیارک به‌هنگام اختفا ثبت کرده‌است. گرفتِ طولانی‌تر با رد شدن ستاره از پشت سیارک ایجاد شده و دو گرفت دیگر مربوط به حلقه‌ها هستند. r_l و r_s را بیابید. (داده‌ی اولِ جدول بالا زودتر از داده‌ی دوم رصد شده‌است)



ج) احتمال دارد که حلقه به دلیل درهم‌شکستن جرمِ صلبِ همگنی که از حد روشِ ($Roche$) سیارک عبور کرده، شکل گرفته باشد. اگر چگالیِ جرمِ صلبِ درهم‌شکسته $1\ gr/cm^3$ در نظر گرفته شود، جرم سیارک را تخمین بزنید. برای سادگی از پخی کریکلو صرف‌نظر کنید و آن را کره‌ی صلب همگنی به شعاع r_l فرض کنید.

کد ملی:

سؤال ۸: (۳۰ نمره)

جرم و ابعاد کهکشانی که از یک قرص و یک برآمدگی کروی ($Bulge$) تشکیل شده، به شرح زیر است:

شعاع برآمدگی کهکشان ۴ کیلوپارسک، شعاع قرص کهکشان ۱۵ کیلوپارسک و ضخامت قرص آن ۳۰۰ پارسک است. جرم کل ستاره‌های این کهکشان 10^{11} برابر جرم خورشید است.

الف) اگر قطر قرصِ کهکشان برابر عرضِ برگه‌ی پاسخ‌نامه شما باشد؛ شکل کهکشان را از نمای لبه، با رعایت مقیاس ترسیم کنید.

ب) اگر همه‌ی ستاره‌های این کهکشان خورشیدگون باشند و توزیع آن‌ها در همه‌جا یک‌نواخت باشد، چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسکٍ مکعب خواهد بود؟

ج) حال فرض کنید که همه‌ی ستاره‌ها خورشیدگون نیستند، بلکه جرمشان می‌تواند در بازه‌ی $0/1$ تا 100 برابر جرم خورشید باشد. هم‌چنین تعداد ستاره‌هایی که جرمشان بین M و $M + dM$ است، از رابطه‌ی $dN = A.M^{-2/35}dM$ به‌دست می‌آید که در آن A مقدار ثابتی است. در این حالت چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسکٍ مکعب خواهد بود؟ این چگالی عددی چند برابر مقدار قسمت قبل است؟

سؤال ۹: (۴۰ نمره)

ستارگان طیِ تحولشان تحت تأثیر پدیده‌ای به نام *هدررفت جرم* قرار می‌گیرند. رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی تجربی است که مقدار هدررفت جرم ($\dot{M}$) را برای ستارگان بسیار درخشان ($L \geq 10^3 L_\odot$) به دمای سطحی (T_{eff}) و درخشندگی آن‌ها (L) مرتبط می‌سازد:

$$\log\left(-\dot{M}\right) \approx -۸{/}۱۶ + ۱{/}۷۷\log(L) - ۱{/}۶۸\log(T_{eff})$$

که در آن $\dot{M}$ بر حسب جرم خورشید در سال ($M_\odot/yr$)، L بر حسب درخشندگی خورشید ($L_\odot$) و T_{eff} بر حسب کلوین (K) سنجیده شده‌است.

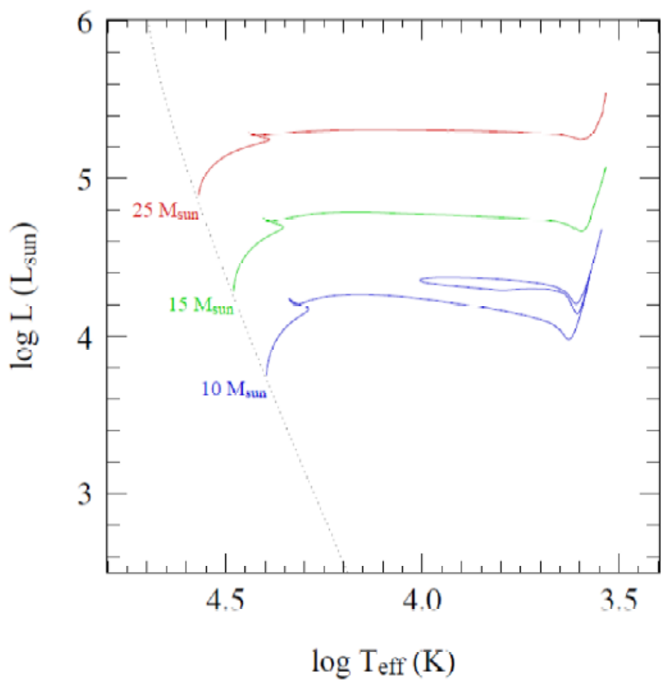
شکل زیر نمودارِ $H-R$ است که مسیر تحول سه ستاره با جرم‌های مختلف در آن رسم شده‌است.

الف) برای ستاره‌ای به جرم $25\ M_\odot$، مقدار هدررفت جرم را (بر حسب $M_\odot/yr$) در سه موقعیت زیر به‌دست آورید:

۱. بر روی رشته‌ی اصلی در ابتدای تحول ($Zero\ Age\ Main\ Sequence$)

۲. در انتهای رشته‌ی اصلی

۳. در انتهای مرحله‌ی ابرغولِ قرمز



ب) فرض کنید همه‌ی فوتون‌های تابش‌شده تکانه‌ی خود را به ذرات حامل باد ستاره‌ای منتقل کنند. بیشینه‌ی هدررفت جرم طیِ فرآیند انتقال تکانه از طریق تابش به ذرات دیگر را برای ستاره‌ای با جرم $25\ M_\odot$ که در ابتدای رشته‌ی اصلی قرار دارد، برحسب

$M_{\odot}/yr$ محاسبه کنید. فرض کنید سرعت ذرات باد ستاره‌ای هنگام ترک ستاره، ۳ برابر سرعت فرار از سطح ستاره (v_{esc}) باشد.

سؤال ۱۰: (۴۰ نمره)

وقتی ماه شروع به گرفت می‌کند، سایه‌ی زمین به مرور سطح آن را می‌پوشاند تا وقتی که ماه به‌طور کامل پشت سایه‌ی زمین برود؛ در این موقع گرفت کامل شروع می‌شود و پس از مدتی ماه به آرامی از گرفت خارج می‌شود. اگر فرض کنیم که بخش قرارگرفته در سایه‌ی زمین کاملاً تاریک است و ماه به‌شکل همسان‌گرد بازتاب می‌کند، تابعیت قدر ظاهری ماه را بر حسب زمان به‌دست آورید. قدر ظاهری ماه کامل ۱۲/۷۴- است.

مدارها را دایروی و هم‌صفحه فرض کنید. تمام اطلاعات مورد نیاز شما در جدول ثوابت، داده‌شده است.

یا سریع‌الحساب

پاسخنامه مرحله دوم نجوم ۱۳۹۳

گردآوری و بازنگری توسط اعضای تیم جهانی ۲۰۱۴

با مدیریت دکتر حقی

اردیبهشت ۹۳

پاسخ سوال یک:

الف) از برازش خط بر روی شکل شماره یک:

$$L \propto M^{۳.۸} \Rightarrow \frac{L}{L_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{۳.۸}$$

از روی شکل دو و با استفاده از رابطه‌ی بالا، جرم ستاره‌ای که در حال ترک رشته‌ی اصلی (نقطه برگشت) است برابر است با: $M \approx ۱.۲\ M_{sun}$

ب)

$$t \propto \frac{M}{L} \Rightarrow t \propto M^{-۲.۸} \Rightarrow \frac{t}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-۲.۸}$$

$$M \approx ۱.۲\ M_{sun} \Rightarrow t \approx ۶\ Gyr$$

ج) حد پایین جرم که همان $۱.۲M_{sun}$ است.

حد بالا:

برای به دست آوردن حد بالای جرم، چون حداکثر ۱۰ درصد عمر رشته‌ی اصلی، در پسارشته‌ی اصلی هستند، پس:

$$t' = t - \frac{۱۰}{۱۰۰} \times t \approx ۶\ Gyr - ۰.۱ \times ۶\ Gyr \approx ۵.۴\ Gyr$$

حد بالا برابر ۱,۲۵ جرم خورشید می‌شود. $\frac{t'}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M'}{M_{sun}}\right)^{-۲.۸} \Rightarrow M' \approx ۱.۲۵M_{sun}$

د)

$$\frac{dN}{dM} = A\ M^{-۱} \Rightarrow N = A \ln M\ , ۰.۱ < M < ۰.۵$$

$$\frac{dN}{dM} = B\ M^{-۲.۳۵} \Rightarrow N = \frac{B}{-۱.۳۵}\ M^{-۱.۳۵} , ۰.۵ < M < ۲۰$$

برای ۰,۵ جرم خورشید باید دو مقدار بالا با هم برابر باشند، پس:

$$A \ln ۰.۵ = \frac{B}{-۱.۳۵}\ ۰.۵^{-۱.۳۵} \quad (Eq. ۱)$$

با توجه به اینکه ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسارشته‌ی اصلی هست، بنابراین:

$$۲۰۰ = \int_{۱.۲}^{۱.۲۵} B\, M^{-۲.۳۵}\, dM = \frac{B}{-۱.۳۵}\left(۱.۲۵^{-۱.۳۵} - ۱.۲^{-۱.۳۵}\right)$$

$$B \approx ۶۴۴۰$$

$$(Eq.۱) \Longrightarrow A \approx ۱۷۵۴۰$$

برای محاسبه‌ی جرم کل باید از ۰,۱ تا ۲۰ جرم خورشید انتگرال گرفت.

$$M_{tot} = \int M\, dN = \int_{۰.۱}^{۰.۵} A\, dM + \int_{۰.۵}^{۲۰} B\, M^{-۱.۳۵}\, dM$$

$$M_{tot} \approx ۲.۴ \times ۱۰^{۴}\, M_{sun}$$

پاسخ سوال دو:

با استفاده از فرمول مقیاس تصویر

$$\frac{۲۰۶۲۶۵}{\mathrm{f}} = \frac{۲۰۶۲۶۵}{۵۷۶۰۰} = ۳.۵۸۱\, \frac{\mathrm{arcsec}}{\mathrm{mm}}$$

چون مقیاس تصویر داده شده است. ابعاد هر پیکسل بدست می‌آید:

$$\frac{۰.۰۴}{۰.۰۳۵۸۱} = ۱۱.۱۷\, micron\ per\ pixel$$

ابعاد سی‌سی‌دی:

$$\frac{۱۶۰\ \mathrm{arcsec}}{۰.۰۴\,\frac{\mathrm{arcsec}}{\mathrm{pix}}} = ۴۰۰۰\ \mathrm{pixels}$$

ابعاد فیزیکی سی‌سی‌دی:

$$۱۱.۱۷\ \mathrm{micron} \times ۴۰۰۰ = ۴.۴۶۸\ \mathrm{cm}$$

یعنی ۴,۴۶۸ سانتی‌متر یا ۱۹,۹۶۳ یا ۲۰ سانتی متر مربع.

به عبارت دیگر ۲۰۰۰ پرتو کیهانی در هر ثانیه بر سی‌سی‌دی می‌نشیند. پس ۵ درصد کل پیکسل‌ها یعنی ۸۰۰۰۰۰ پیکسل می‌تواند تحت تاثیر قرار گیرد که زمان آن ۴۰۰ ثانیه خواهد بود.

$$\frac{۸۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۴۰۰\ \mathrm{sec}$$

پس تعداد تصاویر برابر است با:

$$\frac{۲\, h}{۴۰۰\, sec} = ۱۸$$

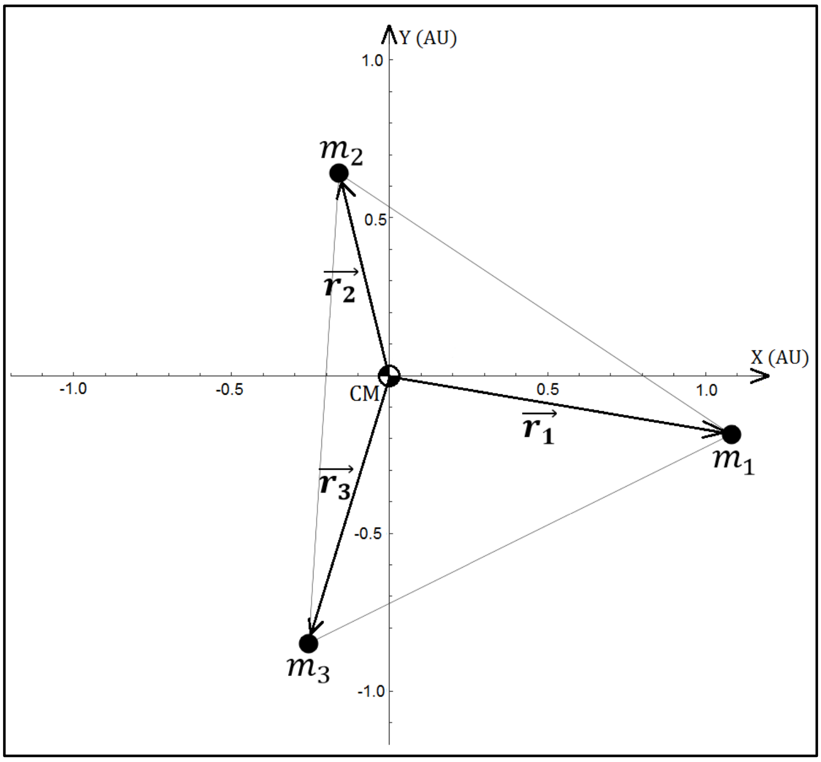
پاسخ سوال سه:

ابتدا باید معادله‌ی حرکت هریک از اجرام را در دستگاه مرکز جرم به دست آوریم. از تعریف مرکز جرم و با توجه به اینکه مرکز جرم در مبداء مختصات است داریم:

$$m_۱\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} + m_۲\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} + m_۳\overrightarrow{\boldsymbol{r_3}} = ۰$$

چون این سه جرم همواره بر روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند بنابراین:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{r_3}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}| =: r$$



شتاب جرم ۱ که تحت تأثیر نیروی گرانش دو جرم دیگر است عبارت است از:

$$\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}} = -\frac{\mathrm{G}m_۲}{r^۳}(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}) - \frac{\mathrm{G}m_۳}{r^۳}(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_3}})$$
$$= -\frac{\mathrm{G}}{r^۳}(m_۲\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} + m_۳\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} - m_۲\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} - m_۳\overrightarrow{\boldsymbol{r_3}}) =$$
$$= -\frac{\mathrm{G}}{r^۳}(m_۲\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} + m_۳\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} + m_۱\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}) = -\frac{\mathrm{G}}{r^۳}(m_۱ + m_۲ + m_۳)\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}$$

در واقع عبارت زیر برقرار است:

$$m_۲(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}) + m_۳(\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_3}}) = (m_۱ + m_۲ + m_۳)\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}$$

می‌توان با به توان دو رساندن طرفین این عبارت، رابطه‌ی بین r و $r_۱$ را به‌دست آورد:

$$(m_۲^۲ + m_۳^۳ + m_۲m_۳)r^۲ = M^۲r_۱^۲$$

که در آن M این‌گونه تعریف شده است:

$$m_۱ + m_۲ + m_۳ =: M$$

از این رو شتاب جرم ۱ برابر است با:

$$\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}} = -\frac{\mathrm{G}(m_۲^۲ + m_۳^۳ + m_۲m_۳)^{\frac{۳}{۲}}}{r_۱^۳ M^۲}\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}$$

که با تعریف $K_۱ := \frac{\mathrm{G}(m_۲^۲+m_۳^۳+m_۲m_۳)^{\frac{۳}{۲}}}{M^۲}$ می‌توان آن را به شکل ساده‌ی زیر نیز نوشت:

$$\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}} = -\frac{K_۱}{r_۱^۳}\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}$$

این معادله نشان می‌دهد که مسیر جرم ۱ یک مقطع مخروطی است. این وضعیت برای دو جرم دیگر هم صادق است و این دو جرم هم بر روی یک مقطع مخروطی در حال حرکت هستند. با توجه به مسیر حرکت اجرام در شکل ۲، این مقطع مخروطی بیضی است. (می‌توان نشان داد که خروج از مرکز مدار این اجرام باهم برابر است.)

برای محاسبه‌ی مدت زمان خواسته‌شده، به دوره‌ی تناوب سیستم نیاز داریم که به مقدار $K_۱$ وابسته است. که اگر نسبت جرم‌ها را محاسبه کنیم، $K_۱$ قابل حصول خواهد بود. برای یافتن این نسبت‌ها از معادله‌ی مرکز جرم در شکل ۱ استفاده می‌کنیم.

$$m_۱\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} + m_۲\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} + m_۳\overrightarrow{\boldsymbol{r_3}} = ۰, \qquad \frac{m_۲}{m_۱} =: \eta_۲, \qquad \frac{m_۳}{m_۱} =: \eta_۳$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_۱ + \eta_۲ x_۲ + \eta_۳ x_۳ = ۰ \\ y_۱ + \eta_۲ y_۲ + \eta_۳ y_۳ = ۰ \end{cases} \rightarrow \ \eta_۲ = ۳.۲\,, \qquad \eta_۳ = ۲.۲$$

علاوه‌بر این، با توجه به اینکه مقدار جرم ۱ برابر جرم خورشید است، مقدار عددی $K_۱$ به دست می‌آید:

$$K_۱ = \frac{\mathrm{G}(\eta_۲^۲ + \eta_۳^۳ + \eta_۲\eta_۳)^{\frac{۳}{۲}}}{(۱ + \eta_۲ + \eta_۳)^۲} M_\odot = ۳.٤ \times ۱۰^{۲۰}\ \ \mathrm{N.kg^{-۱}.m^۲}$$

بنابراین دوره‌ی تناوبِ این سیستمِ سه‌تایی عبارت است از:

$$P = ۲\pi\sqrt{\frac{a_۱^۳}{K_۱}} = ۱۲۸.۴\ days$$

در این رابطه $a_۱$ نیم‌محور اطول مدار جرم ۱ می‌باشد، که با اندازه‌گیری از روی شکل ۱ به‌دست می‌آید. علاوه بر این با اندازه‌گیری فواصل اوج و حضیض مدار این جرم می‌توان خروج از مرکز سیستم را نیز به‌دست آورد، که تقریباً برابر $e = ۰.۶۶$ است.

قطر بزرگ مدار جرم ۱ منطبق بر محور افقی است، از این رو موقعیت زاویه‌ی این جرم نسبت به راستای حضیض مدارش (θ) به راحتی قابل اندازه‌گیری است:

$$\begin{cases} \text{شکل۱} \rightarrow \ \theta_۱ = ۱۸۹.۹^\circ \\ \text{شکل۲} \rightarrow \ \theta_۲ = ۵۰.۵^\circ \end{cases}$$

این‌ها مقادیر آنومالی واقعی هستند، مقادیر آنومالی خروج از مرکزی (E) و میانگین (M) از روابط زیر قابل حصول خواهد بود:

$$\tan\frac{E}{۲}=\sqrt{\frac{۱-e}{۱+e}}\tan\frac{\theta}{۲}\ ,\ \ E-e\sin E=M$$

$$\begin{cases}M_۱=۳.۷۶۳\\M_۲=۰.۱۵۱\end{cases}\ \Rightarrow\ M_۱+M_۲=\frac{۲\pi}{P}t\ \Rightarrow\ \boldsymbol{t=80\ days}$$

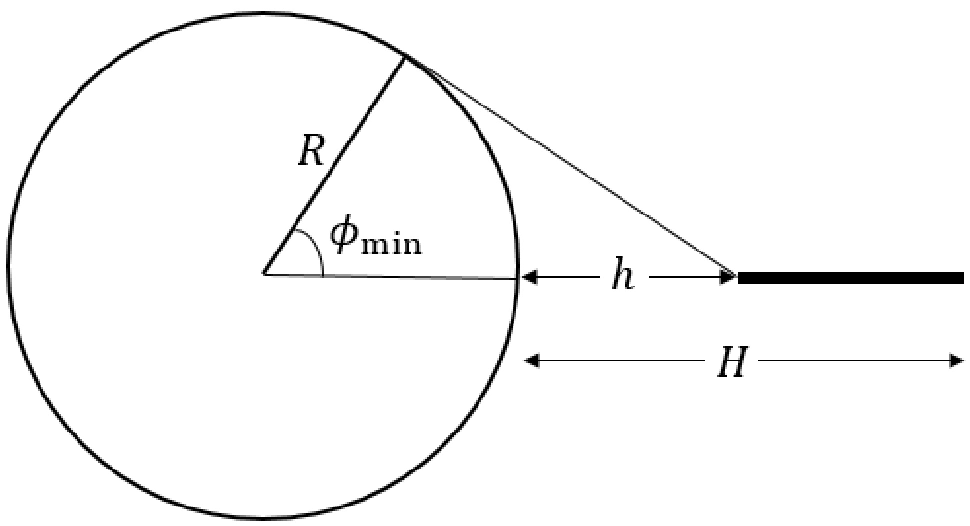
پاسخ سوال چهار:

$$P_\gamma=\frac{E_\gamma}{c}\qquad\qquad M_{NS}V_{NS}=۰.۰۱\left(\frac{E}{c}\right)\Rightarrow\ \ V_{NS}=۱۲۰\,\frac{km}{s}$$

پاسخ سوال پنج:

الف) برای پیدا کردن پایین‌ترین عرض جغرافیایی‌ای که بین حلقه‌ها و افق فاصله‌ای نمی‌بینند باید از لبه‌ی درونی حلقه شمالی‌ترین مماس را بر سطح سیاره رسم کنیم و عرض محل تماس را محاسبه نماییم.

$$\cos\phi_{\min}=\frac{R}{R+h}\ \Rightarrow\ \ \phi_{\min}=۳۵.۸°$$

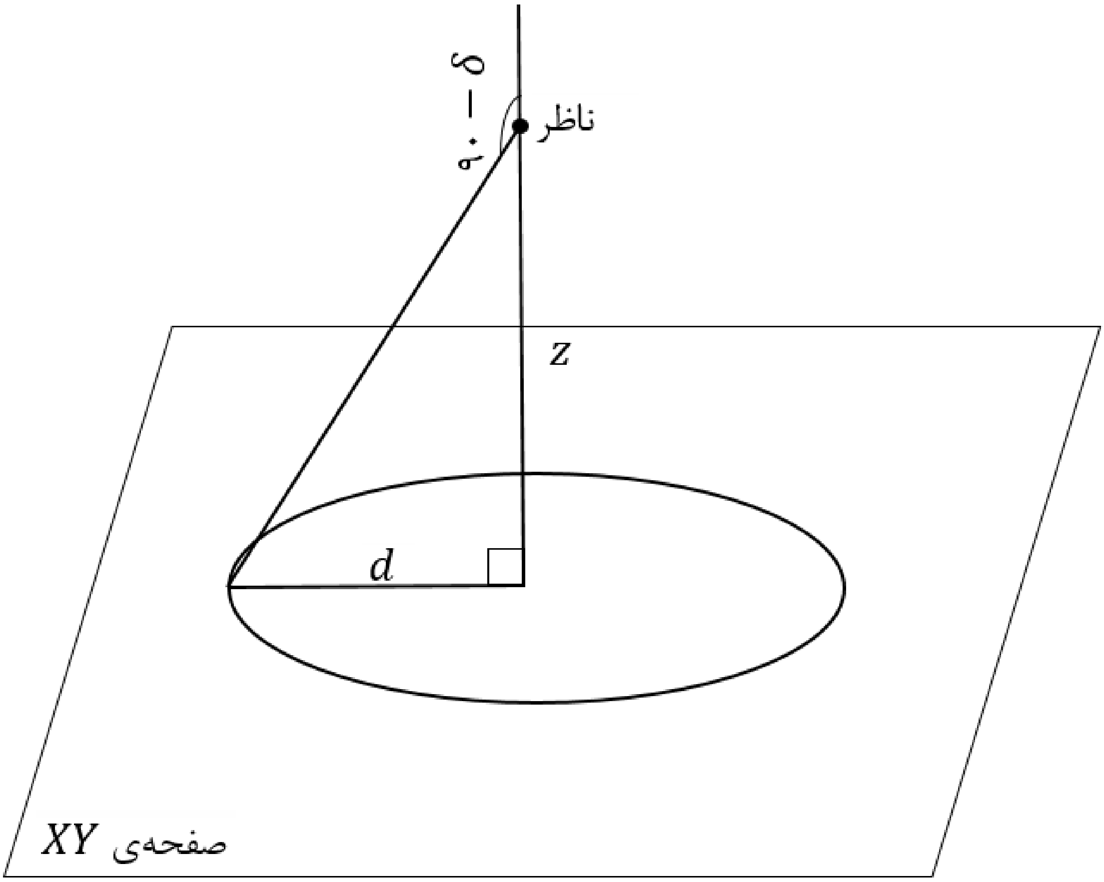


نگاه از کنار

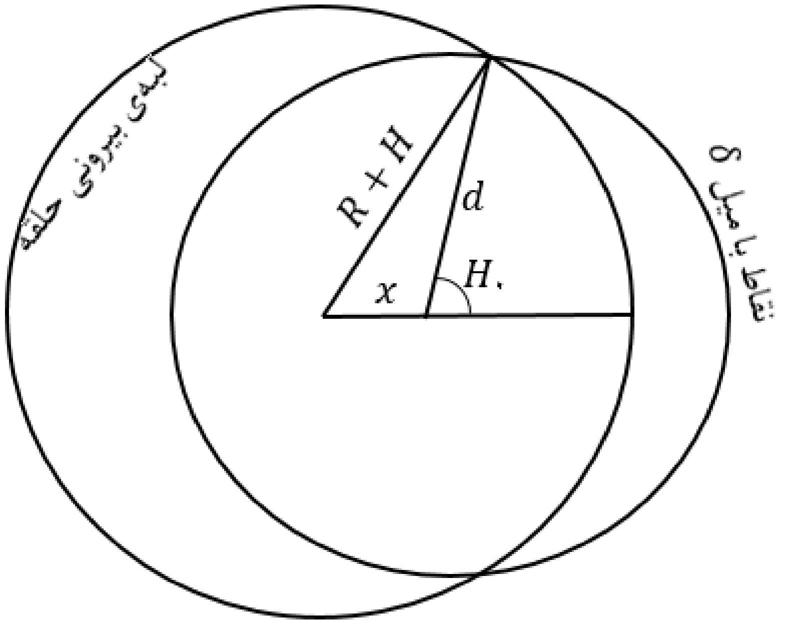
ب) در دستگاه مختصاتی به مبدأ مرکز سیاره که محور Z آن به سمت قطب شمال است و ناظر در صفحه‌ی XZ قرار دارد، مختصات ناظر از قرار زیر است:

$$x = R\cos\phi_{\min} = ۴۸۸۸۷\ \text{km}$$
$$z = R\sin\phi_{\min} = ۳۵۲۴۶\ \text{km}$$

نقاطی از صفحه‌ی XY که ناظر آن‌ها را در میل δ می‌بینند، یک دایره به شعاع $d = z\tan(۹۰^\circ + \delta) = ۱۰۸۴۸۶\ \text{km}$ به مرکز تصویر محل ناظر (یعنی نقطه‌ای با مختصات $(x, ۰, ۰)$) را تشکیل می‌دهند.



حال باید اشتراک این دایره و لبه‌ی بیرونی حلقههای زحل را بیابیم. این دو نقطه‌ی اشتراک، نقاطی از لبه‌ی حلقه هستند که از دید ناظر مسیر ظاهری خورشید از آن‌ها می‌گذرد. تصویر بعدی، صفحه‌ی حلقه‌ها را با لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها و دایره‌ای که شامل نقاط با میل δ هستند نشان می‌دهد. زاویه‌ای که به رأس تصویر ناظر با نام H. نشان داده شده‌است، زاویه‌ی ساعتی خورشید (البته در حقیقت ۳۶۰ درجه منهای زاویه‌ی ساعتی است!) هنگام بیرون آمدن از حلقه‌ها است. با رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلثات مسطحه این زاویه به دست می‌آید:



$$(R+H)^{۲} = x^{۲} + d^{۲} + ۲xd\cos H.$$

$$\Rightarrow H. = ۵۹.۴^{\circ}$$

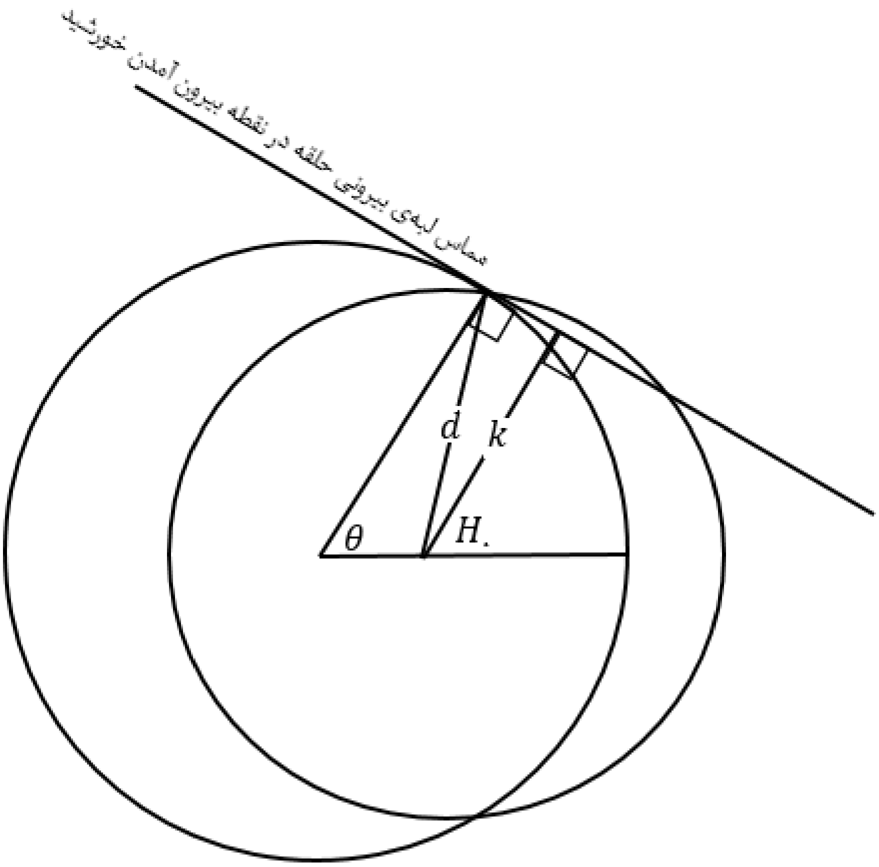
زاویه‌ی ساعتی خورشید هنگام طلوع را نیز با رابطه‌ی طلوع و غروب به دست می‌آوریم:

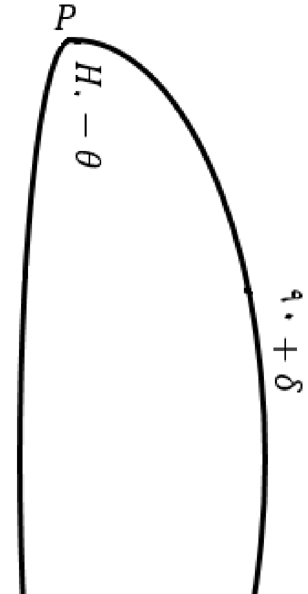
$$\cos H_r = -\tan\phi\tan\delta \ \Rightarrow H_r = ۷۶.۵^{\circ}$$

$$\Delta t = \frac{H_r - H.}{۳۶۰^{\circ}} \times ۱۰^{h}۳۴^{m} = ۳۰\ min$$

ج) ناظر مماس حلقه‌ها در نقطه‌ی برآمدن خورشید از لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها (این نقطه را در کره‌ی سماوی با S نشان خواهیم‌داد) را یک نیم‌دایره‌ی عظیمه مشاهده می‌کند. می‌خواهیم زاویه‌ی این نیم‌دایره‌ی عظیمه را با مسیر ظاهری خورشید حساب کنیم. اگر از محل تصویر ناظر بر این مماس عمودی رسم کنیم (این عمود به طول k نشان داده شده‌است)، نقطه‌ی عمود (این نقطه را در کره‌ی سماوی با L نشان می‌دهیم) بین نقاط این نیم‌دایره‌ی عظیمه پایین‌ترین میل (بیش‌ترین فاصله از قطب شمال سماوی ناظر) را دارد. به این دلیل PL بر نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی مماس حلقه‌ها عمود است. نخست با رابطه‌ی سینوس‌ها در همان مثلث استفاده‌شده در قسمت قبل، زاویه‌ی θ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{d} = \frac{\sin H.}{R+H} \ \Rightarrow \theta = ۴۱.۹^{\circ}$$





حال در مثلث PLS، زاویه‌ی α را به دست می‌آوریم:

$$-\cos(90°) = \cos\alpha\cos(H. - \theta) - \sin\alpha\sin(H. - \theta)\cos(90° + \delta)$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan(H. - \theta)\cos(90° + \delta)} \Rightarrow \alpha = 95.6°$$

مسیر ظاهری خورشید با ضلع PS زاویه‌ی ۹۰ درجه می‌سازد، پس زاویه‌ی مسیر ظاهری خورشید با لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها $\alpha - 90° = 5.6°$ است.

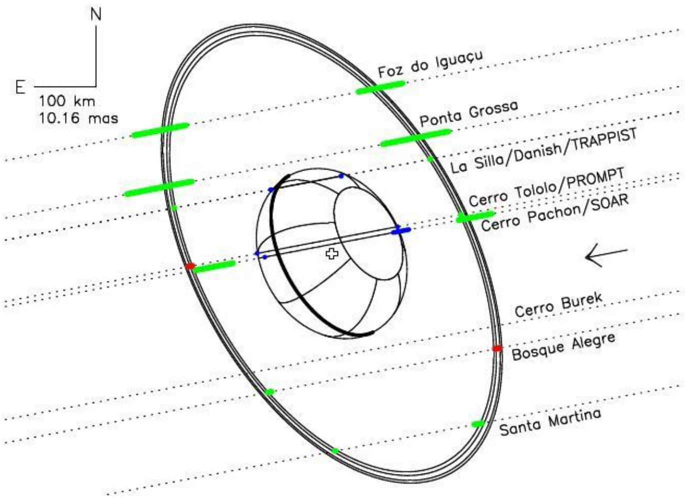
پاسخ سوال شش:

$$\frac{\int_{۹.۶۵}^{۱۰} \mathrm{e}^{-t/t_s}\, dt}{\int_{۰}^{۱۰} \mathrm{e}^{-t/t_s}\, dt} = ۰.۰۰۴۶ \Rightarrow \quad fraction = ۰.۴۵\%$$

پاسخ سوال هفت:

الف) تصویر شبیه‌سازی‌شده‌ی زیر، با استفاده از داده‌های حاصل از رصدِ هم‌زمان این اختفا در چندین رصدخانه به‌دست آمده‌است. خطوطِ موازیِ رسم‌شده، مسیر حرکت ستاره از پشت سیارک از دید رصدخانه‌های مختلف است. در حقیقت، چون رصدخانه‌ها در مکان‌ها متفاوتی قرار دارند؛ مسیر حرکتِ نسبیِ ستاره دچار اختلاف-منظر شده و جابجا می‌شود.

با عبور ستاره از پشت حلقه یا خود سیارک شار دریافتی از آن تغییر می‌کند که به کمک آن می‌توان ساختار هندسی سیارک را بررسی کرد. (بر خلاف صورت سؤال، این سیارک در واقعیت دو حلقه دارد که لبه‌های بیرونی و درونی هر کدام در شبیه‌سازی نشان‌داده شده‌است)



تصویر یک دایره بر صفحه‌ی آسمان یک بیضی با نیم‌قطر بزرگ R و نیم‌قطر کوچک $R\cos i$ است. در این سؤال فقط سه نقطه از محیط بیضیِ دیده‌شده از حلقه را می‌دانیم که به کمک آن‌ها و معادله‌ی کلیِ یک بیضی، ضرایب A, B, C را با حل یک دستگاهِ سه‌معادله-سه‌مجهول می‌یابیم. (واحد هر کدام عکس مربع میلی‌ثانیه‌ی قوسی است)

$$A = ۰.۰۰۱۵۸$$

$$B = ۰.۰۰۱۰۳$$

$$C = ۰.۰۰۰۹۳$$

از روی این ضرایب و با توجه به راهنمایی سؤال داریم:

$$a = ۳۹.۴۱\ miliarcsecond$$

$$b = ۲۳.۱۷\ mas$$

$$\theta = ۱۱۸.۹□$$

پس:

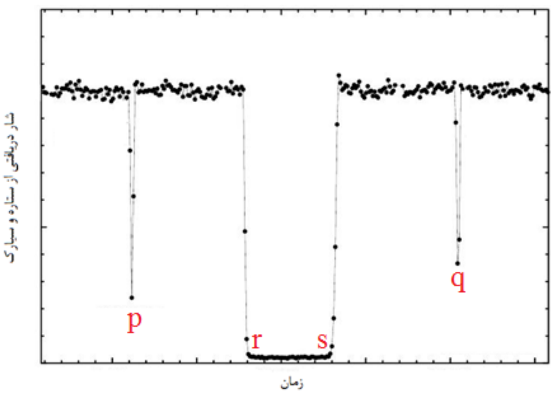
$$\boxed{R \approx ۳۹۰\ km}$$

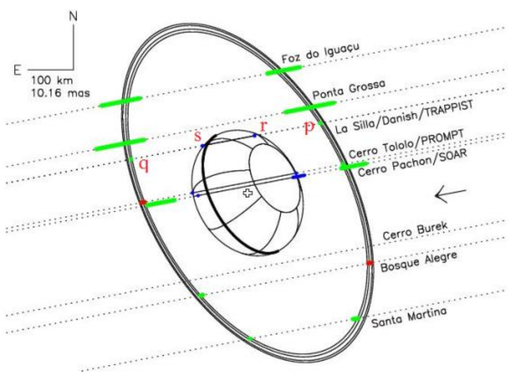
در محاسبات بالا، ستون سمت راست و چپ داده‌شده در سؤال به ترتیب به‌عنوان مختصه‌ی x و y در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به این‌که انتظار نداریم با دوران مختصات، مقادیر a, b عوض شوند، انتخاب برعکس x, y نیز بی‌ایراد است. البته مقدار θ تغییر می‌کند که در جواب‌های نهایی بی‌تأثیر است.

ب) دو داده‌ی اول جدول نقاط p, q را روی شکل و منحنیِ نوری نشان می‌دهند و گرفت طولانی در منحنی نوری بین r, s رخ می‌دهد. با استفاده از نسبت مدت زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت اول و دوم و معلوم بودن مختصات p، مختصات r و با استفاده از نسبت مدت زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت دوم و سوم و معلوم بودن مختصات q، مختصات s پیدا می‌شود.

$$r = (۱.۷۲, ۱۳.۲۱) mas$$

$$s = (-۹.۳۸, ۱۱.۰۹) mas$$





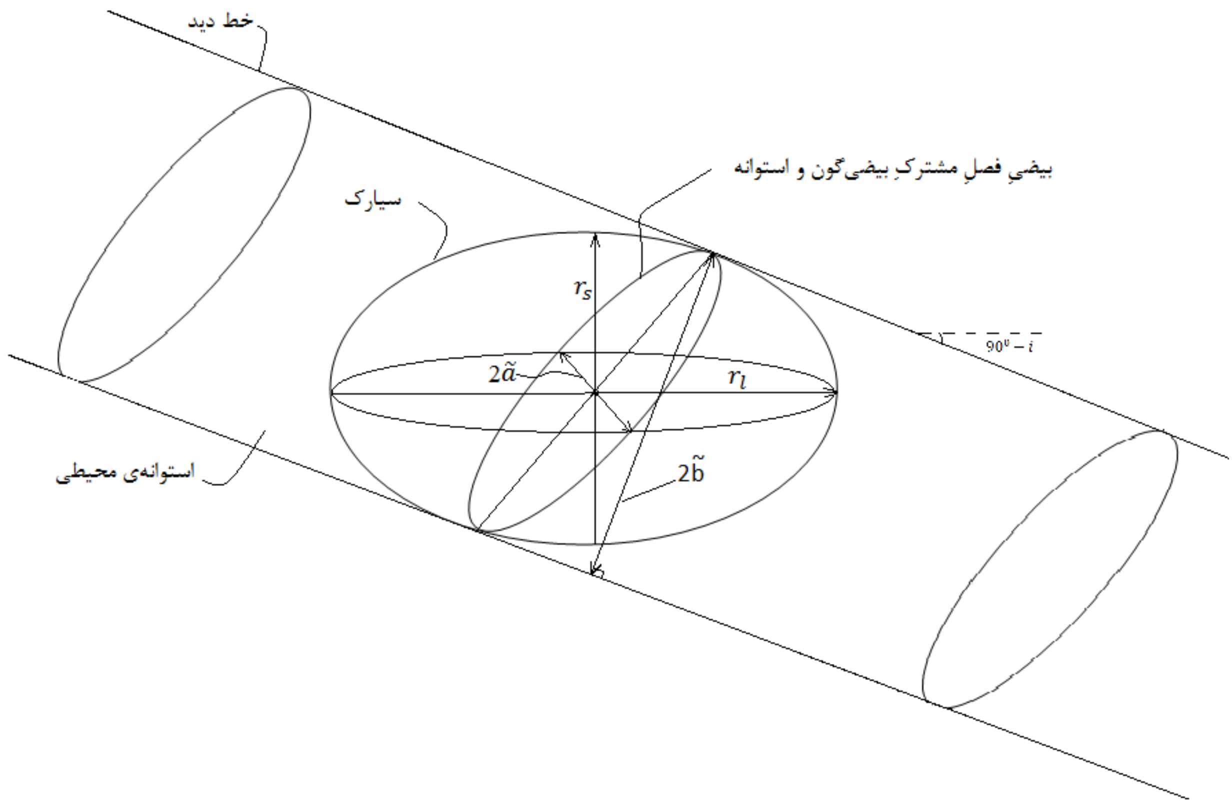
برای تجسم کردن نحوه‌ی تصویر شدن بیضی‌گون بر صفحه‌ی آسمان، یک استوانه همانند شکل را در نظر بگیرید. محور این استوانه در راستای خط دید ما است و بیضی‌گون داخل آن محاط شده‌است. فصل مشترک این استوانه و بیضی‌گون یک بیضی است که نیم‌قطر بزرگش r_l و نیم‌قطر کوچکش بزرگ‌تر از r_s است. تصویری

که ما از بیضی‌گون می‌بینیم، تصویر این بیضی (و نه خود آن) بر صفحه‌ی آسمان است. پس $\tilde{a}$ (نیم‌قطر بزرگِ بیضی مشاهده‌شده از سیارک) برابر r_l و $\tilde{b}$ (نیم‌قطر کوچک آن) نصفِ فاصله‌ی دو خطِ موازی رسم شده در شکل است:

$$\tilde{a} = r_l$$

$$\tilde{b} = \sqrt{r_l{}^{۲} \cos^{۲} i + r_s{}^{۲} \sin^{۲} i}$$

که رابطه‌ی آخر با به‌دست آوردن عرض‌ازمبدأ خطِ مماس بر بیضی که زاویه‌ی شیبش $۹۰^{\circ} - i$ است، حاصل می‌شود.



θی بیضیِ دیده‌شده از سیارک با θی بیضیِ دیده‌شده از حلقه یکی است. (چرا؟) از طرفی r, s هم داریم. پس دوباره سه‌معادله-سه‌مجهول (که این بار با جای‌گذاری θ در واقع یک دومعادله-دومجهول داریم) حل می‌کنیم. که استفاده از روابط راهنمایی، نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{a} = ۱۴.۷۰\ mas$$

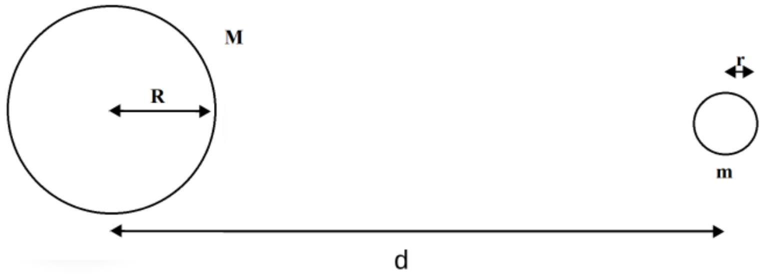
$$\tilde{b} = ۱۱.۵۵\ mas$$

پس با توجه به روابط بالا:

$$\boxed{r_s = ۱۱۳.۷km}$$

$$\boxed{r_l = ۱۴۴.۷\ km}$$

ج) بیان ساده‌شده‌ی زیر را برای به‌دست آوردن حد روش برای اجسام صلب در نظر می‌گیریم:



شتاب گرانشی روی سطح جرم کوچک برابر است با:

$$|\vec{a}_g| = \frac{Gm}{r^۲}$$

برای شتاب جزر و مدی داریم:

$$|\vec{a}_t| = \frac{GM}{(d-r)^۲} - \frac{GM}{d^۲} = \frac{GM}{d^۲}\left(\frac{۱}{\left(۱-\frac{r}{d}\right)^۲} - ۱\right) \cong \frac{GM}{d^2}\left(۱+\frac{۲r}{d}-۱\right) \cong \frac{2GMr}{d^3}$$

در آستانه‌ی فروپاشی این شتاب‌ها برابرند:

$$|\vec{a}_g| = |\vec{a}_t|$$

یعنی:

$$d = \left(\frac{۲r^۳M}{m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

و

$$\rho_m \coloneqq \frac{m}{۴/۳\pi r^۳}$$

$$\rho_M \coloneqq \frac{M}{۴/۳\pi R^۳}$$

که بر حسب چگالی‌ها می‌شود:

$$d = ۲^{\frac{۱}{۳}}R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{۱}{۳}} \cong 1.26R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اگر نیروی گریز از مرکز ناشی از گردش جرم کوچک را نیز لحاظ کنیم، ضربی ۱.۲۶ به ۱.۴۴ تغییر می‌کند.

برای سیارک $R = r_l$ و برای دو ضریب بالا به ترتیب داریم:

$$\rho_M = ۹.۸\ gr/cm^{۳}$$

یا

$$\rho_M = ۶.۶\ gr/cm^{۳}$$

پس:

$$\boxed{M = ۱.۲ \times ۱۰^{۲۰} kg}$$

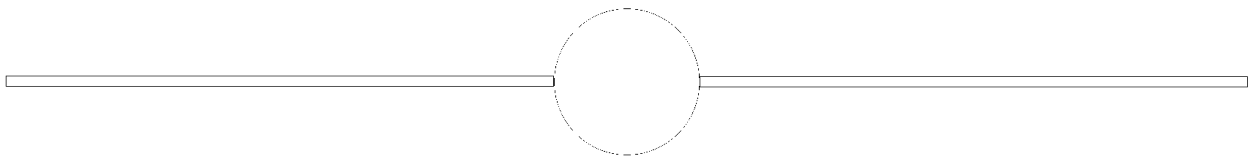
یا

$$\boxed{M = ۸.۴ \times ۱۰^{۱۹} kg}$$

که حدود ٪۰.۱ جرم ماه است و بسیار جالب است که جسمی که ابعاد ظاهری‌اش در آسمان تنها چند میلی‌ثانیه‌ی قوسی است، جلوی ستاره‌ای بسیار دوردست را می‌گیرد و ما می‌توانیم جزییات دقیقی از شکل و هندسه‌ی آن جسم را بفهمیم!

پاسخ سوال هشت:

الف)



ب) حجم کهکشان ۴.۸×۱۰^{۱۱} پارسک مکعب، چگالی = ۰٫۲۱ ستاره بر پارسک مکعب

ج) $M_G = \int_{۰.۱\ M_{sun}}^{۱۰۰\ M_{sun}} M dN \ \Rightarrow A = ۱.۷۲ \times ۱۰^{۱۰} M_{sun}^{۱.۳۵}$

د) $N = ۲.۸۵ \times ۱۰^{۱۱} M_{sun} \Longleftarrow$ چگالی ۳ برابر قسمت ب یعنی ۰٫۵۹ ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود.

پاسخ سوال نه:

الف) با توجه به نمودار و محل‌های خواسته شده مقادیر عددی به صورت زیر به دست می‌آید:

$\dot{M} = ۷ \times ۱۰^{-۸} \frac{M_{sun}}{Year} \quad for\ ZAMS$

$\dot{M} = ۷ \times ۱۰^{-۷} \frac{M_{sun}}{Year} \quad for\ end\ of\ MS$

$\dot{M} = ۵ \times ۱۰^{-۵} \frac{M_{sun}}{Year} \quad for\ RGB$

ب) برای ستاره با جرم ۲۵ مقدار دما و درخشندگی به صورت زیر از نمودار به دست می‌آید:

$L = ۷۹۴۳۲\ L_{sun}$, $T = ۳۷۱۵۳\ K \implies R = ۶.۸\ R_{sun}$ from Boltzman eq.

با توجه به شعاع و جرم ستاره سرعت فرار به دست می‌آید: $V_{escape} = ۳۶۰۰ \frac{km}{s}$

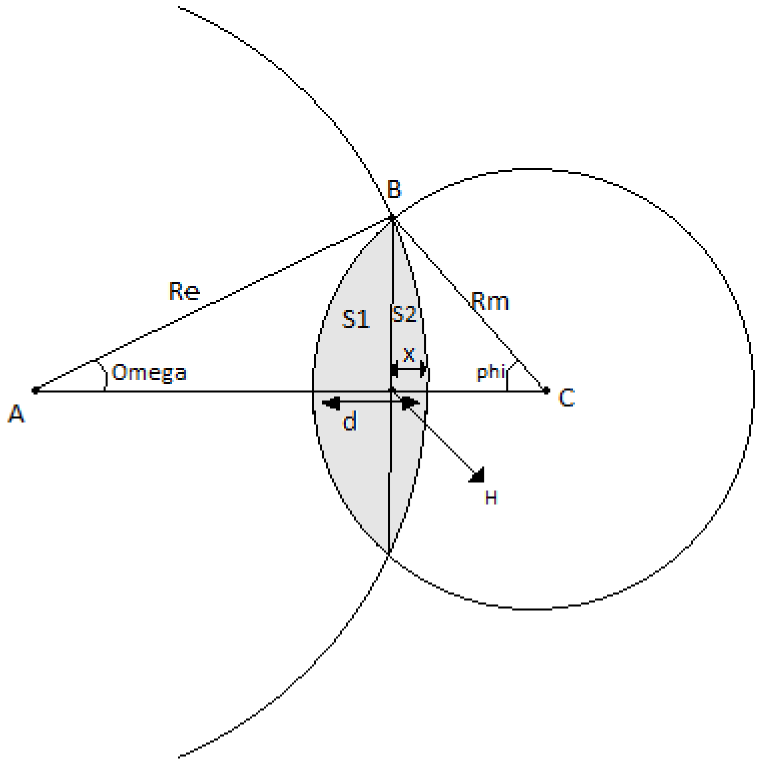
$$\dot{M}V_{\infty} < \frac{L}{c}$$

$$\dot{M} = ۴.۵ \times ۱۰^{-۷} \frac{M_{sun}}{Year} \quad at\ \ ZAMS$$

پاسخ سوال ده:

ابتدا باید دوره‌ی تناوب هلالی ماه را حساب کنیم:

$$\frac{۱}{T_m} - \frac{۱}{T_e} = \frac{۱}{T_s} \Longrightarrow T_s = ۲۹.۵\, day\,, \omega_s = \frac{۲\pi}{T_s} = ۲.۴۷ \times ۱۰^{-۶} \frac{rad}{s}$$



لحظه شروع گرفت: $t = ۰$

$$d = \omega_s \times t = d(t)$$

هدف مسئله محاسبه‌ی نسبت قسمت تاریک (هاشورخورده) به کل سطح ماه است.

$$\Delta ABH: (R_e - x)^۲ + l^۲ = R_e^۲$$

$$\Delta BCH: [R_m - (d - x)]^۲ + l^۲ = R_m^۲$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\left(R_m - \frac{d}{۲}\right) d}{R_e + R_m - d}$$

$$l^۲ = R_e^۲ - (R_e - x)^۲ = [R_e - (R_e - x)]\,[R_e + (R_e - x)]$$

$$\Longrightarrow l^۲ = x(۲R_e - x)$$

$$\boxed{l = \frac{\sqrt{\left(R_m - \frac{d}{۲}\right) d \left[(R_e + R_m)(۲R_e - d) - d\left(R_e - \frac{d}{۲}\right)\right]}}{R_e + R_m - d}}$$

$$S_{dark} = ۲(S_۱ + S_۲)$$

$$S_۱ = R_m^۲ \times \frac{\phi}{۲} - l \times \frac{R_m - (d - x)}{۲} \quad , \qquad \phi = \sin^{-۱} \frac{l}{R_m}$$

$$S_۲ = R_e^۲ \frac{\Omega}{۲} - l \times \frac{R_e - x}{۲} \quad , \qquad \Omega = \sin^{-۱} \frac{l}{R_e}$$

$$\Longrightarrow \; S_{dark} = R_m^۲ \sin^{-۱} \frac{l}{R_m} + R_e^۲ \sin^{-۱} \frac{l}{R_e} - l(R_e + R_m - d)$$

$$\boxed{\frac{S_{dark}}{S_{full\,moon}} = \frac{S_{dark}}{\pi R_m^۲} = \frac{۱}{\pi} \sin^{-۱} \frac{l}{R_m} + \frac{R_e^۲}{\pi R_m^۲} \sin^{-۱} \frac{l}{R_e} - \frac{l(R_e + R_m - d)}{\pi R_m^۲}}$$

$$M(t) - M_{full\,moon} = -۲.۵ \log \frac{f(t)}{f_{full\,moon}} = -۲.۵ \log \frac{S_{fm} - S_d}{S_{fm}}$$

$$\Longrightarrow M(t) = M_{fm} - ۲.۵ \log \left(۱ - \frac{S_d}{S_{fm}}\right)$$

که چون لگاریتم همواره منفی است، پس $M(t) > M_{fm}$

در لحظه‌ای که $\frac{S_d}{S_{fm}} = ۱$ آن وقت $M(t) \to \infty$ که تاریکی مطلق است (فرض غیرواقعی و تقریب)