

۱- کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) اگر α عددی حقیقی باشد به طوری که $\frac{1}{\pi} = \cos \alpha\pi$ ، آنگاه α گنگ است.
- (۲) مجموعه‌ی $A = \{\frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\}$ کراندار است.
- (۳) مجموعه‌ی $A = \{\frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\}$ دارای اینفیمم نیست.
- (۴) برای هر دو مجموعه‌ی کراندار A و B در $\mathbb{R}$ داریم $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$.

۲- اگر x عددی گنگ باشد و $A = \{mx + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ، آنگاه:

- (۱) $A' = \mathbb{R}$
- (۲) $A' = \mathbb{Q}^c$
- (۳) $A' = \emptyset$
- (۴) $A' = \{x\}$

۳- فرض کنید $F = \{r \in \mathbb{Q} \mid 2 < r^2 < 3\}$.

اگر d نمایش متریک اقلیدسی بر $\mathbb{Q}$ باشد، آنگاه F در فضای متریک $\mathbb{Q}$:

- (۱) فشرده است.
- (۲) باز است ولی بسته نیست.
- (۳) هم باز است هم بسته.
- (۴) نه باز است و نه بسته.

۴- فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از فضای متریک (X, d) باشند. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$
- (۲) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
- (۳) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- (۴) $A^\circ = \overline{A} - A$

۵- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و K زیرمجموعه‌ای ناتهی از X و $\overline{K}$ بستار K باشد. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر K بسته و شمارا باشد، آنگاه حتماً نقطه‌ای تنها دارد.
- (۲) اگر K همبند و نامتناهی باشد، آنگاه $\overline{K}$ کامل است.
- (۳) اگر K کامل باشد، آنگاه K همبند است.
- (۴) اگر K کامل باشد، آنگاه K ناشماراست.

۶- اگر A و B در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ ناتهی باشند، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) اگر A و B بسته باشند، آنگاه $A + B$ نیز بسته است.
- (۲) اگر A باز و B در $\mathbb{R}$ چگال باشد، آنگاه $A + B = \mathbb{R}$.
- (۳) اگر A و B باز باشند، آنگاه $A + B$ نیز باز است.
- (۴) اگر A و B فشرده باشند، آنگاه $A + B$ نیز فشرده است.

۷- فرض کنید (X, d) فضای متریک گسسته باشد. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

- (۱) هر $E \subseteq X$ باز است.
- (۲) برای هر $E \subseteq X$ داریم $E' = E$.
- (۳) هر $E \subseteq X$ بسته است.
- (۴) برای هر $E \subseteq X$ داریم $\overline{E} = E^\circ$.

۸- کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) مجموعه‌ی کانتور ناشماراست.
- (۲) ممکن است فاصله‌ی دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا از هم صفر باشد.
- (۳) اگر B_1 و B_2 دو گوی در فضای متریک X با شعاع‌های به ترتیب r_1 و r_2 باشند و $B_1 \subseteq B_2$ ممکن است $r_1 > r_2$.
- (۴) هر مجموعه‌ی بسته و کراندار در یک فضای متریک، فشرده است.

۹- در یک فضای متریک (X, d) کدام گزاره درست است؟

- (۱) اشتراک هر دو مجموعه‌ی همبند، همبند است.
- (۲) اجتماع هر دو مجموعه‌ی همبند، همبند است.
- (۳) اگر d متر گسسته باشد، $E \subseteq X$ فشرده است اگر E متناهی باشد.
- (۴) اگر $E \subseteq X$ فشرده و چگال باشد، آنگاه E نامتناهی است.

۱۰- دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} \quad (n \geq 2)$$

(۱) ∞

(۲) ۱

(۳) $1/e$

(۴) ۰

۱۱- فرض کنید $a_n > 0$ و $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$. در این صورت:

(۱) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

(۲) $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

(۳) به ازای هر p ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a_n$ همگراست.

(۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $0 < p \leq 1$.

۱۲- فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p > \frac{1}{2}$.

(۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p \geq \frac{1}{2}$.

(۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

(۴) اگر $p > \frac{1}{2}$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست.

۱۳- اگر $a_n = 2^{n-(-1)^n}$ آنگاه $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} - \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $3/5$

(۳) $7/5$

(۴) ۸

۱۴- اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، کدام گزاره درست است؟

(۱) یک زیردنباله‌ی صعودی و همگرا از $\{x_n\}$ وجود دارد.

(۲) یک زیردنباله‌ی یکنوا از $\{x_n\}$ وجود دارد.

(۳) یک زیردنباله‌ی نزولی و همگرا از $\{x_n\}$ وجود دارد.

(۴) هیچ زیردنباله‌ی یکنوا و همگرا از $\{x_n\}$ وجود ندارد.

۱۵- برای هر دنباله‌ای کراندار $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

- (۱) یک زیردنباله‌ی همگرا به $\limsup(x_n)$ وجود دارد.
- (۲) یک زیردنباله‌ی همگرا به $\liminf(x_n)$ وجود دارد.
- (۳) $\liminf(x_n) \leq \limsup(x_n)$.
- (۴) یک زیردنباله‌ی صعودی $\{x_n\}$ موجود است که به $\limsup(x_n)$ همگرا است.

----- جبر خطی -----

۱۶- کدام گزاره صحیح نیست؟

- (۱) هر ماتریس پوچ توان وارون‌ناپذیر است.
- (۲) اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد، آنگاه $I - A$ وارون پذیر است.
- (۳) هر ماتریس خودتوان وارون‌پذیر است.
- (۴) اگر A یک ماتریس خودتوان باشد، آنگاه $I - A$ می‌تواند وارون پذیر باشد.

۱۷- اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد و $m > n$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) دستگاه $BX = 0$ دارای بی‌نهایت جواب است.
- (۲) AB وارون پذیر نیست.
- (۳) ماتریس‌های A و B موجودند به‌طوری که BA وارون‌پذیر باشد.
- (۴) دستگاه $Ax = 0$ جواب نابدیهی دارد.

۱۸- به‌ازای کدام مقدار a دستگاه زیر فاقد جواب است؟

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + y - z = 12 \\ ax + y + 2z = 13 \end{cases}$$

- (۱) $a = 3$
- (۲) $a = 2$
- (۳) $a = 1$
- (۴) $a = -1$

۱۹- تعداد ماتریس‌های پادمتقارن 4×4 روی $\mathbb{Z}_7$ کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲) ۱۶
- (۳) ۳۲
- (۴) ۶۴

۲۰- اگر ماتریس مربعی A در رابطه‌ی $A - A^2 - I = 0$ صدق کند، آنگاه $A^{15} + A^{16}$ برابر است با:

(۱) $-I + A$ (۲) $-I - A$ (۳) $I - A$ (۴) $I + A$

۲۱- اگر S یک دستگاه معادلات خطی همگن با m معادله و n مجهول باشد، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) S جوابی غیر بدیهی دارد.

(۲) اگر S جواب غیر بدیهی نداشته باشد، آنگاه $m \geq n$.

(۳) اگر $m \geq n$ ، آنگاه S جواب غیر بدیهی ندارد.

(۴) اگر $m \geq n$ ، آنگاه S جواب غیر بدیهی دارد.

۲۲- اگر U و W دو زیرفضای متمایز با بعد ۴ از فضای برداری V با بعد ۶ باشند، بعد $U \cap W$ کدام است؟

(۱) ۱ یا ۲ (۲) ۲ یا ۳ (۳) ۳ یا ۴ (۴) ۱ یا ۲ یا ۳

۲۳- فضای برداری چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی و درجه حداکثر یک را با V نمایش می‌دهیم. $B_1 = \{2 - 3x, x - 1\}$ و $B_2 = \{1, x\}$ پایه‌های مرتبی برای V فرض می‌شوند. ماتریس تعویض پایه از B_2 به B_1 کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

۲۴- فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و فضای برداری $V = \mathbb{C}^4$ را روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. اگر $W = W_1 + W_2$ و $W_1 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, -1) \rangle$ و $W_2 = \langle (0, 1, 2, -1), (i, 0, 1, 1) \rangle$ زیرفضاهای V باشند، در این صورت بعد W به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

۲۵- مختصات بردار (a, b, c) تحت پایه‌ی مرتب $B = \{(1, 1, -1), (-1, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} b \\ a+b \\ a+c \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} b \\ b+c \\ a+c \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} a \\ b+c \\ -a-c \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} b \\ b+c \\ -a-c \end{bmatrix}$

۲۶- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) در هر پایه برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی، لزوماً یک ماتریس غیر وارون‌پذیر وجود دارد.

(۲) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن دو به دو با هم جابجا می‌شوند.

(۳) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن همگی پوچ‌توانند.

(۴) پایه‌ای برای فضای برداری ماتریس‌های 2×2 حقیقی وجود دارد که عناصر آن همگی خودتوانند.

۲۷- همه‌ی گزاره‌های زیر صحیح‌اند به‌جز:

(۱) مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های قطری حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

(۲) مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های وارون‌ناپذیر حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

(۳) مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های پادمتقارن حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

(۴) مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های اسکالر حقیقی $n \times n$ یک فضای برداری است.

۲۸- فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ روی میدان اعداد حقیقی باشد که تمام درایه‌های آن یک است. اگر

$V = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = 0\}$ یک فضای برداری باشد، آنگاه بعد V عبارت است از:

$$(۱) \quad n^2 - 1 \quad (۲) \quad n^2 - n \quad (۳) \quad \frac{1}{2}n(n-1) \quad (۴) \quad \frac{1}{2}n(n+1)$$

۲۹- فرض کنید A یک ماتریس حقیقی 5×8 است و دستگاه همگن $AX = 0$ را در نظر می‌گیریم که

X یک بردار ستونی است. حداقل بعد فضای جواب این دستگاه عبارت است از:

$$(۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴) \quad ۵$$

۳۰- فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی و V_1 و V_2 زیرفضاهای نابديهی از آن باشند و فرض کنیم

$$\dim(V_1 + V_2) = ۱ + \dim(V_1 \cap V_2)$$

آنگاه داریم:

$$(۱) \quad V_1 \cap V_2 = 0$$

$$(۲) \quad V_1 + V_2 = V$$

$$(۳) \quad \dim V_1 = \dim V_2$$

$$(۴) \quad V_2 \subseteq V_1 \text{ یا } V_1 \subseteq V_2$$

۳۱- نمایش عدد $(11001/1011)_2$ در مبنای ۳ کدام است؟

(۱) $(122/20)_3$

(۲) $(122/02)_3$

(۳) $(221/20)_3$

(۴) $(221/202)_3$

۳۲- در سیستم نمایش ممیز شناور نرمال در مبنای ۲ با سه رقم ماننسیس و یک رقم نما، تعداد اعداد حقیقی قابل نمایش، بزرگترین و کوچکترین اعداد مثبت قابل نمایش به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $0/25, 2, 25$

(۲) $0/25, 1/75, 25$

(۳) $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 49$

(۴) $0/75, 2/25, 49$

۳۳- اگر در یک سیستم نمایش ممیز شناور نرمال، نمایش عدد $x + y$ با نمایش x برابر باشد، در این صورت چه می توان گفت؟

(۱) $|y/x| < u$ که u روند واحد وابسته به نگاشت نمایش ساز ماشین است.

(۲) $|y/x| = u$ که u روند واحد وابسته به نگاشت نمایش ساز ماشین است.

(۳) $|y/x| > u$ که u روند واحد وابسته به نگاشت نمایش ساز ماشین است.

(۴) $|y/x| \leq u$ که u روند واحد وابسته به نگاشت نمایش ساز ماشین است.

۳۴- تابع $f(x) = x \cos x - \sin x$ را در مجاورت صفر با $\frac{1}{3}x^3 -$ تقریب می زنیم. خطای تقریب از چه مرتبه ای است؟

(۱) $O(x^3)$

(۲) $O(x^4)$

(۳) $O(x^5)$

(۴) $O(x^6)$

۳۵- اگر a و b به ترتیب تقریب هایی از A و B باشند و داشته باشیم $(a + b) = e(a) + e(b)$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟ $e(a) = |A - a|$ خطای مطلق a به عنوان تقریب A است.

(۱) $e(a) > 0$

(۲) $e(b) = 0$

(۳) $(A - a)(B - b) \geq 0$

(۴) $e(a)a(b) = 0$

۳۶- می‌خواهیم $T = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}}$ را به‌ازای مقادیر بسیار بزرگ و مثبت x به کمک ماشین محاسبه کنیم. گزینه‌ی مناسب برای تقریب T کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2x}$

(۲) $\frac{1}{x^2}$

(۳) $1/(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}})$

(۴) x

۳۷- فرض کنید $f(x) = x - \tan x$. اگر $f(x) = x^m g(x)$ که در آن $g(0) \neq 0$ آنگاه عدد m کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۱

۳۸- روش نیوتن را برای حل معادله‌ی زیر که در آن n عددی فرد است، به‌کار می‌بریم. مرتبه‌ی همگرایی کدام است؟ (این معادله در حالتی که n زوج باشد، ریشه‌ی حقیقی ندارد.)

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) حداقل ۲

(۴) عددی بین ۱ و ۲

۳۹- معادله‌ی $\cos^2 x + 2x + 5 = 0$:

(۱) یک ریشه‌ی حقیقی دارد که آن هم ریشه‌ی ساده است.

(۲) یک ریشه‌ی حقیقی دارد که آن ریشه مضاعف است.

(۳) دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی ساده و دیگری مضاعف است.

(۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴۰- اگر $f(x) = x - \sin x$ ، فرمول تکرار روش نیوتن برای تقریبی از ریشه‌ی f کدام است؟

(۲) $x_{n+1} = \frac{x_n(2 - \cos x_n) - \sin x_n}{1 - \cos x_n}$

(۱) $x_{n+1} = \frac{x_n \cos x_n + \sin x_n}{\cos x_n - 1}$

(۴) $x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - 1}$

(۳) $x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{1 - \cos x_n}$

۴۱- رابطه‌ی تکراری $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ روش نیوتن برای محاسبه‌ی $\frac{1}{a}$ که $a > 0$ را نشان می‌دهد. x_0 از کدام بازه اختیار شود تا دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا باشد؟

(۱) $(0, \frac{2}{a})$

(۲) $(0, +\infty)$

(۳) $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$

(۴) $(\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a})$

۴۲- رابطه‌ی تکراری $x_{n+1} = \sin x_n$ به نقطه‌ی ثابت $\theta = \sin \theta$ همگرا می‌شود.

(۱) تنها به‌ازای نقاط شروع $x_0 \leq 0$

(۲) تنها به‌ازای نقاط شروع $x_0 \geq 0$

(۳) به‌ازای همه‌ی نقاط شروع حقیقی x_0

(۴) تنها به‌ازای نقاط شروع $x_0 \in [-1, 1]$

۴۳- تابع f بر $[0, 1]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x \cos \pi x + \frac{1}{4}$ تعریف شده است و در این بازه فقط یک ریشه دارد. تکرار دوم روش دویخشی (تنصیف) کدام است؟

(۱) 0.25

(۲) 0.5

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) 0.75

۴۴- برای تعیین تقریبی از ریشه‌ی معادله $f(x) = 0$ از روش تکراری زیر استفاده شده است که $x_n \rightarrow \alpha$ و $f(\alpha) = 0$:

$$x_{n+1} = \frac{tx_n + x_n^{-t} + 1}{t + 1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

به‌ازای کدام مقدار t مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ بیشترین است؟

(۱) 0

(۲) 1

(۳) $\frac{2}{\alpha^2}$

(۴) $\frac{2}{\alpha^3}$

۴۵- حداکثر تعداد ریشه‌های منفی چندجمله‌ای $1 - x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + P(x)$ و باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ در کدام گزینه داده شده است؟

(۱) حداکثر تعداد ریشه‌های منفی ۳ و باقیمانده‌ی تقسیم ۷۹

(۲) حداکثر تعداد ریشه‌های منفی ۴ و باقیمانده‌ی تقسیم -۷۹

(۳) حداکثر تعداد ریشه‌های منفی ۳ و باقیمانده‌ی تقسیم ۱۹

(۴) حداکثر تعداد ریشه‌های منفی ۴ و باقیمانده‌ی تقسیم -۱۹

----- پایان -----