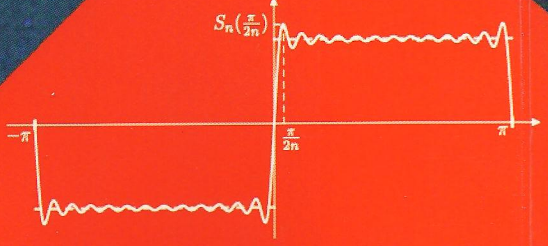
www.mohandesyar.com

عنــــــوان

مؤسسهٔ انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

محمود حصارکی
مرتضی فتوحی



معادلات دیفرانسیل
با مشتقات جزئی

محمود حصارکی
مرتضی فتوحی

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

پیشگفتار

کتاب حاضر اولین درس در زمینه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دانشجویان رشته‌های علوم پایه و مهندسی است. دست نوشته‌های این کتاب برای سالهای متمادی در دانشگاه صنعتی شریف در دروس آشنایی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و ریاضی مهندسی برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی رشته‌های ریاضی و مهندسی و همچنین در درس ریاضیات پیشرفته برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ارشد رشته‌های مهندسی مکانیک و علم مواد تدریس شده است.

هدف اول کتاب معرفی ابزارهایی است که برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی به‌کار می‌رود و فصل‌بندی کتاب بر این اساس صورت گرفته است. با توجه به این نکته در فصل اول سری فوریه و تبدیلات فوریه متناهی را به‌عنوان اولین ابزار و در فصل دوم تبدیلات انتگرالی را به‌عنوان ابزاری دیگر معرفی می‌کنیم. بعد از معرفی هر یک از این ابزارها کاربردی از آن را در حل معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهیم.

دومین هدف کتاب ارایه روش حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در میدانهای کران‌دار به کمک تعیین یک فضای برداری متناظر مسئله و سپس تعیین پایه مناسب برای این فضای برداری است. در این روش جواب مسئله را در این پایه بسط می‌دهیم. برای بیان بهتر، ابتدا این روش در بخش ۳-۲ با بهره‌گیری از خواص سری فوریه توضیح داده شده است و مثالهای متنوعی از این روش ارائه شده است. در بخشهای ۳-۳ و ۳-۴ تحت‌عنوان روش جداسازی و مسئله اشترم ـ لیوویل روش تعیین فضای برداری و پایه مناسب را برای هر مسئله خواهیم دید. متعامد بودن اعضای این پایه، استفاده از آنها را در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار آسان می‌سازد.

حل مسایل غیرهمگن معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، همانند حل معادلات

دیفرانسیل عادی معمولاً با استفاده از حل معادلهٔ دیفرانسیل همگن وابسته صورت می‌گیرد. برای برجسته نمودن روشهای حل مسائل غیرهمگن آن را در یک فصل جداگانه، فصل چهار، ارائه نمودیم. در آنجا چهار روش گوناگون بیان شده است که دو روش اصل دوهامل و تابع گرین برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی مفیدتر است.

نظر به اینکه روی نواحی بیکران روش تعیین پایه مفید نیست، برای این‌گونه مسائل ابزارهای دیگری لازم است که در فصل پنج کتاب همراه با مثالهای مختلفی آمده است. هرچند تأکید اصلی این فصل بر کاربرد تبدیلات انتگرالی است، ولی کاربرد روشهای اصل دوهامل و تابع گرین در نواحی بیکران هم بیان شده است.

فصل شش کتاب برای بررسی رفتارهای کیفی جوابهای معادلات مختلف در نظر گرفته شده است. در این فصل معرفی اجمالی از مدلهایی که منجر به معادلات لاپلاس و حرارت می‌شوند، بیان شده و دانشجویان با تفاوت ذاتی جوابهای این معادلات آشنا می‌شوند. دو بخش آخر این فصل برای حل معادلات موج یک‌بعدی در دامنه‌های کران‌دار و بیکران در نظر گرفته شده است.

همانند معادلات دیفرانسیل عادی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول از کاربرد کمتری در مسائل مهندسی برخوردار است ولی بررسی این معادلات دید خوبی جهت تشکیل رویه جواب به‌دست می‌دهد. از این نظر فصل آخر کتاب به معادلات مرتبهٔ اول و روش حل آن، روش خمهای مشخصه اختصاص داده شده است.

در مجموع، کتاب برای اولین درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دوره کارشناسی مناسب است و سرفصلهای آن را به خوبی پوشش می‌دهد. با حذف بخشهای نظری مانند ۱-۹، ۲-۵، ۴-۳، ۴-۴، ۵-۴، ۵-۵، ۶-۱، ۶-۲ و فصل ۷، بقیه کتاب مطالب موردنیاز درس ریاضی مهندسی دورهٔ کارشناسی را در بر دارد. همچنین این کتاب کلیه مطالب موردنیاز درس ریاضیات پیشرفته دوره تحصیلات تکمیلی رشته‌های مهندسی را در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه می‌دهد.

محمود حصارکی

مرتضی فتوحی

تابستان ۸۹

۱

سری فوریه

در این فصل به معرفی و بررسی خواص سری فوریه می‌پردازیم و در فصول بعدی از آن به‌عنوان ابزاری برای حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی استفاده خواهیم کرد.

سری فوریه به نام فوریه[1]، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان فرانسوی نام گذاری شده است. وی اولین‌بار این سری‌ها را در مقالات خود در زمینهٔ انتقال حرارت در اوایل دههٔ دوم قرن نوزدهم به کار برد. با استفاده از سری فوریه می‌توان توابع متناوب را با توابع سینوس و کسینوس نمایش داد. اهمیت سری فوریه در این است که بعضی از توابع ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر را که سری تیلور ندارند، می‌توان با سری فوریه نمایش داد.

۱ ـ ۱ پیدایش سری مثلثاتی و فوریه

برنولی، دالامبر، لاگرانژ و اویلر در دههٔ پنجم قرن هجدهم در تحقیقاتی که در زمینهٔ مسائل ریاضی فیزیک انجام می‌دادند به این نتیجه رسیدند که نمایش یک تابع تناوبی با دورهٔ تناوب

1. Jean- Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830)

2π به‌صورت یک سری از توابع مثلثاتی، حل بسیاری از اینگونه مسائل را مقدور می‌سازد. برای مدت هفتاد سال کوشش‌های فراوان بی‌ثمری در این زمینه به‌عمل آمد که منجر به گسترش آنالیز ریاضی شد. فوریه در سال‌های ۱۸۰۷ تا ۱۸۱۱ در زمینهٔ مسئلهٔ فوق به بررسی و مطالعه پرداخت و در سال ۱۸۱۱ ادعا کرد که هر تابع تناوبی با دورهٔ تناوب 2π را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از سینوس‌ها و کسینوس‌ها نوشت. فوریه این مطالب را در کتاب خود *Theorie Analytique de la Chaleur* (نظریهٔ تحلیلی حرارت) در سال ۱۸۲۲ منتشر کرد. امروزه این ترکیب‌های خطی را سری فوریه می‌نامند. اینگونه سری‌ها در تحلیل بعضی از پدیده‌های متناوب مانند ارتعاشات، حرکت سیارات، حرکت موج، انتقال حرارت و جریان‌های متناوب که در فیزیک و مهندسی مطالعه می‌شوند، از وسایل ضروری به‌شمار می آیند.

در سال‌های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۷ پواسن و کوشی به‌صورت جداگانه اثبات‌هایی برای نمایش توابع تناوبی به‌صورت سری فوریه ارائه کردند که با اعمال قیدهایی غیرضروری بر روی تابع انجام می‌شد.

این‌طور به‌نظر می آید که دیریکله اولین فردی است که مطالعهٔ سخت و چشمگیری روی سری فوریه انجام داده است و قضیه‌ای که وی در سال ۱۸۲۹ در این مورد ارائه داده است هنوز یکی از بهترین‌هاست. در اینجا باید ذکر کرد که تفاوتی ظریف بین سری‌های مثلثاتی و سری فوریه وجود دارد، به این معنی که هر سری مثلثاتی و تناوبی و همگرا لزوماً سری فوریهٔ یک تابع انتگرال‌پذیر نیست. (در این مورد به تمرین ۱ مراجعه کنید.) در حقیقت نظریهٔ سری‌های مثلثاتی می‌تواند حاوی نکات و سؤالاتی باشد که در سری‌های فوریه با آن مواجه نخواهیم بود. برای مثال یک سری فوریه روی بازه‌ای انتگرال‌پذیر است لیکن در مورد سری‌های مثلثاتی این مطلب باید بررسی شود.

در حقیقت اولین بار ریمان نظریهٔ سری‌های مثلثاتی را در سال ۱۸۵۴ مطرح کرد و از آن زمان به‌عنوان قسمتی از آنالیز ریاضی در آنالیز هارمونیک مورد توجه قرار گرفته است.

تمرین ۱ ـ ۱

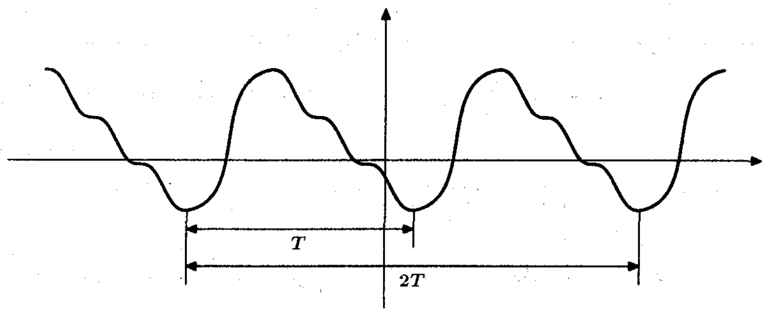
نشان دهید سری مثلثاتی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ همگراست. ولی با این حال سری فوریهٔ یک تابع انتگرال‌پذیر روی $(-\pi, \pi)$ نیست.

۱ ـ ۲ سری فوریه و محاسبهٔ ضرایب

قبل از تعریف سری فوریه به مروری از توابع متناوب می‌پردازیم. تابع $f(x)$ متناوب نامیده می‌شود، اگر عدد مثبت T موجود باشد به‌طوری که برای هر عدد حقیقی x،

$$f(x+T)=f(x). \qquad (۱ ـ ۱)$$

عدد T را دورهٔ تناوب f می‌نامند. نمودار چنین توابعی از تکرار نمودار تابع در بازه‌ای به طول T به‌دست می آید.



نمودار۱ ـ ۱. تابع متناوب با دورهٔ تناوب T.

اگر T دورهٔ تناوب تابعی باشد، $۲T$، $۳T$ و ... نیز دوره‌های تناوبی آن تابع‌اند. کوچک‌ترین مقدار T را، در صورت وجود، که به‌ازای آن رابطهٔ (۱ ـ ۱) برقرار باشد، دورهٔ تناوب اولیه گویند.

مثال۱ ـ ۱. توابع $\sin x$ و $\cos ۲x$ هر دو متناوب با دورهٔ تناوب ۲π هستند. دورهٔ تناوب اولیهٔ آنها به‌ترتیب ۲π و π است.

مثال۱ ـ ۲. هر عدد حقیقی می‌تواند دورهٔ تناوب تابع ثابت $f(x)\equiv ۱$ باشد، ولی این تابع، دورهٔ تناوب اولیه ندارد.

تذکر۱ ـ ۱. مجموع دو تابع متناوب در صورت لزوم یک تابع متناوب نیست. برای مثال توابع $\sin x$ و $\sin \pi x$ متناوب‌اند، در صورتی که مجموع آن دو، تابع متناوب نیست. در تمرین ۸ این مجموع با عنوان توابع تقریباً تناوبی بررسی می‌شود. اما اگر دورهٔ تناوب دو تابع متناوب برابر باشد، آنگاه مجموع آن دو نیز متناوب است.

فوریه ادعا کرد که هر تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب $T = ۲\ell$ را، که دارای خواص خوبی باشد (این خواص در بخش بعد بیان می‌شوند)، می‌توان با سری زیر نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (۱ \text{ ـ } ۲)$$

این سری که سری فوریه نامیده می‌شود، به غیر از تعداد متناهی نقطه در هر دورهٔ تناوب در بقیهٔ نقاط برابر مقدار $f(x)$ است. جملهٔ n ـ ام این سری تابعی متناوب با دورهٔ تناوب اولیهٔ $\frac{۲\ell}{n}$ است. بنابراین $T = ۲\ell$ دورهٔ تناوب تمام جملات و سری است. دنباله‌های عددی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند، با استفاده از فرمول‌های اویلر ـ فوریه (۱ ـ ۷) به‌دست می‌آیند. ضریب $\frac{a_۰}{۲}$ برای بیان راحت‌تر این فرمول جایگزین $a_۰$ شده است.

در این قسمت با فرض صحت ادعای فوریه $a_۰$، a_n و b_n را محاسبه می‌کنیم. چون مقدار سری به غیر از تعداد متناهی نقطه در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ برابر مقدار تابع است، پس انتگرال f در این بازه با انتگرال سری برابر است:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)\right)dx$$

چنانچه عبارت سمت راست برابر با مجموع انتگرال جمله به جملهٔ سری باشد[۱]:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{a_۰}{۲}\int_{-\ell}^{\ell} dx + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx + b_n \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx\right)$$

با توجه به روابط

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = ۰ \qquad (۱ \text{ ـ } ۳)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$a_۰ = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

برای تعیین a_m، $m \geq ۱$، دو طرف (۱ ـ ۲) را در $\cos \frac{m\pi x}{\ell}$ ضرب می‌کنیم و از $-\ell$ تا ℓ انتگرال می‌گیریم: (تساوی انتگرال در این حالت با مجموع انتگرال جملات سری نتیجهٔ همگرایی در نرم سری فوریه است که در بخش ۹ خواهد آمد.)

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos \frac{m\pi x}{\ell} dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx$$

---

۱. این مطلب را در پایان این فصل خواهیم دید.

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx\right.$$
$$\left. + b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx\right)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱ ـ ۳) و روابط

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \ell & m = n \end{cases} \qquad (۱ ـ ۴)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = 0 \qquad (۱ ـ ۵)$$

برای همهٔ مقادیر $m, n \geq 1$، a_m بدین صورت به‌دست می آید:

$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

به‌طور مشابه با ضرب $\sin\frac{m\pi x}{\ell}$ در دو طرف (۱ ـ ۲) و با توجه به روابط (۱ ـ ۳)، (۱ ـ ۵) و تساوی

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \ell & m = n \end{cases} \qquad (۱ ـ ۶)$$

مقدار b_m بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$b_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

بدین ترتیب ضرایب سری فوریه با استفاده از فرمول‌های زیر که به فرمول‌های اویلر ـ فوریه معروف‌اند، محاسبه می‌شوند:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (۱ ـ ۷)$$

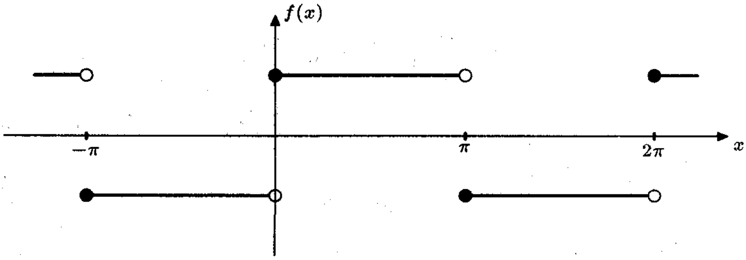
تذکر ۱ ـ ۲. با توجه به روابط بالا، مقادیر ضرایب سری فوریه تنها به مقدار تابع در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ وابسته است. ولی از آنجا که $T = 2\ell$ دورهٔ تناوب f و توابع مثلثاتی $\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ و $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ است، می‌توان بازهٔ انتگرالگیری را در فرمول‌های اویلر ـ فوریه با هر بازهٔ دلخواهی به طول $T = 2\ell$، مانند $[\alpha, \alpha + 2\ell]$ عوض کرد.

مثال ۱ ـ ۳. فرض کنیم تابع $f(x)$ با ضابطهٔ زیر تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

این تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن $T = 2\pi$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است و ضرایب

سری فوریهٔ آن با استفاده از فرمول‌های اویلر ـ فوریه بدین صورت محاسبه می‌شوند:



نمودار۱ ـ ۲.

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰}(-۱)\cos nx dx + \int_{۰}^{\pi}\cos nx dx\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{۱}{\pi}\left(-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{۰} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{۰}^{\pi}\right) = ۰ & n = ۱, ۲, \ldots \\ \frac{۱}{\pi}\left(-x\Big|_{-\pi}^{۰} + x\Big|_{۰}^{\pi}\right) = ۰ & n = ۰ \end{cases}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{۰}(-۱)\sin nx dx + \int_{۰}^{\pi}\sin nx dx\right)$$

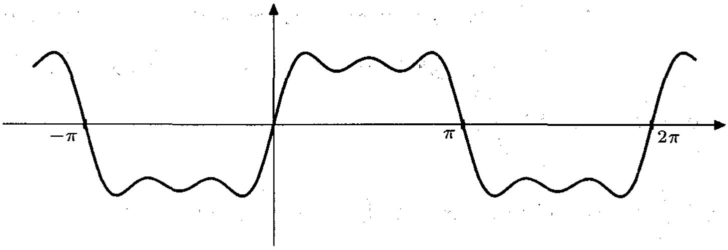
$$= \frac{۱}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{۰} + \frac{-\cos nx}{n}\Big|_{۰}^{\pi}\right) = \frac{۱}{n\pi}(۱ - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + ۱)$$

$$= \frac{۲}{n\pi}(۱ - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{۴}{n\pi} & \text{فرد } n \\ ۰ & \text{زوج } n \end{cases}$$

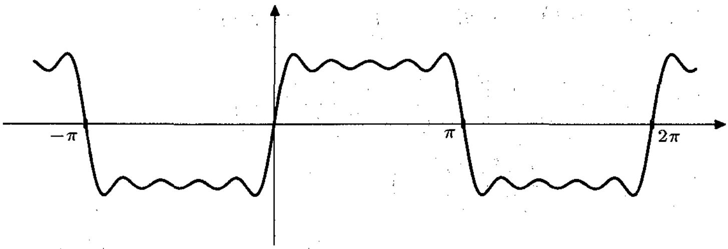
در نتیجه سری فوریه متناظر با تابع $f(x)$ عبارت است از:

$$\frac{۴}{\pi}\left(\sin x + \frac{۱}{۳}\sin ۳x + \frac{۱}{۵}\sin ۵x + \cdots\right)$$

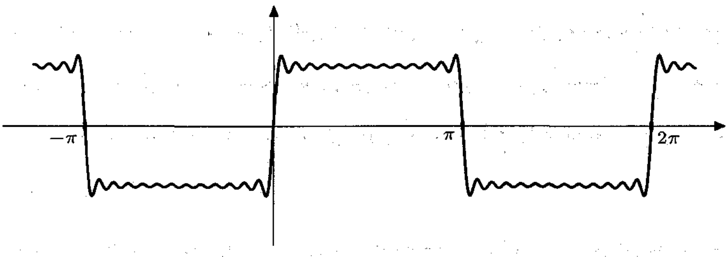
نمودارهای ۱ ـ ۳، ۱ ـ ۴ و ۱ ـ ۵ تقریب‌های تا مجموع جملات $n = ۵$، $n = ۹$ و $n = ۲۵$ سری فوریه را نشان می‌دهند.



نمودار ۱ ـ ۳.



نمودار ۱ ـ ۴.



نمودار ۱ ـ ۵.

تذکر ۱ ـ ۳. در محاسبهٔ ضرایب a_n و b_n ممکن است برای مقادیر خاصی از n، حالتی مبهم در جملات انتگرال‌گیری پیش آید، مانند حالت $n = ۰$ در مثال قبل. این حالات را باید جداگانه محاسبه کرد.

مثال ۱ ـ ۴. سری فوریهٔ تابع متناوب

$$f(x) = x, \quad ۰ < x < ۱ \quad \text{و} \quad f(x+۱) = f(x)$$

با دورهٔ تناوب $T=1$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. در اینجا $\ell=\frac{1}{2}$ و با توجه به تذکر ۱ ـ ۲ بازهٔ انتگرال‌گیری $[0,1]$ در نظر گرفته می‌شود.

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xdx = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)dx$$

$$= 2\left(x\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}dx\right) = 2\left(\frac{\cos(2n\pi x)}{(2n\pi)^2}\Big|_0^1\right) = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\sin(2n\pi x)dx$$

$$= 2\left(-x\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}dx\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2n\pi} + \frac{\sin(2n\pi x)}{(2n\pi)^2}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{n\pi}$$

پس سری فوریهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

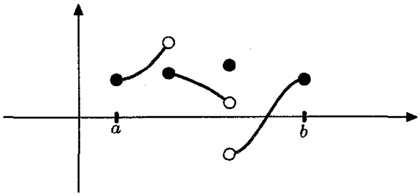
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin(2\pi x) + \frac{\sin(4\pi x)}{2} + \frac{\sin(6\pi x)}{3} + \cdots\right)$$

تذکر ۱ ـ ۴. مقدار $T=2\ell$ در سری فوریه به‌عنوان یکی از دوره‌های تناوب تابع $f(x)$ ظاهر می‌شود، نه دورهٔ تناوب اولیه. در واقع سری فوریه مستقل از دورهٔ تناوب تابع است. بدین معنا که چنانچه با دو دورهٔ تناوب متفاوت، سری فوریهٔ یک تابع را به‌دست آوریم، نتیجه یکسان خواهد بود (تمرین ۱۷).

تا اینجای کار با فرض همگرایی سری فوریه به مقدار $f(x)$، به جز در تعداد متناهی نقطه، ضرایب سری فوریه به‌صورت فرمول‌های اویلر ـ فوریه به‌دست آمد. در اینجا شرایطی را برای تابع f تعیین می‌کنیم که همگرایی سری را در همهٔ نقاط نتیجه بدهد. مثال‌های ۱ ـ ۳ و ۱ ـ ۴ نشان می‌دهند که سری فوریه نمی‌تواند در همهٔ نقاط به مقدار $f(x)$ همگرا باشد. (مقدار سری را در این مثال‌ها در نقطهٔ صفر محاسبه کنید.) حتی مثال‌هایی وجود دارد که سری فوریهٔ متناظر، اصلاً همگرا نیست، [۵].

قبل از بیان قضیهٔ همگرایی سری فوریه، لازم است تابع قطعه‌قطعه پیوسته را تعریف کنیم. تابع f در بازهٔ $[a,b]$، **قطعه‌قطعه پیوسته** است اگر تعداد متناهی نقطهٔ $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ وجود داشته باشند که f در زیربازه‌های (x_i,x_{i+1}) پیوسته

باشد و در نقاط انتهایی هر زیربازه به یک عدد متناهی همگرا باشد. توجه کنید که لازم نیست تابع f در نقاط x_i تعریف شده باشد.



نمودار ۱ ـ ۶.

نماد $f(c+)$ را برای نشان دادن حد راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ c به کار می‌بریم، یعنی

$$f(c+) = \lim_{x \to c^+} f(x),$$

و به‌طور مشابه

$$f(c-) = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

اگر c نقطهٔ پیوستگی تابع f باشد، $f(c+) = f(c-) = f(c)$. بنابراین برای هر تابع قطعه‌قطعه پیوسته مقادیر $f(x+)$ و $f(x-)$ در هر نقطهٔ x متناهی هستند.

نمودار ۱ ـ ۶ مثالی از نمودار توابع قطعه‌قطعه پیوسته را نشان می‌دهد. توابع $\frac{۱}{x}$ و $\sin \frac{۱}{x}$ در بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ قطعه‌قطعه پیوسته نیستند، زیرا مقدار $f(۰+)$ وجود ندارد.

قضیه ۱ ـ ۵. *اگر توابع f و f' در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ قطعه‌قطعه پیوسته باشند، به‌علاوه تابع f، متناوب با دورهٔ تناوب ۲ℓ باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ x،*

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \frac{۱}{۲} \left(f(x+) + f(x-) \right)$$

در اینجا a_n و b_n با استفاده از فرمول‌های اویلر ـ فوریه (۱ ـ ۷) تعریف می‌شوند.

اثبات این قضیه در بخش ۱ ـ ۹ می‌آید.

تذکر ۱ ـ ۶. اگر تابع f در نقطهٔ x پیوسته باشد آنگاه $f(x+) = f(x-) = f(x)$ و در نتیجه سری فوریه به $f(x)$ همگراست. بنابراین این ادعا که سری فوریهٔ تابع قطعه‌قطعه پیوسته و متناوب f جز در تعداد متناهی نقطه به $f(x)$ همگراست، صحیح است به شرط آنکه f' نیز قطعه‌قطعه پیوسته باشد.

تذکر ۱ ـ ۷. یکی از کاربردهای مقدماتی سری فوریه که از این قضیه نتیجه می‌شود، محاسبهٔ مقدار سری‌های عددی است. برای مثال با استفاده از محاسبه مقدار سری فوریه بیان شده در مثال ۱ ـ ۳ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{۴}{\pi}\Big(\sin\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲} + \frac{۱}{۵}\sin\frac{۵\pi}{۲} + \cdots\Big) = \frac{۱}{۲}\Big(f(\frac{\pi}{۲}+) + f(\frac{\pi}{۲}-)\Big)\\
\Longrightarrow \quad &\frac{۴}{\pi}\Big(۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \cdots\Big) = ۱\\
\Longrightarrow \quad &۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \cdots = \frac{\pi}{۴}
\end{aligned}$$

نمونه‌های مختلف دیگر در تمرین‌های آخر بخش آمده است.

تمرین ۱ ـ ۲

۱. دورهٔ تناوب اولیهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید. (m، n، p و q اعداد صحیح هستند.)

الف) $\sin(m\pi x)$ ب) $\sin(nx)\cos(mx)$

پ) $\sin\left(\frac{nx}{m}\right) + \cos\left(\frac{px}{q}\right)$ ت) $|\sin x|$

۲. هرگاه $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب T و $a > ۰$ و b اعدادی ثابت باشند، ثابت کنید $f(ax)$ دارای دورهٔ تناوب $\frac{T}{a}$ و $f\left(\frac{x}{b}\right)$ دارای دورهٔ تناوب bT است.

۳. فرض کنید $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب nT و $g(x)$ دارای دورهٔ تناوب mT است. ثابت کنید $f(x) \pm g(x)$، $f(x)g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ دارای دورهٔ تناوب kT است، که در آن k کوچک‌ترین مضرب مشترک m و n است.

۴. فرض کنید $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب $T_۱$ و $g(x)$ دارای دورهٔ تناوب $T_۲$ است. نشان دهید $f(x) + g(x)$ متناوب است اگر و تنها اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند به‌طوری که $mT_۱ = nT_۲$.

۵. فرض کنید $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب T است. ثابت کنید برای هر عدد ثابت مانند a،

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_۰^T f(x)dx.$$

٦. فرض کنید T دورهٔ تناوب $f(x)$ باشد. ثابت کنید $f'(x)$ نیز دارای دورهٔ تناوب T است.

۷. اگر $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب T باشد و $\int_{۰}^{T} f(x)dx = ۰$، ثابت کنید $\int_{۰}^{x} f(t)dt$ نیز دارای دورهٔ تناوب T است.

۸. سری فوریهٔ هر یک از توابع زیر را با دورهٔ تناوب ۲π بیابید و نمودار اولین سه مجموع جزئی آن را رسم کنید.

الف) $|x| < \pi$، $f(x) = x$ ب) $۰ < x < ۲\pi$، $f(x) = x$

پ) $|x| < \pi$، $f(x) = |x|$ ت) $|x| < \pi$، $f(x) = x^{۲}$

ث) $۰ < x < ۲\pi$، $f(x) = x^{۲}$ ج) $۰ < x < ۲\pi$، $f(x) = |\sin x|$

۹. سری فوریهٔ هر یک از توابع زیر را با دورهٔ تناوب ۲ بیابید و نمودار مجموع اولین سه جملهٔ آن را رسم کنید.

الف) $۰ \le x < ۲$، $f(x) = ۱ - x$ ب) $۰ \le x < ۲$، $f(x) = |۱ - x|$

پ) $۰ < x < ۲$، $f(x) = \cos \frac{\pi x}{۲}$ ت) $|x| < ۱$، $f(x) = ۱ - \frac{x}{|x|}$

۱۰. فرض کنید $f(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ a_n، b_n و $g(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ A_n و B_n و α و β دو عدد ثابت باشند. نشان دهید $\alpha f(x) + \beta g(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ $\alpha a_n + \beta A_n$ و $\alpha b_n + \beta B_n$ است.

۱۱. سری فوریهٔ تابع تمرین (۸. ب) را با استفاده از سری فوریهٔ تابع (۸. پ) به‌دست آورید.

۱۲. فرض کنید ۲ℓ دورهٔ تناوب اولیهٔ تابع $f(x)$ و k یک عدد طبیعی است. اگر در فرمول سری فوریه دورهٔ تناوب را $T = ۲k\ell$ بگیریم، ثابت کنید از هر k تا ضریب فوریهٔ متوالی a_n و b_n حداقل $k - ۱$ ضریب متوالی از آن برابر صفر است.

۱۳. اگر $T = ۲\ell$ و $T' = ۲\ell'$ دوره‌های تناوب تابع $f(x)$ باشند، آنگاه سری فوریهٔ به‌دست آمده با دورهٔ تناوب T با سری فوریهٔ به‌دست آمده با دورهٔ تناوب T' برابر است.

۱۴. با استفاده از سری فوریهٔ $f(x) = x^{۲}$ در فاصلهٔ $|x| < ۱$، مقدار سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}}$ را محاسبه کنید.

۱۵. با استفاده از سری فوریهٔ تابع $|\sin x|$، مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ را محاسبه کنید.

۱۶. با استفاده از سری فوریهٔ $f(x) = |x|$ در فاصلهٔ $|x| < 1$، مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ را به‌دست آورید.

۱۷. با استفاده از سری فوریهٔ $f(x) = x(1 - |x|)$ در فاصلهٔ $|x| < 1$، مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را محاسبه کنید.

۱۸. به کمک سری فوریهٔ تابع $f(x) = \cos ax$ در بازهٔ $0 < x < 2\pi$، برای مقدار غیر صحیح $a \neq 0$، مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ را به‌دست آورید.

۱۹. مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را با انتخاب سری فوریهٔ مناسب محاسبه کنید.

۱ ـ ۳ سری فوریهٔ توابع زوج و فرد

هرگاه تابع f زوج یا فرد باشد، محاسبهٔ ضرایب فوریه ساده‌تر انجام می‌شود. در ابتدا مفاهیم تابع زوج و فرد را یادآوری می‌کنیم.

تابع f زوج است، هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ x در قلمرو آن، نقطهٔ $-x$ نیز در قلمرو آن واقع باشد و

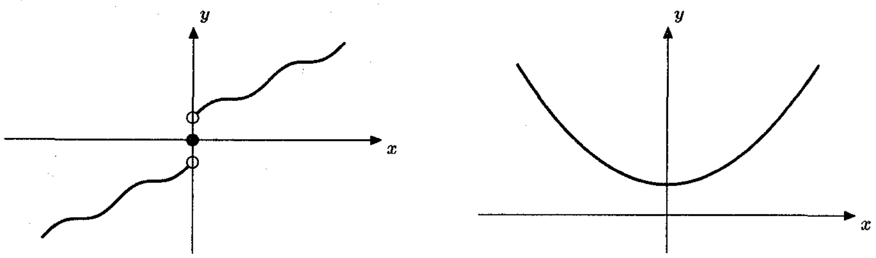
$$f(-x) = f(x).$$

به عبارتی هم قلمرو و هم نمودار تابع زوج نسبت به محور y قرینه است (شکل ۱ ـ ۷ ـ الف).
به‌طور مشابه تابع f فرد است، هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ x در قلمرو آن، نقطهٔ $-x$ نیز در قلمرو واقع باشد و

$$f(-x) = -f(x).$$

همچنین قلمرو و نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است (شکل ۱ ـ ۷ ـ ب). به‌علاوه اگر مبدأ در قلمرو تابع فرد باشد، از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $f(۰) = ۰$.

مثال ۱ ـ ۵. توابع $x^۲$ و $\cos\alpha x$ زوج و توابع $x^۳$ و $\sin\beta x$ فرد هستند.



(الف) (ب)

نمودار ۱ ـ ۷. الف) تابع زوج، ب) تابع فرد.

خواص توابع زوج و فرد:

۱. جمع، تفاضل و ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

۲. جمع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است ولی ضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

۳. ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی فرد است.

۴. اگر f تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = ۰.$$

۵. اگر f تابعی زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{\ell} f(x)dx.$$

سری کسینوسی. اگر f تابعی زوج و متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\ell$ باشد، سری فوریهٔ آن تنها شامل جملات کسینوسی است و ضرایب توابع سینوسی صفر است. زیرا با توجه به خاصیت (۳)، تابع $f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ فرد است، در نتیجه بنابر خاصیت (۴) و فرمول‌های اویلر ـ فوریه:

$$b_n = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = ۰, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

همچنین $f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ تابعی زوج است و

$$a_n = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ n = \circ, ۱, ۲, \ldots$$

در نهایت سری فوریهٔ f به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

سری سینوسی. به‌طور مشابه اگر f تابعی فرد و متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\ell$ باشد، $f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ و $f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ به‌ترتیب توابعی فرد و زوج هستند و در نتیجه:

$$a_n = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \circ, \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots$$

$$b_n = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ n = ۱, ۲, \ldots$$

و سری فوریهٔ آن تنها شامل جملات سینوسی است:

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

تذکر ۱ ـ ۸. اصطلاحاً می‌گویند سری فوریهٔ تابع زوج، کسینوسی و سری فوریهٔ تابع فرد، سینوسی است.

مثال ۱ ـ ٦. تابع متناوب $f(x) = x$ برای $-\ell < x \leq \ell$ و $f(x + ۲\ell) = f(x)$، فرد است. بنابراین سری فوریهٔ آن سینوسی است و

$$\begin{aligned}
a_n &= \circ \\
b_n &= \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \\
&= \frac{۲}{\ell}\left(\frac{-x\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Bigg|_{\circ}^{\ell} + \int_{\circ}^{\ell}\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}dx\right) = \frac{۲}{\ell}\left(\frac{-\ell^{۲}}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^{۲}}\Bigg|_{\circ}^{\ell}\right) \\
&= \frac{۲\ell}{n\pi}(-۱)^{n+۱}
\end{aligned}$$

درنتیجه:

$$f(x) = \frac{۲\ell}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

توجه کنید که نقاط $\pm\ell$، $\pm 3\ell$، ... نقاط ناپیوستگی تابع f هستند و مقدار سری در بقیهٔ نقاط برابر مقدار f است و در نقاط ناپیوستگی، میانگین حد چپ و راست تابع برابر صفر است.

در بعضی مسائل لازم است که بتوان تابع را تنها به‌صورت سری سینوسی و یا کسینوسی نمایش داد. اگر تابع f تنها در بازهٔ $(0,\ell)$ تعریف شده باشد، می‌توان آن را به‌صورت یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=\ell$ به همهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی توسعه داد. در این صورت سری فوریهٔ آن شامل جملات سینوسی و کسینوسی، خواهد بود. برای اینکه بتوان به خواستهٔ مسئله رسید و تابع f را در بازهٔ $(0,\ell)$ تنها با جملات سینوسی و یا کسینوسی نمایش داد، باید آن را به‌صورت تابع متناوب فرد یا زوج با دورهٔ تناوب $T=2\ell$ توسعه داد.

۱. **توسعهٔ تناوبی زوج.** تابع متناوب g با ضابطه

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le \ell \\ f(-x) & -\ell\le x\le 0 \end{cases}$$

و $g(x)=g(x+2\ell)$، تابعی زوج است. این تابع را توسعهٔ تناوبی زوج f می‌نامند و سری فوریهٔ آن عبارت است از:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

که در آن

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

۲. **توسعهٔ تناوبی فرد.** تابع متناوب h با ضابطه

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & 0< x\le \ell \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\ell\le x< 0 \end{cases}$$

و $h(x)=h(x+2\ell)$، تابعی فرد است. این تابع را توسعهٔ تناوبی فرد f می‌نامند و سری فوریهٔ آن عبارت است از:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

تذکر ۱ ـ ۹. توجه کنید که فرمول‌های ضرایب بسط‌های کسینوسی و سینوسی فقط به مقادیر f در بازهٔ اولیهٔ $(\circ, \ell)$ وابسته‌اند و به‌هیچ وجه به گسترش‌هایی که برای به‌دست آوردن این فرمول‌ها به‌کار می‌گیرند، بستگی ندارند. به‌علاوه برقراری تساوی سری فوریه با مقدار تابع فقط در بازهٔ $(\circ, \ell)$ برقرار است که نیم‌دامنهٔ هر یک از جملات سری است. به این دلیل چنین سری‌هایی به بسط‌های نیم‌دامنه‌ای یا بسط در نیم‌دامنه معروف‌اند.

تذکر ۱ ـ ۱۰. اگر تابع f در مبدأ برابر صفر نباشد، آنگاه $x = \circ$ یک نقطهٔ ناپیوستگی برای توسعه تناوبی فرد تابع f است و مقدار سری فوریه در دو سر بازهٔ $(\circ, \ell)$ برابر صفر است. نمودار ۱ ـ ۹ در مثال بعد این مطلب را بهتر نشان می‌دهد.

مثال ۱ ـ ۷. سری‌های فوریهٔ توسعه‌های تناوبی زوج و فرد تابع $f(x) = ۱ - x$ در بازهٔ $\circ \le x \le ۱$ را محاسبه می‌کنیم:

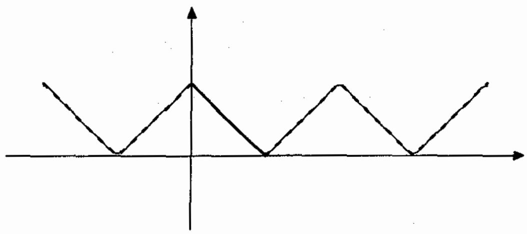
$$a_\circ = ۲\int_\circ^۱ (۱ - x)dx = ۱$$

$$a_n = ۲\int_\circ^۱ (۱ - x)\cos(n\pi x)dx = ۲\Big(- \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^۲}\Big|_\circ^۱ \Big)$$

$$= \frac{۲(۱ - (-۱)^n)}{(n\pi)^۲} = \begin{cases} \circ & n\text{، زوج} \\ \dfrac{۴}{(n\pi)^۲} & n\text{، فرد} \end{cases}$$

پس سری فوریهٔ کسینوسی تابع f برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۴}{\pi^۲}\Big(\cos(\pi x) + \frac{\cos(۳\pi x)}{۳^۲} + \frac{\cos(۵\pi x)}{۵^۲} + \cdots\Big)$$



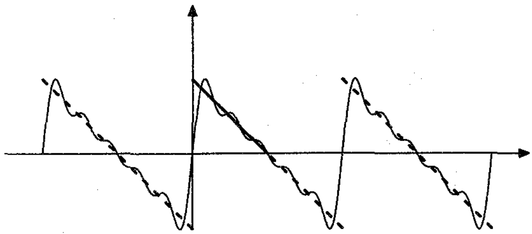
نمودار ۱ ـ ۸. توسعهٔ زوج، همراه با تقریب جملهٔ ۵ ـ ام سری فوریهٔ کسینوسی.

$$b_n = ۲\int_{\circ}^{۱}(۱-x)\sin(n\pi x)dx = ۲\left((۱-x)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{\circ}^{۱} - \int_{\circ}^{۱}\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right)$$

$$= ۲\left(\frac{۱}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^۲}\Big|_{\circ}^{۱}\right) = \frac{۲}{n\pi}$$

پس سری فوریهٔ سینوسی تابع f برابر است با:

$$\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}$$



نمودار۱ ـ ۹. توسعهٔ فرد، همراه با تقریب جملهٔ ۵ ـ ام سری فوریهٔ سینوسی.

تذکر۱ ـ ۱۱. توجه کنید تابعی را که فقط روی $(\circ, \ell)$ تعریف شده است می‌توان به انواع مختلف به‌صورت تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ℓ بسط داد. بسط‌های سینوسی و کسینوسی ساده‌ترین آنها هستند.

تمرین ۱ ـ ۳

۱. تعیین کنید کدام‌یک از توابع زیر زوج و کدام‌یک فرد هستند.

الف) $x\cos x$ ب) $\ln|x|$ پ) $e^{x^۲}$

ت) $\frac{x}{۱+x^۲}$ ث) $x+x^۲$

۲. توابع زیر را با سری فوریهٔ کسینوسی روی $\circ < x < ۲$ نمایش دهید.

الف) $f(x) = x$ ب) $f(x) = x^۲$

پ) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{۲}$ ت) $f(x) = ۱ - \frac{x}{۲}$

۳. توابع زیر را با سری فوریهٔ سینوسی روی $\circ < x < ۴$ نمایش دهید.

الف) $f(x) = ۴ - x$
ب) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{۴}$
پ) $f(x) = \cosh \frac{\pi x}{۴}$
ت) $f(x) = x(۴ - x)$

۱ ـ ۴ صورت مختلط سری فوریه

به‌کارگیری اعداد مختلط در مسائل اعداد حقیقی گاهی اوقات موجب کاهش محاسبات، حجم نوشته‌ها و فرمول‌ها می‌شود. در این بخش با استفاده از اعداد مختلط صورت اصلی سری فوریهٔ یک تابع را که در بخش ۱ ـ ۲ به‌دست آمد، به شکلی دیگر و با به‌کار بردن تابع نمایی موهومی به جای توابع مثلثاتی نمایش می‌دهیم. برای این منظور به معرفی تابع با متغیر حقیقی، مقدار مختلط، مشتق و انتگرال آن نیاز داریم.

فرض کنید $t \in \mathbb{R}$ و $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ دو تابع حقیقی باشند. تابع $f(t) = f_۱(t) + if_۲(t)$ را که در آن $i = \sqrt{-۱}$ است یک تابع حقیقی با مقدار مختلط می‌نامیم. می‌گوییم f دارای حد است یا پیوسته، مشتق‌پذیر و یا انتگرال‌پذیر است اگر توابع $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ دارای این خواص باشند. توجه کنید این تعاریف با تعاریفی که برای حد، پیوستگی، مشتق‌پذیری و یا انتگرال‌پذیری که با استفاده از متریک قدرمطلق اعداد مختلط بیان می‌شود، سازگاری دارد. با توجه به مطالب فوق مشتق و انتگرال تابع f فوق را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}f_۱(t) + i\frac{d}{dt}f_۲(t)$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_۱(t)dt + i\int_a^b f_۲(t)dt$$

$$\int f(t)dt = \int f_۱(t)dt + i\int f_۲(t)dt$$

تذکر ۱ ـ ۱۲. همهٔ قواعد مشتق و انتگرال توابع حقیقی برای توابع حقیقی با مقدار مختلط نیز برقرار است.

مثال ۱ ـ ۸. در این مثال نشان می‌دهیم قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برقرار است.

فرض کنید $f(t) = f_۱(t) + if_۲(t)$ و $g(t) = g_۱(t) + ig_۲(t)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند. در این صورت:

$$f(t)g(t) = \Big(f_۱(t)g_۱(t) - f_۲(t)g_۲(t)\Big) + i\Big(f_۱(t)g_۲(t) + f_۲(t)g_۱(t)\Big)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t)g(t) &= \Big(f'_۱(t)g_۱(t) - f'_۲(t)g_۲(t)\Big) + i\Big(f'_۱(t)g_۲(t) + f'_۲(t)g_۱(t)\Big)\\ &\quad + \Big(f_۱(t)g'_۱(t) - f_۲(t)g'_۲(t)\Big) + i\Big(f_۱(t)g'_۲(t) + f_۲(t)g'_۱(t)\Big)\\ &= \Big(f'_۱(t) + if'_۲(t)\Big)\Big(g_۱(t) + ig_۲(t)\Big)\\ &\quad + \Big(f_۱(t) + if_۲(t)\Big)\Big(g'_۱(t) + ig'_۲(t)\Big)\\ &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\end{aligned}$$

نتیجه ۱ ـ ۱۳. انتگرال‌گیری جزء به‌جزء برای f و g برقرار است.

تعریف ۱ ـ ۱۴. برای عدد حقیقی t تابع $\cos t + i\sin t$ را تابع نمایی موهومی می‌گوییم و با e^{it} نشان می‌دهیم. همچنین برای اعداد حقیقی a، b و t، تابع حقیقی با مقدار مختلط

$$e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt$$

را تابع نمایی حقیقی ـ مختلط می‌نامیم و با $e^{(a+ib)t}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱ ـ ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int xe^x\cos x dx$.

حل.

$$\begin{aligned}\int xe^x\cos x dx &= \mathrm{Re}\int xe^x(\cos x + i\sin x)dx\\ &= \mathrm{Re}\int xe^x e^{ix}dx = \mathrm{Re}\int xe^{(۱+i)x}dx\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{x}{۱+i}e^{(۱+i)x} - \int\frac{e^{(۱+i)x}}{۱+i}dx\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{x}{۱+i}e^{(۱+i)x} - \frac{e^{(۱+i)x}}{(۱+i)^۲} + c\right)\\ &= \mathrm{Re}\left((\frac{۱-i}{۲}x + \frac{i}{۲})e^x(\cos x + i\sin x) + c\right)\\ &= \frac{۱}{۲}xe^x\cos x + \frac{۱}{۲}xe^x\sin x - \frac{۱}{۲}e^x\sin x + \mathrm{Re}\,(c)\end{aligned}$$

تذکر ۱ ـ ۱۵. کلیهٔ خواص تابع نمایی حقیقی برای دو تابع e^{it} و $e^{(a+ib)t}$ برقرار است.

مثال ۱ ـ ۱۰. نشان دهید $e^{(a_1+ib_1)t} \cdot e^{(a_2+ib_2)t} = e^{[(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)]t}$.

حل.

$$\begin{aligned}
e^{(a_1+ib_1)t} \cdot e^{(a_2+ib_2)t} &= e^{a_1 t}e^{a_2 t}(\cos b_1 t + i\sin b_1 t)(\cos b_2 t + i\sin b_2 t) \\
&= e^{(a_1+a_2)t}\big(\cos(b_1+b_2)t + i\sin(b_1+b_2)t\big) \\
&= e^{[(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)]t}
\end{aligned}$$

اکنون به بیان صورت مختلط سری فوریهٔ می‌پردازیم. از دو تساوی

$$e^{ibt} = \cos bt + i\sin bt \qquad \text{و} \qquad e^{-ibt} = \cos bt - i\sin bt$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\cos bt = \frac{1}{2}(e^{ibt} + e^{-ibt}) \qquad \text{و} \qquad \sin bt = \frac{1}{2i}(e^{ibt} - e^{-ibt}) \tag{۱ ـ ۸}$$

حال فرض کنید تابع تناوبی $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2ℓ دارای سری فوریهٔ زیر است

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{۱ ـ ۹}$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \qquad \text{و} \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \tag{۱ ـ ۱۰}$$

از جایگذاری مقادیر سینوس و کسینوس برحسب تابع نمایی موهومی (۱ ـ ۸) در فرمول سری فوریهٔ (۱ ـ ۹) و فرمول‌های اویلر ـ فوریهٔ (۱ ـ ۱۰) به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} + d_n e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\right)$$

که در آن $c_0 = \frac{a_0}{2}$، $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ و $d_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ در نتیجه:

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx \qquad \text{و} \qquad d_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}dx$$

حال اگر فرض کنیم $d_n = c_{-n}$، در این صورت سری فوریهٔ فوق و ضرایب آن به‌صورت زیر

در می‌آیند:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x},$$

$$c_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx,\ n\qquad=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

سری فوق را صورت مختلط سری فوریه گویند. همچنین c_n ها را ضرایب فوریهٔ مختلط و فرمول c_n را فرمول اویلر ـ فوریهٔ مختلط گویند.

مثال ۱ ـ ۱۱. مطلوب است محاسبهٔ سری فوریهٔ مختلط تابع $f(x)=e^x$ برای $|x|<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$.

حل. با قرار دادن $2\pi=2\ell$ در فرمول اویلر ـ فوریهٔ مختلط نتیجه می‌شود:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi}-e^{-\pi})e^{in\pi}=\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}\sinh\pi$$

بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}\sinh\pi\ e^{inx}$$

تمرین ۱ ـ ۴

۱. مطلوب است محاسبهٔ سری فوریهٔ مختلط $f(x)=x$ برای $0\leq x<2$ و $f(x+2)=f(x)$.

۲. نشان دهید برای هر عدد طبیعی N داریم:

$$\sum_{|n|\leq N} e^{inx}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

۳. فرض کنید p و q دو عدد صحیح باشند و $q<p$. نشان دهید برای هر $x\neq 2\pi k$ نابرابر زیر برقرار است:

$$\Big|\sum_{q\leq n\leq p} e^{inx}\Big|\leq\Big|\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x\Big|$$

۴. ضرایب فوریهٔ مختلط توابع با دورهٔ تناوب 2π را که روی $(-\pi,\pi)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، بیابید.

الف) $f(x) = |x|$ ب) $f(x) = |\sin x|$

۵. فرض کنید $c_n \geq c_{n+1}$ و $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}$ برای $x \neq 2k\pi$، $k = 0, \pm 1, \ldots$ همگراست. همچنین نشان دهید روی مجموعه‌های فشرده‌ای که حاوی نقاط مذکور نباشند، به‌طور یکنواخت همگراست.

۶. فرض کنید A عددی ثابت است که $nc_n \leq A$ و $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$. نشان دهید:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx\right| \leq A(\pi + 1)$$

۱ ـ ۵ تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال‌گیری

در این بخش روشی برای تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال‌گیری ارائه می‌دهیم. خواهیم دید تعداد جملات محاسبه شده در ضرایب a_n و b_n به هموار‌ی تابع f بستگی دارد. به بیان دیگر هرچه تعداد نقاط ناهمواری بیشتر باشد، تعداد جملات در ضرایب a_n و b_n بیشتر خواهد شد. در واقع دیگر پرش‌های تابع و مشتقات آن تعداد این جملات را تعیین می‌کنند. از آنجا که مشتق مرتبهٔ $k+1$ ام یک چندجمله‌ای از درجهٔ k برابر صفر است، این روش برای توابع تناوبی که قطعه‌قطعه برابر یک چندجمله‌ای هستند، به‌سادگی قابل اعمال است.

منظور از پرش j ی تابع $g(x)$ در نقطهٔ x_0 اختلاف بین حدهای راست و چپ $g(x)$ در این نقطه است، یعنی:

$$j = \lim_{x\to x_0+} g(x) - \lim_{x\to x_0-} g(x) = g(x_0+) - g(x_0-)$$

فرض کنید $f(x)$ تابع متناوبی با دورهٔ 2ℓ باشد که در فاصلهٔ $-\ell < x < \ell$ برحسب

چندجمله‌ای‌های p_1، ...، p_m نمایش داده شده است. یعنی روی $-\ell < x < \ell$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x) & x_0 < x < x_1, \qquad (x_0 = -\ell) \\ p_2(x) & x_1 < x < x_2, \\ \vdots & \vdots \\ p_m(x) & x_{m-1} < x < x_m, \qquad (x_m = \ell). \end{cases}$$

در این صورت f یا یکی از مشتقات آن ممکن است در نقطه‌های x_0، x_1، ...، x_m پرش‌هایی داشته باشد. برای سادگی در نوشتن از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$j_k = \text{پرش } f \text{ در نقطهٔ } x_k$$

$$j'_k = \text{پرش } f' \text{ در نقطهٔ } x_k$$

$$\vdots$$

$$j_k^{(s)} = \text{پرش } f^{(s)} \text{ در نقطهٔ } x_k$$

البته هرگاه $f^{(s)}$ در x_k پیوسته باشد، آنگاه $j_k^{(s)} = 0$.

مثال ۱ ـ ۱۲. پرش‌های تابع تناوبی با دورهٔ تناوب 2π و مشتقات آن را که روی $(-\pi, \pi)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود، تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل. داریم:

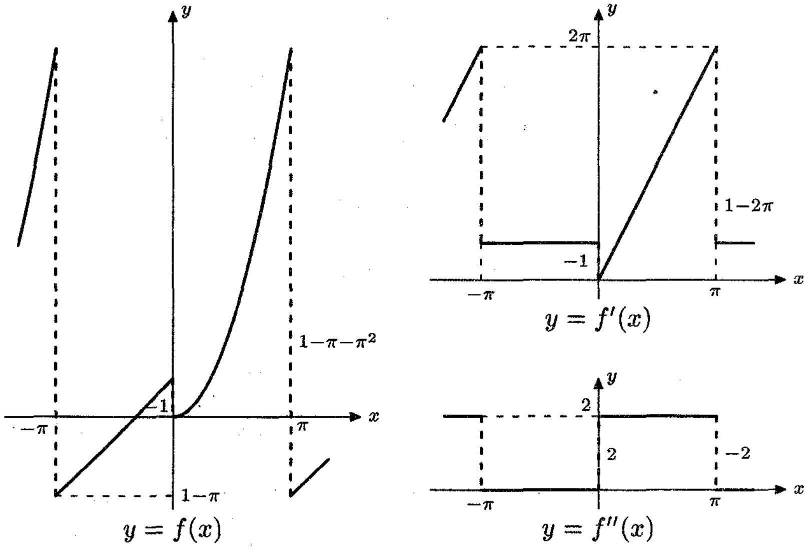
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad f'''(x) = 0$$

	پرش در $x_0 = -\pi$	پرش در $x_1 = 0$	پرش در $x_2 = \pi$
f	$1 - \pi - \pi^2$	-1	$1 - \pi - \pi^2$
f'	$1 - 2\pi$	-1	$1 - 2\pi$
f''	-2	2	-2

توجه کنید که پرش‌ها در $x = -\pi$ و $x = \pi$ برابرند، علت این امر این است که این دو نقطه نقاط انتهایی یک دورهٔ تناوب هستند. برای سادگی می‌توان پرش‌های مربوط به یکی از این دو نقطه مثلاً $x = -\pi$ را از جدول حذف کرد.

در زیر نمودار f و مشتقات آن رسم شده است.



نمودار ۱ ـ ۱۰. $f(x)$ و مشتقات آن در مثال ۱ ـ ۱۲.

برای یافتن فرمول مطلوب برای محاسبهٔ a_n (غیر از $a_۰$ که باید مانند گذشته با استفاده از انتگرال محاسبه شود) از فرمول اویلر ـ فوریه شروع می‌کنیم.

$$\ell a_n = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x dx = \sum_{k=۱}^{m}\int_{x_{k-۱}}^{x_k} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x dx$$

با محاسبهٔ انتگرال‌های فوق به روش جزء به‌جزء نتیجه می‌شود:

$$\int_{x_{k-۱}}^{x_k} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x dx = \frac{\ell f(x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big|_{x_{k-۱}}^{x_k} - \frac{\ell}{n\pi}\int_{x_{k-۱}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x dx$$

چون $f(x)$ ممکن است در $x_{k-۱}$ و x_k ناپیوسته باشد، پس در محاسبهٔ عبارت اول طرف راست تساوی فوق باید $f(x_k-)$، حد چپ f در x_k، و $f(x_{k-۱}+)$، حد راست f در $x_{k-۱}$ را درنظر

گرفت. از این‌رو عبارت اول طرف راست تساوی فوق برابر است با:

$$\frac{\ell}{n\pi}\Big(f(x_k-)\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k - f(x_{k-1}+)\sin\frac{n\pi}{\ell}x_{k-1}\Big)$$

حال اگر روی k جمع ببندیم با توجه به اینکه $\sin\frac{n\pi}{\ell}x_0 = \sin\frac{n\pi}{\ell}x_m$، به‌دست می آوریم:

$$\ell a_n = -\frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} j_k \sin\frac{n\pi}{\ell}x_k - \frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

با اعمال همین روش در مورد انتگرال‌های طرف راست تساوی اخیر به‌دست می آوریم:

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} j'_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k + \frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

با ادامهٔ این روش، به انتگرال‌هایی که شامل مشتقات بالاتر f هستند، می‌رسیم. حال اگر f با چندجمله‌ای‌هایی از درجهٔ r و کمتر نمایش داده شده باشد، آنگاه مشتق مرتبهٔ $r+1$ ام f برابر صفر می‌شود. بنابراین بعد از r مرحله به جایی می‌رسیم که دیگر انتگرالی باقی نمی‌ماند. با جایگذاری فرمول‌های مربوط به مشتقات متوالی در فرمول‌های قبلی برای تعیین a_n به فرمول زیر می‌رسیم.

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big(-\sum_{k=1}^{m} j_k\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k - \frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} j'_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m} j''_k\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k + \frac{\ell^3}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{m} j'''_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k - - + + \cdots\Big).$$

که در آن $n = 1, 2, \ldots$ (a_0 مانند قبل باید با انتگرال‌گیری به‌دست آید). با اعمال روش مشابه برای b_n ها به‌دست می آوریم:

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big(\sum_{k=1}^{m} j_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k - \frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} j'_k\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k - \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m} j''_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k + \frac{\ell^3}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{m} j'''_k\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k + - - + \cdots\Big).$$

مثال ۱ ـ ۱۳. مطلوب است تعیین ضرایب فوریهٔ تابع موج مربعی تناوبی:

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

حل. تابع f فرد است پس $a_n = \circ$. با قرار دادن $x_\circ = -\pi$، $x_۱ = \circ$ و $x_۲ = \pi$ در روابط قبل b_n بدین ترتیب محاسبه می‌شود:

$$b_n = \frac{۱}{n\pi}(j_۱ \cos nx_۱ + j_۲ \cos nx_۲) = \frac{۱}{n\pi}(۲k\cos\circ - ۲k\cos n\pi)$$

$$= \frac{۲k}{n\pi}(۱ - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{۴k}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ \circ & n \text{ زوج} \end{cases}$$

تمرین ۱ ـ ۵

۱. همه توابع زیر دارای دورهٔ تناوب ۲π هستند و روی بازهٔ $(-\pi, \pi)$ تعریف شده‌اند. با استفاده از روش این بخش سری فوریهٔ هر یک از این توابع را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$ ب) $f(x) = x + x^۲$

پ) $f(x) = x^۳$ ت) $f(x) = |x^۳|$

ث) $f(x) = x|x|$ ج) $f(x) = x^۲$

۲. آیا می‌توان برای یافتن ضرایب فوریهٔ تابع، $f(x) = e^x$ در فاصلهٔ $|x| < \pi$ و $f(x + ۲\pi) = f(x)$، از مطالب این بخش استفاده کرد؟ چرا؟

۱ ـ ۶ کاربرد سری فوریه در حل معادلات دیفرانسیل عادی

اگرچه سری فوریه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی به‌وجود آمده است، لیکن می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل عادی خطی با ضرایب ثابت در حالتی‌که طرف دوم معادله تابعی تناوبی، قطعه‌قطعه پیوسته و دارای سری فوریه باشد، به‌طور فوق‌العاده استثنایی از آن استفاده کرد. در واقع استفاده از سری فوریه از دو نظر اهمیت دارد. اهمیت اول این است که جواب یگانه فیزیکی و ریاضی مسئله به‌دست می‌آید و اهمیت دوم این است که پدیده‌های فیزیکی جواب، از قبیل تشدید به‌صورت برجسته و ملموس ظاهر می‌گردد. برای درک بهتر مطلب نیاز به مقدماتی است که در زیر می‌آوریم.

قضیه ۱ ـ ۱۶. *فرض کنید در معادلهٔ دیفرانسیل عادی خطی با ضرایب ثابت از مرتبهٔ m:*

$$y^{(m)} + a_{m-۱}y^{(m-۱)} + \cdots + a_۱ y' + a_\circ y = f(t)$$

تابع $f(t)$ روی $[t_\circ, +\infty)$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه این معادله همراه با شرایط اولیه:

$$y(t_\circ) = y_\circ \quad \text{و} \quad y'(t_\circ) = y'_\circ \quad \text{و} \quad \cdots \quad \text{و} \quad y^{(m-۱)}(t_\circ) = y_\circ^{(m-۱)}$$

دارای جواب یگانه‌ای است که این جواب و همهٔ مشتقات آن تا مرتبهٔ $(m-۱)$ام روی $[t_\circ, +\infty)$ پیوسته و ناپیوستگی‌های f، در مشتق mام این جواب ظاهر می‌گردد.

برهان. به کتاب‌های معادلات دیفرانسیل عادی مانند [۴] مراجعه شود. ■

در معادلات دیفرانسیل عادی خطی با ضرایب ثابت همراه با شرایط اولیه وقتی تابع طرف دوم معادله دارای ناپیوستگی جهشی و تبدیل لاپلاس باشد، جواب معمولاً با استفاده از تبدیل لاپلاس به‌دست می‌آید. زیرا با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب یگانه‌ای که طبق قضیهٔ فوق موجود است، نتیجه می‌شود. در حالتی‌که معادلهٔ دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه نباشد، چنانچه با استفاده از سری فوریه جواب مخصوصی به‌دست آوریم، این جواب و مشتقات آن تا مرتبهٔ $(m-۱)$ ام پیوسته و ناپیوستگی‌ها در مشتق مرتبهٔ m ام ظاهر می‌شود. با به‌کارگیری این جواب مخصوص در جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن به آن جواب عمومی معادله دست می‌یابیم که اعمال هر شرایط اولیه، جواب یگانهٔ قضیهٔ فوق را به‌دست می‌دهد. به‌عبارت دیگر این جواب عمومی، جواب عمومی طبیعی معادله است.

مثال ۱ ـ ۱۴. یک جواب مخصوص برای معادلهٔ $y'' + ۴y = f(x)$ که در آن $f(x) = \begin{cases} -۱ & -\pi < x < \circ \\ ۱ & \circ < x < \pi \end{cases}$ متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است، به‌دست آورید.

حل. سری فوریهٔ تابع $f(x)$ برابر است با $\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)x}{۲k-۱}$، با قرار دادن:

$$y_p = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و با قرار دادن آنها در معادلهٔ دیفرانسیل فوق به‌دست می‌آوریم:

$$۴\frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left((۴-n^۲)a_n \cos nx + (۴-n^۲)b_n \sin nx\right) = \frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)x}{۲k-۱}$$

پس باید تساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$۲a_۰ = ۰ \quad \text{و} \quad (۴ - n^۲)a_n = ۰ \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

$$(۴ - n^۲)b_n = \begin{cases} \dfrac{۴}{(۲k - ۱)\pi} & n = ۲k - ۱ \\ ۰ & n \neq ۲k - ۱ \end{cases} \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

به این ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$a_n = ۰, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$b_n = ۰, \qquad n \text{ زوج}$$

$$b_n = \frac{۴}{(۲k - ۱)(۴ - (۲k - ۱)^۲)\pi}, \qquad n = ۲k - ۱ \quad \text{و} \quad k = ۱, ۲, \ldots$$

در نتیجه:

$$y_p = \frac{۴}{\pi} \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲k - ۱)x}{(۲k - ۱)(۴ - (۲k - ۱)^۲)}$$

تذکر ۱ ـ ۱۷. چون $\cos ۲x$ و $\sin ۲x$ جواب‌های معادلهٔ همگن وابسته‌اند از این نظر $a_۲$ و $b_۲$ می‌توانند هر مقدار داشته باشند که ما آنها را برابر صفر انتخاب کردیم.

تذکر ۱ ـ ۱۸. توجه کنید اگر ضرایب فوریه برای مقادیر بزرگ n معادل با $\frac{۱}{n}$ باشد، آنگاه تابع مربوط دارای ناپیوستگی و اگر برای n های بزرگ معادل با $\frac{۱}{n^۲}$ باشد، تابع پیوسته ولی مشتق اول آن ناپیوسته است. به‌طور کلی می‌توان گفت اگر این ضرایب برای n های بزرگ معادل $\frac{۱}{n^m}$ باشد آنگاه تابع مربوط و مشتقات آن تا مرتبهٔ $m - ۲$ ام پیوسته و ناپیوستگی در مشتق $m - ۱$ ام آن ظاهر می‌شود [۱۳].

بنابراین y_p در مثال فوق و مشتق مرتبهٔ اول آن پیوسته و ناپیوستگی‌های طرف دوم معادله در y_p'' ظاهر می‌شود.

مطلب دیگری که در مورد کاربرد سری فوریه در تعیین جواب مخصوص اهمیت دارد، بیان وجود خاصیت تشدید و ظهور جواب‌های تناوبی در معادلات دیفرانسیل عادی با ضرایب ثابت است. در مثال فوق با تعیین y_p به‌صورت سری فوریه، بدیهی است که حالت تشدید رخ نمی‌دهد. ولی در مثال زیر این امر پدید می‌آید.

مثال ۱ ـ ۱۵. یک جواب مخصوص برای $y'' + y = f(t)$ که در آن $f(t)$ تابع مثال قبلی

است، بیابید.

حل. کافی‌است برای $k=۱,۲,\ldots$ جواب مخصوص برای

$$y''+y=\frac{۴}{\pi}\frac{\sin(۲k-۱)t}{۲k-۱}$$

بیابیم و از خاصیت خطی معادلهٔ استفاده کرده جواب معادلهٔ اول را بیابیم. برای $k\neq ۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$y_{p_k}=\frac{۴\sin(۲k-۱)t}{(۲k-۱)(۱-(۲k-۱)^۲)\pi}$$

برای $k=۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$y_{p_۱}=-\frac{۲}{\pi}t\cos t$$

پس:

$$y_p=-\frac{۲}{\pi}t\cos t+\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۲}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)t}{(۲k-۱)(۱-(۲k-۱)^۲)}$$

در این جواب جملهٔ $-\frac{۱}{۲}t\cos t$ بیانگر وقوع تشدید در سیستم است.

در مثال زیر یک جواب تناوبی را به‌عنوان جواب مخصوص به‌دست می‌آوریم که دورهٔ تناوب آن ظاهراً با معادله سازگاری ندارد.

مثال ۱ ـ ۱۶. مطلوب است تعیین یک جواب مخصوص برای معادلهٔ $y''+۰/۰۲y'+۲۵y=f(t)$ که در آن $f(t+۲\pi)=f(t)$ و $f(t)=-|t|+\frac{\pi}{۲}$ برای $|t|<\pi$.

حل. سری فوریه $f(t)$ عبارت است از:

$$f(t)=\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^۲}\cos(۲k-۱)t$$

چنانچه شبیه مثال ۱ ـ ۱۴ یا مثال ۱ ـ ۱۵ عمل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$a_k=\frac{۴(۲۵-(۲k-۱)^۲)}{(۲k-۱)^۲\pi d_k}\quad \text{و} \quad b_k=\frac{۰/۰۸}{(۲k-۱)\pi d_k}$$

که در آن:

$$d_k=(۲۵-(۲k-۱)^۲)^۲+(۰/۰۲(۲k-۱))^۲$$

به‌دست می‌آوریم:

$$y_{p_k} = a_k \cos(2k-1)t + b_k \sin(2k-1)t$$

به این ترتیب $y_p = \sum_{k=1}^{\infty} y_{k_p}$ جواب مخصوص مطلوب است.

حال بگیرید $c_k^2 = a_k^2 + b_k^2$ در این صورت $c_3 \approx 0/51$ و $\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq 3}}^{\infty} c_k < 0/05$. بنابراین:

$$y_p \approx y_{p_3} = 0/51 \sin 5t$$

بدین ترتیب به‌نظر می‌آید که معادله جوابی با دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{5}$ دارد که متناقض با دورهٔ تناوب 2π طرف دوم معادله است.

تذکر ۱ ـ ۱۹. جواب y_p در مثال فوق در اصل با دورهٔ تناوب 2π است، لیکن به‌دلیل بزرگی y_{p_3} نسبت به مجموع سایر جواب‌ها این دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{5}$ به‌نظر می‌آید.

در حالتی‌که کلیهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی منفی باشند، جواب عمومی معادلهٔ همگن وابسته وقتی‌که t به‌سمت بینهایت میل کند به‌سمت صفر می‌رود. حال اگر برای معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن جواب مخصوصی به‌دست آوریم که فاقد جملاتی از جواب عمومی معادلهٔ همگن اینگونه معادلات باشد، این جواب را جوابی مانا یا ماندگار گویند. علت این نام برای این جواب این است که با گذشت مقداری از زمان اثر شرایط اولیه که در تعیین مقادیر ثابت جواب عمومی به‌کار می‌رود برطرف می‌شود و فقط این قسمت از جواب است که برای همیشه باقی می‌ماند.

تمرین ۱ ـ ۶

۱. اگر $f(t)$ تابع متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد که:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

جواب هر یک از معادلات زیر را به‌دست آورید:

الف) $\begin{cases} y'' - y = f(t) \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} y'' - y = f(t) \\ y(۰) = ۱, y'(۰) = ۰ \end{cases}$ ت) $\begin{cases} y'' - ۳y' + ۲y = f(t) \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$

۲. اگر $f(t)$ تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد که $f(t) = |t|$ برای $-\pi \leq t \leq \pi$، جواب هر یک از معادلات زیر را به‌دست آورید:

الف) $\begin{cases} y'' - y = f(t) \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y'' + ۴y = f(t) \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$

پ) $y'' + ۹y = f(t)$ ، $y(۰) = y'(۰) = ۰,$

۱ ـ ۷ تبدیلات فوریهٔ متناهی

یکی از ابزارهای قوی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیلات انتگرالی است. با استفاده از این تبدیلات نقش متغیر در معادلات دیفرانسیل به پارامتر تبدیل می‌شود. به این ترتیب تعداد متغیرهای مسئلهٔ معادلات دیفرانسیل تقلیل می‌یابد و حل مسئله مقدور می‌شود.

فرض کنید $K(s,x)$ تابعی معین از s و x و $f(x)$ تابعی داده شده به قلمرو $[a,b]$ باشد. تابع $F(s) = \int_a^b f(x)K(s,x)dx$ را تبدیل $f(x)$ نسبت به هستهٔ $K(s,x)$ می‌نامند و با $\mathcal{F}(f)$ نشان می‌دهند. این تبدیل را یک تبدیل انتگرالی گویند. اگر سه خاصیت زیر را دارا باشد.

(الف) خاصیت خطی یعنی $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$.

(ب) تطابق یک‌به‌یک بین فضای توابع و فضای تبدیلات موجود باشد. به‌علاوه تبدیل وارون نیز وجود داشته باشد، یعنی از روی تبدیل تابع، خود تابع را به‌صورت یگانه بتوان تعیین کرد.

(ج) تبدیل مشتق هر تابع برحسب تبدیل خود تابع قابل بیان باشد.

تبدیل فوریه و لاپلاس که در فصل بعد تحت عنوان تبدیلات انتگرالی به آنها خواهیم پرداخت، دارای سه خاصیت فوق هستند. همچنین تبدیل فوریهٔ متناهی یک تبدیل انتگرالی است که در یک بازهٔ متناهی تعریف می‌شود. در این بخش به معرفی تبدیلات فوریهٔ متناهی می‌پردازیم.

فرض کنید تابع $f(x)$ به قلمرو $[-\ell,\ell]$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد. دنبالهٔ عددی

$$F(n) = \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-\frac{in\pi}{\ell}x}dx$$

را تبدیل فوریهٔ متناهی f می‌نامیم و با $\mathcal{F}(f)$ نشان می‌دهیم. برای تابع $f(x)$ قطعه‌قطعه پیوسته به قلمرو $[\circ,\ell]$، دنبالهٔ عددی

$$F_s(n) = \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

را تبدیل فوریهٔ سینوسی متناهی f می‌نامیم و با $\mathcal{F}_s(f)$ نشان می‌دهیم. همچنین برای این تابع دنبالهٔ عددی

$$F_c(n) = \frac{۲}{\ell}\int_{\circ}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

را تبدیل فوریهٔ کسینوسی متناهی f می‌نامیم و با $\mathcal{F}_c(f)$ نشان می‌دهیم. در زیر نشان می‌دهیم هر سه تبدیل فوق از تبدیلات انتگرالی‌اند.

از خاصیت خطی انتگرال نتیجه می‌شود، این سه تبدیل دارای خاصیت خطی هستند. در مورد خاصیت دوم تبدیلات انتگرالی و تبدیل وارون، قضیهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۱ ـ ۲۰. (تطابق یک‌به‌یک و تبدیل وارون) *اگر $F(n)$ تبدیل f به قلمرو $[-\ell,\ell]$، $F_s(n)$ تبدیل سینوسی f به قلمرو $[\circ,\ell]$ و $F_c(n)$ تبدیل کسینوسی f به قلمرو $[\circ,\ell]$ باشد، آنگاه تبدیل وارون آنها به‌ترتیب عبارت‌اند از:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)e^{\frac{in\pi}{\ell}x} \quad \text{و} \quad x\in[-\ell,\ell],$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{و} \quad x\in[\circ,\ell],$$

$$f(x) = \frac{۱}{۲}F_c(\circ) + \sum_{n=۱}^{\infty} F_c(n)\cos\frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{و} \quad x\in[\circ,\ell].$$

به‌علاوه، هر سه تطابق یک‌به‌یک است.

برهان. با توجه به سری فوریه، سری فوریهٔ سینوسی و سری فوریهٔ کسینوسی و یگانگی آنها اثبات این قضیه آسان است. ■

قضیه ۱ ـ ۲۱. (تبدیل مشتق)

۱) *فرض کنید $f(x)$ به قلمرو $[-\ell,\ell]$ دارای مشتق* **قطعه‌قطعه** *پیوسته باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{F}(f')=\frac{in\pi}{\ell}\mathcal{F}(f)+\frac{(-1)^n}{2\ell}[f(\ell)-f(-\ell)],$$

$$\mathcal{F}(f'')=-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\mathcal{F}(f)+\frac{(-1)^n n\pi i}{2\ell^2}[f(\ell)-f(-\ell)]+\frac{(-1)^n}{2\ell}[f'(\ell)-f'(-\ell)].$$

۲) *فرض کنید $f(x)$ به قلمرو $[0,\ell]$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم* **قطعه‌قطعه** *پیوسته باشد، در این صورت*

$$\mathcal{F}_s(f'')=-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\mathcal{F}_s(f)-\frac{2n\pi}{\ell^2}[(-1)^n f(\ell)-f(0)],$$

$$\mathcal{F}_c(f'')=-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\mathcal{F}_c(f)+\frac{2}{\ell}[(-1)^n f'(\ell)-f'(0)].$$

برهان. اثبات تساوی‌های فوق کاملاً مشابه با فرمول تبدیل مشتق برای تبدیل لاپلاس است، یعنی با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، جای مشتق را در تابع زیر انتگرال عوض می‌کنیم:

$$\mathcal{F}(f')=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f'(x)e^{-\frac{in\pi}{\ell}x}dx$$

$$=\frac{1}{2\ell}\Big[f(x)e^{-\frac{in\pi}{\ell}x}\Big|_{-\ell}^{\ell}\Big]-\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\Big(-\frac{in\pi}{\ell}\Big)f(x)e^{-\frac{in\pi}{\ell}x}dx$$

پس:

$$\mathcal{F}(f')=\frac{in\pi}{\ell}\mathcal{F}(f)+\frac{1}{2\ell}(-1)^n[f(\ell)-f(-\ell)]$$

اثبات تساوی‌های دیگر برای تمرین گذاشته می‌شود. ■

تذکر ۱ ـ ۲۲. با استفاده از استقراء، تبدیل مشتقات از مرتبهٔ بالاتر را برحسب تبدیل خود تابع می‌توان به‌دست آورد.

تذکر ۱ ـ ۲۳. برای تبدیل فوریهٔ سینوسی و تبدیل فوریهٔ کسینوسی فقط تبدیل مشتقات از مرتبهٔ زوج را می‌توان برحسب تبدیل فوریهٔ مربوط به‌دست آورد. تبدیل فوریهٔ سینوسی مشتق از مرتبهٔ فرد تابع با تبدیل فوریهٔ کسینوسی تابع قابل بیان است که فاقد ارزش است. لیکن در حل معادلهٔ دیفرانسیل در صورتی می‌توان از تبدیل فوریهٔ سینوسی متناهی استفاده کرد که معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت و فاقد مشتق مرتبهٔ فرد نسبت به متغیری باشد که تبدیل فوریه

نسبت به آن متغیر گرفته شده است. به‌علاوه، مقدار تابع مجهول در نقاط ۰ و ℓ داده شده باشد. در شرایط مشابه تبدیل فوریهٔ کسینوسی متناهی نیز مفید است، با این تفاوت که مقدار مشتق تابع مجهول در نقاط ۰ و ℓ باید مشخص باشد.

مثال ۱ ـ ۱۷. برای حل معادلهٔ $u_{xx} + u_t = ۲u_{xt} + xt$ از تبدیلات متناهی سینوسی و یا کسینوسی نمی‌توان استفاده کرد، زیرا مشتق جملهٔ u_{xt} نسبت به متغیر x از مرتبهٔ یک است. اما با به‌کارگیری از تبدیل فوریهٔ متناهی، تبدیل $\mathcal{F}(u_{xx})$ بر حسب تبدیل $\mathcal{F}(u)$ بیان می‌شود، به شرط آنکه مقادیر $u(\ell,t) - u(-\ell,t)$ و $u_x(\ell,t) - u_x(-\ell,t)$ با شرایط مرزی مسئله به‌دست بیاید. همچنین می‌توان $\mathcal{F}(u_{xt})$ را به $\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u)$ تبدیل کرد، اگر مقدار $u(\ell,t) - u(-\ell,t)$ مشخص باشد. البته در این محاسبه قضیهٔ زیر نیز به‌کار می‌آید.

در کاربرد تبدیلات فوق در حل معادلات دیفرانسیل نیاز است که جای تبدیل نسبت به متغیر x و مشتق نسبت به متغیر t تابع $f(x,t)$ را عوض کنیم. این کار با توجه به قضیهٔ زیر مقدور است.

قضیه ۱ ـ ۲۴. *فرض کنید $f(x,t)$ به قلمرو $[a,b] \times [c,d]$ پیوسته و f_t نیز پیوسته باشد. در این صورت به‌ازای هر مقدار $t \in (c,d)$ داریم:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f_t(x,t)dx$$

برهان. برای اثبات قضیهٔ فوق به کتاب [۱] مراجعه کنید. ■

نتیجه ۱ ـ ۲۵. اگر $u(x,t)$ دارای مشتقات مرتبهٔ اول پیوسته باشد، آنگاه برای تبدیلات فوریهٔ متناهی، فوریهٔ سینوسی متناهی و فوریهٔ کسینوسی متناهی جای تبدیل نسبت به یک متغیر و مشتق نسبت به متغیر دیگر را می‌توان عوض کرد.

برای دید بهتر نسبت به تبدیلات انتگرالی، آنها را در حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی به‌کار می‌بریم، اگرچه تا به حال راجع به معادلات دیفرانسیل جزئی مطلبی نگفتیم. مفاهیم مربوط به معادلات دیفرانسیل جزئی در بخش ۳ ـ ۱ آمده است، اما برای دنبال کردن مثال‌های زیر نیازی به مراجعه به آن بخش نیست.

مثال ۱ ـ ۱۸. مسئلهٔ زیر را با شرایط اولیهٔ مرزی داده شده، حل کنید.

$$u_t = u_{xx} - u + xe^{-t}, \qquad t \geq ۰ \quad \text{و} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$
$$u(x,۰) = x \quad \text{و} \quad u(-\pi,t) = u(\pi,t) - ۱ \quad \text{و} \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) + t$$

حل. با توجه به تبدیل مشتق مرتبهٔ دوم، تبدیل فوریهٔ متناهی دیده می‌شود که این تبدیل نسبت به x برای حل این مسئله مناسب است. پس اگر نسبت به x تبدیل فوریه بگیریم، با فرض

$$U = U(n,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)e^{-inx}dx$$

به‌دست می آوریم:

$$U_t = -n^۲U + \frac{(-۱)^n ni}{۲\pi} + \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲\pi}t - U + e^{-t}\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx$$

$$U(۰) = U(n,۰) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{i(-۱)^n}{n}$$

یا

$$U_t + (n^۲+۱)U = \frac{(-۱)^n ni}{۲\pi} + \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲\pi}t + \frac{i(-۱)^n}{n}e^{-t}$$
$$U(۰) = \frac{i(-۱)^n}{n}$$

بدین ترتیب به‌دست می آوریم:

$$U(n,t) = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲\pi(n^۲+۱)}t - \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲\pi(n^۲+۱)^۲} + \frac{(-۱)^n ni}{۲\pi(n^۲+۱)} + \frac{i(-۱)^n}{n^۳}e^{-t}$$
$$+ \left(\frac{(-۱)^{n+۱}}{۲\pi(n^۲+۱)^۲} - \frac{(-۱)^n ni}{۲\pi(n^۲+۱)} + \frac{i(-۱)^n}{n} - \frac{i(-۱)^n}{n^۳}\right)e^{-(n^۲+۱)t}$$

و بالاخره جواب نهایی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n,t)e^{inx}$$

تذکر ۱ ـ ۲۶. با توجه به محدودیت‌های شرایط مرزی مسئله تنها دستهٔ خاصی از مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی را می‌توان با استفاده از سه تبدیل فوق حل کرد. در حقیقت برای حل هر مسئله تبدیل خاصی وجود دارد. در فصل سوم تحت مسائل اشترم ـ لیوویل خواهیم دید، چگونه تبدیل فوریهٔ متناهی هر مسئله را به‌دست می آوریم.

تمرین ۱ ـ ۷

مسائل زیر را به روش تبدیلات فوریهٔ متناهی حل کنید.

۱. $u_t - c^2 u_{xx} = x^2 e^t, \qquad t \geq 0$ و $0 \leq x \leq \pi$

$u(x, 0) = x$ و $u_x(0, t) = t^2$ و $u_x(\pi, t) = 1$

۲. $u_{tt} - u_{xx} = (1 + x)t, \; t \geq 0$ و $0 \leq x \leq 1$

$u(x, 0) = 0$ و $u_t(x, 0) = x$ و $u(0, t) = t$ و $u(1, t) = 0$

۳. $u_t - 4u_{xx} = x \cos t, \; t \geq 0$ و $0 \leq x \leq 2\pi$

$u(x, 0) = x$ و $u(0, t) = u(2\pi, t) + 1$ و $u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) + t$

۱ ـ ۸ سری فوریهٔ دوگانه

مشابه توابع یک متغیره، می‌توان برای توابع دو متغیره نیز سری فوریه را تعریف کرد. بدین ترتیب که اگر $f(x, y)$ نسبت به مؤلفهٔ x متناوب با دورهٔ تناوب $2p$ و نسبت به y متناوب با دورهٔ تناوب $2q$ باشد، یعنی

$$f(x + 2p, y) = f(x, y + 2q) = f(x, y)$$

آنگاه برای مقدار ثابت y، می‌توان سری فوریهٔ زیر را برای $f(x, y)$ نوشت:

$$f(x, y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n(y) \sin \frac{n\pi x}{p} \qquad (۱ ـ ۱۱)$$

ضرایب این سری فوریه، توابعی از متغیر y هستند که با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n(y) = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$b_n(y) = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

این ضرایب توابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2q$ هستند، لذا برای هرکدام می‌توان سری فوریه داشت:

$$a_n(y) = \frac{a_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{nm} \sin \frac{m\pi y}{q}$$

$$b_n(y) = \frac{c_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \cos \frac{m\pi y}{q} + d_{nm} \sin \frac{m\pi y}{q}$$

$$a_{nm} = \frac{1}{q} \int_{-q}^{q} a_n(y) \cos \frac{m\pi y}{q} dy = \frac{1}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{-p}^{p} f(x,y) \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

$$b_{nm} = \frac{1}{q} \int_{-q}^{q} a_n(y) \sin \frac{m\pi y}{q} dy = \frac{1}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{-p}^{p} f(x,y) \cos \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

$$c_{nm} = \frac{1}{q} \int_{-q}^{q} b_n(y) \cos \frac{m\pi y}{q} dy = \frac{1}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{-p}^{p} f(x,y) \sin \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

$$d_{nm} = \frac{1}{q} \int_{-q}^{q} b_n(y) \sin \frac{m\pi y}{q} dy = \frac{1}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{-p}^{p} f(x,y) \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

با جایگزینی $a_n(y)$ و $b_n(y)$ در رابطهٔ (۱ ـ ۱۱) سری فوریهٔ دوگانهٔ $f(x,y)$ به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{0m} \sin \frac{m\pi y}{q} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{p} + c_{n0} \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{nm} \cos \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} \\ &+ c_{nm} \sin \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} + d_{nm} \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} \Big) \end{aligned}$$

اگر f نسبت به مؤلفه‌های خود زوج یا فرد باشد، می‌توان فرمول سری فوریه را ساده‌تر کرد:

۱. اگر f نسبت به مؤلفهٔ x فرد باشد، $f(-x,y) = -f(x,y)$، در این صورت با توجه به خواص توابع فرد و زوج $a_{nm} = b_{nm} = 0$ و ضرایب c_{nm} و d_{nm} به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$c_{nm} = \frac{2}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{0}^{p} f(x,y) \sin \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

$$d_{nm} = \frac{2}{pq} \int_{-q}^{q}\int_{0}^{p} f(x,y) \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} dxdy$$

۲. اگر f نسبت به مؤلفهٔ x زوج باشد، $f(-x,y) = f(x,y)$، در این صورت $c_{nm} = d_{nm} = 0$.

۳. اگر f نسبت به مؤلفهٔ y فرد باشد، $f(x,-y) = -f(x,y)$، در این صورت $a_{nm} = c_{nm} = 0$.

۴. اگر f نسبت به مؤلفهٔ y زوج باشد، $f(x,-y) = f(x,y)$، در این صورت $b_{nm} = d_{nm} = 0$.

مثال ۱ ـ ۱۹. تابع $f(x,y) = xy$ در ناحیهٔ $-1 < x < 1$ و $-\pi < y < \pi$ را به کل صفحه توسعه می‌دهیم، طوری‌که نسبت به هر مؤلفه تناوبی باشد و

$$f(x+2,y) = f(x,y+2\pi) = f(x,y)$$

چون f نسبت به هر دو مؤلفهٔ x و y فرد است، بنابر خواص بالا $a_{nm} = b_{nm} = c_{nm} = 0$ و سری فوریهٔ دوگانهٔ f به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}\sin(n\pi x)\sin(my)$$

به‌علاوه ضریب d_{nm} برابر است با:

$$d_{nm} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} xy\sin(n\pi x)\sin(my)\,dx\,dy = (-1)^{m+n}\frac{4}{mn\pi}$$

در نتیجه سری فوریهٔ دوگانهٔ f عبارت است از:

$$f(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{mn}\sin(n\pi x)\sin(my)$$

تمرین ۱ ـ ۸

۱. سری فوریهٔ دوگانهٔ هر یک از توابع زیر را در ناحیهٔ $0 < x < \pi$ و $0 < y < \pi$ به‌دست آورید.

الف) $f(x,y) = 1$ ب) $f(x,y) = xy^2$ پ) $f(x,y) = e^{x+y}$

۲. سری فوریهٔ دوگانهٔ هر یک از توابع زیر را در ناحیهٔ $-\pi < x < \pi$ و $-\pi < y < \pi$ به‌دست آورید.

الف) $f(x,y) = xy^2$ ب) $f(x,y) = x^2y^2$

پ) $f(x,y) = x\sin y$ ت) $f(x,y) = e^{x+y}$

۳. صورت مختلط سری فوریهٔ دوگانه را بنویسید.

۱ ـ ۹ همگرایی سری فوریه

در ادامهٔ این فصل به بیان مطالب پیشرفته‌تری در مورد سری فوریه می‌پردازیم. در ابتدا ضمن معرفی فضای توابع، نشان می‌دهیم که سری فوریه هر تابع بهترین تقریب آن با توابع مثلثاتی است.

مجموعهٔ همهٔ توابع قطعه‌قطعه پیوسته که در بازهٔ $a \leq x \leq b$ تعریف شده‌اند، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. در این فضا ضرب داخلی دو عنصر f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

این ضرب داخلی نرم تابع f را به این صورت ارائه می‌دهد:

$$||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین طبق این تعریف فاصلهٔ بین دو تابع f و g برابر است با:

$$||f-g|| = \left(\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

با این ضرب داخلی دو تابع f و g متعامد گفته می‌شوند، هرگاه:

$$(f,g) = 0$$

همچنین دنبالهٔ توابع $\{\phi_n(x)\}$، مجموعهٔ متعامد نامیده می‌شود هرگاه هر دو عضو متمایز آن متعامد باشند.

مثال ۱ ـ ۲۰. مجموعهٔ $\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \cdots\right\}$ مثالی بسیار مهم از یک مجموعهٔ متعامد از فضای توابع قطعه‌قطعه پیوسته در بازهٔ $[-\ell, \ell]$ است. (روابط (۱ ـ ۳)، (۱ ـ ۴)، (۱ ـ ۵) و (۱ ـ ۶) این مطلب را اثبات می‌کند.) به‌علاوه

$$\left\|\cos\frac{m\pi x}{\ell}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{m\pi x}{\ell}\right\|^2 = \ell$$

و مجذور نرم تابع ثابت $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{\ell}{2}$ است. اگر سری فوریهٔ تابع f به‌صورت

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

باشد، ضرایب آن بدین صورت خواهد بود:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{2}{l}(f, \frac{1}{2}) = \frac{(f, \frac{1}{2})}{\|\frac{1}{2}\|^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{(f, \cos\frac{n\pi x}{\ell})}{\|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\|^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{(f, \sin\frac{n\pi x}{\ell})}{\|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\|^2}$$

این مطلب که سری فوریهٔ تابع f بهترین تقریب با توابع مثلثاتی مثال فوق است، بدین منظور است که سری فوریه نزدیک‌ترین تابع تولید شده با ترکیب خطی عناصر مجموعهٔ فوق به تابع f است. این مطلب در قضیهٔ زیر نشان داده شده است.

قضیه ۱ ـ ۲۷. *فرض کنید a_n و b_n ضرایب سری فوریهٔ تابع f باشند و α_n و β_n را دنبالهٔ دلخواهی از اعداد در نظر بگیرید. در این صورت اگر*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right),$$

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right),$$

آنگاه

$$\|f - S_n\| \le \|f - T_n\|.$$

برهان. با استفاده از متعامد بودن توابع مثلثاتی که در مثال قبل به آن اشاره شد و روابط مطرح شده در آنجا نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}
\|f-T_n\|^۲ &= (f-T_n, f-T_n)\\
&= (f,f) - ۲(f,T_n) + (T_n,T_n)\\
&= \|f\|^۲ - ۲(f,\frac{\alpha_۰}{۲}) - ۲\sum_{k=۱}^{n}\Big(\alpha_k(f,\cos\frac{k\pi x}{\ell}) + \beta_k(f,\sin\frac{k\pi x}{\ell})\Big)\\
&\quad + \alpha_۰^۲\|\frac{۱}{۲}\|^۲ + \sum_{k=۱}^{n}\Big(\alpha_k^۲\Big\|\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Big\|^۲ + \beta_k^۲\Big\|\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Big\|^۲\Big)\\
&= \|f\|^۲ - \alpha_۰ a_۰\ell - ۲\ell\sum_{k=۱}^{n}\Big(\alpha_k a_k + \beta_k b_k\Big) + \frac{\alpha_۰^۲\ell}{۲} + \ell\sum_{k=۱}^{n}\Big(\alpha_k^۲+\beta_k^۲\Big)\\
&= \|f\|^۲ + \frac{\ell}{۲}(\alpha_۰ - a_۰)^۲ + \ell\sum_{k=۱}^{n}\Big((\alpha_k-a_k)^۲ + (\beta_k-b_k)^۲\Big)\\
&\quad - \frac{\ell}{۲}a_۰^۲ - \ell\sum_{k=۱}^{n}(a_k^۲+b_k^۲)
\end{aligned}$$

بنابراین کمترین مقدار $\|f-T_n\|$ وقتی به‌دست می‌آید که $\alpha_k = a_k$ و $\beta_k = b_k$. در این حالت مقدار آن برابر است با:

$$\|f-S_n\|^۲ = \|f\|^۲ - \frac{\ell}{۲}a_۰^۲ - \ell\sum_{k=۱}^{n}(a_k^۲+b_k^۲). \qquad (۱\ \_\ ۱۲)$$

■

نتیجه ۱ ـ ۲۸. (نامساوی بسل) اگر a_n و b_n ضرایب سری فوریهٔ تابع f باشند، آنگاه

$$\frac{a_۰^۲}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_k^۲+b_k^۲) \le \frac{۱}{\ell}\|f\|^۲ \qquad (۱\ \_\ ۱۳)$$

به‌علاوه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = ۰.$$

برهان. این مطلب از رابطهٔ (۱ ـ ۱۲) و اینکه مقدار $\|f-S_n\|^۲$ نامنفی است، نتیجه می‌شود.

■

تذکر ۱ ـ ۲۹. نامساوی فوق برای هر تابع قطعه‌قطعه پیوسته به تساوی تبدیل می‌شود که آن را تساوی پارسوال می‌نامند. این تساوی نتیجهٔ بدیهی همگرایی در نرم سری فوریه است. (قضیهٔ ۱ ـ ۳۸)

اکنون به بررسی همگرایی سری فوریهٔ یک تابع می‌پردازیم. در اینجا سه نوع همگرایی را بررسی می‌کنیم: همگرایی نقطه‌ای، همگرایی یکنواخت و همگرایی در نرم. ساده‌ترین نوع همگرایی آن است که سری فوریه در هر نقطهٔ x همگرا باشد. این مطلب در بخش ۱ ـ ۲ استفاده شده است. اثبات این نوع همگرایی در اینجا بیان می‌شود. تعریف و بررسی انواع دیگر همگرایی در ادامه خواهد آمد.

قبل از ورود به بحث همگرایی نقطه‌ای، تعریف مشتق راست یا چپ تابع f را مرور می‌کنیم. اگر تابع f در بازهٔ (a,b) قطعه‌قطعه پیوسته باشد، مشتق راست f در $x_\circ$ عبارت است از:

$$f'_R(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ^+} \frac{f(x) - f(x_\circ +)}{x - x_\circ}$$

که $f(x_\circ +)$ حد راست f در $x_\circ$ است. به‌طور مشابه مشتق چپ f در $x_\circ$ چنین تعریف می‌شود:

$$f'_L(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ^-} \frac{f(x) - f(x_\circ -)}{x - x_\circ}$$

توجه کنید که برای وجود $f'_R(x_\circ)$ و $f'_L(x_\circ)$ لزومی به‌وجود $f(x_\circ)$ نیست، اما وقتی مشتق معمولی $f'(x_\circ)$ وجود داشته باشد، f در $x_\circ$ پیوسته است و $f'_L(x_\circ) = f'_R(x_\circ) = f'(x_\circ)$.

قضیهٔ زیر، همگرایی سری فوریه را برای توابع متناوب با دورهٔ ۲π بیان می‌کند. با تغییر متغیر در طول بازه، این قضیه برای دوره‌های تناوب دیگر نیز برقرار است.

قضیه ۱ ـ ۳۰. *فرض کنید f تابعی قطعه‌قطعه پیوسته در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ و متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد. در هر نقطهٔ x که هر دو مشتق یک طرفه $f'_R(x)$ و $f'_L(x)$ موجود باشند، سری فوریهٔ تابع f در آن نقطه*

$$\frac{a_\circ}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

به میانگین $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{۲}$ همگراست که ضرایب a_k و b_k از روابط (۱ ـ ۷) به‌دست می‌آیند.

توجه کنید که این قضیه صورت کلی‌تر قضیهٔ ۱ ـ ۲۱ است. قبل از اثبات قضیه به بیان دو لم زیر که در اثبات قضیه به‌کار می‌آیند، می‌پردازیم.

لم ۱ ـ ۳۱. (لم ریمان ـ لبگ) اگر تابع $g(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x dx=0$$

برهان. در ابتدا فرض کنید تابع $g(x)$ پیوسته است و قرار دهید:

$$I(\lambda)=\int_a^b g(x)\sin\lambda x dx \qquad (۱ ـ ۱۴)$$

با تعویض متغیر، $x=t+\frac{\pi}{\lambda}$، خواهیم داشت:

$$I(\lambda)=\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(t+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin(\lambda t+\pi)dt=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(t+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin\lambda t\, dt$$

$$=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin\lambda x dx \qquad (۱ ـ ۱۵)$$

با جمع روابط (۱ ـ ۱۴) و (۱ ـ ۱۵) نتیجه می‌شود.

$$2I(\lambda)=\int_a^b g(x)\sin\lambda x dx-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin\lambda x dx$$

$$=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin\lambda x dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\sin\lambda x dx$$

$$+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}\Big(g(x)-g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\Big)\sin\lambda x dx$$

اگر تابع g در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه کران‌دار نیز هست و مقدار M وجود دارد طوری‌که، $|g(x)|\le M$. بنابراین:

$$\Big|\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\sin\lambda x dx\Big|\le\Big|\int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} g(x)\sin\lambda x dx\Big|\le\frac{\pi M}{\lambda}.$$

همچنین:

$$\Big|\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(x)\sin\lambda x dx\Big|\le\frac{\pi M}{\lambda}$$

در نتیجه:

$$|2I(\lambda)|\le\frac{2\pi M}{\lambda}+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}\Big|g(x)-g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\Big|dx$$

از طرفی چون $g(x)$ تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است، پیوستهٔ یکنواخت نیز هست و برای هر $\varepsilon>0$، مقادیر به اندازه کافی بزرگ λ وجود دارند که:

$$\Big|g(x)-g\big(x+\frac{\pi}{\lambda}\big)\Big|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

همچنین اگر λ را به‌اندازه‌ای بزرگ اختیار کنیم که $\frac{\varepsilon}{۲} > \frac{\pi M}{\lambda}$ در این صورت:

$$|I(\lambda)| < \varepsilon.$$

درحالتی که $g(x)$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، اثبات را در هر زیربازه که g در آن پیوسته است، تکرار می‌کنیم. ■

لم ۱ ـ ۳۲. فرض کنید تابع $g(x)$ در بازهٔ $[\circ, \pi]$، قطعه‌قطعه پیوسته و مشتق راست $g'_R(\circ)$ موجود باشد، در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\circ^\pi g(s) \frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)s}{۲\sin\frac{s}{۲}} ds = \frac{\pi}{۲} g(\circ+).$$

برهان. در ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$\int_\circ^\pi \frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}} ds = \int_\circ^\pi \left(\frac{۱}{۲} + \sum_{k=۱}^{n} \cos ks\right) ds = \frac{\pi}{۲} \qquad (۱ ـ ۱۶)$$

بنابراین:

$$\int_\circ^\pi g(s) \frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}} ds = \int_\circ^\pi (g(s) - g(\circ+)) \frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}} ds$$
$$+ g(\circ+) \int_\circ^\pi \frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}} ds$$

با توجه به رابطهٔ (۱ ـ ۱۶) تنها کافی است رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\circ^\pi \frac{g(s) - g(\circ+)}{۲\sin\frac{s}{۲}} \sin(n+\frac{۱}{۲})s\, ds = \circ,$$

و این رابطه با استناد به لم ۱ ـ ۳۱ برقرار است، به شرط آنکه

$$G(s) = \frac{g(s) - g(\circ+)}{۲\sin\frac{s}{۲}}$$

در بازهٔ $[\circ, \pi]$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد. این تابع خارج قسمت دو تابع قطعه‌قطعه پیوسته است و مخرج آن، در این بازه تنها در نقطهٔ $s = \circ$، صفر می‌شود. وجود $g'_R(\circ)$، مستلزم وجود $G(\circ+)$ است:

$$\lim_{s\to\circ+} G(s) = \lim_{s\to\circ+} \frac{g(s) - g(\circ+)}{۲\sin\frac{s}{۲}} = \lim_{s\to\circ+} \frac{g(s) - g(\circ+)}{s} \cdot \frac{s}{۲\sin\frac{s}{۲}} = g'_R(\circ).$$

■

برهان قضیهٔ ۱ ـ ۳۰. $S_n(x)$ را مجموع n جملهٔ اول سری فوریه در نظر می‌گیریم:

$$S_n(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

مقادیر a_k و b_k را از روابط (۱ ـ ۷) در عبارت $S_n(x)$ جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{۱}{\pi}\sum_{k=۱}^{n}\Big(\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt\Big)\cos kx \\ &\qquad + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt\Big)\sin kx\Big) \\ &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{۱}{۲} + \sum_{k=۱}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\Big)dt \\ &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{۱}{۲} + \sum_{k=۱}^{n}\cos k(t-x)\Big)dt \end{aligned}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos k\alpha = \sin\,(k+\frac{۱}{۲})\alpha - \sin\,(k-\frac{۱}{۲})\alpha$$

و جمع آن برای مقادیر $k = ۱, \ldots, n$، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\Big(\frac{۱}{۲} + \sum_{k=۱}^{n}\cos k\alpha\Big) &= \sin\frac{\alpha}{۲} + \Big(\sin\frac{۳\alpha}{۲} - \sin\frac{\alpha}{۲}\Big) \\ &\quad + \cdots + \Big(\sin(n+\frac{۱}{۲})\alpha - \sin(n-\frac{۱}{۲})\alpha\Big) \\ &= \sin\,(n+\frac{۱}{۲})\alpha \end{aligned}$$

بنابراین

$$S_n(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\,((n+\frac{۱}{۲})(t-x))}{۲\sin(\frac{t-x}{۲})}dt$$

با تعویض متغیر $s = t - x$ در انتگرال فوق رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$S_n(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds$$

چون تابع زیر انتگرال متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است، می‌توان محدودهٔ انتگرال را به بازهٔ

$-\pi \leq s \leq \pi$ تغییر داد. بنابراین:

$$S_n(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds$$
$$= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰} f(s+x)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(s+x)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds$$

اگر دو انتگرال فوق را به‌ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ بنامیم و قرار دهیم $g(s) = f(x-s)$ برای $۰ \leq s \leq \pi$، در این صورت $g'_R(۰) = f'_L(x)$ موجود است و به‌علاوه $g(۰+) = f(x-)$. اکنون با توجه به لم ۱ ـ ۳۲ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} I_۱ = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰} g(-s)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} g(s)\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})s}{۲\sin\frac{s}{۲}}ds = \frac{۱}{۲}g(۰+) = \frac{۱}{۲}f(x-)$$

به‌طور مشابه با قرار دادن $g(s) = f(x+s)$، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} I_۲ = \frac{۱}{۲}f(x+)$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(I_۱ + I_۲) = \frac{۱}{۲}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

■

تذکر ۱ ـ ۳۳. در [۱] در رابطه با همگرایی نقطه‌ای سری فوریه با شرایط ضعیف‌تر از قضیهٔ ۱ ـ ۳۰ بحث شده است. برای مثال اگر سری فوریهٔ یک تابع پیوسته همگرا باشد، آنگاه دقیقاً برابر مقدار تابع است. اما حتی مثال‌هایی از توابع پیوسته وجود دارند که سری فوریهٔ آن در بعضی نقاط واگرا است، [۵].

در قسمت قبل همگرایی نقطه‌ای سری فوریه بحث شد. در اینجا به بررسی همگرایی یکنواخت، که از همگرایی نقطه‌ای قوی‌تر است، می‌پردازیم. فرض کنید $f(x)$ نمایش مجموع یک سری نامتناهی از توابع $f_k(x)$ باشد، که به‌ازای هر x در بازهٔ $[a,b]$ سری همگراست. در این صورت:

$$f(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{۱ ـ ۱۷}$$

که در آن $S_n(x) = \sum_{k=۱}^{n} f_k(x)$ مجموع n جملهٔ اول سری است. سری فوق در بازهٔ $[a,b]$

همگرای یکنواخت است، هرگاه میزان خطای

$$r_n = \max_{a \le x \le b} |f(x) - S_n(x)|$$

وقتی $n \to \infty$، به صفر میل کند. این شرط معادل این است که برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد صحیح N_ε مستقل از x وجود داشته باشد که برای هر $a \le x \le b$ و $n > N_\varepsilon$،

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

یک شرط کافی برای همگرایی یکنواخت آزمون M ـ وایرشتراس است، که بدین صورت بیان می‌شود:

آزمون M ـ وایرشتراس. هرگاه اعدادی مثبت مانند M_n وجود داشته باشند که $\sum_{n=۱}^{\infty} M_n$ همگرا باشد و

$$|f_n(x)| \le M_n, \qquad a \le x \le b \text{ برای هر }$$

آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$، همگرای یکنواخت است.

از خواص مهم همگرایی یکنواخت این است که اگر توابع f_n پیوسته و سری (۱ ـ ۱۷) همگرای یکنواخت باشد، آنگاه تابع f نیز پیوسته خواهد بود. به‌علاوه همگرایی یکنواخت سری (۱ ـ ۱۷) نتیجه می‌دهد که برای محاسبهٔ انتگرال f در بازهٔ $[a,b]$ می‌توان از سری جمله به جمله انتگرال گرفت.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۱}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

قضیه ۱ ـ ۳۴. *اگر f تابع پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد و $f(\pi) = f(-\pi)$. به‌علاوه مشتق آن، $f'(x)$، در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه سری فوریه f، به‌طور یکنواخت به تابع f همگراست.*

برهان. فرض کنید سری‌های فوریه $f(x)$ و $f'(x)$ به‌ترتیب عبارت باشند از

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

و

$$\frac{\alpha_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

چون f' قطعه‌قطعه پیوسته است و $f(-\pi) = f(\pi)$، بنابراین

$$\alpha_\circ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{۱}{\pi}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) = \circ$$

$$\alpha_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx dx = \frac{۱}{\pi}\Big[f(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

$$= kb_k, \qquad k = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$\beta_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx = \frac{۱}{\pi}\Big[f(x)\sin kx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$= -ka_k, \qquad k = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

درضمن ضرایب α_k و β_k در نامساوی بسل (۱ ـ ۱۳) صدق می‌کنند.

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(\alpha_k^۲ + \beta_k^۲) \leq \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f'(x)\big)^۲ dx < \infty \tag{۱ ـ ۱۸}$$

از طرف دیگر:

$$\sum_{k=۱}^{n}(a_k^۲ + b_k^۲)^{\frac{۱}{۲}} = \sum_{k=۱}^{n} k^{-۱}(\alpha_k^۲ + \beta_k^۲)^{\frac{۱}{۲}},$$

و با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود:

$$\sum_{k=۱}^{n}(a_k^۲ + b_k^۲)^{\frac{۱}{۲}} \leq \Big(\sum_{k=۱}^{n} k^{-۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}}\Big(\sum_{k=۱}^{n}(\alpha_k^۲ + \beta_k^۲)\Big)^{\frac{۱}{۲}}$$

رابطهٔ (۱ ـ ۱۸) نشان می‌دهد، سری

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(\alpha_k^۲ + \beta_k^۲)$$

همگراست، و از همگرایی سری

$$\sum_{k=۱}^{\infty} k^{-۲}$$

می‌توان نتیجه گرفت، سری

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k^۲ + b_k^۲)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۱ ـ ۱۹}$$

همگراست. حال جملهٔ k ـ ام سری فوریهٔ $f(x)$ را درنظر می‌گیریم:

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \leq \sqrt{۲(a_k^۲ + b_k^۲)},$$

و با استفاده از (۱ ـ ۱۹) و آزمون M ـ وایرشتراس نتیجه می‌شود که سری

$$\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

همگرای یکنواخت است و چون سری به‌طور نقطه‌ای به $f(x)$ همگراست، بنابراین سری فوریه به‌طور یکنواخت به تابع f همگراست. ■

تذکر ۱ ـ ۳۵. اثبات فوق نشان می‌دهد در شرایط قضیه سری فوریه همگرای مطلق است، یعنی سری قدر مطلق جملات سری فوریه نیز همگراست.

تذکر ۱ ـ ۳۶. هرچند قضیهٔ همگرایی یکنواخت سری فوریه برای توابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π ثابت شده است، ولی این قضیه برای توابع با دورهٔ تناوب دلخواه نیز برقرار است.

تذکر ۱ ـ ۳۷. چون هر سری به‌طوریکنواخت همگرا از توابع پیوسته، همیشه به تابعی پیوسته همگراست، سری فوریهٔ تابعی مانند f بر بازه‌ای که شامل یک نقطهٔ ناپیوستگی f است، نمی‌تواند به‌طور یکنواخت همگرا باشد. بنابراین شرط پیوستگی f که در قضیه فرض شده است، شرط لازم است.

اگر $x_\circ$ نقطهٔ ناپیوستگی تابع f و $S_n(x)$ مجموع جزئی سری فوریه باشد. رفتار اختلاف $S_n(x)$ با $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x_\circ$ به پدیدهٔ گیبس[1] معروف است. برای مثال سری فوریهٔ تابع

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -\pi<x<\circ\\ ۱ & \circ<x<\pi\end{cases}$$

را درنظر بگیرید که در مثال ۱ ـ ۳ در صفحه ۵ بیان شده است و عبارت است از:

$$f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)x}{(۲k-۱)}$$

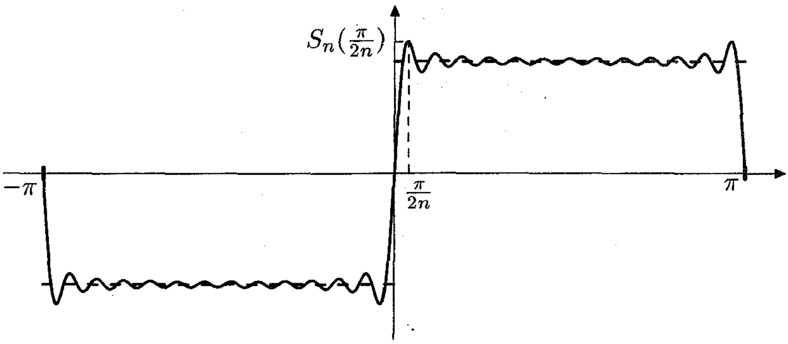
همان‌طور که در نمودارهای ۱ ـ ۳، ۱ ـ ۴ و ۱ ـ ۵ نشان داده شده است، در نزدیکی نقاط ناپیوستگی، نمودار $S_n(x)$ برجستگی‌هایی را تشکیل می‌دهد که با تابع $f(x)$ مقدار ثابتی فاصله دارد و وقتی $n\to\infty$، فاصلهٔ نوک این برجستگی‌ها حفظ می‌شود. هرچند برای هر x، دنبالهٔ $S_n(x)$ به $f(x)$ همگراست، ولی می‌توان دید که مقدار $S_n(\frac{\pi}{۲n})$ به عدد $\sigma\neq ۱$ همگرا می‌شود. این پدیده نشان می‌دهد که سری فوریهٔ تابع $f(x)$ نمی‌تواند، همگرای یکنواخت باشد

1. Gibbs phenomenon

(تمرین ۳). به همین دلیل در تقریب یک تابع با سری فوریه در نزدیکی نقطهٔ ناپیوستگی دقت خاصی می‌طلبد.

همگرایی دیگر سری فوریه، همگرایی در نرم است. دنبالهٔ توابع S_n همگرای در نرم به تابع f گفته می‌شود هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\|^{۲} = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{-\pi} |S_n(x) - f(x)|^{۲} dx = ۰$$



نمودار ۱ ـ ۱۱.

این نوع همگرایی از همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود. به همین دلیل با شرایط قضیهٔ ۱ ـ ۳۴ همگرایی در نرم نتیجه می‌شود، (تمرین ۴). البته این همگرایی در شرایط ساده‌تری نیز برقرار است. قضیهٔ زیر این مطلب را بیان می‌کند.

قضیه ۱ ـ ۳۸. *اگر $S_n(x)$ مجموع n جملهٔ اول سری فوریهٔ تابع قطعه‌قطعه پیوسته f باشد، آنگاه دنبالهٔ S_n همگرای در نرم به تابع f خواهد بود.*

برهان. برای اثبات به [۲] یا [۵] مراجعه کنید. ■

آخرین مطلب این فصل در مورد مشتق و انتگرال‌گیری از سری فوریه است. در حالت کلی برای محاسبه مشتق سری فوریه، نمی‌توان از مشتق جمله به جملهٔ آن استفاده کرد. برای مثال سری فوریه $f(x) = x$، که در مثال ۱ ـ ٦ آمده است عبارت است از:

$$x = \frac{۲\ell}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \qquad -\ell < x < \ell$$

این سری برای همهٔ مقادیر $-\ell < x < \ell$، همگراست. اگر از سری فوق جمله به جمله مشتق

بگیریم، سری حاصل

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

برای همهٔ مقادیر x، واگراست. زیرا در غیر این صورت باید جملهٔ n ـ ام سری به صفر میل کند. مشکل جدی‌تر در نقاط $x = \pm\ell, \pm۳\ell, \pm۳\ell, \ldots$ که نقاط ناپیوستگی تابع هستند، روی می‌دهد. لذا پیوستگی توسیع متناوب تابع شرط لازم برای مشتق‌پذیری سری فوریه است.

قضیه ۱ ـ ۳۹. *فرض کنید f در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ پیوسته بوده و $f(-\pi) = f(\pi)$، به‌علاوه f' و f'' در این بازه قطعه‌قطعه پیوسته باشند، آنگاه سری فوریهٔ f' از مشتق‌گیری جمله به جملهٔ سری فوریهٔ f به‌دست می‌آید و این سری در نقاط پیوستگی f' به مقدار $f'(x)$ همگراست و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f'(x+)+f'(x-)}{۲}$.*

برهان. فرض کنید سری‌های فوریه f و f' به‌ترتیب عبارت باشند از

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$f'(x) = \frac{\alpha_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)$$

از آنجا که شرایط قضیه ۱ ـ ۳۴ برآورده شده است، بنابر اثبات آن قضیه ضرایب سری فوریه باید در روابط زیر صدق کنند:

$$\alpha_۰ = ۰ \quad \text{و} \quad \alpha_k = kb_k \quad \text{و} \quad \beta_k = -ka_k$$

بنابراین

$$f'(x) = \sum_{k=۱}^{\infty}(-ka_k\sin kx + kb_k\cos kx)$$

که این سری همان مشتق جمله به جملهٔ سری فوریه $f(x)$ است و با توجه به قضیهٔ ۱ ـ ۵ در صفحهٔ ۹ یا قضیهٔ ۱ ـ ۳۰ در صفحهٔ ۴۲، سری فوق به مقدار

$$\frac{f'(x+)+f'(x-)}{۲}$$

همگراست. این مقدار در نقاط پیوستگی f' همان $f'(x)$ است. ■

تذکر ۱ ـ ۴۰. به کمک قضیهٔ ۱ ـ ۲۱ می‌توان در حالت کلی ضرایب سری فوریهٔ تابع f' را برحسب ضرایب سری فوریهٔ f و مقادیر آن در دو سر بازه به‌دست آورد. از همان قضیه نیز

نتیجه می‌شود در حالتی که مقدار تابع در دو سر بازه برابر باشد، سری فوریهٔ مشتق آن تابع برابر مشتق سری فوریهٔ همان تابع است. شرط‌هایی که در قضیهٔ فوق روی مشتق تابع f بیان شده است، برای وجود سری‌های فوریه و همگرایی آنهاست. شرط قطعه‌قطعه پیوسته بودن f'' برای سادگی بیان و به‌علت تشابه با قضیهٔ ۱ ـ ۵ بیان شده است. اگر در اثبات از قضیهٔ ۱ ـ ۳۰ استفاده کنیم، این شرط را می‌توان ضعیف‌تر کرد به‌نحوی که در هر نقطه مشتق راست و چپ f' یعنی f''_R و f''_L وجود داشته باشد.

انتگرال‌گیری از سری فوریه تحت شرایط عمومی‌تر نسبت به شرایط مشتق‌گیری امکان‌پذیر است. یادآوری می‌کنیم که شرط همگرایی یکنواخت یک سری توابع انتگرال‌پذیر تضمین می‌کند که می‌توان از سری جمله به جمله انتگرال گرفت. با این حال در سری فوریه می‌توان این شرط را ضعیف‌تر نیز کرد.

قضیه ۱ ـ ۴۱. *فرض کنید f تابعی قطعه‌قطعه پیوسته در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ و متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد. صرف‌نظر از اینکه سری فوریهٔ $f(x)$،*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

همگرا باشد یا واگرا، می‌توان از آن در هر محدودهٔ دلخواهی جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_a^b(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx\Big)$$

برهان. برای اثبات تنها کافی است، نشان داده شود که:

$$\int_a^b\Big(f(x)-\frac{a_0}{2}\Big)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\big(a_k(\sin kb-\sin ka)-b_k(\cos kb-\cos ka)\big) \tag{۱ ـ ۲۰}$$

به همین منظور تابع $F(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=\int_0^x\Big(f(t)-\frac{a_0}{2}\Big)dt.$$

چون f قطعه‌قطعه پیوسته است، نتیجه می‌شود که F نیز پیوسته است و در نقاط پیوستگی f،

$$F'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2},$$

این مطلب نشان می‌دهد F' نیز قطعه‌قطعه پیوسته است. به‌علاوه F تابعی متناوب با دورهٔ

تناوب 2π است، زیرا

$$\begin{aligned}F(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi}\Big(f(t)-\frac{a_0}{2}\Big)dt\\ &= \int_0^{x}\Big(f(t)-\frac{a_0}{2}\Big)dt+\int_x^{x+2\pi}\Big(f(t)-\frac{a_0}{2}\Big)dt\\ &= F(x)+\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t)-\frac{a_0}{2}\Big)dt\end{aligned}$$

رابطهٔ آخر از آنجا نتیجه می‌شود که $f(x)-\frac{a_0}{2}$ نیز تابعی متناوب است. از طرف دیگر:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$F(x+2\pi)=F(x)$$

بنابراین سری فوریه F در همهٔ نقاط به مقدار $F(x)$ همگراست:

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

مشابه قضایای قبل می‌توان نشان داد که:

$$A_k=-\frac{b_k}{k}\ \text{و}\ B_k=\frac{a_k}{k}\qquad k=1,2,\ldots$$

بنابراین:

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)\Big)$$

در پایان رابطهٔ (۱ ـ ۲۰) بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int_a^b\Big(f(x)-\frac{a_0}{2}\Big)dx &= F(b)-F(a)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(a_k\sin kb-b_k\cos kb)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(a_k\sin ka-b_k\cos ka)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\big(a_k(\sin kb-\sin ka)-b_k(\cos kb-\cos ka)\big).\end{aligned}$$

■

مثال ۱ ـ ۲۱. بنابر مثال ۱ ـ ۶ در صفحهٔ ۱۴، سری فوریهٔ $f(x)=x$، عبارت است از:

$$x=\frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell},\qquad -\ell<x<\ell$$

با انتگرال‌گیری جمله به جملهٔ از سری در محدوده صفر تا x نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}x^۲ = \frac{۲\ell^۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty} -\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} - ۱\right) = c - \frac{۲\ell^۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

که c مقدار ثابتی است. بنابراین سری فوریهٔ تابع $F(x) = x^۲$، $-\ell \leq x \leq \ell$ عبارت است از:

$$x^۲ = ۲c - \frac{۴\ell^۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

و ضریب ثابت $۲c$ همان جملهٔ $\frac{a_۰}{۲}$ در سری فوریه است که:

$$a_۰ = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} x^۲ dx = \frac{۲\ell^۲}{۳}$$

و $۲c = \frac{\ell^۲}{۳}$ و

$$x^۲ = \frac{\ell^۲}{۳} - \frac{۴\ell^۲}{\pi^۲}i\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}\cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

تمرین ۱ ـ ۹

۱. نشان دهید که تابع $f(x) = x^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق چپ و راست ندارد. همچنین بدون محاسبهٔ سری فوریهٔ آن در بازهٔ $-\pi < x < \pi$، بگویید چرا سری فوریه در نقطهٔ $x = ۰$ همگراست؟ بدین ترتیب نشان دهید که شرط وجود مشتقات چپ و راست در قضیهٔ ۱ ـ ۳۰ یک شرط لازم برای همگرایی نیست.

۲. تساوی زیر را برای توابع قطعه‌قطعه پیوستهٔ f و g ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۲}\int_a^b\int_a^b [f(x)g(y) - g(x)f(y)]^۲ dxdy = \|f\|^۲\|g\|^۲ - (f,g)^۲$$

به کمک این رابطه نامساوی کوشی ـ شوارتز، $(f,g) \leq \|f\|.\|g\|$، را نتیجه بگیرید.

۳. اگر دنبالهٔ توابع پیوسته f_n به‌طور یکنواخت به تابع f همگرا باشند، به‌علاوه دنبالهٔ اعداد x_n به عدد x همگرا باشد ثابت کنید دنبالهٔ $f_n(x_n)$ به مقدار $f(x)$ همگراست.

۴. اگر دنبالهٔ توابعی در بازهٔ $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد، ثابت کنید همگرای در نرم نیز است.

۵. یک دنباله از توابع مثال بزنید که در هر نقطهٔ بازهٔ $[\circ, ۱]$ به صفر همگرا هستند، اما همگرای در نرم نیستند.

٦. به کمک تساوی پارسوال نشان دهید که اگر تابع f دارای مشتق قطعه‌قطعه پیوسته f' باشد و $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \circ$ آنگاه $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^۲ dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^۲ dx$.

۷. با استفاده از تمرین‌های ۱۵ و ١٦ بخش ۱ ـ ۲ و به کمک تساوی پارسوال مقدار عددی سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۴n^۲ - ۱)^۲}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n+۱)^۴}$ را به‌دست آورید.

۸. اگر سری‌های فوریهٔ توابع f و g به‌صورت

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

و

$$g(x) = \frac{c_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + d_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

باشند، ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx = \frac{a_\circ c_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

(**راهنمایی:** از همگرایی در نرم سری فوریه و نامساوی کوشی ــ شوارتز $(f,g) \leq \|f\|.\|g\|$ در تمرین ۲ استفاده کنید.)

۹. اگر تابع متناوب f، k بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و مشتق $k+۱$ ام قطعه‌قطعه پیوسته باشد، نشان دهید اگر a_n و b_n ضرایب سری فوریه در دورهٔ تناوب f باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = \circ \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} n^k b_n = \circ$$

۱۰. سری مثلثاتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اگر ضرایب a_n و b_n در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$|n^m a_n| \leq M \qquad \text{و} \qquad |n^m b_n| \leq M$$

که $m \geq ۲$ و M یک عدد مثبت ثابت است، در این صورت سری مثلثاتی فوق یک تابع پیوستهٔ متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است که $m - ۲$ بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

۲

تبدیلات انتگرالی

سری فوریه ابزاری قوی برای حل مسائلی است که با توابع متناوب سروکار دارند، یا میدان عملکرد معادلهٔ دیفرانسیل کران‌دار است. زمانی که میدان بی‌کران باشد و یا مسئله شامل تابع غیرمتناوب باشد، دیگر سری فوریه کارایی لازم را ندارد، در این شرایط تبدیلات انتگرالی می‌توانند مفید واقع شوند. تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه ازجمله تبدیلاتی هستند که بیشتر از همه مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این فصل این دو تبدیل و خواص آن معرفی و کاربرد آنها در حل معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. با استفاده از این تبدیلات یک معادلهٔ دیفرانسیل به یک معادلهٔ جبری تبدیل می‌شود و از حل آن جواب معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت تبدیل شده به‌دست می‌آید. با استفاده از فرمول‌های وارون تبدیلات انتگرالی، جواب معادلهٔ دیفرانسیل حاصل می‌شود.

۲ ـ ۱ انتگرال فوریه

هرچند توابع غیرمتناوب نمایشی به‌صورت سری فوریه ندارند، می‌توان نمایشی انتگرالی مشابه سری فوریه برای آنها پیدا کرد. برای این منظور تابع مورد نظر را به یک بازهٔ بسیار بزرگ $[-\ell, \ell]$ محدود کرده و با استفاده از سری فوریه نمایشی برای آن در این بازه درنظر می‌گیریم.

وقتی $\ell \to \infty$ این نمایش منجر به یک نمایش انتگرالی می‌شود که آن را انتگرال فوریه آن تابع می‌نامند.

در فصل ۱ دیدیم که اگر توابع f و f' قطعه قطعه پیوسته باشند، در نقاط پیوستگی تابع f در بازهٔ $[-\ell,\ell]$ سری فوریهٔ آن برابر است با:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right) \qquad (۲ ـ ۱)$$

که در آن:

$$a_k = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}dt,\ k \qquad = ۰, ۱, ۲, \dots$$

$$b_k = \frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi t}{\ell}dt,\ k \qquad = ۱, ۲, ۳, \dots$$

با جایگذاری مقادیر a_k و b_k در سری فوریهٔ (۲ ـ ۱) نتیجه می‌شود:

$$f(x) = \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{۱}{\ell}\sum_{k=۱}^{\infty}\Big(\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dt$$
$$+ \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi t}{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dt\Big)$$
$$= \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{۱}{\ell}\sum_{k=۱}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}(x-t)\right)dt \qquad (۲ ـ ۲)$$

با فرض اینکه تابع f به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر است، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

وقتی $\ell \to \infty$ جملهٔ اول عبارت (۲ ـ ۲) به صفر میل می‌کند، زیرا:

$$\left|\frac{a_۰}{۲}\right| = \frac{۱}{۲\ell}\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx\right| \leq \frac{۱}{۲\ell}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$$

عبارت (۲ ـ ۱) برای هر مقدار $-\ell < x < \ell$ برقرار است، بنابراین وقتی ℓ به بینهایت میل کند، برای هر x که نقطهٔ پیوستگی f باشد:

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty}\frac{۱}{\ell}\sum_{k=۱}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}(t-x)\right)dt. \qquad (۲ ـ ۳)$$

با قرار دادن

$$\omega_k = \frac{k\pi}{\ell} \quad \text{و} \quad \Delta\omega = \omega_{k+۱} - \omega_k = \frac{\pi}{\ell}$$

می‌توان رابطهٔ (۲ ـ ۳) را به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F(\omega_k)\cdot\Delta\omega \qquad (۲ \_ ۴)$$

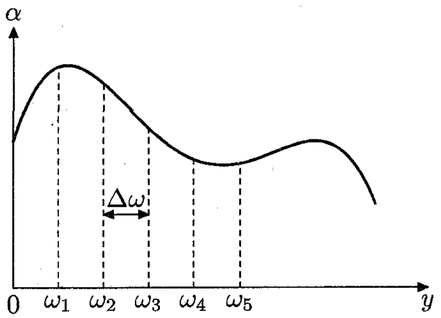
که در آن:

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,dt.$$

عبارت (۲ ـ ۴) مساحت زیر نمودار تابع $y = F(\omega)$ یعنی مقدار انتگرال $\int_0^\infty F(\omega)d\omega$ را تقریب می‌زند (شکل ۲ ـ ۱). وقتی $\ell \to \infty$، آنگاه $\Delta\omega \to 0$ و می‌توان پذیرفت که عبارت (۲ ـ ۴) به انتگرال زیر میل می‌کند.

$$f(x) = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,dt\Big)\,d\omega. \qquad (۲ \_ ۵)$$

این رابطه را نمایش انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)$ می‌نامند.



نمودار ۲ ـ ۱.

تذکر ۲ ـ ۱. از آنجا که تابع $F(\omega)$ همراه با ℓ تغییر می‌کند، استدلال فوق برای همگرایی رابطهٔ (۲ ـ ۴) به انتگرال فوریه دقیق نیست. اثبات این مطلب در قضیهٔ ۲ ـ ۳ بیان شده است.

تذکر ۲ ـ ۲. تساوی سری فوریهٔ (۲ ـ ۱) در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ برقرار است و در نقاط ناپیوستگی باید میانگین حد چپ و راست f را در نقطهٔ x قرار داد. به همین علت تساوی (۲ ـ ۵) نیز برای نقاط پیوستگی $f(x)$ برقرار است و در سایر نقاط باید میانگین حد چپ و راست f را قرار داد.

قضیه ۲ ـ ۳. (**قضیهٔ انتگرال فوریه**) *اگر تابع f در هر بازهٔ متناهی قطعه قطعه پیوسته باشد و در هر نقطه مشتق‌های یک طرفهٔ چپ و راست موجود باشند، به‌علاوه تابع f به‌طور مطلق*

انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\frac{۱}{۲}\left(f(x+)+f(x-)\right)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\left(\omega(t-x)\right)dtd\omega$$

برای اثبات قضیهٔ انتگرال فوریه به لم زیر احتیاج است. این لم مشابه لم ۱ ـ ۳۲ اثبات می‌شود.

لم ۲ ـ ۴. فرض کنید تابع f در $[۰,b]$ قطعه قطعه پیوسته و مشتق راست $f'_R(۰)$ موجود باشد، در این صورت:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{۰}^{b}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}f(۰+)$$

برهان. در ابتدا قرار می‌دهیم:

$$\int_{۰}^{b}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\int_{۰}^{b}\frac{f(x)-f(۰+)}{x}\sin\lambda x dx+\int_{۰}^{b}f(۰+)\frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

مشابه لم ۱ ـ ۳۲ می‌توان دید که:

$$\frac{f(x)-f(۰+)}{x}$$

در بازهٔ $[۰,b]$ قطعه قطعه پیوسته است و بنابر لم ریمان ـ لبگ ۱ ـ ۳۱،

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{۰}^{b}\frac{f(x)-f(۰+)}{x}\sin\lambda x dx=۰$$

از طرف دیگر:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{۰}^{b}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{۰}^{\lambda b}\frac{\sin t}{t}dt=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{۰}^{b}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}f(۰+)$$

■

برهان. (قضیهٔ انتگرال فوریه) با توجه به $\left|\cos\left(\omega(t-x)\right)\right|\leq ۱$ و فرض $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt<\infty$، نتیجه می‌شود که انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\left(\omega(t-x)\right)dt$$

برای هر ω و x همگراست. بنابراین می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را در انتگرال دوگانهٔ زیر عوض کرد.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,dt\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{0}^{\lambda} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,d\omega\Big)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\big(\lambda(t-x)\big)}{t-x}\,dt \\
&= \Big[\int_{-\infty}^{-M}+\int_{-M}^{x}+\int_{x}^{M}+\int_{M}^{+\infty}\Big] f(t)\frac{\sin\big(\lambda(t-x)\big)}{t-x}\,dt
\end{aligned}$$

چون مشتق یک طرفهٔ راست f در x موجود است، بنابر لم ۲ ـ ۴ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x}^{M} f(t)\frac{\sin\big(\lambda(t-x)\big)}{t-x}\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{M-x} f(u+x)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}f(x+)$$

همچنین به‌طور مشابه مقدار انتگرال $\int_{-M}^{x}$ وقتی $\lambda\to\infty$ برابر $\frac{\pi}{2}f(x-)$ است.

از طرف دیگر از همگرایی $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ نتیجه می‌شود با بزرگ گرفتن M مقدار قدرمطلق انتگرال‌های بالا روی $(-\infty,-M)$ و $(M,+\infty)$ را می‌توان از $\frac{\varepsilon}{2}$ کوچک‌تر کرد. بدین ترتیب اگر $\lambda\to\infty$ نتیجه می‌شود:

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,dt\,d\omega = \frac{\pi}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)$$

■

تذکر ۲ ـ ۵. انتگرال فوریهٔ $f(x)$ را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Big(&\cos(\omega x)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt\Big) \\
&+\sin(\omega x)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\Big)\Big)d\omega
\end{aligned}$$

با قرار دادن

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \\
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt,
\end{aligned}$$

انتگرال فوریه تبدیل می‌شود به:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\big(A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\big)d\omega$$

توابع $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را تبدیلات فوریهٔ تابع $f(x)$ می‌نامند.

مثال ۲ ـ ۱. تبدیلات و انتگرال فوریهٔ تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ عبارت‌اند از:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\omega t)dt = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin(\omega t)dt = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)d\omega$$

اگر رابطهٔ انتگرال فوریه را برای مقدار $x = 0$ محاسبه نماییم، با توجه به اینکه $x = 0$ نقطهٔ پیوستگی تابع است نتیجه می‌شود:

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

یا اینکه:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

همچنین اگر در رابطهٔ انتگرال فوریه قرار دهیم $x = 1$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} = \frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد یعنی $f(-x) = f(x)$، آنگاه $f(t)\cos(\omega t)$ نسبت به t زوج است و تابع $f(t)\sin(\omega t)$ نسبت به t فرد. بنابراین تبدیلات فوریهٔ آن عبارت‌اند از:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \qquad (۲ ـ ۶)$$

$$B(\omega) = 0,$$

و نمایش انتگرال فوریهٔ f به‌صورت زیر است، که انتگرال فوریهٔ کسینوسی تابع f نامیده می‌شود:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \qquad (۲ ـ ۷)$$

به‌طور مشابه اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، یعنی $f(-x) = -f(x)$، آنگاه توابع $f(t)\cos(\omega t)$ و $f(t)\sin(\omega t)$ به ترتیب نسبت به t فرد و زوج هستند و تبدیلات فوریهٔ آن عبارت‌اند از:

$$A(\omega) = 0,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt. \qquad (۲ ـ ۸)$$

نمایش انتگرال فوریهٔ f در این حالت بدین صورت است، آن را انتگرال فوریهٔ سینوسی می‌نامند:

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega. \tag{۲ ـ ۹}$$

مثال ۲ ـ ۲. تابع $f(x) = e^{-kx}$ برای $x > 0$ را درنظر بگیرید. انتگرال‌های فوریهٔ سینوسی و کسینوسی آن وقتی $k > 0$ است، به ترتیب عبارت‌اند از:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\sin(\omega t)dt = \frac{2\omega}{\pi(k^2+\omega^2)}$$
$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\cos(\omega t)dt = \frac{2k}{\pi(k^2+\omega^2)}$$

بنابراین انتگرال فوریهٔ کسینوسی f برابر است با:

$$f(x) = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}d\omega \tag{۲ ـ ۱۰}$$

که توسعهٔ زوج تابع f را روی $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد. همچنین انتگرال فوریهٔ سینوسی آن عبارت است از:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}d\omega \tag{۲ ـ ۱۱}$$

که توسعهٔ فرد تابع f را روی $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد.

تذکر ۲ ـ ۶. مثال قبل نشان می‌دهد که برای $k > 0$ و $x > 0$ دو نمایش مختلف برای تابع $f(x) = e^{-kx}$ وجود دارد:

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}d\omega.$$

در بعضی مثال‌ها تابع $f(x)$ فقط روی $(0,\infty)$ تعریف شده‌است. مشابه سری فوریه در اینجا نیز با استفاده از نمایش انتگرال فوریه می‌توان تابع f را به دو شکل مختلف توسعه داد. در این حالت دو تبدیل فوریهٔ $A(\omega)$ و $B(\omega)$ با استفاده از روابط (۲ ـ ۶) و (۲ ـ ۸) برای تابع f تعریف می‌شود. روابط (۲ ـ ۷) و (۲ ـ ۹) نشان می‌دهند چگونه می‌توان تابع $f(x)$ را از روی تبدیل $A(\omega)$ یا $B(\omega)$ بازسازی کرد. به‌همین دلیل این راوبط را تبدیلات وارون فوریه می‌نامند. برای آنکه تبدیلات $A(\omega)$ و $B(\omega)$ و وارون آنها مشابه هم باشند، ضریب $\frac{2}{\pi}$ در روابط (۲ ـ ۶) و (۲ ـ ۸) را با $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ عوض کرده و در روابط (۲ ـ ۷) و (۲ ـ ۹) ضریب

$\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$ را اضافه می‌کنیم. با این تغییر تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)$ که در $(۰,\infty)$ تعریف شده است، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{F}_s(f) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty f(x)\sin(\omega x)dx. \qquad (۲ـ۱۲)$$

تبدیل وارون آن نیز بدین‌صورت است:

$$\mathcal{F}_s^{-۱}(F_s) = f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty F_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega, \qquad (۲ـ۱۳)$$

به‌طور مشابه تبدیل فوریهٔ کسینوسی تابع $f(x)$ و تبدیل وارون آن به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\mathcal{F}_c(f) = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty f(x)\cos(\omega x)dx, \qquad (۲ـ۱۴)$$

$$\mathcal{F}_c^{-۱}(F_c) = f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty F_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega. \qquad (۲ـ۱۵)$$

قضیه ۲ ـ ۷. *اگر تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد و وقتی $x\to\infty$، $f(x)$ صفر شود، آنگاه*

الف) $\mathcal{F}_s(f') = -\omega\mathcal{F}_c(f)$,

ب) $\mathcal{F}_c(f') = \omega\mathcal{F}_s(f) - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}f(۰)$.

برهان. با توجه به تعریف تبدیل فوریهٔ سینوسی و کسینوسی داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(f') &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty f'(x)\sin(\omega x)dx\\ &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big[f(x)\sin(\omega x)\Big]_۰^\infty - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega\int_۰^\infty f(x)\cos(\omega x)dx\\ &= -\omega\mathcal{F}_c(f)\end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(f') &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty f'(x)\cos(\omega x)dx\\ &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big[f(x)\cos(\omega x)\Big]_۰^\infty + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega\int_۰^\infty f(x)\sin(\omega x)dx\\ &= -\sqrt{\frac{۲}{\pi}}f(۰) + \omega\mathcal{F}_s(f).\end{aligned}$$

■

نتیجه ۲ ـ ۸. اگر وقتی $x \to \infty$ تابع $f(x)$ و مشتق آن $f'(x)$، به صفر میل کنند، آنگاه

الف) $$\mathcal{F}_s(f'') = -\omega^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0),$$

ب) $$\mathcal{F}_c(f'') = -\omega^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).$$

تمرین ۲ ـ ۱

۱. انتگرال فوریهٔ هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x) = e^{-|x|}$

ب) $f(x) = e^{-|x|}\sin 2x$

پ) $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ت) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

۲. با استفاده از انتگرال فوریه رابطهٔ زیر را نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

۳. نشان دهید تابع $f(x) = 1$ نمایش انتگرال فوریه ندارد.

۴. هریک از توابع زیر را که برای $x > 0$ تعریف شده‌اند، به‌صورت انتگرال فوریهٔ سینوسی بنویسید.

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \end{cases}$

پ) $f(x) = e^{-x}\cos x$

۵. هریک از توابع زیر را که برای $x > 0$ تعریف شده‌اند، به‌صورت انتگرال فوریهٔ کسینوسی نمایش دهید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$

پ) $f(x) = e^{-x}$

۶. با استفاده از نمایش انتگرال فوریهٔ سینوسی و کسینوسی روابط زیر را اثبات کنید.

الف) $$\int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin(\omega x)}{\omega^4+4}d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x$$

ب) $$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi\omega)\sin(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \end{cases}$$

پ) $$\int_0^\infty \frac{\sin\omega \cos(\omega x)}{\omega}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

ت) $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \end{cases}$$

۷. فرض کنید $f(x)$ تابعی زوج و $A(\omega)$ تبدیل فوریهٔ آن و $a > 0$ عددی ثابت باشد. نشان دهید:

الف) $$f(ax) = \frac{1}{\pi a}\int_0^\infty A\left(\frac{\omega}{a}\right)\cos(\omega x)d\omega$$

ب) $$xf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(-\frac{dA}{d\omega}\right)\sin(\omega x)d\omega$$

پ) $$x^2 f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(-\frac{d^2A}{d\omega^2}\right)\cos(\omega x)d\omega$$

۸. به کمک تمرین قبل و مثال ۲ ـ ۲ رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^\infty e^{-\omega}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega = \tan^{-1} t$$

۹. الف) اگر تابع f در بازهٔ $(0,\infty)$ تعریف شده باشد و $A(\omega)$ تبدیل فوریهٔ آن باشد، ثابت کنید:

$$\int_0^\infty A(\omega)^2 d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)^2 dx$$

ب) رابطهٔ مشابهی برای تبدیل $B(\omega)$ بنویسید.

ج) به کمک قسمت (الف) حاصل عبارت $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ را به‌دست آورید.

۱۰. نشان دهید روابط زیر برای تبدیل فوریهٔ سینوسی توابع $f(x)$ و $g(x)$ برقرار است. روابط مشابهی برای تبدیل فوریهٔ کسینوسی بنویسید.

الف) $\displaystyle\int_{\circ}^{\infty}\mathcal{F}_s(f)g(\omega)d\omega=\int_{\circ}^{\infty}f(\omega)\mathcal{F}_s(g)d\omega$

ب) $\displaystyle\int_{\circ}^{\infty}\mathcal{F}_s(f)\mathcal{F}_s(g)d\omega=\int_{\circ}^{\infty}f(x)g(x)dx$

پ) $\displaystyle\int_{\circ}^{\infty}\mathcal{F}_s(f)^{۲}d\omega=\int_{\circ}^{\infty}f(x)^{۲}dx$

۱۱. تبدیل فوریهٔ کسینوسی و سینوسی تابع $f(x)=e^{-ax^{۲}}$ را به‌دست آورید. (**راهنمایی:** رابطهٔ انتگرالی تبدیل فوریه را نوشته و از آن نسبت به ω مشتق بگیرید، سپس به روش جزء به جزء انتگرال به‌دست آمده را حساب کنید تا به یک رابطه بین تبدیل فوریه و مشتق آن برسید. در پایان به کمک انتگرال $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{۲a}=\int_{\circ}^{\infty}e^{-ax^{۲}}dx$ تبدیل مورد نظر را به‌دست آورید.)

۲ ـ ۳ تبدیل فوریه

در این بخش صورت دیگری از تبدیلات فوریهٔ تابع $f(x)$ را که در سرتاسر $(-\infty,+\infty)$ تعریف شده است، به‌دست می‌آوریم. این تبدیل فرم مختلط انتگرال فوریه (۲ ـ ۵) بوده و به تبدیل فوریهٔ مختلط معروف است. از آنجاکه این فرم تبدیل فوریه، رایج‌ترین فرم آن است، از آن به تبدیل فوریه یاد می‌شود.

در بخش ۲ ـ ۱ نمایش انتگرال فوریهٔ تابع f که در خواص ذکر شده در قضیهٔ ۲ ـ ۳ صدق می‌کند، به‌صورت زیر بیان شد:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)dtd\omega$$

با جایگزینی تساوی

$$\cos\big(\omega(t-x)\big)=\frac{۱}{۲}\big(e^{i\omega(t-x)}+e^{-i\omega(t-x)}\big)$$

در رابطهٔ انتگرال فوریه نتیجه می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(t-x)}dtd\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega(t-x)}dtd\omega$$

با تغییر متغیر در انتگرال دوم از ω به $-\omega$ نتیجه می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(t-x)}dtd\omega. \qquad (۲ ـ ۱۶)$$

بدین ترتیب تبدیل فوریهٔ تابع $f(x)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}(f)=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\omega x}dx. \qquad (۲ ـ ۱۷)$$

رابطهٔ (۲ ـ ۱۶) نشان می‌دهد که تبدیل فوریه در رابطهٔ زیر صدق می‌کند، که از آن به‌عنوان تبدیل وارون فوریه یاد می‌شود:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega x}d\omega. \qquad (۲ ـ ۱۸)$$

از قضیهٔ ۲ ـ ۳ (انتگرال فوریه) می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت:

قضیه ۲ ـ ۹. *اگر f تابعی پیوسته و به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد که در هر نقطه مشتق‌های یک طرفهٔ چپ و راست آن موجودند، آنگاه فرمول تبدیل وارون* (۲ ـ ۱۸) *برای هر x برقرار است.*

تذکر ۲ ـ ۱۰. در بعضی کتاب‌ها فرمول (۲ ـ ۱۸) را به‌عنوان تبدیل فوریه و (۲ ـ ۱۷) را تبدیل وارون آن در نظر می‌گیرند. به علت تشابه این دو رابطه این جابه‌جایی تأثیر چندانی در بحث ندارد، تنها بعضی نتایج با کمی تغییرات همراه خواهد بود. همچنین ضریب $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ در روابط (۲ ـ ۱۷) و (۲ ـ ۱۸) برای تشابه روابط تبدیل فوریه و وارون آن آمده است. می‌توان یکی از این ضرایب را حذف کرد و تنها در یکی از این روابط ضریب $\frac{1}{2\pi}$ را نوشت.

مثال ۲ ـ ۳. تبدیل فوریهٔ تابع $f(x)=e^{-|x|}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}e^{i\omega x}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{(1+i\omega)x}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{(-1+i\omega)x}dx\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{1}{1+i\omega}e^{(1+i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{1}{-1+i\omega}e^{(-1+i\omega)x}\right]_{0}^{+\infty}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i\omega}-\frac{1}{-1+i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^{2}}\end{aligned}$$

تذکر۲ ـ ۱۱. اگر تابع f زوج باشد،

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_c(f),$$

و اگر فرد باشد،

$$\mathcal{F}(f) = i\mathcal{F}_s(f).$$

در این قسمت به ذکر بعضی از خواص تبدیل فوریه که در حل معادلات دیفرانسیل و همچنین در محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ بعضی توابع کاربرد دارد، می‌پردازیم.

قضیه۲ ـ ۱۲. **(خطی بودن)** *تبدیل فوریه یک عملگر خطی است، یعنی برای مقادیر ثابت a و b داریم:*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(af + bg) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (af(x) + bg(x)) e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{i\omega x} dx \\
&= a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)
\end{aligned}$$

■

قضیه۲ ـ ۱۳. **(انتقال)** *برای هر مقدار ثابت حقیقی c تبدیل فوریهٔ تابع $f(x-c)$ به‌صورت زیر است:*

$$\mathcal{F}\big(f(x-c)\big) = e^{i\omega c}\mathcal{F}(f)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(f(x-c)\big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-c) e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega(y+c)} dy = e^{i\omega c}\mathcal{F}(f)
\end{aligned}$$

■

قضیه۲ ـ ۱۴. **(انبساط)** *برای هر مقدار ثابت حقیقی $c \neq 0$ تبدیل فوریهٔ تابع $f(cx)$ بدین صورت است:*

$$\mathcal{F}\big(f(cx)\big) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\Big(\frac{\omega}{c}\Big)$$

برهان.

$$\mathcal{F}\big(f(cx)\big) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)e^{i\omega x}dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{\frac{i\omega y}{c}} \frac{dy}{|c|}$$
$$= \frac{۱}{|c|} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{i(\frac{\omega}{c})y}dy = \frac{۱}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$$

■

قضیه ۲ ـ ۱۵. **(تبدیل فوریهٔ مشتق تابع)** *اگر تابع f پیوسته و قطعه قطعه هموار باشد، به‌علاوه f و f' به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر بوده و وقتی $|x| \to \infty$، $f(x)$ به صفر میل کند، آنگاه:*

$$\mathcal{F}(f') = -i\omega\mathcal{F}(f)$$

برهان.

$$\mathcal{F}(f') = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{i\omega x}dx$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\left(\Big[f(x)e^{i\omega x}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx\right)$$
$$= -i\omega\mathcal{F}(f)$$

■

نتیجه ۲ ـ ۱۶. خاصیت فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد که اگر f و $(n-۱)$ مشتق اول آن پیوسته باشند و به‌علاوه مشتق nام آن قطعه قطعه پیوسته باشد، آنگاه به شرط آنکه f و مشتقات آن به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشند:

$$\mathcal{F}\big(f^{(n)}(x)\big) = (-i\omega)^n\mathcal{F}(f) \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

اگر f و g در سرتاسر $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده باشند، تابع

$$(f*g)(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

کانولوشن دو تابع f و g نامیده می‌شود. کانولوشن دارای خواص زیر است:

الف) جابه‌جایی: $f*g = g*f$

ب) شرکت‌پذیری: $f*(g*h) = (f*g)*h$

پ) پخشی: $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$

ت) مشتق: $(f*g)' = f'*g = f*g'$

قضیه ۲ ـ ۱۷. **(تبدیل فوریهٔ کانولوشن)** *اگر $\hat{f}(\omega)$ و $\hat{g}(\omega)$ به ترتیب تبدیل فوریهٔ توابع f و g باشند، آنگاه تبدیل فوریهٔ کانولوشن $f * g$ برابر حاصل‌ضرب $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ است.*

برهان.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{i\omega x}dx \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)e^{i\omega x}d\xi dx \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)e^{i\omega x}dx\Big)g(\xi)d\xi \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{i\omega (y+\xi)}dy\Big)g(\xi)d\xi \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega\xi}g(\xi)d\xi = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

■

برای مقدار ثابت $a \geq ۰$، تابع زیر را تابع پله‌ای می‌نامند:

$$u_a(x) = \begin{cases} ۰ & x < a \\ ۱ & x \geq a \end{cases}$$

با این تعریف تابع u_a به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر نیست و برای به‌دست آوردن تبدیل فوریهٔ آن به انتگرال زیر می‌رسیم که همگرا نیست:

$$\mathcal{F}(u_a) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_a(x)e^{i\omega x}dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{a}^{+\infty}e^{i\omega x}dx$$

برای از بین بردن این مشکل تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$u_a(x)e^{-\beta x} = \begin{cases} ۰ & x < a \\ e^{-\beta x} & x \geq a \end{cases}$$

وقتی $\beta \to ۰$، این تابع به تابع پله‌ای میل می‌کند. بنابراین تبدیل فوریهٔ تابع پله‌ای را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

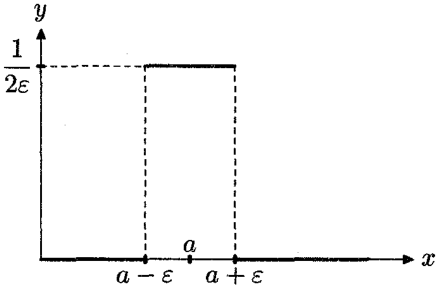
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(u_a(x)\big) &= \lim_{\beta\to ۰}\mathcal{F}\big(u_a(x)e^{-\beta x}\big) = \lim_{\beta\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_a(x)e^{-\beta x}e^{i\omega x}dx \\
&= \lim_{\beta\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{a}^{+\infty}e^{-(\beta - i\omega)x}dx = \frac{ie^{i\omega a}}{\sqrt{۲\pi}\omega}
\end{aligned}$$

به خصوص در حالت $a = 0$،

$$\mathcal{F}\big(u_{\circ}(x)\big) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\omega}.$$

آخرین مطلب این بخش به تبدیل فوریهٔ تابع ضربه اختصاص دارد. تابع ضربه بدین صورت تعریف می‌شود:

$$P_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & |x-a| < \varepsilon \\ 0 & |x-a| > \varepsilon \end{cases}$$



نمودار۲ ـ ۲.

این تابع بیانگر نیروی بزرگی است که در فاصلهٔ زمانی کوتاه وارد می‌شود و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{F}\big(P_\varepsilon(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_\varepsilon(x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} e^{i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega a}}{i\omega} \big(e^{i\omega\varepsilon} - e^{-i\omega\varepsilon}\big) = \frac{e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon}.$$

همچنین برای توابع ضربه $P_\varepsilon(x)$، داریم:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \neq a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\varepsilon(x) dx = 1.$$

در مسائل فیزیکی حد تابع ضربه را وقتی $\varepsilon \to 0$، با نماد $\delta(x-a)$ نشان می‌دهند و آن را تابع دلتای دیراک می‌نامند. هرچند به کار بردن لفظ تابع برای آن خالی از اغماض نیست، ولی می‌توان آن را به‌عنوان یک تابع تعمیم یافته به کار برد که به‌صورت یک تابعک خطی روی

فضای برداری $C_0^\infty(\mathbb{R})$ عمل می‌کند و خواص زیر را دارد:

$$\delta(x-a)=0,\qquad x\neq a,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx=1,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)f(x)dx=f(a).$$

تبدیل فوریهٔ تابع δ را به‌صورت حد تبدیل فوریهٔ توابع $P_\varepsilon(x)$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}\big(\delta(x-a)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}\big(P_\varepsilon(x)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon}=\frac{e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}},$$

در حالتی که $a=0$،

$$\mathcal{F}\big(\delta(x)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

تمرین ۲ ـ ۲

۱. اگر $\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}(f)$ ثابت کنید $\mathcal{F}(\hat{f})=f(-x)$.

۲. ثابت کنید $\mathcal{F}\big(f(x)g(x)\big)=\hat{f}*\hat{g}$.

۳. ثابت کنید $\mathcal{F}\big(f(-x)\big)=\hat{f}(-\omega)$.

۴. نشان دهید روابط زیر برقرار است:

الف) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$

ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega$

۵. تبدیل فوریهٔ توابع زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=e^{-ax^2}$، $0<a$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

پ) $f(x)=\sin(x^2)$

ت) $f(x)=\cos(x^2)$

۶. با استفاده از خواص تابع دلتای دیراک تبدیل فوریهٔ سینوسی و کسینوسی $\delta(x-a)$ و همچنین تبدیلات فوریهٔ متناهی آن را به‌دست آورید.

۷. فرض کنید تابع f قطعه قطعه پیوسته باشد و دارای متناهی پرش به مقدار $f_1, f_2, \ldots, f_m$ به ترتیب در نقاط $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ باشد. همچنین فرض کنید در بقیهٔ نقاط مشتق‌پذیر باشد و تبدیل فوریه‌های $\mathcal{F}(f)$ و $\mathcal{F}(f')$ وجود داشته باشند، نشان دهید که:

$$\mathcal{F}(f') = -i\omega\mathcal{F}(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{m} f_k e^{i\omega t_k}.$$

۸. اگر برای مقدار ثابت $a > 0$ و به‌ازای هر مقدار $|t| > a$ داشته باشیم $f(t) = 0$، نشان دهید تبدیل فوریهٔ $\hat{f}(\omega)$ را با دانستن مقادیر $\hat{f}\left(\frac{n\pi}{a}\right)$ برای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، به‌طور کامل در هر نقطه می‌توان محاسبه کرد.

۲ ـ ۳ تبدیل لاپلاس

فرض کنید تابع $f(t)$ برای همهٔ مقادیر $t \geq 0$ تعریف شده است. تابع f در صورتی دارای تبدیل لاپلاس است که برای مقادیری چون $s \in \mathbb{R}$ انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

همگرا باشد. اگر $D \subseteq \mathbb{R}$ شامل تمام نقاطی باشد که انتگرال فوق همگراست، در این صورت تابع $F : D \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

تبدیل لاپلاس $f(t)$ نامیده می‌شود و با رابطهٔ $F = \mathcal{L}\{f\}$ نشان داده می‌شود. همچنین مجموعهٔ D را دامنهٔ تبدیل لاپلاس می‌نامند.

مثال ۲ ـ ۴. تابع $f(t) = 1$ برای $t \geq 0$ دارای تبدیل لاپلاس است. تبدیل لاپلاس آن عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

و دامنهٔ تبدیل برابر $D = (0, \infty)$ است.

مثال ۲ ـ ۵. فرض کنید $f(t) = e^{at}$ برای $t \geq 0$، که a یک مقدار ثابت است. در این صورت $f(t)$ دارای تبدیل لاپلاس زیر به دامنهٔ $D = (a, \infty)$ است.

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چه توابعی دارای تبدیل لاپلاس هستند؟ دامنهٔ تبدیل لاپلاس آنها چیست؟ در این رابطه تعریف و قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

تعریف ۲ ـ ۱۸. تابع $f(t)$ به دامنهٔ $[0, \infty)$ را از مرتبهٔ نمایی با طول همگرایی a گویند، اگر a کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد که برای هر $a_0 > a$ مقادیر M و T موجود باشند، به‌طوری که برای $t \geq T$،

$$e^{-a_0 t}|f(t)| < M.$$

قضیه ۲ ـ ۱۹. *فرض کنید $f(t)$ در دامنهٔ $[0, \infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی با طول همگرایی a باشد. در این صورت $\mathcal{L}\{f\}$ برای $s > a$ موجود است.*

برهان. برای هر مقدار $s > a$، اعداد a_0، M و T وجود دارند که $s > a_0 > a$ و

$$|f(t)| \leq M e^{a_0 t}, \qquad t \geq T \text{ برای} \tag{۲ ـ ۱۹}$$

در این صورت:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

مقدار انتگرال اول، کران‌دار است و برای انتگرال دوم با استفاده از رابطهٔ (۲ ـ ۱۹) می‌توان نوشت:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \leq \int_T^\infty M e^{(a_0 - s)t} dt = \frac{M}{a_0 - s} e^{(a_0 - s)t} \Big|_T^\infty = \frac{M}{s - a_0} e^{(a_0 - s)T}$$

بنابراین مقدار انتگرال تبدیل لاپلاس $f(t)$ برای مقادیر $s > a$ کران‌دار است. ■

تذکر ۲ ـ ۲۰. قضیهٔ فوق یک شرط کافی را برای وجود تبدیل لاپلاس بیان می‌کند. لیکن این شرط لازم نیست.

نتیجهٔ زیر خواصی از تبدیل لاپلاس را بیان می‌کند.

نتیجه ۲ ـ ۲۱. اگر تابع $f(t)$ بر $[0, \infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی با طول همگرایی a باشد در این صورت:

الف) برای هر $a > a_\circ$ عددی مانند M وجود دارد که برای هر $s > a_\circ$:

$$\left|\mathcal{L}\{f(t)\}\right| \leq \frac{M}{s-a_\circ},$$

ب) $$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = \circ,$$

پ) $$\limsup_{s\to+\infty} \left|s\mathcal{L}\{f(t)\}\right| < \infty.$$

برهان. روابط (ب) و (پ) از قسمت (الف) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (الف)، می‌توان مقدار M را به قدری بزرگ انتخاب کرد که برای هر $t \geq \circ$ داشته باشیم:

$$|f(t)| \leq Me^{a_\circ t},$$

در این صورت داریم:

$$\left|\mathcal{L}\{f(t)\}\right| \leq \int_\circ^\infty Me^{-(s-a_\circ)t}dt = \frac{M}{s-a_\circ}.$$

■

برای استنتاج خواص بیشتر تبدیل لاپلاس تعریف زیر مفید است:

تعریف ۲ ـ ۲۲. انتگرال $\int_\circ^\infty K(s,t)dt$ روی مجموعه‌ای از مقادیر s مانند S، به‌طور یکنواخت همگرا گفته می‌شود. اگر به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$، عددی مانند $T_\circ$ مستقل از S موجود باشد، طوری که برای هر $T > T_\circ$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\left|\int_T^\infty K(s,t)dt\right| < \varepsilon.$$

قضیه ۲ ـ ۲۳. *اگر $f(t)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی با طول همگرایی a باشد، آنگاه برای هر $a_\circ > a$، $\int_\circ^\infty e^{-st}f(t)dt$ روی $S = \{a \mid s \geq a_\circ\}$ به‌طور یکنواخت همگراست.*

برهان. M را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برای مقدار ثابت a_1 بین a و $a_\circ$ داشته باشیم:

$$|f(t)| \leq Me^{a_1 t} \qquad \text{برای هر } t \geq \circ،$$

در این صورت برای $s \geq a_\circ$:

$$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt\right| \leq \frac{M}{s-a_1}e^{-(s-a_1)T},$$

بنابراین برای $\varepsilon > \circ$ داده شده، $T_\circ$ را می‌توان آن‌قدر بزرگ گرفت تا برای هر $s \geq a_\circ$ و $T \geq T_\circ$ داشته باشیم:

$$\frac{M}{s-a_\backslash} \cdot e^{-(s-a_\backslash)T} \leq \frac{M}{a_\circ - a_\backslash} e^{-(a_\circ - a_\backslash)T} < \varepsilon.$$

■

قضیه ۲ ـ ۲۴. *اگر $f(t)$ در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۲۳ صدق کند، آنگاه $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ در دامنهٔ (a, ∞) پیوسته است.*

برهان. برای $\varepsilon > \circ$ داده شده، $T_\circ$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برای هر $s \geq a_\circ > a$،

$$\left| \int_{T_\circ}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{۴},$$

در این صورت برای، $s, s_\circ \geq a_\circ$ داریم:

$$\left| \int_{\circ}^{\infty} (e^{-st} - e^{-s_\circ t}) f(t) dt \right| \leq \left| \int_{\circ}^{T_\circ} (e^{-st} - e^{-s_\circ t}) f(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{۴} + \frac{\varepsilon}{۴} \quad (۲ - ۲۰)$$

از آنجاکه $f(t)$ قطعه قطعه پیوسته است، مقدار K را طوری می‌توان انتخاب کرد که برای هر $\circ \leq t \leq T_\circ$

$$|f(t)| \leq K,$$

حال اگر δ به‌گونه‌ای اختیار شود که $\left|e^{-st} - e^{-s_\circ t}\right| < \frac{\varepsilon}{۲T_\circ K}$ برای هر $\circ \leq t \leq T_\circ$ وقتی $|s - s_\circ| < \delta$ و $s, s_\circ \geq a_\circ$، آنگاه:

$$\left| \int_{\circ}^{T_\circ} (e^{-st} - e^{-s_\circ t}) f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{۲},$$

و با توجه به رابطهٔ (۲ ـ ۲۰) پیوستگی $F(s)$ در نقطهٔ $s_\circ$ نتیجه می‌شود. ■

قضیه ۲ ـ ۲۵. *اگر $f(t)$ در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۲۳ صدق کند، آنگاه برای $s > a$، $F(s)$ مشتق‌پذیر است و*

$$F'(s) = \int_{\circ}^{\infty} -te^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}.$$

برهان. چون $F(s)$ پیوسته است پس انتگرال آن روی $[\alpha, \beta]$ موجود است. حال برای ε داده شده، $T_\circ$ را طوری انتخاب کنید تا برای $\alpha \leq s \leq \beta$ و $T \geq T_\circ$ داشته باشیم:

$$\left| \int_{T}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha},$$

در این صورت بنابر قضیهٔ فوبینی:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{T} e^{-st}f(t)dtds = \int_{0}^{T}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-st}f(t)dsdt,$$

به عبارت دیگر برای هر $\varepsilon > 0$، T_0 را می‌توان طوری انتخاب کرد که برای $T \geq T_0$ داشته باشیم:

$$\left|\int_{0}^{T}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-st}f(t)dsdt - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)dtds\right| < \varepsilon$$

این رابطه اثبات قضیه را کامل می‌کند. ■

برای استفاده از تبدیل لاپلاس به‌عنوان یک تبدیل انتگرالی در معادلات دیفرانسیل احتیاج است که مانند تبدیل فوریه بتوان وارون تبدیل لاپلاس را هم داشته باشیم. این مطلب در بخش آخر این فصل به‌صورت فرمول (۲ ـ ۲۱) بیان شده است. اما همانطور که خواهید دید، این رابطه به راحتی برای همهٔ توابع قابل محاسبه نیست. قضیهٔ زیر که به قضیهٔ لرش[1] معروف است، نشان می‌دهد تبدیل لاپلاس عملگر یک به یک است و این مطلب وجود تبدیل وارون را اثبات می‌کند. لذا با کمک قضایای بخش بعدی می‌توان وارون تبدیل لاپلاس را در بسیاری از موارد محاسبه کرد.

قضیه ۲ ـ ۲۶. **(لرش)** *اگر $f(t)$ و $g(t)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی به طول همگرایی a باشد، در این صورت اگر $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$، آنگاه $f(t) \equiv g(t)$.*

۲ ـ ۴ خواص تبدیل لاپلاس

در این بخش خواصی از تبدیل لاپلاس را خواهیم دید که برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع مختلف و همچنین محاسبهٔ تبدیل وارون لاپلاس اهمیت دارد.

قضیه ۲ ـ ۲۷. *اگر تبدیلات لاپلاس توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ برای $s > a$ موجود باشد، آنگاه برای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ داریم:*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathcal{L}\{f_1\} + c_2\mathcal{L}\{f_2\}.$$

---

1. Lersch

برهان. از خاصیت خطی بودن انتگرال نتیجه می‌گردد. ■

نتیجه ۲ ـ ۲۸. مجموعهٔ کلیهٔ توابع که دارای تبدیل لاپلاس‌اند، یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۲ ـ ۲۹. **(تبدیل مشتق)** *اگر $f(t)$ روی $[0,\infty)$ پیوسته، $f'(t)$ روی این فاصله قطعه قطعه پیوسته و تابع f روی این فاصله از مرتبهٔ نمایی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس f' وجود دارد و*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

برهان. فرض کنید f و f' در فاصلهٔ بین نقاط $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ پیوسته باشند. حال می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-st} f'(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-st} f'(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-st} f(t)\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + s\int_0^b e^{-st} f(t)dt \\
&= e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)dt.
\end{aligned}$$

حال اگر $b \to \infty$، $e^{-sb} f(b) \to 0$ و درنتیجه:

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0).$$

■

نتیجه ۲ ـ ۳۰. اگر f و f' روی $[0,\infty)$ پیوسته و f'' قطعه قطعه پیوسته و هر سه از مرتبهٔ نمایی باشند، آنگاه:

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0).$$

برهان. بنابر قضیهٔ قبل داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''\} &= s\mathcal{L}\{f'\} - f'(0) \\
&= s\big(s\mathcal{L}\{f\} - f(0)\big) - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

■

همچنین با استقرا می‌توان نشان داد:

نتیجه ۲ ـ ۳۱. اگر f تا $f^{(n-1)}$ روی $[0,\infty)$ پیوسته و $f^{(n)}$ قطعه قطعه پیوسته و همگی از مرتبهٔ نمایی باشند، آنگاه

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

مثال ۲ ـ ۶. با قرار دادن $f(t) = \sin at$ داریم $f''(t) = -a^2\sin at$ ،$f(0) = 0$ و $f'(0) = a$ درنتیجه:

$$s^2\mathcal{L}f - a + a^2\mathcal{L}f = 0,$$

و بنابراین

$$\mathcal{L}\sin at = \frac{a}{s^2+a^2},$$

به‌طور مشابه می‌توان دید که:

$$\mathcal{L}\cos at = \frac{s}{s^2+a^2},$$
$$\mathcal{L}\sinh at = \frac{a}{s^2-a^2},$$
$$\mathcal{L}\cosh at = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

مثال ۲ ـ ۷. برای محاسبهٔ $\mathcal{L}t^n$ قرار دهید، $f(t) = t^n$، آنگاه:

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad \text{و} \quad f^{(n)}(t) = n!,$$

بنابراین با استفاده از نتیجهٔ ۲ ـ ۳۱ داریم:

$$n!\mathcal{L}\{1\} = s^n\mathcal{L}\{t^n\},$$

و درنتیجه

$$\mathcal{L}t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

قضیه ۲ ـ ۳۲. **(تبدیل انتگرال)** *اگر $f(t)$ روی $[0,\infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $\int_T^t f(\tau)d\tau$ موجود و*

$$\mathcal{L}\left\{\int_T^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s}\int_T^0 f(\tau)d\tau.$$

برهان. چون f قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی است، پس $\int_T^t f(\tau)d\tau$ پیوسته و از مرتبهٔ نمایی است (تمرین ۴). حال بگیرید $F(t) = \int_T^t f(\tau)d\tau$. در این صورت:

$$\mathcal{L}\{F'\} = s\mathcal{L}\{F\} - F(\circ),$$

یا

$$\mathcal{L}\left\{\int_\circ^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{\text{۱}}{s}\mathcal{L}\{f\} + \frac{\text{۱}}{s}\int_T^\circ f(\tau)d\tau.$$

■

مثال ۲ ـ ۸. برای به‌دست آوردن تابع پیوسته $y(t)$ که در معادلهٔ $\int_\circ^t y(x)dx + y = \text{۱}$ صدق کند، از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{Y(s)}{s} + Y(s) = \frac{\text{۱}}{s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s)(s+\text{۱}) = \text{۱} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{\text{۱}}{s+\text{۱}}$$
$$\Longrightarrow \quad y(t) = e^{-t}.$$

قضیه ۲ ـ ۳۳. *اگر $f(t)$ بر $(\circ,\infty)$ پیوسته و $\lim_{t\to\circ+} f(t)$ موجود و $f'(t)$ بر $[\circ,\infty)$ قطعه قطعه پیوسته و هر دو از مرتبهٔ نمایی باشند، آنگاه:*

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{t\to\circ+} f(t) = f(\circ+).$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۲ ـ ۲۹ داریم:

$$\mathcal{L}f' = s\mathcal{L}f - f(\circ+),$$

از طرفی بنابر نتیجهٔ ۲ ـ ۲۱ داریم $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}f' = \circ$. درنتیجه:

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}f = f(\circ+).$$

■

قضیه ۲ ـ ۳۴. *اگر $f(t)$ و $f'(t)$ هر دو در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۳۳ صدق کنند، به‌علاوه طول همگرایی f' منفی باشد، آنگاه به شرط اینکه این حدها وجود داشته باشند،*

$$\lim_{s\to\circ} s\mathcal{L}\{f\} = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

برهان. داریم:

$$\mathcal{L}f' = s\mathcal{L}f - f(۰+),$$

حال اگر $s \to ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{s\to ۰} s\mathcal{L}f = \lim_{s\to ۰} \mathcal{L}f' + f(۰+),$$

از طرف دیگر:

$$\lim_{s\to ۰} \mathcal{L}f' = \lim_{s\to ۰} \int_۰^\infty f'(t)e^{-st}dt,$$

چون $a < ۰$ و $s \geq a$ پس انتگرال اخیر به‌طور یکنواخت روی $s \geq a$ همگراست. پس جای $\lim_{s\to ۰}$ و $\int_۰^\infty$ را می‌توان عوض کرد پس

$$\lim_{s\to ۰} \mathcal{L}f' = \int_۰^\infty f'(t) \lim_{s\to ۰} e^{-st}dt = \int_۰^\infty f'(t)dt = f(t)\Big|_۰^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(۰+),$$

بنابراین

$$\lim_{s\to ۰} s\mathcal{L}f = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

■

قضیه ۲ ـ ۳۵. اگر $f(t)$ روی $[۰,\infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی باشد، اگر $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ و $\mathcal{L}^{-۱}\dfrac{F(s)}{s}$ برای $t \geq ۰$ پیوسته و دارای مشتق قطعه قطعه پیوسته از مرتبهٔ نمایی روی $[۰,\infty)$ باشد، آنگاه $f(t) = \dfrac{d}{dt}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\}$.

برهان. بگیرید $g(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\}$ در این‌صورت:

$$\mathcal{L}g' = s\mathcal{L}g - g(۰) = s\frac{F(s)}{s} - g(۰) = F(s) - g(۰),$$

لیکن بنابر نتیجهٔ ۲ ـ ۲۱ و قضیهٔ ۲ ـ ۳۳ می‌توان نوشت:

$$g(۰) = g(۰+) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}g = \lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}f = ۰,$$

درنتیجه:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

درنتیجه بنابر یک به یک بودن تبدیل لاپلاس (قضیهٔ ۲ ـ ۲۶):

$$f(t) = g'(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}.$$

■

قضیه ۲ ـ ۳۶. *اگر $f(t)$ روی $[۰,\infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی باشد، اگر $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ و $\mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\}$ موجود باشد، آنگاه:*

$$f(t) = \int_۰^t \mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\}\, dx.$$

برهان. با قرار دادن $g(t) = \mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\}$ و با استفاده از قضیهٔ ۲ ـ ۳۲ نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}\left\{\int_۰^t g(\tau)d\tau\right\} = \frac{۱}{s}\mathcal{L}\{g(t)\} + \frac{۱}{s}\int_۰^۰ g(t)dt = \frac{۱}{s}\mathcal{L}g = F(s),$$

درنتیجه $\int_۰^t g(\tau)d\tau = f(t)$ یا $f(t) = \int_۰^t \mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\}\, dt$. ■

مثال ۲ ـ ۹. برای محاسبهٔ $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s^۲+۴)}\right\}$ قرار دهید $F(s) = \frac{۱}{s(s^۲+۴)}$. درنتیجه $sF(s) = \frac{۱}{s^۲+۴}$ و $\mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\} = \frac{۱}{۲}\sin ۲t$. پس:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s^۲+۴)}\right\} = \int_۰^t \mathcal{L}^{-۱}\{sF(s)\}\, d\tau = \int_۰^t \frac{۱}{۲}\sin ۲\tau d\tau$$
$$= -\frac{۱}{۴}\cos ۲\tau\Big|_۰^t = \frac{۱}{۴}(۱-\cos ۲t).$$

قضیه ۲ ـ ۳۷. **(مشتق تبدیل)** *اگر $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ باشد آنگاه $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$. در حالت کلی $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$.*

برهان. قبلاً دیدیم در $F(s) = \int_۰^\infty e^{-st}f(t)dt$ جای $\int$ و $\frac{\partial}{\partial s}$ را می‌توان عوض کرد. درنتیجه $F'(s) = \int_۰^\infty (-t)e^{-st}f(t)dt$. حالت کلی با استقرا نتیجه می‌گردد. ■

مثال ۲ ـ ۱۰.

$$\mathcal{L}\{t\sin ۲t\} = -F'(s) = \frac{۴s}{(s^۲+۴)^۲}.$$

قضیه ۲ ـ ۳۸. **(انتقال تبدیل)** *اگر $c \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c).$$

برهان.

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = F(s-c).$$

■

قضیه ۲ ـ ۳۹. (انتقال دوم) *اگر $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ باشد آنگاه، برای $a \geq 0$ داریم:*

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u_a(t)\right\} = e^{-as}F(s).$$

برهان. داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t-a)u_a(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u_a(t)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(x+a)}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sa}e^{-sx}f(x)dx \\ &= e^{-sa}F(s).\end{aligned}$$

■

تذکر ۲ ـ ۴۰. برای $a \geq 0$ داریم، $\mathcal{L}\left\{f(t)u_a(t)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t+a)\right\}$. همچنین اگر تابع $f(t) = 1$ تابع ثابت باشد، آنگاه $\mathcal{L}\left\{u_a(t)\right\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$.

مثال ۲ ـ ۱۱. برای محاسبهٔ

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{(t^2 - 3t + 2)\big(u_1(t) - u_2(t)\big)\right\}.$$

می‌توان بدین صورت عمل کرد:

$$f(t) = (t^2 - 3t + 2)u_1(t) = \big((t-1)^2 - (t-1)\big)u_1(t)$$

$$g(t) = (t^2 - 3t + 2)u_2(t) = \big((t-2)^2 + (t-2)\big)u_2(t)$$

$$\begin{aligned}F(s) &= \mathcal{L}\left\{f(t) - g(t)\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\left\{t^2 - t\right\} - e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2 + t\} \\ &= e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\Big) - e^{-2s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2}\Big).\end{aligned}$$

در حالتی‌که $f(t)$ تابع متناوب باشد، آن را می‌توان به‌صورت یک سری از توابع پله‌ای نمایش داد. در این‌صورت تبدیل لاپلاس آن به‌سادگی به‌دست می‌آید. این مطلب در قضیهٔ زیر نشان داده شده است.

قضیه ۲ ـ ۴۱. *فرض کنید $f(t)$ تابعی تناوبی با دوره تناوب $T > 0$، قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی باشد، در این‌صورت:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}.$$

برهان. ابتدا توجه کنید $f(t)$ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)\big(u_{nT}(t) - u_{(n+1)T}(t)\big).$$

پس:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - nT)\big(u_{nt}(t) - u_{(n+1)T}(t)\big)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(x)\big(u_0(x) - u_T(x)\big)e^{-s(x+nT)}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} \int_0^T f(x)e^{-sx}dx \qquad (s > 0) \\
&= \int_0^T f(x)e^{-sx}dx \frac{1}{1 - e^{-sT}}.
\end{aligned}$$

■

مثال ۲ ـ ۱۲. برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس تابع متناوب $f(t) = t$ ، $0 \le t \le 2$ و $f(t+2) = f(t)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
f(t) &= t\big(u_0(t) - u_2(t)\big) + (t-2)\big(u_2(t) - u_4(t)\big) + \cdots \\
&\quad + (t - 2n)\big(u_{2n}(t) - u_{2n+2}(t)\big) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(t - 2n)\big(u_{2n}(t) - u_{2n+2}(t)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(t - 2n)u_{2n}(t) - \sum_{n=0}^{\infty}(t - 2n)u_{2n+2}(t)
\end{aligned}$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-2ns}}{s^2} - e^{-2(n+1)s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)\right) \\
&= \frac{1}{s^2(1 - e^{-2s})} - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)\frac{e^{-2s}}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s(1 - e^{-2s})}.
\end{aligned}$$

قضیه ۲ ـ ۴۲. **(انتگرال تبدیل)** *اگر $f(t)$ بر $[0,\infty)$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی و $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ موجود و $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds.$$

برهان. داریم:

$$\int_s^\infty F(s)ds=\int_s^\infty\Big(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big)ds=\int_0^\infty\Big(\int_s^\infty f(t)e^{-st}ds\Big)dt$$
$$=\int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-t}\Big|_s^\infty dt=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$$

■

مثال ۲ ـ ۱۳. تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin t}{t}$ بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty\mathcal{L}\{\sin t\}\,ds=\int_s^\infty\frac{ds}{s^2+1}=\tan^{-1}s\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s.$$

قضیه ۲ ـ ۴۳. **(انبساط)** *اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ و $c>0$ باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\frac{1}{c}F\Big(\frac{s}{c}\Big)$$

برهان. داریم:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(ct)dt=\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}x}f(x)dx=\frac{1}{c}F\Big(\frac{s}{c}\Big).$$

■

نتیجه ۲ ـ ۴۴. اگر $a>0$ و $b\in\mathbb{R}$ و $\mathcal{L}\{f(t)\}$ باشد، آنگاه:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\frac{b}{a}t}f\Big(\frac{t}{a}\Big)\right\}=aF(as+b).$$

برهان.

$$\mathcal{L}\left\{e^{-b\frac{t}{a}}f\Big(\frac{t}{a}\Big)\right\}=a\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\}\Big|_{as}=aF(s+b)\Big|_{as}=aF(as+b).$$

■

مثال ۲ ـ ۱۴. برای محاسبهٔ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9s^2-12s+3}\right\}$ می‌توان قرار داد: $\frac{1}{9s^2-12s+3} = \frac{1}{(3s-2)^2-1}$ و سپس با گرفتن $a=3$ و $b=-2$ داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9s^2-12s+3}\right\} = \frac{e^{\frac{2}{3}t}}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}\Big|_{\frac{t}{3}} = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}t}\sin\frac{t}{3}.$$

در بخش ۲ ـ ۲ کانولوشن دو تابع تعریف شد. در آنجا دیدیم که تبدیل فوریهٔ کانولوشن دو تابع برابر حاصل‌ضرب تبدیل فوریهٔ دو تابع است. در اینجا کانولوشن دو تابع، با کمی اختلاف با تعریف قبلی بیان می‌شود. دلیل این امر این است که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع، حاصل‌ضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع شود.

تعریف ۲ ـ ۴۵. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع قطعه قطعه پیوسته روی $[0,\infty)$ باشد، کانولوشن آن دو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx.$$

این تعریف کانولوشن نیز تمام خواصی که در بخش ۲ ـ ۲ ذکر شده است را داراست.

قضیه ۲ ـ ۴۶. *اگر* $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ *و* $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ *باشد، آنگاه:*

$$\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)G(s).$$

برهان.

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-sy}g(y)dy\right)\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}f(x)g(y)dydx\\
&= \int_0^\infty\int_x^\infty e^{-st}f(x)g(t-x)dtdx\\
&= \int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(x)g(t-x)dxdt\\
&= \int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)dt\\
&= \mathcal{L}\{f*g\}.
\end{aligned}$$

■

مثال ۲ ـ ۱۵. برای محاسبهٔ تبدیل وارون لاپلاس $\frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$ می‌توان بدین ترتیب عمل نمود:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\} &= \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۱}\right\} * \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}\\
&= \sin t * \cos t = \int_{۰}^{t} \sin(t-x)\cos x dx\\
&= \int_{۰}^{t} \sin t \cos^{۲} x - \sin x \cos t \cos x dx\\
&= \sin t \int_{۰}^{t} \frac{۱+\cos ۲x}{۲} dx - \cos t \int_{۰}^{t} \frac{\sin ۲x}{۲} dx\\
&= \frac{۱}{۲} t \sin t + \frac{۱}{۴}\sin t \sin ۲t + \frac{۱}{۴}\cos t \cos ۲t - \frac{۱}{۴}\cos t\\
&= \frac{۱}{۲} t \sin t.
\end{aligned}$$

اگر $P_\varepsilon(t)$ تابع ضربه به مرکز a باشد، یعنی

$$P_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲\varepsilon} & |t-a| < \varepsilon \\ ۰ & |t-a| > \varepsilon \end{cases}$$

آنگاه تبدیل لاپلاس آن به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}\{P_\varepsilon(t)\} = \frac{۱}{۲\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{۲\varepsilon s}\left(e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}\right) = e^{-as}\cdot\frac{\sinh(\varepsilon s)}{\varepsilon s}.$$

در این‌صورت وقتی $\varepsilon \to ۰$، نتیجه می‌شود که تبدیل لاپلاس تابع دلتای دیراک عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}.$$

با توجه به تذکر ۲ ـ ۴۰ نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}u_a(t) = \int_a^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}.$$

این رابطه را با قضیهٔ ۲ ـ ۲۹ مقایسه کنید. می‌توان این‌طور تصور کرد که تابع $\delta(t-a)$ مشتق $u_a(t)$ است.

تمرین ۲ ـ ۴

۱. تبدیل لاپلاس توابع زیر را به‌دست آورید:

الف) $\sinh at$　　ب) $\cosh at$

پ) $e^{at}\sin\omega t$　　ت) $e^{at}\cos\omega t$

ث) $\sqrt{t}$　　ج) $\sqrt{\frac{1}{t}}$

چ) $f(t)=\sin t$ برای $0<t<\pi$ و $f(t+\pi)=f(t)$

ح) $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 2-t & 1<t<2 \end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$

خ) $f(t)=n$ برای $na<t<(n+1)a$ و $n=0,1,2,\cdots$

د) تابع بسل

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{t}{2})^{n+2k}$$

که جواب معادلهٔ $t^2Y''+tY'+(t^2-n^2)Y=0$ است.

۲. تبدیل وارون لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\dfrac{s}{(s^2+1)(s+1)^2}$　　ب) $\dfrac{1}{s(s^2-2s+2)}$

پ) $\ln(1+\dfrac{a^2}{s^2})$　　ت) $\ln(1-\dfrac{a^2}{s^2})$

۳. نشان دهید که تابع $f(t)=\sin(e^{t^2})$ از مرتبهٔ نمایی است اما مشتق آن این چنین نیست. به کمک قضیهٔ ۲ ـ ۲۹ نشان دهید تبدیل لاپلاس f' وجود دارد و آن را محاسبه کنید، هرچند f' از مرتبهٔ نمایی نیست.

۴. ثابت کنید که اگر تابع f قطعه قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی باشد، آنگاه $\int_T^t f(\tau)d\tau$ نیز پیوسته و از مرتبهٔ نمایی است.

۵. جواب عمومی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$y''+2y'+y=xe^{-2x}\cos 3x+\frac{\sin x}{x}.$$

۶. مسائل با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} y''+y=t \\ y(۰)=۱ \quad \text{و} \quad y'(\pi)=۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} y''+۲u_{۱}(t)y'+y=۱ \\ y(۰)=۱ \quad \text{و} \quad y'(۰)=۲ \end{cases}$

۲ ـ ۵ تبدیل وارون لاپلاس

در این بخش فرض می‌کنیم که در فرمول تبدیل لاپلاس، s یک متغیر مختلط است. در این‌صورت اگر $f(t)$ تابعی حقیقی باشد تبدیل لاپلاس آن، $F(s)$، یک تابع تحلیلی است. (تمرین)

$$F(s)=\int_{۰}^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

با این توصیف قضایای زیر که بدون اثبات بیان می‌شوند، فرمول تبدیل وارون لاپلاس را ارائه می‌دهند.

قضیه ۲ ـ ۴۷. *اگر $F(s)$ تابعی تحلیلی بوده و برای هر s $(s=x+iy)$ در نیم‌صفحه $x\geq\alpha$ از مرتبهٔ $O(s^{-k})$ برای $k>۱$ باشد. همچنین $F(x)$ برای مقادیر حقیقی $x\geq\alpha$، حقیقی باشد. آنگاه برای هر مقدار حقیقی t، انتگرال زیر برای مقادیر $\gamma\geq\alpha$ به عدد $f(t)$ همگراست و مقدار $f(t)$ مستقل از γ است.*

$$f(t)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tz}F(z)dz \tag{۲ ـ ۲۱}$$

در این‌صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)$ است:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s),$$

به‌علاوه $f(t)$ پیوسته و از مرتبهٔ $O(e^{\alpha t})$ است و

$$f(t)=۰, \qquad t\leq ۰.$$

تذکر ۲ ـ ۴۸. منظور از انتگرال فوق عبارت است از:

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} e^{tz}F(z)dz=\frac{e^{\gamma t}}{۲\pi}\lim_{\beta\to\infty}\int_{-\beta}^{\beta} e^{iyt}F(\gamma+iy)dy.$$

قضیهٔ فوق فرمول تبدیل وارون را در شرایط خاصی از $F(s)$ بیان می‌کند. قضیهٔ زیر شرایطی را برای $f(t)$ بیان می‌کند که در آن شرایط فرمول (۲ ـ ۲۱) تبدیل وارون $F(s)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۲ ـ ۴۹. *اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد که $f(t)$ از مرتبهٔ نمایی $O(e^{\alpha t})$ است و مشتق آن f' روی هر بازهٔ $0 < t < T$ قطعه قطعه پیوسته است، آنگاه فرمول انتگرال (۲ ـ ۲۱) روی هر خط $\operatorname{Re} z = \gamma$، که $\gamma > \alpha$، همگراست و*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{tz} F(z) dz,$$

در نقاطی که f ناپیوسته است، مقدار انتگرال برابر میانگین حد چپ و راست f در آن نقطه است. همچنین برای مقادیر $t < 0$، مقدار انتگرال برابر صفر و در نقطهٔ $t = 0$ برابر $\frac{1}{2} f(0+)$ است.

نتیجه ۲ ـ ۵۰. اگر $F(s)$ را به‌صورت و

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s),$$

بتوان نوشت که F_1 در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۴۷ صدق کند و $F_2(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f_2(t)$ باشد که f_2 در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۴۹ صادق است، آنگاه فرمول (۲ ـ ۲۱) تبدیل وارون $F(s)$ را نشان می‌دهد.

مثال ۲ ـ ۱۶. فرض کنید $\sqrt{s}$ برابر مقدار $\sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}}$ است که $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ و $s = re^{i\theta}$. برای محاسبهٔ تبدیل وارون:

$$F(s) = \frac{\sqrt{s}}{s\sqrt{s} + 1},$$

نمی‌توان از قضیهٔ ۲ ـ ۴۷ استفاده کرد. زیرا هر چند F تحلیلی است ولی از مرتبهٔ $O(\frac{1}{s})$ است. اما می‌توان آن را به دو مؤلفه تقسیم کرد یعنی:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2\sqrt{s} + s},$$

تابع $\frac{1}{s}$ تبدیل لاپلاس تابع ثابت ۱ است و تابع $\frac{1}{s^2\sqrt{s} + s}$ از مرتبهٔ $O(s^{-\frac{5}{2}})$ است. بنابر نتیجهٔ ۲ ـ ۵۰، فرمول انتگرال وارون، تبدیل وارون تابع لاپلاس F را نشان می‌دهد.

برای محاسبهٔ فرمول انتگرال وارون (۲ ـ ۲۱) می‌توان از مانده قطب‌های تابع F استفاده کرد. قبل از بیان این مطلب مرور مختصری بر تعریف قطب و مانده آن می‌کنیم.

نقطهٔ $z_\circ$ را نقطهٔ تکین تابع $f(z)$ گویند، هرگاه در آن نقطه تابع تحلیلی نباشد. اگر عدد صحیح m وجود داشته باشد که تابع $(z-z_\circ)^m f(z)$ در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشد، در این حالت $z_\circ$ را قطب تابع f گویند. اگر m کوچک‌ترین عددی باشد که این تابع تحلیلی است، $z_\circ$ را قطب مرتبهٔ m گویند. قطب‌های مرتبهٔ اول را قطب ساده نیز می‌نامند. اگر نقطهٔ تکین $z_\circ$ درون منحنی بسته و سادهٔ C قرار داشته باشد و تابع f در درون و روی منحنی C به غیر از نقطهٔ $z_\circ$ در بقیهٔ نقاط تحلیلی باشد، مقدار انتگرال زیر مانده تابع f در نقطهٔ $z_\circ$ نامیده می‌شود:

$$\operatorname{Res}_{z=z_\circ} f(z) := \oint_C f(z)dz,$$

مانده توابع تحلیلی کاربرد زیادی در محاسبهٔ انتگرال‌ها دارد. قضیهٔ زیر شیوهٔ استفادهٔ آنها را نشان می‌دهد.

قضیه ۲ ـ ۵۱. *اگر $f(z)$ در درون و روی منحنی بسته و سادهٔ C به غیر از تعداد متناهی نقطهٔ تکین $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n در بقیهٔ نقاط تحلیلی باشد، آنگاه:*

$$\oint_C f(z)dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

وقتی نقطهٔ تکین قطب باشد، ماندهٔ آن به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

الف) اگر $z_\circ$ قطب ساده باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \lim_{z\to z_\circ} \big((z-z_\circ)f(z)\big),$$

در این حالت اگر $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ باشد که $p(z)$ و $q(z)$ در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی هستند و $q'(z_\circ)\neq \circ$، $q(z_\circ)=\circ$، $p(z_\circ)\neq\circ$ آنگاه $z_\circ$ قطب سادهٔ f است و

$$\operatorname{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}.$$

ب) اگر $z_\circ$ قطب مرتبهٔ m باشد، آنگاه

$$\operatorname{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \frac{۱}{(m-۱)!}\lim_{z\to z_\circ} \frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}\big((z-z_\circ)^m f(z)\big).$$

مثال ۲ ـ ۱۷. نقاط $z_n = n\pi + \frac{\pi}{۲}$ قطب‌های سادهٔ تابع $f(z) = \frac{\tan z}{z^۳}$ هستند، زیرا با قرار دادن $p(z) = \frac{\sin z}{z^۳}$ و $q(z) = \cos z$ داریم:

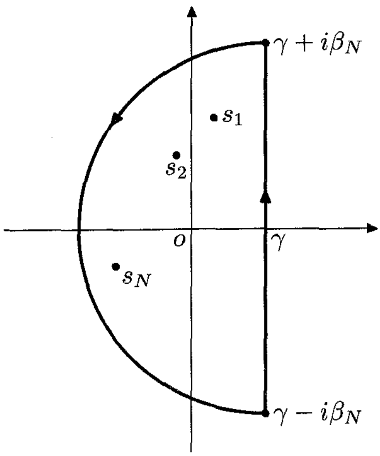
$$p(z_n) \neq ۰, \quad q(z_n) = ۰, \quad q'(z_n) = \sin z_n \neq ۰$$

$$\text{Res}_{z=z_n} f(z) = \frac{p(z_n)}{q'(z_n)} = \frac{\sin z_n}{z_n^۳ \sin z_n} = \frac{۱}{(n\pi + \frac{\pi}{۲})^۳}$$

همچنین $z = ۰$ قطب مرتبهٔ ۲ تابع f است، زیرا $z^۲ f(z) = \frac{\tan z}{z} = \frac{z + \frac{z^۳}{۳} + \frac{۲z^۵}{۱۵} + \cdots}{z}$ در $z = ۰$ تحلیلی است. در ضمنماندهٔ تابع در این نقطه برابر است با:

$$\text{Res}_{z=۰} f(z) = \lim_{z\to ۰} \left(z^۲ f(z)\right)' = \lim_{z \to ۰} \left(z^۲ + \frac{۲z^۴}{۳} + \cdots\right) = ۰.$$

اکنون به ادامهٔ بحث می‌پردازیم. فرض کنید تابع $F(s)$ در نیم‌صفحهٔ $\text{Re}\, s \geq \alpha$ تحلیلی باشد. از طرفی e^{tz} در سرتاسر صفحهٔ مختلط تحلیلی است. بنابراین قطب‌های $e^{tz}F(z)$، همان قطب‌های $F(z)$ است که در نیم‌صفحهٔ $\text{Re}\, z < \alpha$ واقع‌اند. اگر این نقاط $s_۱, s_۲, s_۳, \ldots$ باشند، برای مقدار ثابت t، $\rho_n(t)$ را ماندهٔ $e^{tz}F(z)$ در نقطهٔ s_n تعریف می‌کنیم.



نمودار ۲ ـ ۳.

فرض کنید C نیم‌دایره به شعاع β و به مرکز $z = \gamma$ باشد. این نیم‌دایره خط $x = \gamma$ را در نقاط $\gamma \pm i\beta$ قطع می‌کند (شکل ۲ ـ ۳). اگر قطب‌های موجود در این نیم‌دایره نقاط $s_۱, \ldots, s_N$

باشند، آنگاه:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} e^{tz}F(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{tz}F(z)dz = \sum_{n=1}^{N}\rho_n(t) \qquad (۲ ـ ۲۲)$$

اگر $\beta \to \infty$، انتگرال اول به فرمول انتگرال وارون (۲ ـ ۲۱) میل می‌کند. همچنین با فرض اینکه $F(z)$ از مرتبهٔ $O(z^{-k})$ برای $k > 1$ است، انتگرال دوم به صفر میل می‌کند. زیرا در این‌صورت مقدار ثابت M وجود دارد که:

$$|F(z)| < \frac{M}{|z|^k},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\left|\int_C e^{tz}F(z)dz\right| &\le \int_C |e^{tz}F(z)dz| \\
&\le \int_C e^{t\,\mathrm{Re}\,z}\frac{M}{|z|^k}|dz| \\
&\le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{t(\gamma+\beta\cos\theta)}\frac{M}{(\beta-\gamma)^k}\beta d\theta \\
&\le \frac{e^{t\gamma}M\beta}{(\beta-\gamma)^k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{t\beta\cos\theta}d\theta \\
&\le \frac{e^{t\gamma}M\beta\pi}{(\beta-\gamma)^k} \to 0, \qquad \text{وقتی } \beta \to \infty،
\end{aligned}$$

نامساوی اخیر به‌علت اینکه $\cos\theta \le 0$ برای مقادیر $t \ge 0$ برقرار است. بنابراین وقتی $\beta \to \infty$ عبارت (۲ ـ ۲۲) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود، زیرا با بزرگ شدن β، نیم‌دایره C تمام قطب‌های تابع $F(z)$ را دربر می‌گیرد.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tz}F(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(t).$$

قضیه ۲ ـ ۵۲. *اگر تابع $F(z)$ در شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۴۷ صدق کند و دنبالهٔ نقاط s_n قطب‌های آن باشد، آنگاه تابع*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(t),$$

برابر مقدار انتگرال فرمول (۲ ـ ۲۱) بوده و:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

مثال ۲ ـ ۱۸. اگر $F(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$، قطب‌های آن عبارت اند از: $z=\pm i$ و

$$\rho_{1,2}(t)=\operatorname{Res}_{z=\pm i}\Big(\frac{e^{tz}}{z^2+1}\Big)=\pm\frac{\pi e^{\pm i}}{2i},$$

بنابراین:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\rho_1(t)+\rho_2(t)=\sin t.$$

مثال ۲ ـ ۱۹. برای محاسبهٔ تبدیل وارون تابع $F(s)=\dfrac{\tanh(s)}{s}$ توجه کنید که قطب‌های آن عبارت اند از: $z=(n+\frac{1}{2})\pi i$ برای $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. در این صورت:

$$\operatorname{Res}_{z=(n+\frac{1}{2})\pi i}\left(\frac{e^{tz}\sinh(z)}{z\cosh(z)}\right)=\frac{e^{t(n+\frac{1}{2})\pi i}}{(n+\frac{1}{2})\pi i},$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}
f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tanh(s)}{s}\right\}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{t(n+\frac{1}{2})\pi i}}{(n+\frac{1}{2})\pi i}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{t(n+\frac{1}{2})\pi i}-e^{-t(n+\frac{1}{2})\pi i}}{(n+\frac{1}{2})\pi i}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\sin(t(n+\frac{1}{2})\pi)}{(2n+1)\pi}.
\end{aligned}$$

تمرین ۲ ـ ۵

۱. تبدیل وارون توابع زیر را با فرمول انتگرال مختلط محاسبه کنید:

الف) $\dfrac{s}{s^2+a^2}$ ب) $\dfrac{1}{s^2-1}$

پ) $\dfrac{1}{s^5(s^2+1)}$ ت) $\dfrac{1}{s(e^s+1)}$

ث) $\dfrac{1}{s^2\sinh s}$ ج) $\dfrac{1}{s\cosh s}$

۳

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و همگن روی میدان کران‌دار

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مسائل فیزیک، مهندسی و سایر علوم که به متغیرهای زمان و مکان وابسته‌اند، با به‌کارگیری قوانین حاکم، پدید می‌آیند. از معروف‌ترین آنها، معادلهٔ موج، معادلهٔ انتقال حرارت، معادلهٔ لاپلاس، معادلهٔ پواسن و معادلهٔ شرودینگر را می‌توان نام برد. در این فصل به بررسی و حل اینگونه معادلات روی میدان مکان کراندار می‌پردازیم. حل مسائل روی میدان بیکران در فصول آینده می‌آید. این تفکیک به علت تفاوت روش‌های حل و ابزارهای آن صورت می‌گیرد.

در بخش ۳ ـ ۱ به بیان مفاهیم اولیه می‌پردازیم. در بخش ۳ ـ ۲ حل مسائلی را با استفاده از سری فوریه خواهیم دید. در بخش ۳ ـ ۳ به معرفی روش جداسازی می‌پردازیم. بخش ۳ ـ ۴ به مسائل اشترم ـ لیوویل اختصاص دارد.

۳ ـ ۱ مفاهیم اولیه

در این بخش بعد از معرفی مفاهیم اولیه در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی به بیان خواصی مقدماتی از آن می‌پردازیم.

فرض کنید u یک تابع از متغیرهای مستقل x، y، z و t باشد. مشتق نسبی، پاره‌ای یا جزئی u را نسبت به x در نقطهٔ (x, y, z, t) با:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h}$$

تعریف می‌کنیم و با $\frac{\partial u}{\partial x}$ یا u_x یا $D_x u$ نشان می‌دهیم، مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. به‌صورت مشابه مشتق نسبی نسبت به سایر متغیرها قابل بیان است و با نمادی مشابه نشان داده می‌شود. نظر به‌اینکه u_x خود تابعی از x، y، z و t است پس $(u_x)_x$ می‌تواند موجود باشد که آن را با u_{xx} نشان می‌دهند و مشتق مرتبهٔ دوم u دوبار نسبت به x خوانده می‌شود. به‌صورت مشابه نمادهای زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = u_{xx}, \ \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \ \frac{\partial^۳ u}{\partial x^۳} = u_{xxx}, \dots$$

اگر کلیهٔ مشتقات u نسبت به کلیهٔ متغیرهای مستقل آن تا مرتبهٔ m ام روی یک ناحیه مانند Ω موجود باشد، می‌گویند u در کلاس $C^m(\Omega)$ قرار دارد.

یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ m عبارت از معادله‌ای است که مجهول آن یک تابع دو متغیره یا بیشتر است و حداقل مشتق نسبی نسبت به دوتا از متغیرهای مستقل در معادله ظاهر شده باشد و یکی از این مشتقات از مرتبهٔ m باشد و مشتق بالاتر از m در آن ظاهر نشده باشد.

مثال ۳ ـ ۱. معادلهٔ $u_{xy} + u_x u_{yy} + u_x^۴ + ۴u^۲ = \sin xy$ یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ دوم است.

تذکر ۳ ـ ۱. توجه کنید در معادلهٔ $u_{xx} + ۲u_x + u = \sin xy$ تابع مجهول u تابعی دو متغیره از متغیرهای x و y است. لیکن چون در این معادله مشتق نسبی فقط نسبت به متغیر x ظاهر شده است پس y نقش پارامتر را دارد و عملاً u تابعی از متغیر x و معادلهٔ دیفرانسیل عادی است.

بدین‌ترتیب یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$F\Big(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots\Big) = 0, \qquad (۳ ـ ۱)$$

که F تابعی از متغیرهای مستقل x، y، ... و تابع مجهول u و تعداد متناهی از مشتقات u است. معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۳ ـ ۱) را خطی گوییم اگر تابع F نسبت به هر یک از متغیرهای u، u_x، u_y، ... خطی باشد. به‌عبارت دیگر این معادله را به‌صورتی بتوان نوشت که یک طرف تساوی از ترکیبی خطی از خود تابع مجهول و مشتقات آن با ضرایبی از توابعی از متغیرهای مستقل تشکیل شده باشد و طرف دوم معادله فقط تابعی از متغیرهای مستقل باشد. با استفاده از نماد لُرنس معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی از مرتبهٔ m ام با تابع مجهول u و متغیرهای مستقل t، x، y و z را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(t, x, y, z) D^\alpha u = f(t, x, y, z), \qquad (۳ ـ ۲)$$

که در آن $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\alpha_j = 0, 1, 2, \dots$، $D = (D_0, D_1, D_2, D_3)$، $D^0 u = u$، $D^\alpha u = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3} u = \dfrac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}} \dfrac{\partial^{\alpha_3}}{\partial z^{\alpha_3}} u$، $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ و $A_\alpha(t, x, y, z)$ یک تابع مشخص است.

با توجه به مطالب فوق صورت کلی یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی از دو متغیر t و x عبارت است از:

$$A_{20}(t, x) u_{tt} + A_{11}(t, x) u_{tx} + A_{02}(t, x) u_{xx}$$
$$+ A_{10}(t, x) u_t + A_{01}(t, x) u_x + A_{00}(t, x) u = f(t, x)$$

اگر در معادلهٔ (۳ ـ ۲) داشته باشیم $f(t, x, y, z) \equiv 0$، معادله را همگن گویند، در غیر این صورت ناهمگن یا غیر همگن گفته می‌شود.

معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مشهور و کلاسیک عبارت‌اند از:

۱. معادلهٔ یک‌بعدی گرما یا انتقال حرارت، c ثابت است. $\qquad u_t = c^2 u_{xx},$

۲. معادلهٔ موج یک‌بعدی، تار مرتعش، c ثابت است. $\qquad u_{tt} = c^2 u_{xx},$

۳. معادلهٔ دوبعدی گرما، c ثابت است. $\qquad u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}),$

۴. معادلهٔ موج دوبعدی، c ثابت است. $\qquad u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}),$

۵. معادلهٔ لاپلاس دوبعدی. $\qquad u_{xx} + u_{yy} = 0,$

۶. معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در مختصات قطبی. $\qquad u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$

۷. معادلهٔ پواسن. $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y),$

۸. معادلهٔ حرارت سه‌بعدی، c ثابت است. $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$

۹. معادلهٔ موج سه‌بعدی، c ثابت است. $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$

۱۰. معادلهٔ تلگراف، α و β ثابت است. $u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u,$

متغیر t در معادلات دیفرانسیل جزئی به‌عنوان متغیر زمان ظاهر می‌گردد و همواره غیرمنفی است. همچنین متغیرهای x، y و z به‌عنوان متغیرهای مکان ظاهر می‌گردد و (x,y,z) یک نقطه از فضاست. در یک معادلهٔ جزئی این متغیرها در یک مجموعهٔ باز و همبند مانند Ω با مرز S از فضای سه‌بعدی قرار دارد. تابع u را یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ m روی میدان Ω گوییم، اگر کلیهٔ مشتقات u تا مرتبهٔ m ام نسبت به کلیهٔ متغیرهای مستقل موجود و پیوسته باشد و در معادله صدق کند.

مثال ۳ ـ ۲. هر یک از توابع $e^x \cos y$، $e^y \sin x$، $x^2 - y^2$ و xy یک جواب معادلهٔ لاپلاس است.

تذکر ۳ ـ ۲. برای حل معادلات دیفرانسیل عادی معمولاً به دنبال جواب عمومی آن هستیم، اما در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی تعیین جواب عمومی همیشه امکان‌پذیر نیست. چنانچه چنین جوابی نیز موجود باشد، و معادله از مرتبهٔ m باشد در این صورت اینگونه جواب‌ها شامل m تابع اختیاری است. انتخاب جواب مطلوب از این جواب عمومی بسیار مشکل و در اکثر مسائل غیرممکن است. در حقیقت تعیین جواب عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی در صورتی مقدور است که بتوان با تغییر تابع مجهول، آن را به یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی تبدیل کرد و حل آن معادلهٔ دیفرانسیل عادی مقدور باشد.

مثال ۳ ـ ۳. مطلوب است حل $u_{xy} + u_x = e^x \sin y$

حل. ابتدا می‌گیریم $u_x = v$، در این صورت معادله به‌صورت زیر در می‌آید.

$$v_y + v = e^x \sin y.$$

این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی با تابع مجهول v و متغیر مستقل y است. نماد x به‌عنوان یک پارامتر ظاهر شده‌است. جواب عمومی آن عبارت است از:

$$v = c(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y,$$

بدیهی است ثابت انتگرال یعنی $c(x)$ به پارامتر x وابسته است. پس داریم:

$$u_x = c(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y,$$

یا:

$$u(x,y) = c_1(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y + c_2(y).$$

تذکر۳ ـ ۳. با توجه به مثال فوق، متغیرهای مستقل تابع مجهول را در یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی متغیرهایی که مشتق نسبی تابع مجهول نسبت به آنها در معادله ظاهر شده است، می‌شناسیم و بقیه متغیرهای ظاهر شده در معادله را به‌عنوان پارامتر منظور می‌کنیم.

مثال۳ ـ ۴. معادلهٔ خطی از مرتبهٔ دوم $u_{xx} + u_{xy} + tu_x - 2zu = e^{xt}\sin yz$ را درنظر بگیرید. متغیرهای مستقل این معادله x و y هستند و t و z به‌عنوان پارامتر منظور می‌گردند. البته u تابعی از هر چهار متغیر x، y، z و t است.

همان‌طور که از مثال‌های فوق مشاهده می‌گردد، یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی که یک مدل فیزیکی را بیان می‌کند، معمولاً بینهایت جواب دارد. برای انتخاب جوابی که نمایش دهنده جواب فیزیکی مسئله باشد، باید شرایط دیگر جواب را از مسئلهٔ فیزیکی استخراج و همراه با معادله منظور کنیم. این نوع شرایط را شرایط تکمیلی گویند که بر دو نوع است.

نوع اول: تابع مجهول باید برای $t \geq 0$ تعریف شود. در این صورت از روی شرایط فیزیکی، تابع مجهول و مشتقات آن تا مرتبهٔ $m - 1$ در $t = 0$ داده شده است. اینگونه شرایط را شرایط اولیه گویند.

نوع دوم: تابع مجهول باید روی میدانی مانند Ω از فضا تعریف شود. در این صورت مقدار این تابع یا مشتق جهت‌دار آن و یا ترکیبی خطی از این دو در روی مرز Ω قابل تعیین است و همراه با معادلهٔ داده می‌شود. اینگونه شرایط را شرایط مرزی گویند.

چنانچه شرایط مرزی فقط برحسب مقدار تابع مجهول بر روی مرز میدان مکان داده شده باشد، آن را شرط مرزی دیریکله گویند. اگر شرایط مرزی فقط برحسب مشتق تابع مجهول در جهت بردار نرمال بر روی مرز میدان مکان داده شده باشد، آن را شرط مرزی نیومن نامند. همچنین اگر شرایط مرزی در قسمت‌هایی از مرز برحسب تابع مجهول و در قسمت‌های دیگر برحسب مشتق در جهت نرمال داده شده باشد، آن را شرط مرزی روبین گویند. اگر میدان مکان یک بازهٔ متناهی باشد و تفاضل مقدار تابع و مشتق آن در دو طرف بازه، مشخص شده

باشد، شرط مرزی تناوبی نامیده می‌شود.

مثال۳ ـ ۵. تاری را به‌طول p در نظر بگیرید که بین دو نقطهٔ $\circ$ و p در امتداد محور x ها کشیده شده است. جابه‌جایی نقطهٔ x از تار در لحظهٔ t از حالت سکون را با $u(x,t)$ نشان می‌دهیم. در لحظهٔ $t = \circ$ تار از حالت سکون خارج و نقطهٔ x را تا نقطهٔ $f(x)$ جابه‌جا و با سرعت $g(x)$ رها می‌کنیم. با استفاده از قانون حرکت نیوتن معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_{tt} = c^{۲} u_{xx}$$

دو انتهای تار همواره ثابت و بر محور x ها واقع است، یعنی برای کلیهٔ مقادیر $t \geq \circ$ داریم:

$$u(\circ, t) = \circ \qquad \text{و} \qquad u(p, t) = \circ$$

چون $\circ < x < p$ است، پس $\circ$ و p مرز میدان مکان و شرایط فوق شرایط مرزی مسئله است، که یک شرط مرزی دیریکله است. در لحظهٔ $t = \circ$ منحنی تار و سرعت هر نقطه از آن داده شده است، یعنی

$$u(x, \circ) = f(x) \qquad \text{و} \qquad u_t(x, \circ) = g(x)$$

این شرایط همان شرایط اولیهٔ مسئله است. اگر شرط مرزی به صورت زیر تغییر کند،

$$u(\circ, t) - u(p, t) = \circ \qquad \text{و} \qquad u_x(\circ, t) - u_x(p, t) = \circ$$

یک شرط مرزی تناوبی خواهد بود.

تذکر۳ ـ ۴. چنانچه میدان بی‌کران باشد شرایط مرزی در بینهایت به‌صورت حد بیان می‌گردد.

یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همراه با شرایط اولیه و مرزی، یک مسئلهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی نامیده می‌شود. یک مسئلهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی را خوش طرح گویند، اگر شرایط زیر برای این مسئله برقرار باشد.

الف) برای مسئله، حداقل یک جواب وجود داشته باشد. (وجود جواب)

ب) مسئله تنها یک جواب داشته باشد. (یکتایی جواب)

ج) جواب یگانهٔ مسئله نسبت به شرایط تکمیلی به‌صورت پیوسته تغییر کند. (پایداری جواب)

هدف ما بحث بر خوش‌طرحی مسائل مطرح شده نیست، بلکه بر تکنیک‌ها و ابزارهای حل مسائل تمرکز می‌کنیم. به همین دلیل، همواره فرض بر این می‌گذاریم که مسائل خوش‌طرح هستند. در این‌جا چند خاصیت از معادلات دیفرانسیل عادی را که برای معادلات با مشتقات جزئی نیز برقرار است، بیان می‌کنیم. اثبات آنها به‌راحتی با جایگذاری در معادله به‌دست می‌آید.

خاصیت ۱: اگر $u_۱$، ...، u_n جواب‌های یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی همگن و $c_۱$، ...، c_n، مقادیری ثابت باشد، آنگاه $\sum_{k=۱}^{n} c_k u_k$ نیز یک جواب این معادله است.

خاصیت ۲: اگر u_p یک جواب معادلهٔ خطی غیرهمگن (۳ ـ ۲) و u_c یک جواب معادلهٔ همگن وابسته به آن باشد، آنگاه $u_c + u_p$ یک جواب دیگر معادلهٔ (۳ ـ ۲) است.

خاصیت ۳: اگر u_{p_k} یک جواب معادلهٔ (۳ ـ ۲) به‌ازای $f = f_k$ برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ باشد، آنگاه $\sum_{k=۱}^{n} u_{p_k}$ یک جواب معادلهٔ (۳ ـ ۲) به‌ازای $f = \sum_{k=۱}^{n} f_k$ است.

تذکر۳ ـ ۵. اگر در خاصیت ۱ یا خاصیت ۳ مقدار n برابر بینهایت گردد، این مطالب برقرار نخواهد بود، حتی وقتی‌که سری‌های مربوط همگرا باشند. اما در حالت همگرایی یکنواخت این دو خاصیت برای $n = \infty$ هم‌چنان برقرار است. به‌دلیل برقرار نبودن خاصیت‌های فوق برای $n = \infty$، حل معادلات دیفرانسیل جزئی بیش از نیم قرن مسکوت ماند تا اینکه منجر به پیدایش سری فوریه گردید.

تمرین ۳ ـ ۱

۱. تعیین کنید کدام‌یک از معادلات دیفرانسیل جزئی زیر خطی و کدام غیرخطی است. مرتبهٔ آن‌را نیز بیان کنید.

الف) $u_{xx} + xu_y = y$ ب) $uu_x - ۲xyu_y = ۰$

پ) $u_x^۲ + uu_y = ۱$ ت) $u_{xxxx} + ۲u_{xxyy} + u_{yyyy} = ۰$

ث) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$ ج) $u_{xxx} + u_{xyy} + \log u = 0$

چ) $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin u = e^y$

۲. نشان‌دهید هر یک از توابع زیر جواب معادلهٔ لاپلاس است.

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad u(x,y) = e^x \sin y, \qquad u(x,y) = e^{2y} \cos 2x$$

۳. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است. نشان دهید $u = f(xy)$ جواب معادلهٔ $xu_x - yu_y = 0$ است.

۴. فرض کنید f و g دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته‌اند، نشان دهید $u = f(x)g(y)$ جواب معادلهٔ $uu_{xy} - u_x u_y = 0$ است.

۵. فرض کنید f دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته است. مقدار λ را طوری تعیین کنید تا $u(x,y) = f(\lambda x + y)$ جواب معادلهٔ $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ شود.

۶. جواب عمومی معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $u_{yy} + u = x^2 \sin xy$

ب) $u_{xy} + u_x = xyu_x^3$

۳ ـ ۲ مسائل کلاسیک

هدف از این بخش ارائه روش‌های حل برای معادلات موج یک‌بعدی، انتقال حرارت یک‌بعدی، لاپلاس دوبعدی، تیر مرتعش یک‌بعدی، موج دوبعدی، انتقال حرارت دوبعدی و لاپلاس سه‌بعدی همگن با شرایط مرزی ساده روی میدان کراندار است. این کار با استفاده از سری فوریه و تعیین جواب عمومی که در شرایط مرزی صدق می‌نماید، انجام می‌پذیرد.

تار مرتعش

تار مرتعشی را در نظر بگیرید که درامتداد محور x ها از 0 تا p کشیده شده است. در این

صورت $u(x,t)$ تابع تغییر مکان تار نسبت به حالت سکون باید در مسئلهٔ دیریکلهٔ زیر صدق کند.

$$u_{tt} - c^{2} u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < p, \quad 0 < t$$

$$u(0,t) = 0,\ u(p,t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq p.$$

که در آن $c > 0$ مقداری ثابت و سرعت صوت در امتداد تار و f و g توابعی معین از x هستند.

برای تعیین جواب این مسئله توجه کنید که برای t ثابت جواب این مسئله در فضای برداری $V = \{\phi \in C^{2}([0,p]) : \phi(0) = \phi(p) = 0\}$ قرار دارد. با توجه به بسط سینوسی در نیم‌دامنه، دنبالهٔ $\left\{\sin \frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای این فضاست. پس جواب مطلوب می‌تواند به‌صورت زیر باشد.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{p}$$

توجه کنید این تابع در شرط مرزی مسئله صدق می‌کند. برای تعیین جواب عمومی معادلهٔ تابع را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{A}_n(t) + \frac{n^{2}\pi^{2}c^{2}}{p^{2}} A_n(t)\right) \sin \frac{n\pi x}{p} = 0$$

چون $\left\{\sin \frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه است، پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{A}_n(t) + \frac{n^{2}\pi^{2}c^{2}}{p^{2}} A_n(t) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$A_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{p} t,\ n \qquad = 1, 2, \ldots$$

بدین ترتیب جواب عمومی معادله و شرایط مرزی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{p} t\right) \sin \frac{n\pi x}{p} \qquad (۳ \text{ـ} ۳)$$

اکنون با اعمال شرایط اولیه و تعیین a_n ها و b_n ها جواب مطلوب به‌دست می آید.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{p}=f(x),$$
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{p}b_n \sin\frac{n\pi x}{p}=g(x).$$

یعنی هر کدام از سری‌های فوق بسط در نیم‌دامنهٔ تابع مربوط است. بنابراین:

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx,$$
$$\frac{n\pi c}{p}b_n=\frac{2}{p}\int_0^p g(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx.$$

تذکر۳ ـ ٦. همگرایی سری جواب (۳ ـ ۳) از همگرایی مطلق سری‌های فوریه توابع f و g نتیجه می‌شود، یعنی باید f' و g' قطعه قطعه پیوسته باشند و $f(0)=f(p)$ و $g(0)=g(p)$. (تذکر ۱ ـ ۳۵) جواب فوق همواره در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند، و با توجه به پیوستگی توابع f و g، شرایط اولیهٔ مسئله در نقاط $0<x<p$ برقرار است، (همگرایی نقطه‌ای سری فوریه، قضیهٔ ۱ ـ ۳۰). به علاوه شرط اولیه در نقاط $x=0,p$ در صورتی برقرار است که، $f(0)=f(p)=g(0)=g(p)=0$. همچنین جواب (۳ ـ ۳) در معادلهٔ موج صدق می‌کند، مشروط به اینکه f'' و g' پیوسته باشند و $f''(0)=f''(p)=0$. (برای اثبات به [۹] مراجعه کنید.)

انتشار گرما

یک میلهٔ فلزی همگن (متجانس) به طول p را در نظر بگیرید که در هر لحظهٔ t درجهٔ آن در هر مقطع میله ثابت است. این میله از اطراف آن عایق کاری شده است به‌طوری‌که از سطح جانبی آن هیچ تبادل حرارتی صورت نمی‌گیرد، در لحظهٔ $t=0$ درجهٔ حرارت در هر مقطع داده شده است. اگر میله در امتداد محور x ها از $x=0$ تا $x=p$ واقع باشد و $u(x,t)$ درجهٔ حرارت را در مقطع x در لحظهٔ t نشان دهد، در این صورت $u(x,t)$ باید جواب مسئلهٔ نیومن زیر باشد.

$$u_t=c^2u_{xx},\qquad 0<x<p,\qquad 0<t$$

$$u_x(0,t)=0,\ u_x(p,t)=0,\ u(x,0)=f(x),$$

که در آن $c^۲ = \frac{K}{\sigma\rho}$، K ضریب انتقال حرارت، σ گرمای ویژه و ρ چگالی میله است.

جواب این مسئله برای هر t ثابت در فضای برداری زیر قرار دارد:

$$V = \{\phi \in C^۲([\circ, p]) : \phi'(\circ) = \phi'(p) = \circ\},$$

یک پایه برای این فضای برداری عبارت است از $\left\{\cos\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=\circ}^{\infty}$، پس جواب عمومی معادله و شرایط مرزی را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$u(x,t) = \frac{A_\circ(t)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{p}.$$

اکنون این تابع را در معادله قرار دهید:

$$\frac{\dot{A}_\circ(t)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\dot{A}_n(t) + \frac{n^۲\pi^۲c^۲}{p^۲}A_n(t)\right)\cos\frac{n\pi x}{p} = \circ,$$

پس باید داشته باشیم:

$$\dot{A}_\circ(t) = \circ,$$
$$\dot{A}_n(t) + \frac{n^۲\pi^۲c^۲}{p^۲}A_n(t) = \circ, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$A_\circ(t) = a_\circ,\ A_n(t) = a_n e^{-\frac{n^۲\pi^۲c^۲}{p^۲}t}, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

بدین‌ترتیب جواب عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u(x,t) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^۲\pi^۲c^۲}{p^۲}t}\cos\frac{n\pi x}{p}. \qquad (۳ \text{ـ} ۴)$$

برای تعیین جواب مطلوب، شرط اولیه را اعمال می‌کنیم تا a_n ها را تعیین کنیم.

$$u(x,\circ) = f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{p},$$
$$a_n = \frac{۲}{p}\int_\circ^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx.$$

تذکر ۳ ـ ۷. با به کارگیری آزمون M ـ وایرشتراس برای سری (۳ ـ ۴)، نتیجه می‌شود که جواب $u(x,t)$ یک تابع مشتق‌پذیر است، تنها به شرط اینکه ضرایب a_n کراندار باشند. این مطلب از همگرایی سری فوریه تابع f نتیجه خواهد شد. همچنین برقراری معادلهٔ انتشار گرما برای سری (۳ ـ ۴) به شرط اضافی دیگری احتیاج ندارد، به علاوه شرایط مرزی نیز

تنها در صورت وجود سری فوریه تابع f برقرار است. اما شرط اولیه در صورتی در تمام نقاط $p \geq x \geq ۰$ برقرار است که تابع f پیوسته باشد و $f(p) = f(۰)$، (همگرایی سری فوریه).

معادلهٔ لاپلاس

اگر توزیع درجهٔ حرارت در یک ورقهٔ مستطیلی نازک به تعادل رسیده باشد و $u(x,y)$ دما در نقطهٔ (x,y) را نشان دهد، با فرض اینکه دو ضلع مقابل از این ورقه عایق‌کاری شده است و یک ضلع آن درجهٔ حرارت صفر و دمای ضلع مقابل آن با تابع $f(x)$ نشان داده شود، تابع $u(x,y)$ جواب مسئلهٔ زیر است:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} + u_{yy} = ۰, \qquad ۰ < x < p, \quad ۰ < y < q \\
&u_x(۰,y) = ۰,\ u_x(p,y) = ۰, \\
&u(x,۰) = ۰,\ u(x,q) = f(x).
\end{aligned}
$$

برای y ثابت جواب این مسئله در فضای برداری زیر قرار دارد.

$$V = \{\phi \in C^۲([۰,p]) : \phi'(۰) = \phi'(p) = ۰\},$$

بنابراین جواب مسئله را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$u(x,y) = \frac{A_۰(y)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n(y) \cos \frac{n\pi x}{p},$$

با قرار دادن در معادله نتیجه می‌شود:

$$\frac{A''_۰(y)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(A''_n(y) - \frac{n^۲\pi^۲}{p^۲} A_n(y) \right) \cos \frac{n\pi x}{p} = ۰,$$

پس باید:

$$
\begin{aligned}
&A''_۰(y) = ۰, \\
&A''_n(y) - \frac{n^۲\pi^۲}{p^۲} A_n(y) = ۰. \qquad n = ۱, ۲, \ldots
\end{aligned}
$$

جواب عمومی این معادلات عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&A_۰(y) = C_۰ + D_۰ y \\
&A_n(y) = C_n \cosh \frac{n\pi y}{p} + D_n \sinh \frac{n\pi y}{p}
\end{aligned}
$$

یا:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(C_0+D_0y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi y}{p}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{p}\right)\cos\frac{n\pi x}{p}.$$

حال دو شرط مرزی دیگر را اعمال می‌کنیم.

$$u(x,0)=\frac{1}{2}C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{n\pi x}{p}=0,$$

پس برای $n=0,1,2,\ldots$ داریم $C_n=0$. همچنین داریم:

$$u(x,q)=f(x)=\frac{1}{2}D_0q+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\frac{n\pi q}{p}\cos\frac{n\pi x}{p}.$$

بدین‌ترتیب به‌دست می آوریم:

$$D_0q=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx,\ D_n\sinh\frac{n\pi q}{p}=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx.$$

تذکر ۳ ـ ۸. از مقایسه سری تابع $u(x,y)$ با سری فوریه تابع f نتیجه خواهد شد که جواب معادلهٔ لاپلاس در صورت همگرایی مطلق سری فوریه f تعریف می‌شود. لذا شرط قطعه قطعه پیوسته بودن f' و $f(0)=f(p)$ الزامی است. برای برقراری شرط مرزی همین شرایط کافی است. همچنین تابع $u(x,y)$ به شرط وجود سری فوریه f'' در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. این مطلب نیز از مقایسه سری‌های u_y, u_{xx}, u_x و u_{yy} با سری‌های فوریه f' و f'' حاصل می‌شود.

تیر مرتعش

معادلهٔ حرکت تیر مرتعش به‌طول p با تکیه‌گاه‌های ساده در دو سر، یعنی دو سر تیر ثابت و به‌صورت لولاست و در امتداد محور x ها قرار دارد و شیب در دو انتها به‌صورت طبیعی تغییر می‌کند، به‌صورت زیر داده می‌شود.

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0,\qquad 0<x<p,\qquad 0<t,$$

$$u(0,t)=0,\ u(p,t)=0,\ u_{xx}(0,t)=0,\ u_{xx}(p,t)=0,$$

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x).$$

که در آن $c^2=\frac{K}{\rho}$، K ضریب سختی و ρ جرم مخصوص است.

با توجه به شرایط مرزی، برای t ثابت، جواب این مسئله باید در فضای زیر باشد،

$$V = \{\phi \in C^4([0,p]) : \phi(0) = 0, \phi(p) = 0, \phi''(0) = 0, \phi''(p) = 0\}.$$

یک پایه برای این فضای برداری عبارت است از $\left\{ \sin \dfrac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$. پس جواب عمومی معادله همراه با شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

از قرار دادن این تابع در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{A}_n(t) + \frac{n^4\pi^4c^2}{p^4} A_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{p} = 0.$$

پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{A}_n(t) + \frac{n^4\pi^4c^2}{p^4} A_n(t) = 0.$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$A_n(t) = a_n \cos \frac{n^2\pi^2c}{p^2} t + b_n \sin \frac{n^2\pi^2c}{p^2} t.$$

بدین‌ترتیب جواب عمومی معادله و شرایط مرزی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n^2\pi^2c}{p^2} t + b_n \sin \frac{n^2\pi^2c}{p^2} t \right) \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت a_n و b_n به‌دست می‌آیند:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{p},$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2c}{p^2} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

درنتیجه:

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx,$$

$$\frac{n^2\pi^2c}{p^2} b_n = \frac{2}{p} \int_0^p g(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

پوستهٔ مرتعش

مسئلهٔ ارتعاش یک پوستهٔ مستطیل شکل که اضلاع آن ثابت نگه داشته می‌شوند، به صورت زیر بیان می‌شود. تابع $u(x,y,t)$ مکان نقطهٔ (x,y) را در زمان t نشان می‌دهد.

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y),\ u_t(x,y,0) = g(x,y).$$

جواب این مسئله برای t ثابت در فضای برداری زیر قرار دارد.

$$V = \{\phi(x,y) \in C^2([0,p]\times[0,q]) :\ \phi(0,y) = \phi(p,y) = \phi(x,0) = \phi(x,q) = 0\}.$$

یک پایه برای این فضای برداری عبارت است از $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\right\}_{n,m=1}^{\infty}$. پس جواب را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}.$$

از قرار دادن این تابع در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ddot{A}_{nm}(t) + \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)\pi^2 c^2 A_{nm}(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q} = 0.$$

پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{A}_{nm}(t) + \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)\pi^2 c^2 A_{nm}(t) = 0.$$

از حل این معادله به‌دست می‌آوریم:

$$A_{nm}(t) = a_{nm}\cos\pi c\lambda_{nm}t + b_{nm}\sin\pi c\lambda_{nm}t,$$

که در آن $\lambda_{nm} = \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\pi c\lambda_{nm}t + b_{nm}\sin\pi c\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}.$$

اکنون شرایط اولیه را برای تعیین ضرایب فوریه اعمال می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم،

$$a_{nm} = \frac{۴}{pq}\int_\circ^q\int_\circ^p f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}dxdy,$$
$$\pi c\lambda_{nm}b_{nm} = \frac{۴}{pq}\int_\circ^q\int_\circ^p g(x,y)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}dxdy.$$

انتقال حرارت سه‌بعدی

جسم فلزی مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید که اضلاع آن موازی محورهای مختصات دکارتی (x,y,z) است. اگر چهار وجه جانبی آن در درجهٔ حرارت صفر و وجه بالا و پایین آن عایق‌کاری شده باشد و $u(x,y,z,t)$ درجهٔ حرارت نقطهٔ (x,y,z) از جسم در لحظهٔ t باشد، در این صورت داریم:

$$u_t = c^۲(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \qquad \circ<x<p,\ \circ<y<q,\ \circ<z<r,\ \circ<t,$$
$$u(\circ,y,z,t)=\circ,\ u(p,y,z,t)=\circ,$$
$$u(x,\circ,z,t)=\circ,\ u(x,q,z,t)=\circ,$$
$$u_z(x,y,\circ,t)=\circ,\ u_z(x,y,r,t)=\circ.$$

کلیهٔ جواب‌های معادله و شرایط مرزی برای t ثابت در فضای برداری سه‌بعدی زیر قرار دارد.

$$V=\Big\{\phi(x,y,z)\ :\ \circ\le x\le p, \circ\le y\le q, \circ\le z\le r, \phi(\circ,y,z)=\phi(p,y,z)$$
$$=\phi(x,\circ,z)=\phi(x,q,z)=\phi_z(x,y,\circ)=\phi_z(x,y,r)=\circ\Big\}$$

دنبالهٔ $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{k\pi z}{r}\right\}_{n,m=۱,k=\circ}^{\infty}$ یک پایه برای این فضای برداری تشکیل می‌دهد، پس برای هر t ثابت داریم:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{k=\circ}^{\infty}A_{nmk}(t)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{k\pi z}{r},$$

از قرار دادن این تابع در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی فوق به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(\dot{A}_{nmk}(t)+c^۲\pi^۲\Big(\frac{n^۲}{p^۲}+\frac{m^۲}{q^۲}+\frac{k^۲}{r^۲}\Big)A_{nmk}(t)\right)$$
$$\times\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{k\pi z}{r}=\circ$$

درنتیجه باید داشته باشیم:

$$\dot{A}_{nmk}(t) + c^2\pi^2\lambda_{nmk}^2 A_{nmk}(t) = 0,$$

که در آن:

$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} + \frac{k^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل عادی عبارت است از:

$$A_{nmk}(t) = a_{nmk} e^{-c^2\pi^2\lambda_{nmk}^2 t},$$

بدین ترتیب جواب عمومی معادله و شرایط مرزی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nmk} e^{-c^2\pi^2\lambda_{nmk}^2 t} \sin\frac{n\pi x}{p} \sin\frac{m\pi y}{q} \cos\frac{k\pi z}{r}.$$

اگر مسئله همراه با شرط اولیه باشد، در این صورت شرط اولیه به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$$

از اعمال این شرط در جواب عمومی به‌دست می‌آوریم:

$$f(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nmk} \sin\frac{n\pi x}{p} \sin\frac{m\pi y}{q} \cos\frac{k\pi z}{r}.$$

پس برای $n,m,k = 1,2,3,\ldots$ باید داشته باشیم:

$$a_{nmk} = \frac{8}{pqr}\int_0^r\int_0^q\int_0^p f(x,y,z)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{k\pi z}{r}\,dxdydz,$$

و برای $k=0$ و $n,m = 1,2,3,\ldots$:

$$a_{nm0} = \frac{4}{pqr}\int_0^r\int_0^q\int_0^p f(x,y,z)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\,dxdydz.$$

تمرین ۳ ـ ۲

جواب عمومی معادلات همراه با شرایط مرزی زیر را به‌دست آورید.

۱. $u_{tt} - 2u_t - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t$

$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0.$

۲. $u_t - 4u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t$

$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0.$

۳. $u_{tt} + 16u_{xxxx} = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t$

$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,$

$u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(\pi,t) = 0.$

۴. $u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \qquad 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r,\ 0 < t$

$u_x(0,y,z,t) = 0,\ u_x(p,y,z,t) = 0,$

$u_y(x,0,z,t) = 0,\ u_y(x,q,z,t) = 0,$

$u(x,y,0,t) = 0,\ u(x,y,r,t) = 0.$

۳ ـ ۳ روش جداسازی

در بخش قبل تحت عنوان مسائل کلاسیک دیدیم که با استفاده از سری فوریه می‌توان بعضی از معادلات دیفرانسیل جزئی را تحت شرایط مرزی خاصی حل کرد. این روش برای بعضی از معادلات قابل استفاده نیست. تعمیم ایده‌های استفاده از سری فوریه منجر به روشی به نام روش جداسازی می‌شود. در این بخش روش جداسازی برای معادلات دیفرانسیل خطی همگن از مرتبهٔ دوم که تابع مجهول دو متغیره است، بیان خواهد شد.

در روش جداسازی، ابتدا فضای برداری جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی را تعیین می‌کنیم سپس با به‌کارگیری معادلهٔ دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی یک پایه برای این فضای برداری به‌دست می‌آوریم طوری‌که مشتقات مربوط به مکان را به‌صورت مضربی از خود تابع مکان به‌دست دهد. این روش تحت شرایط زیر قابل اعمال است.

الف) میدان مکان مکعب مستطیل شکل و یال‌های آن موازی محورهای مختصات باشد.

ب) معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی و همگن باشد.

پ) شرایط مرزی نیز به‌صورت خطی و همگن با ضرایب ثابت باشد.

ت) در هر جملهٔ معادله فقط مشتق نسبت به یک متغیر ظاهر شده باشد. به علاوه تابع ضریب هر یک از مشتقات فقط وابسته به متغیر مستقل مشتق گرفته شده باشد و ضریب خود تابع به‌صورت مجموع دو تابع یک متغیره باشد.

صورت کلی معادلهٔ مرتبهٔ دوم مطلوب از دو متغیر $t \geq 0$ و $0 \leq x \leq p$ و تابع مجهول $u(x,t)$ عبارت است از:

$$A(t)u_{tt} + B(x)u_{xx} + C(t)u_t + D(x)u_x + \big(E(t) + F(x)\big)u = 0 \qquad (۳ ـ ۵)$$

دقت کنید جملهٔ مربوط به u_{xt} که نسبت به هر دو متغیر x و t مشتق گرفته می‌شود، با توجه به بند «ت» فوق در معادله ظاهر نشده است. (در فصل ۵ خواهیم دید با تغییر متغیر مناسب می‌توان جملهٔ u_{xt} را در معادلات مرتبهٔ دوم حذف کرد.) شرایط مرزی مطلوب نیز به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} &au(0,t) + bu_x(0,t) = 0, && |a| + |b| \neq 0 \\ &\alpha u(p,t) + \beta u_x(p,t) = 0. && |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{aligned} \qquad (۳ ـ ۶)$$

فضای برداری متغیر مکان x با فرض ثابت بودن متغیر زمان t عبارت است از:

$$V = \{\phi(x) \in C^2([0,p]) : \ a\phi(0) + b\phi'(0) = 0, \alpha\phi(p) + \beta\phi'(p) = 0\} \qquad (۳ ـ ۷)$$

فرض کنید $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای این فضای برداری باشد، طوری‌که نمایش هر تابع در V برحسب این پایه به‌صورت یگانه باشد. در این صورت برای t ثابت می‌توان نوشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \qquad (۳ ـ ۸)$$

از قرار دادن این جواب در معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} &\big(A(t)\ddot{T}_n + C(t)\dot{T}_n + E(t)T_n\big)X_n(x) \\ &+ \big(B(x)X_n'' + D(x)X_n' + F(x)X_n\big)T_n(t) = 0. \end{aligned} \qquad (۳ ـ ۹)$$

پایهٔ $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ را طوری انتخاب می‌کنیم تا هر جمله از سری (۳ ـ ۸) یک جواب معادلهٔ (۳ ـ ۵) باشد. در این صورت هر جمله از سری (۳ ـ ۹) باید برابر صفر باشد. یعنی

$$\Big(A(t)\ddot{T}_n + C(t)\dot{T}_n + E(t)T_n\Big)X_n + \Big(B(x)X_n'' + D(t)X_n' + F(t)X_n\Big)T_n = 0.$$

با انتقال جملهٔ دوم در تساوی فوق به طرف راست و با تقسیم آن بر X_nT_n به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{T_n}\big(A(T)\ddot{T}_n + C(T)\dot{T}_n + E(t)T_n\big) = -\frac{1}{X_n}\big(B(x)X_n'' + D(x)X_n' + F(x)X_n\big) \tag{۳ ـ ۱۰}$$

طرف راست تساوی فوق تابعی از x و طرف چپ تابعی از t است، پس برای هر n، مقدار ثابت λ_n است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &B(x)X_n'' + D(x)X_n' + \big(F(x)+\lambda_n\big)X_n = 0,\\ &A(t)\ddot{T}_n + C(t)\dot{T}_n + \big(E(t)-\lambda_n\big)T_n = 0. \end{aligned} \tag{۳ ـ ۱۱}$$

بدین‌ترتیب برای تعیین جواب عمومی مسئلهٔ (۳ ـ ۵) و (۳ ـ ٦) می‌توان روش زیر را به کار برد.

روش جداسازی: اگر دنبالهٔ عددی $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ و دنبالهٔ تابعی $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ با خواص زیر موجود باشد و $T_n(t)$ جواب عمومی معادلهٔ (۳ ـ ۱۱) برای $n = 0, 1, 2, \dots$ باشد، آنگاه جواب عمومی مسئلهٔ (۳ ـ ۵) و (۳ ـ ٦) عبارت است از $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$.

الف) λ_n و $X_n(x)$ برای هر n، در مسئلهٔ زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &B(x)X'' + D(x)X' + \big(F(x)+\lambda\big)X = 0,\\ &aX(0) + bX'(0) = 0,\ \alpha X(p) + \beta X'(p) = 0. \end{aligned} \tag{۳ ـ ۱۲}$$

ب) $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد و نمایش عناصر V برحسب این پایه به‌صورت یگانه باشد.

تذکر۳ ـ ۹. به‌دلیل برقراری تساوی (۳ ـ ۱۰) که متغیر x از متغیر t تفکیک می‌گردد، این روش حل را روش جداسازی گویند. عدم وجود جملهٔ u_{xt} در معادلهٔ (۳ ـ ۵) و شکل خاص ضرایب آن باعث می‌شود که بتوان معادله را به صورت (۳ ـ ۹) نوشت. چنین معادلاتی را جداپذیر گویند.

تذکر۳ ـ ۱۰. مسئلهٔ (۳ ـ ۱۲) را یک مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل گویند. در این مسئله دنبال کلیهٔ مقادیر λ هستیم که به‌ازای هر یک از آنها مسئلهٔ (۳ ـ ۱۲) دارای جواب غیرصفر است. این مقادیر λ را مقدار ویژه و جواب متناظر آن را تابع ویژه گویند. در بخش بعدی تحت عنوان مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل خواهیم دید، خواص فوق برای همه معادلات به صورت (۳ ـ ۵) و (۳ ـ ٦) درست است.

تذکر۳ ـ ۱۱. مسئلهٔ (۳ ـ ۱۲) یک مسئلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عادی است. با تعیین جواب عمومی و اعمال شرایط مرزی، جواب آن حاصل می‌گردد. کلیهٔ جواب‌هایی که از این حل به‌دست می‌آیند دنبالهٔ $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ را می‌سازد.

تذکر۳ ـ ۱۲. برای نوشتن معادلهٔ (۳ ـ ۱۱) کافیست در معادلهٔ (۳ ـ ۵) به‌جای $u(x,t)$ تابع $T_n(t)$ را قرار دهیم و $\lambda_n T_n$ را از آن کم کنیم. همچنین برای نوشتن مسئلهٔ (۳ ـ ۱۲) کافیست در مسئلهٔ (۳ ـ ۵) و (۳ ـ ٦) به‌جای $u(x,t)$ تابع $X(x)$ را قرار دهیم و به معادله جملهٔ λX را اضافه کنیم.

مثال۳ ـ ٦. مطلوب است حل مسئلهٔ انتقال حرارت زیر:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < p,\ 0 < t$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(p,t) = 0,$$

$$u(x,0) = f(x).$$

حل. با توجه به تذکرات فوق، ابتدا به حل مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مربوط می‌پردازیم. این مسئله عبارت است از:

$$c^2 X'' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = 0,\ X'(p) = 0.$$

معادلهٔ مشخصه این معادله عبارت است از $c^2 r^2 + \lambda = 0$. درنتیجه شکل جواب عمومی به علامت λ وابسته است.

الف) $\lambda = -c^2\alpha^2 < 0$. در این صورت $r_1, r_2 = \pm\alpha$ و

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x.$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم.

$$X(0) = c_1 = 0,\ X'(p) = \alpha(c_1 \sinh \alpha p + c_2 \cosh \alpha p) = 0,$$

پس $c_1 = c_2 = 0$ و $X(x) = 0$. بنابراین مقدار ویژهٔ منفی نداریم.

ب) $\lambda = 0$. در این صورت $r_1 = r_2 = 0$ و $X(x) = c_1 + c_2 x$ با اعمال شرایط مرزی نتیجه می‌شود، $c_1 = c_2 = 0$. پس $\lambda = 0$، یک مقدار ویژه نیست.

ج) $\lambda = c^{۲}\beta^{۲} > ۰$. در این حالت $r_{۱}, r_{۲} = \pm\beta i$ درنتیجه:

$$X(x) = c_{۱}\cos\beta x + c_{۲}\sin\beta x.$$

برای اینکه شرط $X(۰) = ۰$ برقرار باشد، باید $c_{۱} = ۰$ باشد. برای برقراری شرط دوم مرزی باید داشته باشیم:

$$c_{۲}\beta\cos\beta p = ۰,$$

همچنین برای جواب غیر صفر باید $c_{۲} \neq ۰$ و $\cos\beta p = ۰$، درنتیجه:

$$\beta p = (n + \frac{۱}{۲})\pi,\ n \qquad = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots,$$

بنابراین:

$$\lambda_n = (n + \frac{۱}{۲})^{۲}\frac{\pi^{۲}c^{۲}}{p^{۲}}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

$$X_n(x) = \sin(n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi x}{p}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

حال معادلهٔ T_n را درنظر بگیرید:

$$\dot{T}_n + (n + \frac{۱}{۲})^{۲}\frac{\pi^{۲}c^{۲}}{p^{۲}}T_n = ۰.$$

درنتیجه:

$$T_n(t) = a_n e^{-(n+\frac{۱}{۲})^{۲}\frac{\pi^{۲}c^{۲}}{p^{۲}}t}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots,$$

بدین ترتیب جواب عمومی معادله و شرایط مرزی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{۱}{۲})^{۲}\frac{\pi^{۲}c^{۲}}{p^{۲}}t}\sin(n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi x}{p}.$$

حال شرط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$u(x,۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \sin(n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi x}{p} = f(x),$$

از ضرب طرفین تساوی در $\sin(m + \frac{۱}{۲})\frac{\pi x}{p}$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا p به‌دست می‌آوریم:

$$a_m = \frac{۲}{p}\int_{۰}^{p} f(x)\sin(m + \frac{۱}{۲})\frac{\pi x}{p}dx.$$

حال فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ m با ضرایب ثابت و همگن باشد. به‌علاوه تابع مجهول از دو متغیر x و t و هر جمله از معادله فقط نسبت به یک متغیر مشتق گرفته شده باشد. برای تعیین پایهٔ مطلوب می‌گیریم $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$. به‌صورت مشابه از قرار دادن آن در معادلهٔ دیفرانسیل و تفکیک متغیرها و تفکیک شرایط مرزی مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل X_n و معادلهٔ دیفرانسیل عادی T_n به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

الف) برای نوشتن معادلهٔ اشترم ـ لیوویل در معادله به‌جای تابع مجهول، تابع X_n را قرار داده و آن‌را برابر $-\lambda_n X_n$ قرار می‌دهیم.

ب) برای نوشتن شرایط مرزی مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل در شرایط مرزی مسئلهٔ اولیه به‌جای تابع مجهول، تابع X_n را قرار می‌دهیم.

پ) برای نوشتن معادلهٔ دیفرانسیل عادی T_n در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن به‌جای تابع مجهول، تابع T_n را قرار می‌دهیم و در طرف دوم معادله به‌جای صفر، تابع $\lambda_n T_n$ قرار می‌دهیم.

مثال ۳ ـ ۷. مطلوب است تعیین جواب عمومی مسئلهٔ زیر:

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0,\qquad 0\le x\le p,\quad 0\le t$$

$$u(0,t)=0,\ u(p,t)=0,\ u_{xx}(0,t)=0,\ u_{xx}(p,t)=0$$

حل. با توجه به مطالب فوق جواب عمومی به‌صورت $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ است که در آن $X_n(x)$ جواب مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل زیر است.

$$c^2X^{(4)}=-\lambda_n X$$

$$X(0)=X(p)=X''(0)=X''(p)=0$$

همچنین $T_n(t)$ جواب عمومی مسئلهٔ زیر است.

$$\ddot{T}=\lambda_n T.$$

ابتدا مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل را حل کنیم. برای $\lambda_n\ge 0$ مسئله تنها جواب بدیهی $X_n=0$ دارد. اگر $\frac{\lambda_n}{c^2}=-\alpha_n^4<0$، در این صورت معادلهٔ مشخصه عبارت است از $r^4-\alpha_n^4=0$ و

جواب عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$X_n(x) = A\sin\alpha_n x + B\cos\alpha_n x + C\sinh\alpha_n x + D\cosh\alpha_n x$$

$$X_n(\circ) = B + D = \circ$$

$$X_n''(\circ) = (-B + D)\alpha_n^{\text{۲}} = \circ$$

پس $B = D = \circ$. همچنین داریم:

$$X_n(p) = A\sin\alpha_n p + C\sinh\alpha_n p = \circ$$

$$X_n''(p) = (-A\sin\alpha_n p + C\sinh\alpha_n p)\alpha_n^{\text{۲}} = \circ$$

پس $C\sinh\alpha_n p = \circ$ و $A\sin\alpha_n p = \circ$ درنتیجه $C = \circ$ و برای جواب غیر صفر باید:

$$\sin\alpha_n p = \circ.$$

یا:

$$\alpha_n p = n\pi \quad n = \circ, \pm\text{۱}, \pm\text{۲}, \ldots,$$

درنتیجه $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{p})^{\text{۴}}c^{\text{۲}}$ و $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{p}$ برای $n = \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \ldots$. حال معادلهٔ T_n را حل می‌کنیم:

$$\ddot{T}_n + (\frac{n\pi}{p})^{\text{۴}}c^{\text{۲}}T_n = \circ.$$

درنتیجه:

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}{p^{\text{۲}}}ct + b_n\sin\frac{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}{p^{\text{۲}}}ct.$$

بدین‌ترتیب جواب عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,t) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}{p^{\text{۲}}}ct + b_n\sin\frac{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}{p^{\text{۲}}}ct\right)\sin\frac{n\pi x}{p}.$$

فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن از مرتبهٔ k و متغیرهای مستقل t و x و y باشند. این‌بار می‌گیریم:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=\circ}^{\infty}\sum_{m=\circ}^{\infty}T_{nm}(t)X_n(x)Y_m(y).$$

از قرار دادن $T_{nm}X_nY_m$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی و تقسیم آن بر $T_{nm}X_nY_m$ متغیرها از هم تفکیک می‌شوند و معادلات اشترم ـ لیوویل X_n، Y_m و معادلهٔ T_{nm} قابل حصول‌اند. این معادلات به شکل زیرند.

الف) معادلهٔ اشترم ـ لیوویل X_n از قرار دادن X_n در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن و برابر $-\alpha_n X_n$ قرار دادن به‌دست می‌آید.

ب) معادلهٔ اشترم ـ لیوویل Y_m نیز از قرار دادن Y_m در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن و برابر $-\beta_m Y_m$ قرار دادن به‌دست می‌آید.

پ) معادلهٔ دیفرانسیل عادی T_{nm} از قرار دادن T_{nm} در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن به‌جای تابع مجهول و برابر $(\alpha_n + \beta_m)T_{nm}$ قرار دادن به‌دست می‌آید.

ت) شرایط مرزی مسائل اشترم ـ لیوویل X_n و Y_m از قرار دادن X_n و Y_m در شرایط مرزی مسئلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی حاصل می‌شود.

مثال ۳ ـ ۸. مطلوب است تعیین جواب عمومی:

$$
\begin{aligned}
&u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q,\ 0 \le t\\
&u(0, y, t) = 0,\ u_x(p, y, t) = 0,\\
&u_y(x, 0, t) = 0,\ u(x, q, t) = 0.
\end{aligned}
$$

حل. می‌گیریم $u_{nm}(x, y, t) = T_{nm}(t)X_n(x)Y_m(y)$. برای اینکه این تابع یک جواب معادله باشد، باید داشته باشیم:

$$\dot{T}_{nm}X_nY_m - c^2\left(T_{nm}X_n''Y_m + T_{nm}X_nY_m''\right) = 0.$$

از تقسیم آن بر $c^2T_{nm}X_nX_m$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\dot{T}_{nm}}{c^2T_{nm}} - \frac{X_n''}{X_n} - \frac{Y_m''}{Y_m} = 0,$$

پس باید هر کدام از این سه جمله برابر مقداری ثابت باشد. یعنی:

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\alpha_n,\ \frac{Y_m''}{Y_m} = -\beta_m,\ \frac{\dot{T}_{nm}}{c^2T_{nm}} = -\alpha_n - \beta_m.$$

درنتیجه مسائل اشترم ـ لیوویل مکان با توجه به شرایط مرزی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&X_n'' + \alpha_nX_n = 0, &\qquad &Y_m'' + \beta_mY_m = 0,\\
&X_n(0) = 0,\ X_n'(p) = 0 &\qquad &Y_m'(0) = 0,\ Y_m(q) = 0.
\end{aligned}
$$

از حل این مسائل مقادیر ویژه و توابع ویژه به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\alpha_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{p^2}, \qquad X_n(x) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p},$$

$$\beta_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{q^2}, \qquad Y_m(y) = \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{q}.$$

اکنون به حل معادلهٔ T_{nm} می‌پردازیم.

$$\dot{T}_{nm} + c^2(\alpha_n+\beta_m)T_{nm} = 0.$$

درنتیجه:

$$T_{nm}(t) = A_{nm}e^{-c^2\lambda_{nm}t},$$

که در آن $\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{p^2} + \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{q^2}\right) = \lambda_{nm}$. پس جواب عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}e^{-c^2\lambda_{nm}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p}\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{q}.$$

تذکر۳ ـ ۱۳. یک نوع شرایط مرزی دیگر، علاوه بر شرایط مرزی دیریکله، نیومن و روبین برای مختصات مکان وجود دارد. فرض کنید $0 \le x \le p$، u تابع مجهول و معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ m ام باشد شرایط مرزی به‌صورت زیر را شرایط مرزی متناوب گویند.

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=0} - \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=p} = g_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

اگر g_k ها برابر صفر باشد، شرایط مرزی متناوب را همگن گویند.

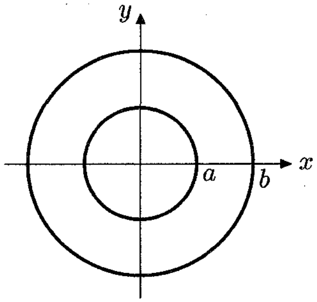
تذکر۳ ـ ۱۴. در بعضی از مسائل فیزیک یا مهندسی، میدان مکان به‌صورت دایره، استوانه و یا کره است. برای اینگونه میدان‌ها، به‌علت غیر مکعب مستطیل بودن، روش جداسازی غیرقابل اعمال است. برای حل اینگونه مسائل با تغییر متغیر به مختصات قطبی، میدان مکان در مختصات جدید به‌صورت مستطیل در می‌آید و معادلهٔ خطی و همگن به‌صورت خطی و همگن باقی می‌ماند، درنتیجه روش جداسازی قابل اعمال است.

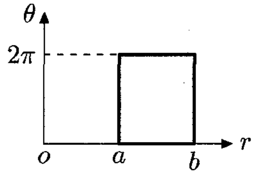
مثال۳ ـ ۹. مطلوب است حل مسئلهٔ زیر:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$$

$$u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2} = f(x,y), \qquad u(x,y)\big|_{x^2+y^2=b^2} = g(x,y)$$

حل. میدان مکان را به‌صورت طوقه $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ داریم. با استفاده از مختصات قطبی و تغییر متغیر $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$، میدان مکان در مختصات (r,θ) به‌صورت مستطیل در می آید. یعنی $a \leq r \leq b$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$.





در مختصات قطبی معادلهٔ لاپلاس به‌صورت زیر است.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ a \leq r \leq b \tag{۳ ـ ۱۳}$$

یا:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

شرایط مرزی را در مختصات جدید برای تابع مجهول $u(r,\theta)$ به‌صورت زیر به‌دست می آوریم:

$$u(a,\theta) = f(\theta),\ u(b,\theta) = g(\theta) \tag{۳ ـ ۱۴}$$

$$u(r,0) = u(r,2\pi),\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi). \tag{۳ ـ ۱۵}$$

توجه کنید شرایط مرزی نسبت به θ متناوب همگن است و نسبت به r غیرهمگن است. پس برای r ثابت جواب مسئله در فضای برداری زیر واقع است.

$$V = \{f(\theta) \in C^2[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi),\ f'(0) = f'(2\pi)\}.$$

پس جواب عمومی به‌صورت:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta),$$

است که در آن $\{\Theta_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای V است. از قرار دادن $R_n\Theta_n$ در معادله و تقسیم

آن بر $R_n\Theta_n$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{r^۲ R_n'' + rR_n'}{R_n} + \frac{\ddot{\Theta}_n}{\Theta_n} = ۰.$$

بدین‌ترتیب مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل Θ_n به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\ddot{\Theta}_n + \lambda_n \Theta_n = ۰$$

$$\Theta_n(۰) = \Theta_n(۲\pi),\ \dot{\Theta}_n(۰) = \dot{\Theta}_n(۲\pi)$$

بدین‌ترتیب مقادیر و توابع ویژهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda_۰ = ۰, \qquad \Theta_۰(\theta) = ۱$$

$$\lambda_n = n^۲, \qquad \Theta_n^۱(\theta) = \cos n\theta,\ \Theta_n^۲(\theta) = \sin n\theta.$$

یعنی برای r ثابت $u(r,\theta)$ یک سری فوریه کامل است. معادلهٔ R_n عبارت است از:

$$r^۲ R_n'' + rR_n' - n^۲ R_n = ۰.$$

این معادلهٔ کوشی ـ اویلر با معادلهٔ مشخصه زیر است.

$$z^۲ - n^۲ = ۰,$$

پس $z = \pm n$ و:

$$R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}.$$

در اینجا برای سادگی در محاسبات از سری فوریه مختلط یا $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ به‌عنوان یک پایه برای V استفاده می‌کنیم. در این صورت جواب عمومی مطلوب عبارت است از:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

حال شرایط مرزی غیرهمگن را اعمال کنید.

$$u(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n a^n + b_n a^{-n}) e^{in\theta} = f(\theta),$$

$$u(b,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n b^n + b_n b^{-n}) e^{in\theta} = g(\theta).$$

پس:

$$a_n a^n + b_n a^{-n} = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$a_n b^n + b_n b^{-n} = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

بدین‌ترتیب a_n ها و b_n ها تعیین شده و جواب مسئله به‌دست می آید.

تمرین ۳ ـ ۳

مسائل زیر را به روش جداسازی حل کنید.

۱. $u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t$

$u(x,0) = x + \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0$

۲. $u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t$

$u_x(0,t) - u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) + u(1,t) = 0,\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0$

۳. $u_t = k u_{xx} \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t$

$u_x(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = x^2$

۴. $u_t = k u_{xx} - hu \qquad -\pi \le x \le \pi,\ 0 < t,\ h =$ ثابت

$u(-\pi,t) = u(\pi,t),\ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t),\ u(x,0) = \sin x$

۵. $u_t - t^2 u_{xx} - u = 0 \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t$

$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = \sin \pi x$

۶. $u_{tt} - \frac{x^2}{(t+1)^2} u_{xx} = 0 \qquad 1 \le x \le 2,\ 0 \le t$

$u(1,t) = u(2,t) = 0,\ u(x,0) = x$

۷. $\Delta u = 0 \qquad 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi$

$u(1,\theta) = 0,\ u(2,\theta) = \theta(\theta - \pi),\ u_\theta(r,0) = 0,\ u(r,\pi) = 0$

۸. $\Delta u = 0 \qquad 1 < r < 3,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$u(1,\theta)=0,\ u(3,\theta)=0,\ u(r,0)=(r-1)(r-3),\ u(r,\frac{\pi}{2})=0$$

۹. $\Delta u=0 \qquad r<a,\ 0<\theta<\pi$

$$u(r,0)=0,\ u(r,\pi)=0,\ u(a,\theta)=\theta(\pi-\theta)$$

۱۰. $\Delta u=0 \qquad r<a$

$u_r(a,\theta)+hu(a,\theta)=\sin\theta,$ h ثابت است

۱۱. $\Delta u=0 \qquad 1<r<2,\ 0<\theta<\pi$

$$u(1,\theta)=0,\ u(2,\theta)=0,\ u(r,0)=0,\ u(r,\pi)=r$$

۱۲. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}, \qquad 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<d,\ 0<t$

$$u(x,y,z,0)=xyz,\ u_t(x,y,z,0)=0$$

$$u(0,y,z,t)=0,\ u(x,0,z,t)=0,\ u(x,y,0,t)=u(x,y,d,t),$$

$$u(a,y,z,t)=0,\ u_y(x,b,z,t)=0,\ u_z(x,y,0,t)=u_z(x,y,d,t).$$

۳ ـ ۴ دستگاه اشترم ـ لیوویل

در بخش قبل دیدیم در حل مسائل معادلات دیفرانسیل با روش جداسازی، مسائل اشترم ـ لیوویل به‌صورت طبیعی ظاهر می‌گردد. همچنین گفتیم حل اینگونه مسائل با تعیین جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل اشترم ـ لیوویل و اعمال شرایط مرزی به‌سادگی انجام می‌پذیرد (تذکر ۳ ـ ۱۰). هدف از این بخش بررسی مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل و تعیین خواص کیفی آن است.

معادلهٔ دیفرانسیل عادی خطی از مرتبهٔ دوم و همگن

$$a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_2(x)\frac{dy}{dx}+\big(a_3(x)+\lambda\big)y=0, \qquad (۳ ـ ۱۶)$$

را که در آن توابع $a_1(x)$، $a_2(x)$ و $a_3(x)$ روی فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و $a_1(x) > 0$ و λ یک پارامتر است، را معادلهٔ اشترم ـ لیوویل گویند. معادلهٔ اشترم ـ لیوویل با شرایط مرزی زیر همراه است.

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \qquad (۳ ـ ۱۷)$$

در این شرایط مرزی ضرایب α_1، α_2، β_1 و β_2 مقادیری ثابت هستند و $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ و $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. معادلهٔ (۳ ـ ۱۶) همراه با شرایط مرزی (۳ ـ ۱۷) را یک دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم گویند. مقصود از حل یک مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل تعیین کلیهٔ مقادیر λ است که به ازاء هریک از آنها معادلهٔ (۳ ـ ۱۶) و شرایط مرزی (۳ ـ ۱۷) دارای جواب غیر صفر باشد. اگر برای مقدار $\lambda = \lambda_0$ دستگاه اشترم ـ لیوویل (۳ ـ ۱۶) و (۳ ـ ۱۷) دارای جواب غیر صفر $y_0(x)$ باشد، λ_0 را یک مقدار ویژه و $y_0(x)$ را یک تابع ویژهٔ وابسته به مقدار ویژهٔ λ_0 گویند.

برای اینکه بتوانیم خواص جواب‌های مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل را استنتاج کنیم، از توابع زیر استفاده می‌کنیم.

$$p(x) = \exp\Big(\int_a^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\Big), \qquad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x), \qquad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}.$$

با استفاده از این توابع معادلهٔ (۳ ـ ۱۶) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{d}{dx}\Big(p\frac{dy}{dx}\Big) + (q + \lambda s)y = 0. \qquad (۳ ـ ۱۸)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۳ ـ ۱۸) را صورت کانونیک معادلهٔ اشترم ـ لیوویل گویند.

مثال ۳ ـ ۱۰. معادلهٔ اشترم ـ لیوویل زیر را به‌صورت کانونیک بنویسید. همچنین مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ آن‌را با شرایط مرزی داده شده تعیین کنید.

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \qquad 1 \le x \le e$$
$$y(1) = 0,\ y'(e) = 0.$$

حل. داریم:

$$p(x) = \exp\Big(\int \frac{x}{x^2}dx\Big) = \exp(\ln x) = x$$
$$q(x) = \frac{0}{x^2}x = 0$$

$$s(x) = \frac{x}{x^{۲}} = \frac{۱}{x}$$

درنتیجه صورت کانونیک عبارت است از:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{۱}{x}\lambda y = ۰.$$

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل فوق و تعیین جواب عمومی توجه کنید که این معادلهٔ کوشی ـ اویلر است. معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$r^{۲} + \lambda = ۰.$$

الف) برای $\lambda = -\alpha^{۲} \leq ۰$ تابع ویژه به‌دست نمی‌آید. پس مقدار ویژهٔ نامثبت نداریم.

ب) برای $\lambda = \beta^{۲} > ۰$ جواب عمومی به‌صورت زیر است.

$$y(x) = c_{۱} \cos\beta(\ln x) + c_{۲} \sin\beta(\ln x).$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم:

$$y(۱) = c_{۱} = ۰$$
$$y'(e) = \beta c_{۲}\frac{۱}{e}\cos\beta = ۰$$

پس $\beta = \left(n+\frac{۱}{۲}\right)\pi$. درنتیجه $\lambda_n = \left(n+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\pi^{۲}$ و $y_n(x) = \sin\left[(n+\frac{۱}{۲})\pi\ln x\right]$
برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مطلوب هستند.

نوع دیگری از مسائل اشترم ـ لیوویل در حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی ظاهر می‌گردد که آن‌را دستگاه اشترم ـ لیوویل متناوب گویند. معادلهٔ اشترم ـ لیوویل (۳ ـ ۱۸) را که در آن $p(a) = p(b)$ است، همراه با شرایط مرزی زیر دستگاه اشترم ـ لیوویل متناوب گویند.

$$y(a) = y(b),$$
$$y'(a) = y'(b).$$

مثال ۳ ـ ۱۱. مطلوب است حل مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل متناوب زیر:

$$y'' + \lambda y = ۰, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$
$$y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

حل. $p(x) = ۱$ است پس شرط $p(-\pi) = p(\pi) = ۱$ برقرار است.

الف) برای $\lambda < 0$ جواب غیر صفر برای مسئله موجود نیست.

ب) برای $\lambda = 0$ جواب مطلوب $y_0(x) = 1$ است.

پ) برای $\lambda = \alpha^2 > 0$ جواب عمومی به‌صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x,$$

با اعمال شرایط مرزی تناوبی به‌دست می آوریم:

$$c_1 \cos \alpha\pi - c_2 \sin \alpha\pi = c_1 \cos \alpha\pi + c_2 \sin \alpha\pi,$$

$$c_1 \sin \alpha\pi + c_2 \cos \alpha\pi = -c_1 \sin \alpha\pi + c_2 \cos \alpha\pi.$$

درنتیجه باید داشته باشیم:

$$2c_1 \sin \alpha\pi = 2c_2 \sin \alpha\pi = 0$$

یا:

$$\alpha\pi = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots$$

بدین ترتیب مقادیر ویژه و توابع ویژه به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\lambda_n = n^2 \quad \text{و} \quad y_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

یعنی برای مقادیر ویژهٔ $\lambda_n = n^2$ دو تابع ویژهٔ $\sin nx$ و $\cos nx$ به‌دست می آید.

چنانچه برای یک مقدار ویژه فقط یک تابع ویژهٔ مستقل خطی وجود داشته باشد، آن را یک مقدار ویژهٔ ساده گویند. اگر برای یک مقدار ویژهٔ k تابع ویژهٔ مستقل خطی به‌دست آید، آن را یک مقدار ویژه از مرتبهٔ تکرار k گویند.

هدف از این بخش تعیین پایه برای جواب‌های معادلات دیفرانسیل جزئی خطی همگن همراه با شرایط مرزی است. به دنبال این هستیم که پایهٔ مطلوب را به‌صورت توابع ویژهٔ مسائل اشترم ـ لیوویل تولید کنیم. برای نمایش توابع برحسب اینگونه پایه‌ها، مفاهیم زیر مفید است.

فرض کنید V نمایشگر فضای برداری توابع قطعه قطعه پیوسته به قلمرو $[a, b]$ روی $\mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنید، $\rho(x) > 0$ در V است. برای $f, g \in V$ ضرب داخلی $(f, g)_\rho$ را به‌صورت زیر تعریف کنید (تمرین ۱۰):

$$(f,g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx \tag{۳ ـ ۱۹}$$

تابع $\rho(x)$ را تابع وزن این ضرب داخلی می‌گوییم. اگر $(f,g)_\rho = 0$، می‌گوییم f و g نسبت به تابع وزن $\rho(x)$ روی $[a,b]$ بر هم عمودند. برای هر $f \in V$، طول یا نرم آن را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\rho = \sqrt{(f,f)_\rho}.$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که توابع ویژهٔ مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل بر هم عمودند.

قضیه ۳ ـ ۱۵. *فرض کنید در یک دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم توابع p، q و s روی $[a,b]$ پیوسته هستند و اگر ϕ_j و ϕ_k دو تابع ویژهٔ منطبق بر مقادیر ویژهٔ متفاوت λ_j و λ_k باشند، آنگاه ϕ_j و ϕ_k نسبت به s روی $[a,b]$ برهم عمودند.*

برهان. ϕ_j و λ_j و همچنین ϕ_k و λ_k در معادلهٔ اشترم ـ لیوویل صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\frac{d}{dx}(p\phi_j') + (q + \lambda_j s)\phi_j = 0,$$
$$\frac{d}{dx}(p\phi_k') + (q + \lambda_k s)\phi_k = 0.$$

از ضرب معادلهٔ اول در ϕ_k و معادلهٔ دوم در ϕ_j و تفریق نتایج، به‌دست می آوریم:

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k) s \phi_j \phi_k &= \phi_j \frac{d}{dx}(p\phi_k') - \phi_k \frac{d}{dx}(p\phi_j') \\ &= \frac{d}{dx}\big((p\phi_k')\phi_j - (p\phi_j')\phi_k\big).\end{aligned}$$

حال اگر از a تا b انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b s\phi_j\phi_k dx &= \Big[p(\phi_j\phi_k' - \phi_j'\phi_k)\Big]_a^b \\ &= p(b)\big(\phi_j(b)\phi_k'(b) - \phi_j'(b)\phi_k(b)\big) \\ &\quad - p(a)\big(\phi_j(a)\phi_k'(a) - \phi_j'(a)\phi_k(a)\big).\end{aligned} \tag{۳ ـ ۲۰}$$

از طرف دیگر شرایط مرزی را در نقطهٔ b به‌صورت زیر داریم:

$$\beta_1\phi_j(b) + \beta_2\phi_j'(b) = 0,$$
$$\beta_1\phi_k(b) + \beta_2\phi_k'(b) = 0. \qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$$

اگر $\beta_2 \neq 0$ باشد، از ضرب تساوی اول در $\phi_k(b)$ و تساوی دوم در $\phi_j(b)$ و تفریق یکدیگر

به‌دست می‌آوریم:

$$\phi_j(b)\phi'_k(b) - \phi'_j(b)\phi_k(b) = 0.$$

رابطهٔ اخیر در حالتی که $\beta_1 \neq 0$ به طور مشابه برقرار است. همچنین از شرایط مرزی در نقطهٔ a نتیجه می‌شود:

$$\phi_j(a)\phi'_k(a) - \phi'_j(a)\phi_k(a) = 0.$$

بدین ترتیب از (۳ ـ ۲۰) نتیجه می‌گیریم:

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b s\phi_j\phi_k dx = 0,$$

و چون $\lambda_j \neq \lambda_k$، پس $(\phi_j, \phi_k)_s = 0$. ■

در مورد مسائل اشترم ـ لیوویل متناوب قضیهٔ مشابه را به‌صورت زیر داریم.

قضیه ۳ ـ ۱۶. *توابع ویژهٔ وابسته به مقادیر ویژهٔ متفاوت در دستگاه اشترم ـ لیوویل متناوب نیز نسبت به تابع وزن s روی $[a, b]$ بر هم عمودند.*

برهان. شرایط تناوبی توابع ویژهٔ ϕ_j و ϕ_k عبارت است از:

$$\phi_j(a) = \phi_j(b) \quad \text{و} \quad \phi'_j(a) = \phi'_j(b),$$
$$\phi_k(a) = \phi_k(b) \quad \text{و} \quad \phi'_k(a) = \phi'_k(b).$$

از قرار دادن این مقادیر در (۳ ـ ۲۰) به‌دست می‌آوریم:

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b s\phi_j\phi_k dx = \big(p(b) - p(a)\big)\big(\phi_j(a)\phi'_k(a) - \phi'_j(a)\phi_k(a)\big)$$

لیکن در دستگاه متناوب داریم $p(a) = p(b)$، پس:

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b s\phi_j\phi_k dx = 0.$$

چون $\lambda_j \neq \lambda_k$ درنتیجه $(\phi_j, \phi_k)_s = 0$. ■

برای اثبات قضیهٔ بعدی، توابع در V را با مقدار مختلط و فضای برداری را روی $\mathbb{C}$، در نظر می‌گیریم و تعریف ضرب داخلی را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$(f, g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x)\overline{g(x)} dx.$$

قضیه ۳ ـ ۱۷. *کلیهٔ مقادیر ویژهٔ یک دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم، اعداد حقیقی‌اند.*

برهان. فرض کنید $\lambda_j = \alpha + i\beta$ یک مقدار ویژه و $\phi_j = u + iv$ تابع ویژهٔ وابسته به آن باشد. چون ضرایب در مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل حقیقی است، پس $\overline{\lambda_j} = \alpha - i\beta$ یک مقدار ویژه و $\overline{\phi_j} = u - iv$ تابع ویژهٔ آن است. چون λ_j و $\overline{\lambda_j}$ دو مقدار ویژهٔ متفاوت‌اند، پس بنابر (۳ ـ ۲۰) باید داشته باشیم:

$$۲i\beta \int_a^b s\phi_j\overline{\phi_j}dx = ۲i\beta \int_a^b s(u^۲ + v^۲)dx = ۰$$

چون $s > ۰$ و $u^۲ + v^۲ \neq ۰$ پس $\beta = ۰$، یعنی مقادیر ویژه حقیقی‌اند. ■

قضیه ۳ ـ ۱۸. *فرض کنید $\phi_۱$ و $\phi_۲$ دو تابع ویژهٔ وابسته به یک مقدار ویژه و $W(x; \phi_۱, \phi_۲)$ رونسکین آنها باشد، آنگاه $p(x)W(x; \phi_۱, \phi_۲)$ روی $[a, b]$ مقداری ثابت است.*

برهان. از قرار دادن $\phi_۱$ و $\phi_۲$ در معادلهٔ (۳ ـ ۱۸) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_۱}{dx}\right) + (q + \lambda s)\phi_۱ = ۰,$$
$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_۲}{dx}\right) + (q + \lambda s)\phi_۲ = ۰.$$

از ضرب معادلهٔ اول در $\phi_۲$ و معادلهٔ دوم در $\phi_۱$ و تفریق آنها به‌دست می‌آوریم:

$$\phi_۱\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_۲}{dx}\right) - \phi_۲\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_۱}{dx}\right) = ۰.$$

یا

$$\frac{d}{dx}(\phi_۱ p\phi'_۲ - \phi_۲ p\phi'_۱) = ۰.$$

حال اگر از a تا x انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$p(x)\big(\phi_۱(x)\phi'_۲(x) - \phi'_۱(x)\phi_۲(x)\big) = p(a)\big(\phi_۱(a)\phi'_۲(a) - \phi'_۱(a)\phi_۲(a)\big). \quad (۳ ـ ۲۱)$$

یعنی $p(x)W(x; \phi_۱, \phi_۲)$ مقداری ثابت است. ■

قضیه ۳ ـ ۱۹. *توابع ویژهٔ وابسته به یک مقدار ویژه در مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل منظم، صرف‌نظر از ضریب ثابت، یگانه است.*

برهان. فرض کنید $\phi_۱$ و $\phi_۲$ دو تابع ویژهٔ وابسته به مقدار ویژهٔ $\lambda_۰$ باشند. طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱۸ باید داشته باشیم:

$$p(x)W(x; \phi_۱, \phi_۲) \equiv \text{ثابت}$$

از طرف دیگر از برقراری شرط مرزی در نقطهٔ a به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_1\phi_1(a)+\alpha_2\phi_1'(a)=0,$$

$$\alpha_1\phi_2(a)+\alpha_2\phi_2'(a)=0.$$

چون $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$، پس باید دترمینان ضرایب دستگاه فوق برابر صفر باشد. یعنی

$$\phi_1(a)\phi_2'(a)-\phi_1'(a)\phi_2(a)=W(a;\phi_1,\phi_2)=0.$$

پس باید داشته باشیم: $p(x)W(x;\phi_1,\phi_2)\equiv 0$. لیکن $p(x)>0$، پس $W(x;\phi_1,\phi_2)\equiv 0$. یعنی:

$$\frac{\phi_1'(x)}{\phi_1(x)}=\frac{\phi_2'(x)}{\phi_2(x)}$$

یا $\phi_1(x)=c\phi_2(x)$. بنابراین ϕ_1 و ϕ_2 وابستهٔ خطی‌اند. ■

تذکر ۳ ـ ۲۰. قضیهٔ ۳ ـ ۱۹ برای مسائل اشترم ـ لیوویل متناوب صحیح نیست. مثال ۳ ـ ۱۱ مثال نقضی برای این قضیه در این حالت بیان می‌کند.

در مورد وجود مقادیر ویژه قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم. اثبات آن نیاز به مطالب پیشرفته دارد، لذا از اثبات آن صرفنظر کرده و آن را به کتاب [۴] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۳ ـ ۲۱. *هر دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم دارای تعداد شمارا و نامتناهی مقادیر ویژه است، که دارای مینیمم هستند و بیکران می‌شوند. به عبارت دیگر اگر $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعهٔ مقادیر ویژه باشد داریم:*

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$$

و $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

مثال ۳ ـ ۱۲. مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل زیر را در نظر بگیرید.

$$y''+\lambda y=0,\qquad 0\le x\le 1$$
$$y(0)=0 \text{ و } y(1)+y'(1)=0.$$

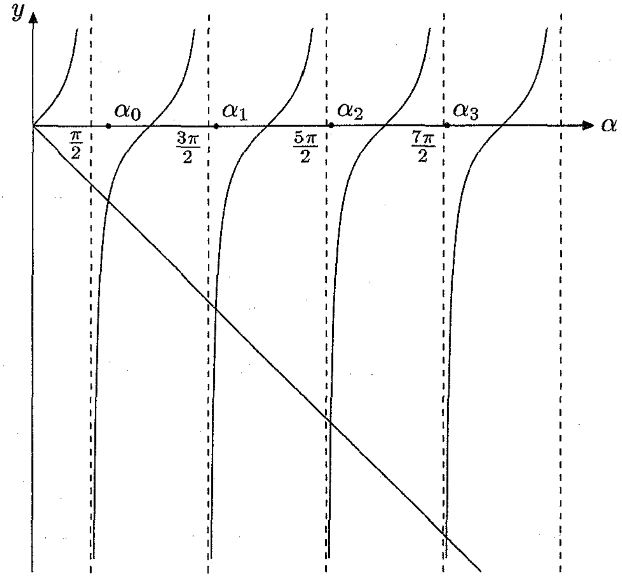
در اینجا $p=1$، $q=0$ و $s=1$ است. برای $\lambda>0$ جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

از $y(0)=0$ نتیجه می‌شود $A=0$. از شرط مرزی دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\sin\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$$

یا $\tan\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$. پس اگر بگیریم $\alpha = \sqrt{\lambda}$ باید داشته باشیم $\tan\alpha = -\alpha$. توجه کنید این معادله دارای جواب صریح نیست. لیکن می‌توان گفت برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $\lambda_n = \alpha_n^۲$،



نمودار ۳ ـ ۱. منحنی $\tan\alpha$ و $-\alpha$ در صفحهٔ α و y.

$(n + \frac{۱}{۲})\pi < \alpha_n < (n + ۱)\pi$ و برای مقادیر بزرگ n، $\alpha_n \simeq (n + \frac{۱}{۲})\pi$.

قضیه ۳ ـ ۲۲. *فرض کنید $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ توابع ویژهٔ یک مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل منظم روی $[a, b]$ باشد. اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته باشد و در شرایط مرزی این مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل صدق کند، آنگاه*

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} C_n \phi_n(x), \qquad (۳ ـ ۲۲)$$

که در آن

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)s(x)dx}{\int_a^b \phi_n(x)^۲ s(x)dx} \qquad (۳ ـ ۲۳)$$

در نقاط پیوستگی f مقدار سری برابر با مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی f مقدار سری برابر میانگین حد چپ و حد راست f است.

برای دیدن اثبات این قضیه نیز می‌توانید به کتاب [۴] مراجعه کنید.

تذکر ۳ ـ ۲۳. توجه کنید $\{\phi_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ یک پایهٔ متعامد برای فضای برداری توابع قطعه قطعه پیوسته روی $[a,b]$ است. اگر تابع f در شرایط مرزی مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل صدق نکند، باز هم تساوی (۳ ـ ۲۲) برای آن، مگر در نقاط انتهایی بازه، برقرار است. همچنین این تساوی را از نوع همگرایی در نرم می‌توان در نظر گرفت (نرم با تابع وزن $(s(x)$)، یعنی

$$\lim_{n\to\circ} ||f(x) - \sum_{k=\circ}^{n} C_k\phi_k||_\rho = \circ.$$

مشابه سری فوریه، تساوی پارسوال زیر را از این همگرایی می‌توان نتیجه گرفت.

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} C_n^{۲}||\phi_n||_\rho^{۲} = ||f||_\rho^{۲}.$$

به علاوه اگر تابع f روی زیرفاصلهٔ $[c,d]$ از $[a,b]$ دارای مشتقی پیوسته باشد، آنگاه سری (۳ ـ ۲۲) روی این فاصله به‌طور یکنواخت و همچنین به طور مطلق همگراست.

مثال ۳ ـ ۱۳. مطلوب است حل مسئلهٔ انتقال حرارت زیر

$$u_t = ku_{xx}, \qquad \circ \le x \le ۱ \quad t \ge \circ$$

$$u(x,\circ) = f(x) \quad \text{و} \quad u(\circ,t) = \circ \quad \text{و} \quad u(۱,t) + u_x(۱,t) = \circ$$

حل. با استفاده از روش جداسازی و گرفتن $u(x,t) = X(x)T(t)$ به‌دست می‌آوریم،

$$X\dot{T} = kX''T$$

یا:

$$\frac{\dot{T}}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

پس باید داشته باشیم:

$$X'' + \lambda X = \circ \quad \text{و} \quad \dot{T} + k\lambda T = \circ.$$

جواب عمومی معادلهٔ T عبارت است از:

$$T(t) = Ce^{-\lambda kt}.$$

با توجه به شرایط مرزی مسئلهٔ اشترم ـ لیویول مربوط به X را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم،

$$X'' + \lambda X = ۰, \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$
$$X(۰) = ۰ \quad \text{و} \quad X(۱) + X'(۱) = ۰$$

این مسئله را قبلاً در این بخش حل کردیم و جواب آن به‌صورت زیر است:

$$\lambda_n = \alpha_n^۲, \quad \left(n + \frac{۱}{۲}\right)\pi < \alpha_n < (n+۱)\pi, \; n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$
$$X_n(x) = \sin \alpha_n x, \; n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

پس باید داشته باشیم:

$$T_n(t) = a_n e^{-k\alpha_n^۲ t}$$

و

$$u(x,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n e^{-k\alpha_n^۲ t} \sin \alpha_n x$$
$$u(x,۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \sin \alpha_n x = f(x)$$

چون $s(x) = ۱$، پس:

$$a_n = \frac{\int_۰^۱ f(x) \sin \alpha_n x dx}{\int_۰^۱ \sin^۲ \alpha_n x dx} = \frac{\int_۰^۱ f(x) \sin \alpha_n x dx}{\frac{۱}{۲} - \frac{\sin ۲\alpha_n}{۴\alpha_n}}$$

همچنین برای مقادیر بزرگ n داریم $\sin ۲\alpha_n \simeq ۰$ و

$$a_n \simeq ۲(f, \sin \alpha_n x)$$

تذکر۳ ـ ۲۴. مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل از مرتبهٔ بالاتر از دوم هم برای حالت منظم و هم برای حالت متناوب قابل تعریف است. برای اطلاع بیشتر به [۴] مراجعه نمایید.

اکنون به معرفی نوع دیگری از مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل می‌پردازیم که کاربرد فراوانی دارد. یک معادلهٔ اشترم ـ لیوویل را غیرمنظم یا تکین گوییم، اگر قلمرو معادله به‌صورت $[۰,\infty)$ یا $(-\infty,\infty)$ یا ضریب $p(x)$ در یک نقطه از مرز قلمرو متناهی $[a,b]$ برابر صفر گردد. یک معادلهٔ دیفرانسیل اشترم ـ لیوویل تکین همراه با شرایط مرزی خطی و همگن را یک مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل نامنظم یا تکین گویند. به علت ناپیوستگی ضرایب معادله، جواب‌های مسئلهٔ دیگر در نقاط تکین در شرایط مرزی منظم و یا متناوب صدق نمی‌کنند. حتی ممکن است

جواب‌هایی پیدا شوند که در این نقاط بیکران شوند. لذا باید شرایط مرزی را در نقاط تکین به گونه‌ای تغییر دهیم تا بتوان قضایای قبل را در این حالت نیز برقرار کرد. این شرط، کران‌داری جواب و مشتق آن در این نقاط است که جایگزین شرط مرزی در هر نقطهٔ تکین مسئله خواهد شد.

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم:

$$Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (۳ ـ ۲۴)$$

را که روی فاصلهٔ $[a,b]$ تعریف شده است در نظر بگیرید. با انتگرال‌گیری از zLy روی $[a,x]$ با روش جزء به جزء به‌دست می‌آوریم.

$$\int_a^x zLydx = \Big[(za_0)y' - (za_0)'y + (za_1)y\Big]_a^x + \int_a^x \big((za_0)'' - (za_1)' + (za_2)\big)ydx \qquad (۳ ـ ۲۵)$$

حال بگیرید:

$$L^*z \doteq (za_0)'' - (za_1)' + (za_2) = a_0z'' + (2a_0' - a_1)z' + (a_0'' - a_1' + a_2)z$$

در این صورت تساوی (۳ ـ ۲۵) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\int_a^x (zLy - yL^*z)dx = \Big[a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz\Big]_a^x \qquad (۳ ـ ۲۶)$$

تعریف ۳ ـ ۲۵. عملگر L^* را عملگر الحاقی منطبق بر عملگر L گویند. همچنین عملگر L را خودالحاق گویند، اگر $L = L^*$.

با توجه به مطالب فوق شرط لازم و کافی برای خودالحاقی L عبارت است از:

$$a_1 = 2a_0' - a_1 \quad \text{و} \quad a_2 = a_0'' - a_1' + a_2$$

یا $a_1 = a_0'$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$Ly = a_0y'' + a_0'y' + a_2y = (a_0y')' + a_2y.$$

در حالت کلی عملگر دلخواه Ly خودالحاق نیست، ولی هر عملگر دارای یک صورت خودالحاق است. برای به‌دست آوردن آن قرار دهید:

$$p(x) = \exp\Big(\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\Big), \qquad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}p(x)$$

بدین ترتیب صورت خود الحاق عملگر L به شکل زیر است:

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big)+q(x)y=۰$$

مثال ۳ ـ ۱۴. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $(۱-x^۲)y''-۲xy'+n(n+۱)y=۰$ را معادلهٔ لژاندر گویند. صورت خودالحاق آن عبارت است از:

$$\frac{d}{dx}((۱-x^۲)\frac{dy}{dx})+n(n+۱)y=۰$$

معادلهٔ $x^۲y''+xy'+(x^۲-\nu^۲)y=۰$ را معادلهٔ بسل گویند. این معادله دارای صورت خودالحاق زیر است.

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+(x-\frac{\nu^۲}{x})y=۰.$$

اگر در رابطهٔ (۳ ـ ۲۶) قرار دهیم $x=b$، نتیجه می‌شود:

$$\int_a^b(zLy-yL^*z)dx=\Big[a_۰(y'z-yz')+(a_۱-a'_۰)yz\Big]_a^b \qquad (۳ ـ ۲۷)$$

تساوی فوق به اتحاد گرین مشهور است. در حالتی که L خودالحاق باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\int_a^b(zLy-yLz)dx=\Big[a_۰(y'z-yz')\Big]_a^b \qquad (۳ ـ ۲۸)$$

حال فرض کنید L خودالحاق و به صورت زیر بوده و در نقطهٔ $x=a$ تکین باشد.

$$Ly=\frac{d}{dx}\big(p(x)y'\big)+q(x)y.$$

برای دو تابع دوبار مشتق‌پذیر پیوسته $y(x)$ و $z(x)$ روی (a,b) رابطهٔ (۳ ـ ۲۸)، برای $\varepsilon>۰$ به‌صورت زیر در می آید.

$$\int_{a+\varepsilon}^b(zLy-yLz)dx=p(b)\big(y'(b)z(b)-y(b)z'(b)\big)$$
$$-p(a+\varepsilon)\big(y'(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon)-y(a+\varepsilon)z'(a+\varepsilon)\big).$$

بنابراین اگر بگیریم:

$$\lim_{x\to a+}p(x)\big(y'(x)z(x)-y(x)z'(x)\big)=۰ \qquad (۳ ـ ۲۹)$$

و

$$p(b)\big(y'(b)z(b)-y(b)z'(b)\big)=۰ \qquad (۳ ـ ۳۰)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\int_a^b (zLy - yLz)dx = 0. \tag{۳ ـ ۳۱}$$

در حالتی که $p(a) = 0$ شرایط (۳ ـ ۲۹) و (۳ ـ ۳۰) را با شرایط زیر می‌توان جایگزین کرد.

الف) $y(x)$ و $y'(x)$ در همسایگی $x = a$ کران‌دار باشند.

ب) برای اعداد b_1 و b_2 که $|b_1| + |b_2| \neq 0$، داشته باشیم:

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0.$$

اکنون اگر مسئلهٔ مقدار ویژهٔ اشترم ـ لیوویل نامنظم زیر را با شرایط مرزی (الف) و (ب)، در نظر بگیریم:

$$Ly = \frac{d}{dx}\big(p(x)y'\big) + \big(q(x) + \lambda s(x)\big)y, \tag{۳ ـ ۳۲}$$

قضایای ۳ ـ ۱۵، ۳ ـ ۱۷، ۳ ـ ۱۹، ۳ ـ ۲۱ و ۳ ـ ۲۲ برقرار خواهند بود. جواب‌های این مسئله در روابط (۳ ـ ۲۹) و (۳ ـ ۳۰) صدق می‌کنند. این روابط از شرایط مرزی (الف) و (ب) نتیجه خواهند شد. بنابراین رابطهٔ (۳ ـ ۳۱) برای عملگر

$$Ly = \frac{d}{dx}\big(p(x)y'\big) + q(x)y,$$

برقرار است. اگر دنباله‌های $\{\lambda_n\}$ و $\{\phi_n\}$ مقادیر و توابع ویژهٔ مسئلهٔ (۳ ـ ۳۲) باشند، خواهیم داشت: $L\phi_n = -\lambda_n s\phi_n$ و با جایگزینی $z = \phi_m, y = \phi_n$ در رابطهٔ (۳ ـ ۳۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b \big(\phi_n L\phi_m - \phi_n L\phi_m\big)dx &= \int_a^b (\lambda_n - \lambda_m)\phi_n(x)\phi_m(x)s(x)dx \\ &= (\phi_n, \phi_m)_s \end{aligned}$$

بدین ترتیب قضیهٔ ۳ ـ ۱۵ برقرار است. همچنین اگر توابع q, p و s حقیقی باشند، مقادیر ویژه نیز حقیقی هستند (قضیهٔ ۳ ـ ۱۷)، زیرا $L\overline{\phi}_n = -\overline{\lambda}_n\overline{\phi}_n s$ و

$$0 = \int_a^b \big(\phi_n L\overline{\phi}_n - \overline{\phi}_n L\phi_n\big)dx = (\lambda_n - \overline{\lambda}_n)\int_a^b |\phi_n(x)|^2 s(x)dx.$$

بنابراین باید $\lambda_n = \overline{\lambda}_n$ که نشان می‌دهد، یک مقدار ویژهٔ حقیقی است. برای برقراری قضیهٔ ۳ ـ ۱۹ توجه کنید که به وسیله شرایط مرزی و رابطهٔ (۳ ـ ۲۱) می‌توان دید که

$W(x;\phi_1,\phi_2)=0$ هرگاه ϕ_1 و ϕ_2 توابع ویژهٔ متناظر مقدار ویژهٔ λ باشند. بنابراین ϕ_1 و ϕ_2 وابستهٔ خطی هستند. برای اثبات قضایای ۳ ـ ۲۱ و ۳ ـ ۲۲ به [۴] مراجعه کنید.

تذکر۳ ـ ۲۶. اگر نقطهٔ b نیز نقطهٔ تکین مسئله باشد، یعنی $p(b)=0$ در این صورت شرط مرزی مشابه (الف) جایگزین شرط (ب) می‌شود. یعنی باید جواب معادله و مشتق آن در همسایگی $x=b$ نیز کران‌دار باشد.

مثال۳ ـ ۱۵. دستگاه اشترم ـ لیوویل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)y')+\lambda y=0 \qquad -1<x<1$$

در این معادله $p(x)=1-x^2$، $q(x)=0$ و $s(x)=1$. چون $p(\pm 1)=0$، پس این دستگاه نامنظم است و نقاط $x=\pm 1$ نقاط تکین مسئله هستند. برای اینکه توابع ویژهٔ این مسئله تشکیل یک پایهٔ متعامد را برای توابع قطعه قطعه پیوسته در بازهٔ $[-1,1]$ بدهند، شرط کران‌داری توابع y و y' را وقتی $x\to\pm 1$ به مسئله اضافه می‌کنیم. با این شرط، مقادیر ویژهٔ مسئله به‌صورت $\lambda_n=n(n+1)$، برای $n=0,1,2,\ldots$ و توابع ویژه به‌صورت چندجمله‌ای‌هایی مانند $P_n(x)$، از درجهٔ n حاصل می‌گردد که به چندجمله‌ای‌های لژاندر شهرت دارند. این توابع ویژه برهم عمودند و تشکیل یک پایه برای توابع قطعه قطعه پیوسته در بازهٔ $[-1,1]$ می‌دهند.

مثال۳ ـ ۱۶. دستگاه اشترم ـ لیوویل نامنظم زیر را در نظر بگیرید، که در آن $\nu\geq 0$ مقداری ثابت است،

$$\frac{d}{dx}(xy')+\left(\lambda x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0 \qquad 0<x<a$$

$y(a)=0$ و y و y' کران‌دار بمانند وقتی که $x\to 0$

در این معادله داریم $p(x)=x$، $q(x)=-\dfrac{\nu^2}{x}$ و $s(x)=x$. چون $p(0)=0$ و $q(x)$ وقتی $x\to 0+$ بیکران می‌گردد، پس این دستگاه نیز نامنظم است. از حل این مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مقادیر ویژه به‌صورت $\lambda_n=k_n^2$، $n=0,1,2,\ldots$ و توابع ویژه به صورت توابع بسل نوع اول از مرتبهٔ ν، یعنی $J_\nu(k_nx)$ ظاهر می‌گردند، که در آن k_na ریشه n ام J_ν روی قسمت مثبت محور افقی است. تابع بسل J_ν و J'_ν هر دو وقتی که $x\to 0+$ کران‌دار می‌مانند. توابع ویژهٔ $\{J_\nu(k_nx)\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن x برهم عمودند و این توابع پایه‌ای برای توابع قطعه قطعه پیوسته در بازهٔ $[0,a]$ هستند.

در این قسمت به ارائهٔ دو مثال می‌پردازیم که در حل آنها به روش جداسازی، معادلهٔ بسل و لژاندر به‌صورت طبیعی ظاهر می‌گردد.

مثال ۳ ـ ۱۷. مسئلهٔ حرکت پوستهٔ مرتعش دایره‌ای شکل به شعاع واحد در مختصات قطبی به‌صورت زیر است.

$$u_{tt} = c^{۲}\left(u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta}\right) \quad t > ۰,\ r < ۱, ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

درحالتی‌که جواب‌های این معادله دارای تقارن شعاعی هستند، یعنی به θ بستگی ندارند، این مسئله به‌صورت زیر ساده می‌گردد.

$$u_{tt} = c^{۲}\left(u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r\right) \qquad (۳ \text{ ـ } ۳۳)$$

چون پوسته در طول کرانه $r = ۱$ حرکت نمی‌کند، شرط مرزی به‌صورت

$$u(۱, t) = ۰, \qquad (۳ \text{ ـ } ۳۴)$$

برای $t \geq ۰$ برقرار است. جواب‌هایی که به θ بستگی ندارند، وقتی پدید می‌آیند که شرط اولیه به θ وابسته نباشد. یعنی شرایط اولیه را برای $r < ۱$ به‌صورت

$$u(r, ۰) = f(r) \quad \text{و} \quad u_t(r, ۰) = g(r) \qquad (۳ \text{ ـ } ۳۵)$$

داشته باشیم.

ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها، جواب‌های (۳ ـ ۳۳) را که در شرایط مرزی (۳ ـ ۳۴) صدق می‌کنند، به‌دست می‌آوریم. برای این منظور فرض کنید

$$u(r, t) = R(r)T(t)$$

با مشتق‌گیری و جایگذاری در (۳ ـ ۳۳) و تقسیم معادلهٔ حاصل بر $c^{۲}RT$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\ddot{T}}{c^{۲}T} = \frac{۱}{R}\left(R'' + \frac{۱}{r}R'\right).$$

طرفین تساوی فوق باید برابر مقدار ثابت جداسازی، $\lambda-$، باشد بدین ترتیب مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مکان به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$R'' + \frac{۱}{r}R' + \lambda R = ۰,$$

$R(۱) = ۰$ و R و R' وقتی‌که $r \to ۰^+$، کران‌دار بمانند. از ضرب معادلهٔ فوق در r، آن‌را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dr}(rR') + \lambda rR = ۰, \qquad (۳ - ۳۶)$$

از مقایسهٔ معادلهٔ (۳ ـ ۳۶) با مثال ۳ ـ ۱۶ نتیجه می‌شود، مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ فوق به‌صورت $\lambda_n = k_n^{۲}$ و توابع ویژه به‌صورت توابع بسل نوع اول از مرتبهٔ صفر، یعنی $J_۰(k_n r)$ ظاهر می‌گردند که در آن $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و k_n ریشه n ام $J_۰$ روی قسمت مثبت محور افقی است. از قرار دادن این مقادیر ویژه در معادلهٔ T، آن‌را به‌صورت زیر داریم.

$$\ddot{T} + (ck_n)^{۲} T = ۰, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$T(t) = a_n \cos(ck_n t) + b_n \sin(ck_n t)$$

بدین ترتیب جواب عمومی مسئلهٔ (۳ ـ ۳۳) و (۳ ـ ۳۴) به‌صورت زیر ظاهر می‌گردد

$$u(r,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \big(a_n \cos(ck_n t) + b_n \sin(ck_n t)\big) J_۰(k_n r)$$

برای به‌دست آوردن جواب یگانهٔ مسئله شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم.

$$u(r,۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n J_۰(k_n r) = f(r),$$

$$u_t(r,۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} ck_n b_n J_۰(k_n r) = g(r).$$

از این دو تساوی مقادیر a_n و b_n به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$a_n = \frac{۲}{J_۱^{۲}(k_n)} \int_۰^۱ r f(r) J_۰(k_n r)\,dr,$$

$$b_n = \frac{۲}{ck_n J_۱^{۲}(k_n)} \int_۰^۱ r g(r) J_۰(k_n r)\,dr.$$

در محاسبهٔ فوق از قضیهٔ ۳ ـ ۲۲ و رابطهٔ زیر استفاده شده است.

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-۱}(x), \qquad \nu \geq ۱$$

در این رابطه منظور از ν، مرتبهٔ معادلهٔ بسل است. برای اثبات آن به [۲] مراجعه کنید.

تذکر۳ ـ ۲۷. صفرهای $J_۰$ به‌طور منظم بر روی محور قرار ندارند، برخلاف صفرهای توابع سینوسی که در مورد تار مرتعش ظاهر می‌شوند. همین مطلب تأیید می‌کند که صدای طبل باید با صدای ویولن تفاوت داشته باشد.

مثال ۳ ـ ۱۸. فرض کنید (r, θ, ϕ) مختصات کروی در فضای سه‌بعدی باشد. معادلهٔ لاپلاس در فضای سه‌بعدی یعنی معادلهٔ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ در این مختصات به‌شکل زیر در می‌آید که در آن $r \geq 0$، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq \phi \leq \pi$ است:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^2}u_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} = 0.$$

فرض کنید مقدار u بر روی کره به مرکز مختصات و شعاع a فقط به ϕ وابسته باشد، یعنی داشته باشیم:

$$u(a, \theta, \phi) = f(\phi) \tag{۳ ـ ۳۷}$$

در این‌صورت می‌تواند جواب معادله با این شرایط مرزی، مستقل از θ باشد. بدین ترتیب $u_{\theta\theta} = 0$ و معادلهٔ فوق به‌صورت زیر ساده می‌گردد.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi u_\phi) = 0 \tag{۳ ـ ۳۸}$$

همچنین جهت پیوستگی جواب در مبدأ مختصات باید:

$$u(r, \phi) \text{ کران‌دار باشد، وقتی } r \to 0 \tag{۳ ـ ۳۹}$$

اکنون با استفاده از روش جداسازی به حل معادلهٔ (۳ ـ ۳۸) همراه با شرایط مرزی (۳ ـ ۳۷) و (۳ ـ ۳۹) می‌پردازیم. از قرار دادن $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ در معادلهٔ (۳ ـ ۳۸) و تقسیم آن بر $R\Phi$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Phi\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right)$$

طرفین این تساوی باید برابر مقدار ثابت λ باشد. بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right) + \lambda\Phi = 0, \tag{۳ ـ ۴۰}$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0. \tag{۳ ـ ۴۱}$$

با تغییر متغیر $w = \cos\phi$، معادلهٔ (۳ ـ ۴۰) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{d}{dw}\left((1 - w^2)\frac{d\Phi}{dw}\right) + \lambda\Phi = 0, \qquad -1 < w < 1$$

همچنین وقتی $w \to \pm 1$ باید Φ و Φ' کران‌دار بمانند. این مسئله همان مثال ۳ ـ ۱۵ است و مقادیر ویژهٔ آن عبارت‌اند از $\lambda = n(n+1)$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ و توابع ویژه به‌صورت

چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(w)$ است،

$$\Phi(\phi) = P_n(w) = P_n(\cos\phi), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

از طرفی معادلهٔ (۳ ـ ۴۱) معادلهٔ کوشی ـ اویلر است و برای $\lambda = n(n+1)$ دارای جواب عمومی زیر است.

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-1-n}$$

بدین ترتیب جواب عمومی مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر ظاهر می‌گردد.

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-1-n}) P_n(\cos\phi).$$

برای اینکه جواب در $r = 0$ کران‌دار بماند باید داشته باشیم $B_n = 0$. درنتیجه این جواب عمومی به‌صورت زیر ساده می‌گردد.

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi).$$

با اعمال شرط مرزی به‌دست می‌آوریم:

$$u(1, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\phi) = f(\phi) = F(\cos\phi).$$

با توجه به کاربرد قضیهٔ ۳ ـ ۲۲ برای دستگاه معادلات اشترم ـ لیوویل نامنظم، ضرایب A_n به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} F(w) P_n(w)\, dw \tag{۳ ـ ۴۲}$$

که در آن $F(w) = f(\cos^{-1} w)$ است. به عبارت دیگر:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\phi) P_n(\cos\phi) \sin\phi\, d\phi, \; n \quad = 0, 1, 2, \ldots$$

تمرین ۳ ـ ۴

۱. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسائل اشترم ـ لیوویل منظم زیر را تعیین کنید.

الف) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0$ و $y(\pi) = 0.$

ب) $y'' + y' + (1+\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0$ و $y(1) = 0.$

پ) $y'' + 2y' + (1-\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0$ و $y'(1) = 0.$

ت) $y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0, \qquad y'(0) = 0$ و $y'(\pi) = 0.$

۲. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسائل اشترم ـ لیوویل متناوب زیر را به‌دست آورید.

الف) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-1) = y(1)$ و $y'(-1) = y'(1).$

ب) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(2\pi)$ و $y'(0) = y'(2\pi).$

پ) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(\pi)$ و $y'(0) = y'(\pi).$

۳. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسائل اشترم ـ لیوویل منظم زیر را بیابید.

الف) $x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0, \qquad y(1) = 0$ و $y(e) = 0.$

ب) $\dfrac{d}{dx}\left((2+x)^2y'\right) + \lambda y = 0, \qquad y(-1) = 0$ و $y'(1) = 0.$

پ) $(1+x)^2y''+2(1+x)y'+3\lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0$ و $y'(1) = 0.$

۴. تمام مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسائل اشترم ـ لیوویل نامنظم زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \qquad y(1) = 0$ و y و y' در $x = 0$ کران‌دار

ب) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0$ و y و y' در بینهایت کران‌دار

۵. تابع $f(x) = x$ را روی $[0, \pi]$ برحسب توابع ویژهٔ مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل زیر بسط دهید.

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0 \text{ و } y'(\pi) = 0.$$

۶. هر یک از معادلات زیر را به‌صورت خودالحاقی بنویسید.

الف) معادلهٔ لاگر: $xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

ب) معادلهٔ هرمیت: $y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

پ) معادلهٔ چبیشف: $(1-x)^2y'' - xy' + n^2y = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

۷. اگر توابع ویژهٔ مسئلهٔ

$$\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}(ry') + \lambda y = ۰, \quad \alpha\ y(a) + \beta y'(a) = ۰, \quad \lim_{r\to ۰+} |y(r)| < \infty$$

که روی $[۰, a]$ تعریف شده‌اند، در شرط $\lim_{r\to ۰+} ry'(r) = ۰$ صدق کنند، آنگاه کلیهٔ مقادیر ویژهٔ آن حقیقی‌اند.

۸. کلیهٔ جواب‌های مسائل با شرایط مرزی غیرهمگن زیر را به‌دست آورید.

الف) $y'' + ۳y' + ۲y = ۲x + ۱, \qquad ۲y(۰) - y(۱) = ۰$ و $y'(۱) = ۲.$

ب) $xy'' + y' = -x, \ y(۱) = ۰$ و $\lim_{x\to ۰+} |y(x)| < \infty.$

پ) $xy'' + y' - \frac{n^۲}{x} y = x, \ y(۱) = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} |y(x)| < \infty.$

۹. نشان دهید مسأله اشترم ـ لیوویل نامنظم زیر در دامنهٔ $(-\infty, \infty)$ دارای جواب $y(x) = \cos\omega(x - x_۰)$ است که در آن $x_۰$ مقداری ثابت است، $\lambda = -\omega^۲$ و $\omega \geq ۰$.

$$y'' - \lambda y = ۰, \qquad |y(x)| \leq ۱.$$

۱۰. نشان دهید $(f, g)_\rho$ تعریف شده در (۳ ـ ۱۹) یک ضرب داخلی روی V است.

۴

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و غیرهمگن روی میدان کران‌دار

حل مسائل غیرهمکن معادلات دیفرانسیل جزئی خطی روی میدان کراندار، با استفاده از حل مسئلهٔ همگن وابسته به آن با روش‌های گوناگون مقدور است. در بخش ۴ ـ ۱ روش غیرهمگن به همگن را خواهیم دید. در این روش با استفاده از تغییر تابع مجهول و تعیین جواب مخصوص، مسئلهٔ غیرهمگن به همگن تبدیل و قابل حل است. در بخش ۴ ـ ۲ حل مسائل را با استفاده از تبدیلات فوریهٔ متناهی تعمیم یافته داریم. خواهیم دید چگونه با استفاده از جواب‌های مسائل اشترم ـ لیوویل تبدیل مربوط به آن را در هر مسئله بسازیم و از آن بهره بگیریم. در بخش ۴ ـ ۳ روش دوهامل ارائه می‌شود. در این روش مسئلهٔ غیرهمگن به دو مسئلهٔ همگن و غیرهمگن تجزیه می‌گردد و حل مسئلهٔ غیرهمگن جدید به‌سادگی از حل مسئلهٔ همگن مقدور می‌گردد. در بخش آخر این فصل حل مسئله را با استفاده از تابع گرین

خواهیم دید. نکتهٔ قابل توجه در این روش‌ها این است که در یک مسئله می‌توان از ترکیب روش‌ها نیز در حل مسئله بهره گرفت.

۴ ـ ۱ روش غیرهمگن به همگن

در این بخش حل مسائل خطی غیرهمگن را به‌طور مستقیم با استفاده از حل مسئلهٔ همگن وابسته به‌دست می‌آوریم. این روش برای معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ دوم که تابع مجهول به دو متغیر x و t وابسته است، بیان می‌شود. تعمیم روش برای تعداد بیشتر متغیرهای مکان به‌سادگی مقدور است.

فرض کنید $u(x,t)$ تابع مجهول مسئله با شرایط مرزی اولیهٔ خطی و غیرهمگن از مرتبهٔ دوم باشد:

$$Lu = h_1(x,t), \qquad t \geq 0, \quad a \leq x \leq b \tag{۴ ـ ۱}$$

$$M_1 u = \alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = g_1(t), \qquad t \quad 0 \quad > \tag{۴ ـ ۲}$$

$$M_2 u = \alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = g_2(t), \qquad t \quad 0 \quad > \tag{۴ ـ ۲}$$

$$Ku\big|_{t=0} = \alpha_3 u(x,0) + \beta_3 u_t(x,0) = f_1(x), \quad a < x < b \tag{۴ ـ ۳}$$

برای حل این مسئله مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱: ابتدا تابع $u_q(x,t)$ را طوری انتخاب کنید تا در شرایط مرزی (۴ ـ ۲) صدق کند. نظر به اینکه شرایط مرزی (۴ ـ ۲) خطی است، با گرفتن

$$u_q(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

و قرار دادن آن در (۴ ـ ۲) و تعیین $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ برحسب $g_1(t)$ و $g_2(t)$ این امر مقدور است. درحقیقت با حل یک معادلهٔ سه مجهولی، $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ تعیین می‌شود:

مرحلهٔ ۲: بگیرید $u(x,t) = u_q(x,t) + v(x,t)$ و آن را در مسئلهٔ (۴ ـ ۱)، (۴ ـ ۲) و (۴ ـ ۳) قرار دهید. این مسئله برحسب تابع مجهول $v(x,t)$ به‌صورت زیر در می‌آید.

$$Lv = h_1(x,t) - Lu_q(x,t) := h_2(x,t), \qquad t \geq 0, \quad a \leq x \leq b \tag{۴ ـ ۴}$$

$$M_1 v = 0 \quad \text{و} \quad M_2 v = 0, \qquad t \quad 0 \quad > \tag{۴ ـ ۵}$$

$$Kv\big|_{t=0} = f_1(x) - Ku_q(x,t)\big|_{t=0} := f_2(x), \quad a < x < b \tag{۴ ـ ۶}$$

بدین ترتیب شرایط مرزی را به‌صورت همگن داریم.

مرحلهٔ ۳: مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مکان مسئلهٔ v را استخراج و آن را حل کنید. فرض کنید $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ توابع ویژهٔ این مسئله باشد.

مرحلهٔ ۴: طرف دوم معادلهٔ (۴ ـ ۴) یعنی تابع $h_2(x,t)$ را برای t ثابت برحسب توابع خاص $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ بسط دهید. به این ترتیب برای t ثابت سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ $h_2(x,t)$ برحسب $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ با ضرایبی که به t وابسته‌اند، به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ ۵: درنظر بگیرید

$$v_p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) \tag{۴ ـ ۷}$$

و آن را همراه با بسط فوریهٔ تعمیم یافتهٔ $h_2(x,t)$ در معادلهٔ (۴ ـ ۴) قرار دهید. به این ترتیب یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی خطی غیرهمگن برای $a_n(t)$ به‌دست می‌آید. یک جواب مخصوص آنرا انتخاب و در (۴ ـ ۷) قرار دهید. تابع $v_p(x,t)$ حاصل یک جواب مخصوص برای معادلهٔ (۴ ـ ۴) است که در شرایط مرزی همگن (۴ ـ ۵) نیز صدق می‌نماید.

مرحلهٔ ۶: قرار دهید $v(x,t) = v_p(x,t) + w(x,t)$ و آنرا در مسئلهٔ (۴ ـ ۴)، (۴ ـ ۵) و (۴ ـ ۶) جایگذاری کنید تا به‌دست آورید.

$$Lw = 0 \qquad t \geq 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$M_1 w = 0 \;\text{ و }\; M_2 w = 0, \qquad t > 0$$

$$Kw\big|_{t=0} = f_1(x) - Lu_q(x,t)\big|_{t=0} - Kv_p(x,t)\big|_{t=0} := f_3(x)$$

این مسئله مسئله‌ای همگن است و با روش‌های فصل قبلی قابل‌حل است. به این ترتیب جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱)، (۴ ـ ۲) و (۴ ـ ۳) به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,t) = u_q(x,t) + v_p(x,t) + w(x,t),$$

که در آن $w(x,t)$ جواب مسئلهٔ فوق است.

تذکر ۴ ـ ۱. در اکثر مسائل می‌توان u_q را یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک یعنی $u_q = Ax + B$ گرفت و A و B قابل تعیین است. در حقیقت تنها در حالتی‌که شرایط مرزی فقط برحسب مشتق داده شده باشد، نیاز به چندجمله‌ای از درجهٔ دوم است.

تذکر ۴ ـ ۲. مراحل ۵ و ۶ را می‌توان همزمان انجام داد، بدین ترتیب که با جایگزینی (۴ ـ ۷) در شرط اولیهٔ (۴ ـ ۶)، یک شرط اولیه برای $a_n(t)$ به‌دست می‌آوریم. به این طریق جواب خصوصی $v_p(x,t)$ در مسئلهٔ (۴ ـ ۴)، (۴ ـ ۵) و (۴ ـ ۶) صدق می‌کند و جواب نهایی عبارت است از:

$$u(x,t) = u_q(x,t) + v_p(x,t).$$

با این حال برای درک بهتر این روش در حل دو مثال زیر، همان مراحل شش‌گانه را دنبال می‌کنیم.

مثال ۴ ـ ۱. مطلوب است حل مسئلهٔ غیرهمگن

$$u_t - u_{xx} = 2x^2t + 1, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = t \ \text{و}\ u_x(1,t) = 1 \qquad t \geq 0$$

حل. مرحلهٔ ۱: داریم

$$u_q(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

و

$$u_q(0,t) = c(t) = t$$

$$u_{qx}(1,t) = 2a(t) + b(t) = 1$$

چون به‌دنبال یک جواب هستیم برای سادگی می‌گیریم:

$$c(t) = t \ \text{و}\ b(t) = 1 \ \text{و}\ a(t) = 0$$

پس

$$u_q(x,t) = x + t.$$

مرحلهٔ ۲: می‌گیریم

$$u(x,t) = v(x,t) + x + t.$$

از قرار دادن آن در مسئلهٔ فوق، مسئلهٔ v به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$v_t - v_{xx} = 2x^2t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v(x,\circ)=\circ, \qquad \circ\le x\le \text{۱},$$
$$v(\circ,t)=\circ, \quad v_x(\text{۱},t)=\circ, \quad t\ge\circ$$

مرحلهٔ ۳: مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل را به‌صورت زیر داریم:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ$$
$$X(\circ)=\circ \;\; \text{و} \;\; X'(\text{۱})=\circ$$

از حل این مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مقادیر ویژه و توابع ویژه به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\lambda_n=(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}} \;\; \text{و} \;\; \phi_n(x)=\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x,\; n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots$$

مرحلهٔ ۴: طرف دوم معادلهٔ دیفرانسیل v یعنی تابع $\text{۲}x^{\text{۲}}t$ را برحسب توابع ویژه بسط می‌دهیم. پس داریم:

$$\text{۲}x^{\text{۲}}t=\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(t)\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x$$

$$c_n(t)=\frac{\langle \text{۲}x^{\text{۲}}t,\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x\rangle}{\langle \sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x,\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x\rangle}=\frac{\int_\circ^{\text{۱}}\text{۲}x^{\text{۲}}t\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x dx}{\int_\circ^{\text{۱}}\sin^{\text{۲}}(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x dx},$$

$$\int_\circ^{\text{۱}}\sin^{\text{۲}}(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x dx=\int_\circ^{\text{۱}}(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\cos(\text{۲}n+\text{۱})\pi x)dx$$
$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x-\frac{\text{۱}}{\text{۲}(\text{۲}n+\text{۱})\pi}\sin(\text{۲}n+\text{۱})\pi x\Big|_\circ^{\text{۱}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

$$\int_\circ^{\text{۱}}\text{۲}x^{\text{۲}}t\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x dx=\text{۲}t\Big(x^{\text{۲}}\frac{\cos(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x}{-(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi}-\text{۲}x\frac{\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x}{-(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}$$
$$+\text{۲}\frac{\cos(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۳}}\pi^{\text{۳}}}\Big)\Big|_\circ^{\text{۱}}$$
$$=\text{۴}t\Big(\frac{(-\text{۱})^n}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}-\frac{\text{۱}}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۳}}\pi^{\text{۳}}}\Big)$$

پس:

$$\text{۲}x^{\text{۲}}t=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\text{۸}t}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}\Big((-\text{۱})^n-\frac{\text{۱}}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi}\Big)\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi x.$$

مرحلهٔ ۵: می‌گیریم

$$v_p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x,$$

از قرار دادن این سری و سری $2x^2t$ در معادلهٔ v به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dot{a}_n(t)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 a_n(t)\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\left((-1)^n-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

پس باید داشته باشیم:

$$\dot{a}_n+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 a_n=\frac{8t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\left((-1)^n-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right).$$

یک جواب مخصوص برای این معادله عبارت است از:

$$a_n(t)=\frac{8}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}\left((-1)^n-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)\left(t-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

به این ترتیب یک جواب مخصوص به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$v_p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}\left((-1)^n-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)\left(t-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)$$

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

مرحلهٔ ٦: مسئلهٔ همگن w به‌صورت زیر است:

$$w_t-w_{xx}=0,$$

$$w(0,t)=0 \quad \text{و} \quad w_x(1,t)=0,$$

$$w(x,0)=-v_p(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^6\pi^6}\left((-1)^n-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

جواب عمومی معادله و شرایط مرزی عبارت است از:

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

برای برقراری شرایط اولیه باید داشته باشیم:

$$w(x,\circ) = \sum_{n=\circ}^{\infty} b_n \sin{(n+\frac{۱}{۲})\pi x}$$
$$= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۸}{(n+\frac{۱}{۲})^{۶}\pi^{۶}}\left((-۱)^n - \frac{۱}{(n+\frac{۱}{۲})\pi}\right)\sin{(n+\frac{۱}{۲})\pi x}$$

یا

$$b_n = \frac{۸}{(n+\frac{۱}{۲})^{۶}\pi^{۶}}\left((-۱)^n - \frac{۱}{(n+\frac{۱}{۲})\pi}\right)$$

از قرار دادن نتایج فوق در $u = u_q + v_p + w$ جواب نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u(x,t) = x + t + \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۸}{(n+\frac{۱}{۲})^{۴}\pi^{۴}}\left((-۱)^n - \frac{۱}{(n+\frac{۱}{۲})\pi}\right)\Bigg(t - \frac{۱}{(n+\frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}}$$
$$+ \frac{۱}{(n+\frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}} e^{-(n+\frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}t}\Bigg)\sin{(n+\frac{۱}{۲})\pi x}$$

تذکر ۴ ـ ۳. چنانچه شرایط مرزی مسئله متناوب باشد، یعنی:

$$M_۱u = u(a,t) - u(b,t), \qquad M_۲u = u_x(a,t) - u_x(b,t)$$

روش فوق بدون هیچگونه تغییری قابل اعمال است. در این حالت نیز $u_q(x,t)$ را می‌توان چندجمله‌ای درجهٔ دوم در نظر گرفت.

مثال ۴ ـ ۲. مسئلهٔ غیرهمگن با شرایط مرزی متناوب زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} - u, \qquad -\pi < x < \pi,\ \ t > \circ,$$
$$u(x,\circ) = x \ \text{ و } \ u_t(x,\circ) = \circ, \qquad -\pi \le x \le \pi,$$
$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) + t \ \text{ و } \ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) + t^{۲} \qquad t \ge \circ$$

حل. مرحلهٔ ۱: برای تعیین u_q می‌گیریم:

$$u_q(x,t) = a(t)x^{۲} + b(t)x + c(t).$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \pi^{۲}a(t) - \pi b(t) + c(t) = \pi^{۲}a(t) + \pi b(t) + c(t) + t \\ -۲\pi a(t) + b(t) = ۲\pi a(t) + b(t) + t^{۲} \end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آوریم $b(t) = -\frac{۱}{۲\pi}t$ و از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آوریم

$a(t) = -\frac{۱}{۴\pi}t^۲$. مقدار $c(t)$ اختیاری است، آنرا برابر صفر می‌گیریم. بنابراین:

$$u_q(x,t) = -\frac{۱}{۴\pi}(t^۲x^۲ + ۲tx)$$

مرحلهٔ ۲: حال می‌گیریم $u(x,t) = u_q(x,t) + v(x,t)$. در این‌صورت مسئلهٔ v به شکل زیر در می‌آید.

$$v_{tt} = v_{xx} - v + \frac{۱}{۴\pi}(t^۲x^۲ + ۲tx + ۲x^۲ - ۲t^۲), \qquad -\pi < x < \pi,\ t > ۰,$$

$$v(x,۰) = x \text{ و } v_t(x,۰) = \frac{۱}{۲\pi}x, \qquad -\pi \le x \le \pi,$$

$$v(-\pi,t) = v(\pi,t) \text{ و } v_x(-\pi,t) = v_x(\pi,t).$$

مرحلهٔ ۳: مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مکان را به‌صورت زیر داریم:

$$X'' + (\lambda - ۱)X = ۰,$$

$$X(-\pi) = X(\pi) \text{ و } X'(-\pi) = X'(\pi),$$

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ این مسئله را به‌صورت زیر به‌دست می آوریم:

$$\lambda_n = n^۲ + ۱ \text{ و } \phi_n(x) = e^{inx}, \qquad n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$$

مرحلهٔ ۴: بسط جمله ناهمگن را برحسب این توابع ویژه به‌صورت زیر داریم:

$$\frac{۱}{۴\pi}(t^۲x^۲ + ۲tx + ۲x^۲ - ۲t^۲) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱}{۴\pi}(t^۲x^۲ + ۲tx + ۲x^۲ - ۲t^۲)dx = \frac{۱}{۴\pi}\Big(\frac{\pi^۲}{۳}t^۲ - ۲t^۲ + \frac{۲}{۳}\pi^۲\Big).$$

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{۱}{۴\pi}(t^۲x^۲ + ۲tx + ۲x^۲ - ۲t^۲)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{۱}{۸\pi^۲}\Big((t^۲x^۲ + ۲tx + ۲x^۲ - ۲t^۲)\frac{e^{-inx}}{-in} - (۲t^۲x + ۲t + ۴x)\frac{e^{-inx}}{(-in)^۲}$$

$$+ (۲t^۲ + ۴)\frac{e^{-inx}}{(-in)^۳}\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-۱)^n}{۸\pi^۲}\Big(\frac{۴\pi t}{-in} + \frac{۴\pi t^۲ + ۸\pi}{n^۲}\Big) = \frac{(-۱)^n}{۲\pi}\Big(\frac{t^۲ + ۲}{n^۲} + \frac{it}{n}\Big)$$

مرحلهٔ ۵: می‌گیریم:

$$v_p(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)e^{inx}$$

و همراه با بسط فوریهٔ فوق در معادلهٔ v قرار می‌دهیم تا جواب مخصوصی به‌دست آوریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ddot{a}_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(n^2+1)a_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{a}_n + (n^2+1)a_n = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{3}t^2 - 2t^2 - \frac{2}{3}\pi^2\right), & n=0 \\ \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{t^2-2}{n^2} + \frac{it}{n}\right), & n \neq 0 \end{cases}$$

یک جواب مخصوص برای این معادلهٔ دیفرانسیل عادی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$a_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{3}t^2 - 2t^2 - \frac{4}{3}\pi^2 + 4\right), & n=0 \\ \frac{(-1)^n}{2\pi(n^2+1)n^2}\left(t^2 + int - 2 - \frac{2}{n^2+1}\right), & n \neq 0 \end{cases}$$

مرحلهٔ ٦: با تغییر تابع مجهول $v(x,t) = v_p(x,t) + w(x,t)$ مسئلهٔ همگن w به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$w_{tt} = w_{xx} - w$$

$$w(x,0) = x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+2)}{\pi(n^2+1)^2 n^2} e^{inx} - \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\pi}\right)$$

$$w_t(x,0) = \frac{1}{2\pi}x - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{2\pi(n^2+1)n} e^{inx}$$

$$w(-\pi,t) = w(\pi,t) \quad \text{و} \quad w_x(-\pi,t) = w_x(\pi,t).$$

جواب عمومی معادلهٔ w همراه با شرایط اولیه عبارت است از:

$$w(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{n^2+1}\,t + B_n \sin\sqrt{n^2+1}\,t\right)e^{inx}.$$

برای برقراری شرایط اولیه باید داشته باشیم:

$$w(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} = x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{n^2+2}{\pi(n^2+1)^2 n^2} e^{inx} - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{n^2+1}\,B_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}x - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{2\pi(n^2+1)n} e^{inx}$$

از این دو معادله مقادیر A_n و B_n به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$A_n = \begin{cases} -\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{3}\right), & n = 0 \\ \frac{i(-1)^n}{n} + \frac{(n^2+2)}{\pi(n^2+1)^2 n^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{i(-1)^{n+1} n}{2\pi(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & n \neq 0 \end{cases}$$

سرانجام جواب نهایی مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر به‌دست می آید.

$$u(x,t) = -\frac{1}{4\pi}(t^2x^2 + 2tx) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)e^{inx}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{n^2+1}t + B_n \sin\sqrt{n^2+1}t\right)e^{inx}.$$

تذکر۴ ـ ۴. با توجه به مراحل فوق مسئلهٔ موج یک‌بعدی و حرارت یک‌بعدی به‌طور کامل قابل حل است. اما اگر شرایط مرزی و جمله غیرهمگن، مستقل از t باشند، با انتخاب تابعی مخصوص مانند $v_q(x)$ که هم در شرایط مرزی و هم در معادله صدق کند و تغییر تابع مجهول $u(x,t) = v(x,t) + v_q(x)$ می‌توان مسئله را برای مجهول v به‌صورت همگن درآورد و با محاسبات کمتری به جواب مطلوب رسید.

مثال۴ ـ ۳. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + u + x + 1$$

$$u(x,0) = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 2, \qquad t \geq 0,$$

حل. ابتدا تابع یک متغیره $v_q(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم تا هم در شرایط مرزی و هم در معادله صدق کند، برای این منظور باید داشته باشیم:

$$v_q'' - 2v_q' + v_q + x + 1 = 0$$

$$v_q(0) = 1 \;\text{و}\; v_q(1) = 2 \tag{۴ ـ ۸}$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عادی را به‌صورت زیر داریم:

$$v_q(x) = c_1e^x + c_2xe^x - x - 3$$

$$v_q(0) = c_1 - 3 = 1 \;\text{و}\; v_q(1) = c_1e + c_2e - 1 - 3 = 2$$

از حل آنها به‌دست می‌آوریم:

$c_1 = 4$ و $c_2 = -4 + 6e^{-1}$

یا:

$$v_q(x) = 4e^x + (-4 + 6e^{-1})xe^x - x - 3.$$

حال می‌گیریم $u(x,t) = v(x,t) + v_q(x)$. در این‌صورت مسئلهٔ v به‌صورت زیر است.

$$v_t = v_{xx} - 2v_x + v$$
$$v(0,t) = 0 \text{ و } v(1,t) = 0$$
$$v(x,0) = x^2 - 4e^x + (4 - 6e^{-1})xe^x + x + 3$$

تذکر ۴ ـ ۵. روش شش مرحله‌ای فوق در مسائل معادلهٔ لاپلاس قابل استفاده است. اما چنانچه معادلهٔ همگن و شرایط مرزی غیرهمگن باشد، به‌صورت زیر می‌توان آن را به مجموع دو مسئلهٔ همگن تبدیل کرد.

مثال ۴ ـ ۴. مطلوب است حل

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 \le x \le p, \quad 0 \le y \le q,$$
$$u(0,y) = f_1(y) \text{ و } u(p,y) = f_2(y),$$
$$u_y(x,0) = g_1(x) \text{ و } u_y(x,q) = g_2(x).$$

حل. اگر v و w جواب دو مسئلهٔ زیر باشد، آنگاه $u = v + w$ جواب مسئلهٔ فوق است.

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \qquad\qquad w_{xx} + w_{yy} = 0,$$
$$v(0,y) = 0 \text{ و } v(p,y) = 0, \qquad\qquad w_y(x,0) = 0 \text{ و } w_y(x,q) = 0,$$
$$v_y(x,0) = g_1(x), \qquad\qquad w(0,y) = f_1(y),$$
$$v_y(x,q) = g_2(x), \qquad\qquad w(p,y) = f_2(y),$$

این دو مسئلهٔ همگن با روش جداسازی قابل حل است.

تذکر ۴ ـ ۶. در بعضی از مسائل معادلهٔ لاپلاس که معادلهٔ غیرهمگن است با تعیین یک جواب مخصوص برای معادله و تغییر تابع مجهول می‌توان معادله را همگن کرد و از تذکر ۴ ـ ۵ استفاده نمود.

مثال ۴ ـ ۵. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_{xx}+u_{yy}=x+\cos\pi y,\qquad 0<x<1,\quad 0<y<1,$$
$$u(0,y)=y \;\text{ و }\; u_x(1,y)=y^2 \;\text{ و }\; u_y(x,0)=x \;\text{ و }\; u(x,1)=\sin x.$$

حل. می‌خواهیم تابع $u_p(x,y)$ در معادلهٔ زیر صدق کند.

$$u_{xx}+u_{yy}=x+\cos\pi y.$$

کافی است داشته باشیم:

$$u_p(x,y)=Ax^3+B\cos\pi y,$$

از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$6Ax-B\pi^2\cos\pi y=x+\cos\pi y$$

پس $A=\frac{1}{6}$ و $B=-\frac{1}{\pi^2}$. حال می‌گیریم:

$$u(x,y)=v(x,y)+u_p(x,y)=v(x,y)+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{\pi^2}\cos\pi y.$$

از قرار دادن آن در مسئلهٔ فوق مسئلهٔ v به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$v_{xx}+v_{yy}=0$$
$$v(0,y)=y+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi y \;\text{ و }\; v_x(1,y)=y^2-\frac{1}{2},$$
$$v_y(x,0)=x \;\text{ و }\; v(x,1)=\sin x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{\pi^2}.$$

این مسئله با استفاده از تذکر ۴ ـ ۵ قابل حل است.

تذکر ۴ ـ ۷. حل مسائل معادلات موج و حرارت دوبعدی و سه‌بعدی در حالات زیر با روش شش مرحلهٔ غیرهمگن به همگن مقدور است. در کل می‌توان گفت تعیین تابع u_q در حالتی‌که تعداد متغیرهای مکان بیشتر از یک باشد کاری دشوار است. لیکن عمده مسائلی که به‌صورت طبیعی ظاهر می‌شوند در یکی از حالات زیر صدق می‌نمایند.

– معادلهٔ غیرهمگن، ولی همهٔ شرایط مرزی همگن باشد. در این‌صورت نیازی به انتخاب u_q نیست و مراحل دوم تا ششم بدون هیچ مشکلی قابل اجراست.

– داده‌های مسئله روی مرز میدان پیوسته باشد. به‌خصوص در گوشه‌های میدان این پیوستگی حفظ گردد. در این حالت ابتدا دو مرحلهٔ اول را برای متغیر x انجام می‌دهیم

تا به یک معادلهٔ ناهمگن برسیم که شرایط مرزی وابسته به متغیر x همگن است. سپس آن دو مرحله را برای متغیر y اجرا می‌کنیم تا شرایط مرزی وابسته به y همگن شود. پیوستگی شرایط مرزی در گوشه‌های میدان سبب می‌شود که در شرط همگنی وابسته به x خللی ایجاد نشود.

مثال ۴ ـ ۶. مسئلهٔ موج دوبعدی با شرایط مرزی همگن زیر را حل کنید.

$$v_{tt}-c^2(v_{xx}+v_{yy})=\left(1-\frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t,\ t\quad\geq 0,\qquad \begin{cases}0\leq y\leq b,\\ 0\leq x\leq a,\end{cases}$$

$$v(x,y,0)=xy \qquad \text{و} \qquad v_t(x,y,0)=x+y$$

$$v(0,y,t)=v(a,y,t)=v(x,0,t)=v(x,b,t)=0$$

حل. چون شرایط مرزی همگن است پس $u_q\equiv 0$ و از مرحلهٔ ۲ شروع می‌کنیم. با گرفتن $v(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$ و قرار دادن آن در معادله و شرایط مرزی به مسائل اشترم ـ لیوویل زیر دست می‌یابیم.

$$X''+\lambda X=0, \qquad\qquad Y''+\gamma Y=0$$

$$X(0)=X(a)=0, \qquad\qquad Y(0)=Y(b)=0$$

از حل آنها مقادیر ویژه و توابع ویژه به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$X_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{و} \quad \lambda_m=\frac{m^2\pi^2}{a^2},\qquad m=1,2,\dots$$

$$Y_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{و} \quad \gamma_n=\frac{n^2\pi^2}{b^2},\qquad n=1,2,\dots$$

پس می‌توان گفت جواب عمومی معادله و شرایط مرزی به‌صورت زیر است.

$$v(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{۴ ـ ۹}$$

تابع غیرهمگن طرف دوم معادله نیز دارای بسط زیر است.

$$\left(1-\frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{۴ ـ ۱۰}$$

که در آن:

$$F_{mn}(t)=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\left(1-\frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dydx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n\pi}(1 - \dfrac{c^2\pi^2}{a^2}) \sin t, & \begin{cases} m = 1 \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} m = 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{cases}$$

از قرار دادن (۴ ـ ۹) و (۴ ـ ۱۰) در معادله، معادلهٔ دیفرانسیل عادی زیر برای T_{mn} به‌دست می‌آید.

$$\ddot{T}_{mn} + c^2\alpha_{mn}^2 T_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n\pi}\left(1 - \dfrac{c^2\pi^2}{a^2}\right) \sin t, & \begin{cases} m = 1 \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} m = 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{cases}$$

که در آن $\alpha_{mn}^2 = \dfrac{m^2\pi^2}{a^2} + \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$. از حل این معادله به‌دست می‌آوریم.

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos(c\alpha_{mn}t) + b_{mn} \sin(c\alpha_{mn}t) + T_{mnp}(t).$$

که در آن

$$T_{mnp}(t) = \begin{cases} \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n\pi(c^2\alpha_{1n}^2 - 1)}\left(1 - \dfrac{c^2\pi^2}{a^2}\right) \sin t, & \begin{cases} m = 1 \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} m = 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{cases}$$

به این ترتیب جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن و شرایط مرزی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos(c\alpha_{mn}t) + b_{mn} \sin(c\alpha_{mn}t) + T_{mnp}(t)\right) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

برای برقراری شرایط اولیه باید داشته باشیم:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = xy,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (b_{mn}c\alpha_{mn} + c_{mn}) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = x + y,$$

که در اینجا:

$$c_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n\pi(c^2\alpha_{1n}^2 - 1)}\left(1 - \dfrac{c^2\pi^2}{a^2}\right), & m = 1 \;\text{و}\; n = 1, 2, \dots \\ 0 & m = 2, 3, \dots \;\text{و}\; n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

پس باید برای $m = 1, 2, \ldots$ و $n = 1, 2, \ldots$ داشته باشیم:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b xy \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dydx = \frac{4ab}{mn\pi^2}(-1)^{m+n},$$

$$\begin{aligned}(b_{mn}c\alpha_{mn} + c_{mn}) &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b (x+y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dydx \\ &= \frac{4}{mn\pi^2}\left((-1)^{m+n+1}(a+b) + (-1)^m a + (-1)^n b\right)\end{aligned}$$

به این ترتیب جواب نهایی مسئله را به‌صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned}v(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg(&\frac{4ab}{mn\pi^2}(-1)^{m+n}\cos(c\alpha_{mn}t) \\ &+\frac{1}{c\alpha_{mn}}\left(\frac{4}{mn\pi^2}\left((-1)^{m+n+1}(a+b) + (-1)^m a + (-1)^n b\right)\right. \\ &\left.-c_{mn}\right)\sin(c\alpha_{mn}t) + T_{mnp}(t)\Bigg)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}$$

تذکر ۴ ـ ۸. در مثال فوق مرحلهٔ ۵ و ۶ به‌طور همزمان انجام شده است.

در مثال فوق شرایط مرزی را از ابتدا همگن داشتیم. در مثال زیر شرایط مرزی، روی مرز پیوسته است. خواهیم دید با انتخاب u_q می‌توان شرایط مرزی را همگن نمود.

مثال ۴ ـ ۷. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\begin{aligned}&u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, && 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b,\ t \ge 0,\\ &u(x,y,0) = xy,\ u && {}_t(x,y,0) = 2x + y + \frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a},\\ &u(0,y,t) = 0, && u(a,y,t) = at,\\ &u(x,0,t) = xt, && u(x,b,t) = \sin\frac{\pi x}{a}\sin t + xt.\end{aligned}$$

حل. ابتدا A و B را طوری انتخاب کنید تا $u_q(x,y,t) = Ax + B$ در شرایط مرزی مربوط به x صدق نماید. یعنی داشته باشیم

$$u_q(0,y,t) = B = 0, \qquad u_q(a,y,t) = Aa + B = at$$

از حل این معادلات برای A و B به‌دست می‌آوریم $B = 0$ و $A = t$ و

$$u_q(x,y,t) = xt$$

حال تابع مجهول معادله را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$u(x,y,t) = w(x,y,t) + u_q(x,y,t) = w(x,y,t) + xt$$

از قرار دادن آن در مسئلهٔ فوق مسئله برای w به‌صورت زیر در می‌آید، که شرایط مرزی نسبت به متغیر x همگن است.

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} - c^2(w_{xx} + w_{yy}) = 0 \\
&w(x,y,0) = xy, \qquad w_t(x,y,0) = x + y + \frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}, \\
&w(0,y,t) = 0, \qquad w(a,y,t) = 0, \\
&w(x,0,t) = 0, \qquad w(x,b,t) = \sin\frac{\pi x}{a}\sin t.
\end{aligned}
$$

اکنون با انتخاب مقادیر C و D تابع $w_q(x,y,t) = Cy + D$ را طوری تعیین می‌کنیم تا شرایط مرزی مربوط به y را همگن سازد. پیوستگی شرایط مرزی در روی مرز به‌خصوص در گوشه‌های میدان مکان باعث می‌گردد که شرایط مرزی همگن نسبت به x، همچنان همگن بماند. پس باید $w_q(x,y,t)$ در شرایط مرزی y صدق کند. یعنی:

$$
w_q(x,0,t) = D = 0, \qquad w_q(x,b,t) = Cb + D = \sin\frac{\pi x}{a}\sin t,
$$

پس باید $D = 0$ و $C = \frac{1}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t$ و

$$
w_q(x,y,t) = \frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t,
$$

حال بگیرید $w(x,y,t) = v(x,y,t) + w_q(x,y,t)$. از قرار دادن آن در مسئلهٔ w به مسئلهٔ زیر برای تابع مجهول v می‌رسیم.

$$
\begin{aligned}
&v_{tt} - c^2(v_{xx} + v_{yy}) = \left(1 - \frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t, \\
&v(x,y,0) = xy, \qquad v_t(x,y,0) = x + y, \\
&v(0,y,t) = 0, \qquad v(a,y,t) = 0, \\
&v(x,0,t) = 0, \qquad v(x,b,t) = 0,
\end{aligned}
$$

مسئلهٔ فوق همان مسئلهٔ مثال ۴ ـ ۶ است. به این ترتیب جواب مسئلهٔ u به‌صورت زیر نتیجه می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= u_q(x,y,t) + w_q(x,y,t) + v(x,y,t) \\
&= xt + \frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t + v(x,y,t)
\end{aligned}
$$

که در آن $v(x,y,t)$ جواب مثال ۴ ـ ۶ است.

تذکر ۴ ـ ۹. اگر توابع شرایط مرزی روی گوشه‌های میدان پیوستگی نداشته باشند، تعیین w_q به‌طوری‌که همگنی شرایط مرزی نسبت به x برهم نخورد بسیار مشکل و به‌صورت چندجمله‌ای برحسب y مقدور نیست. حل اینگونه مسائل با استفاده از تبدیلات فوریهٔ متناهی مقدور است. این روش در مثال زیر بیان شده است.

مثال ۴ ـ ۸. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t), \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi,\ t \ge 0,\\
&u(x,y,0) = f_0(x,y),\\
&u(0,y,t) = g_1(y,t), \qquad\qquad u(1,y,t) = g_2(y,t),\\
&u_y(x,0,t) = h_1(x,t), \qquad\qquad u(x,\pi,t) = h_2(x,t).
\end{aligned}$$

حل. با توجه به شرایط مرزی متناظر متغیر مکان x پایهٔ $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ و متناظر متغیر y پایهٔ $\{\cos(m+\frac{1}{2})y\}_{m=0}^{\infty}$، وجود دارد. بنابراین سری‌های زیر برقرارند.

$$h_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n}(t)\sin n\pi x, \qquad h_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(t)\sin n\pi x,$$
$$g_1(y,t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{1m}(t)\cos(m+\frac{1}{2})y, \qquad g_2(y,t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}(t)\cos(m+\frac{1}{2})y.$$

اکنون تابع زیر در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند.

$$\begin{aligned}
u_q(x,y,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_{1n}(y-\pi) + a_{2n}\big)\sin n\pi x\\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \big(b_{1m} + (b_{2m} - b_{1m})x\big)\cos(m+\frac{1}{2})y.
\end{aligned}$$

تذکر ۴ ـ ۱۰. روش فوق را می‌توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد. همچنین در حالت کلی باید به جای سری فوریه، از توابع ویژهٔ معادلهٔ اشترم ـ لیوویل متناظر هر متغیر استفاده کرد.

تمرین ۴ ـ ۱

جواب مسائل ناهمگن زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ u_t - 4u_{xx} = 50e^{-2x}, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \sin x \ \text{و}\ u_x(0,t) = 1 \ \text{و}\ u(\pi,t) = 2.$$

۲. $u_t = 9u_{xx} - 6u_x + u + \sin x, \qquad -\pi < x < \pi, \;\; t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u(-\pi,t) = u(\pi,t) + 1$ و $u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) + 2.$

۳. $u_t - 4u_{xx} = xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = \sin \pi x$ و $u(0,t) = t$ و $u(1,t) = t^2.$

۴. $u_t - ku_{xx} = x\cos t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; t > 0,$

$u(x,0) = \sin x$ و $u_x(0,t) = t^2$ و $u_x(\pi,t) = 2t.$

۵. $u_t - u_{xx} + u = 2x^2 t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2} x$ و $u(0,t) = 1$ و $u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2}.$

۶. $u_t - 2u_{xx} = 1, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_x(0,t) = \sin t$ و $u_x(1,t) + u(1,t) = 2.$

۷. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sinh x, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = 0$ و $u_t(x,0) = x$ و $u(0,t) = 1$ و $u_x(1,t) = 2.$

۸. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + u + x^2, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_t(x,0) = 0$ و $u_x(0,t) = 0$ و $u(1,t) = 1.$

۹. $u_{tt} - u_{xx} = x\sin t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_t(x,0) = 0$ و $u_x(0,t) = t^2$ و $u_x(1,t) = \cos t.$

۱۰. $u_{tt} - 4u_{xx} = xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_t(x,0) = 0$ و $u(0,t) = t^2$ و $u_x(1,t) = 1 + t.$

۱۱. $u_{tt} + 2c^2 u_t - c^2 u_{xx} = x + t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$$u(x,۰) = x \ \text{و}\ u_t(x,۰) = ۱ \ \text{و}\ u_x(۰,t) = t \ \text{و}\ u(۱,t) = ۱.$$

۱۲. $u_{tt} - ۹u_{xx} = x + t^۲, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ,$

$$u(x,۰) = \sin\frac{\pi x}{۲} \ \text{و}\ u_t(x,۰) = ۱ + x \ \text{و}\ u_x(۰,t) = \frac{\pi}{۲} \ \text{و}\ u_x(۱,t) = t.$$

۱۳. $u_{xx} + u_{yy} = x\cos y, \qquad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < \pi,$

$$u(۰,y) = y \ \text{و}\ u(۱,y) = ۱ \ \text{و}\ u_y(x,۰) = x \ \text{و}\ u_y(x,\pi) = x + ۱.$$

۱۴. $\Delta u = x^۲ - y^۲, \qquad ۰ < x < \pi, \quad ۰ < y < ۱,$

$$u_x(۰,y) = y \ \text{و}\ u_x(\pi,y) = y^۲ \ \text{و}\ u_y(x,۰) = x \ \text{و}\ u_y(x,۱) = \sin x.$$

۱۵. $\Delta u = r\theta,\ r < \quad ۲, \quad ۰ < \theta < \pi,$

$$u_r(۲,\theta) = \sin\theta \ \text{و}\ u(r,۰) = r \ \text{و}\ u(r,\pi) = ۱.$$

۱۶. $\Delta u = -r^۲ \sin ۲\theta, \qquad ۱ < r < ۲,$

$$u_r(۱,\theta) = \sin\theta \ \text{و}\ u_r(۲,\theta) = \cos\theta.$$

۱۷. $\Delta u = r\cos ۴\theta,\ r < \quad ۲,$

$$u(۲,\theta) = \sin ۳\theta.$$

۱۸. $u_t = c^۲\Delta u + xyt, \qquad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < ۱, \quad t > ,$

$$u(x,y,۰) = \sin^۲ \pi x \sin \pi y,$$

$$u(۰,y,t) = u_x(۱,y,t) = u_y(x,۰,t) = u(x,۱,t) = ۰.$$

۱۹. $u_{tt} = c^۲\Delta u + xyzt, \qquad ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱,\ ۰ < z < ۱,\ t > ۰,$

$$u(x,y,z,۰) = \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z \ \text{و}\ u_t(x,y,z,۰) = ۰,$$

$$u(۰,y,z,t) = u(۱,y,z,t) = ۰ \ \text{و}\ u(x,۰,z,t) = u(x,۱,z,t) = ۰,$$

$$u(x,y,۰,t) = u(x,y,۱,t) = ۰.$$

۲۰. $\Delta u = r\sin\theta\cos\phi,\ r < 1,$

$$u(1,\theta,\phi) = \cos^2\theta\sin\phi, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

۲۱. $u_{tt} = c^2\Delta u + xy\sin t, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,\ t > 0,$

$$u(x,y,0) = xy,\ u_t(x,y,0) = x + y,$$

$$u(0,y,t) = 0, \qquad u(\pi,y,t) = y + \cos y,$$

$$u_y(x,0,t) = \frac{x}{\pi}, \qquad u(x,\pi,t) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)x + \sin x.$$

۲۲. $u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_t(x,0) = x + 1,$

$u(0,t) = t$ و $u(1,t) = 1$ و $u_{xx}(0,t) = t^2$ و $u_{xx}(1,t) = 0.$

۲۳. $u_{tt} + 16u_{xxxx} = x + t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x + 1$ و $u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = t$ و $u(1,t) = t^2$ و $u_x(0,t) = 1$ و $u_x(1,t) = t.$

۲۴. $u_{tt} + u_{xxx} = x\sin t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$u(x,0) = x$ و $u_t(x,0) = x,$

$u_x(0,t) = t$ و $u_x(1,t) = 1$ و $u_{xxx}(0,t) = 0$ و $u_{xxx}(1,t) = t^2.$

۴ ـ ۲ تبدیلات اشترم ـ لیوویل منظم

در بخش ۱ ـ ۷ با تبدیلات فوریهٔ متناهی آشنا شدیم و دیدیم که چگونه از این تبدیلات می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل استفاده نمود. همان گونه که در پایان آن بخش متذکر شدیم تبدیلات فوریهٔ متناهی فقط در دستهٔ محدودی از معادلات دیفرانسیل جزئی قابل اعمال است. در حقیقت اگر شرایط مرزی مناسب تعیین تبدیل مشتقات تابع مجهول برحسب خود

تابع مجهول نباشد، اعمال آن تبدیل در آن مسئله مقدور نیست. هدف از این بخش ارائهٔ روشی برای تعیین تبدیلات مناسب برای هر مسئله روی میدان کراندار است. این امر با استفاده از مسائل اشترم ـ لیوویل منظم صورت می‌گیرد. با اعمال اینگونه تبدیلات نسبت به یکی از متغیرهای معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یکی از مشتقات نسبی معادله حذف و با تقلیل متغیرها به یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یا عادی می‌رسیم که حل آن با روش‌های قبلی مقدور است.

فرض کنید مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل منظم مربوط به متغیر x یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به‌صورت زیر باشد.

$$a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)+\big(a_3(x)+\lambda\big)X(x)=0, \qquad a\le x\le b$$
$$\alpha_1X(a)+\alpha_2X'(a)=0 \text{ و } \beta_1X(b)+\beta_2X'(b)=0. \qquad (۴ ـ ۱۱)$$

فرض کنید $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ مقادیر ویژه و $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$، توابع ویژهٔ این مسئله باشد. اگر همانند گذشته بگیریم:

$$p(x)=\exp\Big(\int_a^x\frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\Big),\qquad q(x)=\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x),\qquad s(x)=\frac{p(x)}{a_1(x)}.$$

در این صورت تبدیل مطلوب را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\|\phi_n\|_s^2}\int_a^b s(x)f(x)\phi_n(x)dx:=F_n(f),$$

که در آن $\|\phi_n\|_s^2=\int_a^b s(x)\phi_n^2(x)dx$. در زیر نشان می‌دهیم این تبدیل یک تبدیل انتگرالی است. یعنی دارای سه خاصیت اساسی است که در بخش ۱ ـ ۷ بیان نمودیم.

قضیه ۴ ـ ۱۱. *اگر f_1 و f_2 روی $[a,b]$ قطعه قطعه پیوسته و $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ باشد، آنگاه*

$$\mathcal{F}(c_1f_1+c_2f_2)=c_1\mathcal{F}(f_1)+c_2\mathcal{F}(f_2).$$

برهان. نتیجه مستقیم خاصیت خطی انتگرال است. ■

قضیه ۴ ـ ۱۲. *اگر f روی $[a,b]$ قطعه قطعه پیوسته و $\mathcal{F}(f)=F_n(f)$، آنگاه*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(f)\phi_n(x).$$

برهان. این قضیه درواقع همان قضیهٔ ۳ ـ ۲۲ است. ■

خاصیت اساسی دیگر تبدیلات انتگرالی که اعمال آنها را برمعادلات دیفرانسیل مقدور می‌سازد، بیان تبدیلات مشتقات تابع برحسب تبدیل خود تابع است. برای بررسی این مطلب قرار دهید:

$$
\begin{aligned}
&L(X) = a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X,\\
&N_\alpha[X] = X(a)\cos\alpha + X'(a)\sin\alpha,\\
&N_\beta[X] = X(b)\cos\beta + X'(b)\sin\beta,
\end{aligned}
$$

توجه کنید برای $\cos\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$، $\sin\alpha = \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$، $\cos\beta = \dfrac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}$ و $\sin\beta = \dfrac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}$ داریم: $N_\alpha[\phi_n] = 0$ و $N_\beta[\phi_n] = 0$. اکنون اگر تبدیل $L(f)$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$
\mathcal{F}\big(L(f)\big) = \frac{1}{\|\phi_n\|_s^2}\int_a^b L(f)\phi_n(x)s(x)dx,
$$

با توجه به تعریف $s(x)$ داریم:

$$
L(f)s(x) = \big(p(x)f'\big)' + q(x)f
$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b L(f)\phi_n(x)s(x)dx &= \int_a^b \Big(\big(p(x)f'\big)' + q(x)f\Big)\phi_n(x)dx\\
&= p(x)f'(x)\phi_n(x)\Big|_a^b\\
&\quad - \int_a^b \big(p(x)f'(x)\phi_n'(x) - q(x)f(x)\phi_n(x)\big)dx\\
&= p(x)f'(x)\phi_n(x)\Big|_a^b - p(x)\phi_n'(x)f(x)\Big|_a^b\\
&\quad + \int_a^b f(x)L(\phi_n)s(x)dx\\
&= p(x)\big(f'(x)\phi_n(x) - f(x)\phi_n'(x)\big)\Big|_a^b\\
&\quad - \lambda_n\int_a^b f(x)\phi_n(x)s(x)dx
\end{aligned}
$$

تساوی آخر به علت اینکه $\phi_n(x)$ یک جواب معادلهٔ (۴ ـ ۱۱) است، برقرار است. بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{F}\big(L(f)\big) = -\lambda_n \mathcal{F}(f) + \frac{1}{\|\phi_n\|_s^2}\big(f'(x)\phi_n(x) - f(x)\phi_n'(x)\big)p(x)\Big|_a^b \qquad (۴ ـ ۱۲)$$

برای محاسبهٔ جمله دوم برحسب شرایط مرزی، $N'_\alpha[f]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N'_\alpha[f] = -f(a)\sin\alpha + f'(a)\cos\alpha$$

اکنون می‌توان مقدار $f(a)$ و $f'(a)$ را بدین صورت محاسبه کرد:

$$f(a) = N_\alpha[f]\cos\alpha - N'_\alpha[f]\sin\alpha \qquad \text{و} \qquad f'(a) = N'_\alpha[f]\cos\alpha + N_\alpha[f]\sin\alpha$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned} f'(a)\phi_n(a) - f(a)\phi_n'(a) &= \big(N'_\alpha[f]\cos\alpha + N_\alpha[f]\sin\alpha\big)\phi_n(a) \\ &\quad - \big(N_\alpha[f]\cos\alpha - N'_\alpha[f]\sin\alpha\big)\phi_n'(a) \\ &= -N_\alpha[f]N'_\alpha[\phi_n] + N'_\alpha[f]N_\alpha[\phi_n] = -N_\alpha[f]N'_\alpha[\phi_n] \end{aligned}$$

که در تساوی اخیر از اینکه ϕ_n در شرط مرزی همگن صدق می‌کند، یعنی $N_\alpha[\phi_n] = 0$ استفاده شده است. به‌طور مشابه:

$$f'(b)\phi_n(b) - f(b)\phi_n'(b) = -N_\beta[f]N'_\beta[\phi_n]$$

در نتیجه از رابطهٔ (۴ ـ ۱۲) می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت:

قضیه ۴ ـ ۱۳. *اگر f و f' روی $[a,b]$ پیوسته و f'' قطعه قطعه پیوسته باشد، آنگاه*

$$\mathcal{F}\big(L(f)\big) = -\lambda_n \mathcal{F}(f) + \frac{1}{\|\phi_n\|_s^2}\big(p(a)N'_\alpha[\phi_n]N_\alpha[f] - p(b)N'_\beta[\phi_n]N_\beta[f]\big).$$

مثال ۴ ـ ۹. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + u_{yy} + xyt \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi,\ t \ge 0 \\ &u(0,y,t) = y^2 t \qquad \text{و} \qquad u_x(1,y,t) = yt^2 \\ &u_y(x,0,t) = x + t \qquad \text{و} \qquad u_y(x,\pi,t) = xt \qquad \text{و} \qquad u(x,y,0) = x + y \end{aligned}$$

حل. مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل مربوط به متغیرها x و y را به‌صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, && Y'' + \lambda Y = 0, \\ &X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, && Y'(0) = 0, \quad Y'(\pi) = 0, \end{aligned}$$

جواب مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل X عبارت است از:

$$\lambda_m = (m + \frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}, \quad \phi_m(x) = \sin (m + \frac{۱}{۲})\pi x,\ m = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

و جواب مسئلهٔ Y به‌صورت زیر است:

$$\gamma_n = n^{۲}, \quad \psi_n(y) = \cos ny,\ n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

در هر دو مسئله تابع وزن، تابع ثابت $s \equiv ۱$ است، به علاوه:

$$\|\phi_m\|^{۲} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \|\psi_n\|^{۲} = \frac{\pi}{۲}$$

بدین ترتیب تبدیلات مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\mathcal{F}_{۱}(f) = ۲\int_{۰}^{۱} f(x) \sin (m + \frac{۱}{۲})\pi x dx$$

$$\mathcal{F}_{۲}(f) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(y) \cos ny dy$$

حال به تعیین تبدیل مشتق مرتبهٔ دوم برای تبدیل $\mathcal{F}_{۱}$ می‌پردازیم

$$N_\alpha[f] = f(۰)\cos\alpha + f'(۰)\sin\alpha$$

$$N_\beta[f] = f(۱)\cos\beta + f'(۱)\sin\beta$$

توجه کنید در $\alpha = ۰$ و $\beta = \frac{\pi}{۲}$ این مقادیر به شرایط مرزی مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل X تبدیل و با استفاده از قضیهٔ ۴ ـ ۱۳ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{۱}(f'') &= -(m + \frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}\mathcal{F}_{۱}(f) \\ &\quad + ۲\big(-\phi_m(۰)\sin\alpha + \phi'_m(۰)\cos\alpha\big)\big(f(۰)\cos\alpha + f'(۰)\sin\alpha\big)\Big|_{\alpha=۰} \\ &\quad + ۲\big(-\phi_m(۱)\sin\beta + \phi'_m(۱)\cos\beta\big)\big(f(۱)\cos\beta + f'(۱)\sin\beta\big)\Big|_{\beta=\frac{\pi}{۲}} \\ &= -(m + \frac{۱}{۲})^{۲}\pi^{۲}\mathcal{F}_{۱}(f) + ۲\Big((m + \frac{۱}{۲})\pi f(۰) + (-۱)^m f'(۱)\Big)\end{aligned}$$

توجه کنید تبدیل $\mathcal{F}_{۲}$ همان تبدیل کسینوسی متناهی است. پس طبق قضیه ۱ ـ ۲۱ داریم:

$$\mathcal{F}_{۲}(f'') = -n^{۲}\mathcal{F}_{۲}(f) + \frac{۲}{\pi}\big((-۱)^n f'(\pi) - f'(۰)\big)$$

البته با استفاده از قضیهٔ ۴ ـ ۱۳ نیز محاسبهٔ $\mathcal{F}_{۲}(f'')$ مقدور است.

برای حل مسئله ابتدا تبدیل $\mathcal{F}_{۱}$ را بر آن اعمال می‌کنیم. اگر $\mathcal{F}_{۱}(u(x,y,t)) = U(m,y,t)$، آنگاه:

$$\mathcal{F}_{۱}(u_t) = U_t, \qquad \mathcal{F}_{۱}(u_{yy}) = U_{yy}$$

$$\mathcal{F}_1(u_{xx}) = -(m+\frac{1}{2})^2\pi^2 U + 2\Big((m+\frac{1}{2})\pi y^2 t + (-1)^m y t^2\Big)$$

پس مسئله برحسب $U(m,y,t)$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$U_t = -(m+\frac{1}{2})^2\pi^2 U + 2\Big((m+\frac{1}{2})\pi y^2 t + (-1)^m y t^2\Big) + U_{yy} + yt\mathcal{F}_1(x)$$

$$U(m,y,0) = \mathcal{F}_1(x) + y\mathcal{F}_1(1), \qquad U_y(m,0,t) = \mathcal{F}_1(x) + t\mathcal{F}_1(1),$$

$$U_y(m,\pi,t) = t\mathcal{F}_1(x), \qquad m = 0,1,2,\dots$$

حال تبدیل $\mathcal{F}_2$ را بر این مسئله اعمال می‌کنیم. اگر $V(m,n,t) = \mathcal{F}_2(U(m,y,t))$، آنگاه

$$V_t = -(m+\frac{1}{2})^2\pi^2 V + (2m+1)\pi t\mathcal{F}_2(y^2) + 2(-1)^m t^2\mathcal{F}_2(y)$$
$$-n^2 V + \frac{2}{\pi}\big((-1)^n t\mathcal{F}_1(x) - \mathcal{F}_1(x) - t\mathcal{F}_1(1)\big) + t\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(y)$$

$$V(m,n,0) = \mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(1) + \mathcal{F}_2(y)\mathcal{F}_1(1), \qquad \begin{cases} m = 0,1,2,\dots \\ n = 1,2,\dots \end{cases}$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل فوق را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$V(m,n,t) = ae^{-\left((m+\frac{1}{2})^2\pi^2+n^2\right)t} + At^2 + Bt + C$$

که در آن

$$A = \frac{2(-1)^m\mathcal{F}_2(y)}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2+n^2},$$

$$B = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2+n^2}\Big((2m+1)\pi\mathcal{F}_2(y^2) + (-1)^n\frac{2}{\pi}\mathcal{F}_1(x)$$
$$-\frac{2}{\pi}\mathcal{F}_1(1) + \mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(y) - 2A\Big)$$

$$C = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2+n^2}\Big(-\frac{2}{\pi}\mathcal{F}_1(x) - B\Big)$$

با اعمال شرط اولیه جواب مسئلهٔ V را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$V(m,n,t) = \big(\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_1(1) + \mathcal{F}_1(y)\mathcal{F}_1(1) - C\big)e^{-\left((m+\frac{1}{2})^2\pi^2+n^2\right)t}$$
$$+ At^2 + Bt + C$$

جواب مسئلهٔ اولیه عبارت است از:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}V(m,n,t)\sin(m+\frac{1}{2})\pi x\cos ny$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}V(m,0,t)\sin(m+\frac{1}{2})\pi x$$

که در آن جمله مربوط به حالت $n=0$ را به‌دلیل ضریب $\frac{1}{2}$ در سری فوریهٔ کسینوسی جداگانه نوشته‌ایم. سرانجام با استفاده از انتگرال جزء به جزء مقادیر زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\mathcal{F}_2(y^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y^2\cos ny\,dy=\begin{cases}\frac{2}{3}\pi^2 & n=0\\ \frac{4(-1)^n}{n^2} & n\neq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y\cos ny\,dy=\begin{cases}\pi & n=0\\ \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1) & n\neq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_2(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ny\,dy=\begin{cases}2 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_1(x)=2\int_0^1 x\sin(m+\frac{1}{2})\pi x\,dx=\frac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}$$

$$\mathcal{F}_1(1)=2\int_0^1\sin(m+\frac{1}{2})\pi x\,dx=\frac{4}{(2m+1)\pi}$$

مثال ۴ ـ ۱۰. مطلوب است حل

$$u_{tt}+u_{xxxx}=xt,\qquad 0<x<1,\qquad t>0$$
$$u(x,0)=x \quad \text{و} \quad u_t(x,0)=0 \quad \text{و} \quad u(0,t)=t$$
$$u_x(1,t)=t^2 \quad \text{و} \quad u_{xx}(0,t)=1 \quad \text{و} \quad u_{xxx}(1,t)=t$$

حل. در مثال قبلی برای تبدیل

$$\mathcal{F}(f)=2\int_0^1 f(x)\sin(m+\frac{1}{2})\pi x\,dx$$

تبدیل مشتق مرتبهٔ دوم را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم.

$$\mathcal{F}(f'')=-(m+\frac{1}{2})^2\pi^2\mathcal{F}(f)+2\Big((m+\frac{1}{2})\pi f(0)+(-1)^m f'(1)\Big).$$

برای تعیین تبدیل مشتق مرتبهٔ چهارم می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f^{(4)}) &= -\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\mathcal{F}(f'') + 2\Big(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi f''(0) + (-1)^m f'''(1)\Big)\\
&= -\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\Bigg(-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\mathcal{F}(f) + 2\Big(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi f(0)\\
&\qquad + (-1)^m f'(1)\Big)\Bigg)\\
&\quad + 2\Big(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi f''(0) + (-1)^m f'''(1)\Big).
\end{aligned}$$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f^{(4)}) &= \left(m+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4\mathcal{F}(f) - 2\left(m+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3 f(0) - 2(-1)^m\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 f'(1)\\
&\quad + 2\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi f''(0) + 2(-1)^m f'''(1).
\end{aligned}$$

حال بگیرید:

$$\mathcal{F}\big(u(x,t)\big) = U(m,t),$$

و از مسئله تبدیل بگیرید تا به‌دست آورید:

$$\begin{aligned}
U_{tt} + \left(m+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4 U &= 2\left(m+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3 t + 2(-1)^m\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t^2 - (2m+1)\pi\\
&\quad - 2(-1)^m t + \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}t
\end{aligned}$$

$$U(m,0) = \mathcal{F}(x) = \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}, \qquad U_t(m,0) = 0$$

جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$U(m,t) = a\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t\right) + b\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t\right) + At^2 + Bt + C$$

که در آن

$$A = \frac{2(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}, \qquad B = \frac{2}{(m+\frac{1}{2})\pi} - \frac{2(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})^4\pi^4} + \frac{2(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})^6\pi^6}$$

$$C = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^4\pi^4}\left(-(2m+1)\pi - \frac{4(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$$

برای برقراری شرایط اولیه باید داشته باشیم:

$$a + C = \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2} \quad \text{و} \quad \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 b + B = 0,$$

پس جواب مسئلهٔ U عبارت است از:

$$U(m,t)=\left(\frac{8(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}-C\right)\cos\left((m+\frac{1}{2})^2\pi^2 t\right)$$
$$-\frac{B}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\sin\left((m+\frac{1}{2})^2\pi^2 t\right)+At^2+Bt+C$$

و از آنجا جواب مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}U(m,t)\sin(m+\frac{1}{2})\pi x.$$

تمرین ۴ ـ ۲

ابتدا تبدیلات اشترم ـ لیوویل متغیرهای مکان هر مسئله را مشخص کنید، سپس با استفاده از آنها مسئله را حل کنید.

۱. $u_{tt}+2u_t-u_{xx}+2u_x+u=x\cos t, \qquad 0<x<1, \quad t>0$

$u(x,0)=\sin x$ و $u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=e^t$ و $u(1,t)=t.$

۲. $u_{tt}-u_{tx}-u_{xx}=2x^2 t, \qquad -1<x<1, \quad t>0$

$u(x,0)=x$ و $u_t(x,0)=x^2$

$u(-1,t)=u(1,t)+t^2$ و $u_x(-1,t)=u_x(1,t)+t.$

۳. $u_t-4u_{xx}-u_{txx}=xt, \qquad 0<x<1, \quad t>0$

$u(x,0)=\sin\pi x$ و $u(0,t)=t$ و $u_x(1,t)=t^2.$

۴. $u_t=c^2u_{xx}+k\delta(x-\nu_0 t), \qquad 0<x<\pi, \quad 0<t$

$u(x,0)=x$ و $u(0,t)=t$ و $u_x(\pi,t)=0.$

۵. $u_t=u_{xx}+4u_{yy}+u+xyt, \qquad 0<x,y<1, \quad t>0$

$u(x,y,0)=xy$ و $u(0,y,t)=yt^2$ و $u_x(1,y,t)=y^2t,$

$u_y(x,0,t)=x^2t^2$ و $u_y(x,1,t)=xt.$

6. $u_{tt} = u_{xx} + 4u_{yy} + 4u_y + u_{zz}, \qquad 0 < x, y, z < 1, \quad t > 0$

$u(x, y, z, 0) = xy^2 \;\text{و}\; u_t(x, y, z, 0) = yz^2,$

$u(0, y, z, t) = zt \;\text{و}\; u_x(1, y, z, t) = yt^2,$

$u_y(x, 0, z, t) = xt \;\text{و}\; u_y(x, 1, z, t) = zt^2,$

$u_z(x, y, 0, t) = yt \;\text{و}\; u(x, y, 1, t) = xt^2.$

7. $\Delta u = xy^2 + yz^2 + zx^2, \qquad -1 < x < 1, \quad 0 < y, z < 1$

$u(-1, y, z) = u(1, y, z) + y^2 z \;\text{و}\; u_x(-1, y, z) = u_x(1, y, z) + yz,$

$u(x, 0, z) = x\cos\pi z \;\text{و}\; u_y(x, 1, z) = z\sin\pi z,$

$u_z(x, y, 0) = x^2 y \;\text{و}\; u(x, y, 1) + u_z(x, y, 1) = xy.$

8. $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \qquad r \quad 1, < \; 0 < \theta < \pi, \quad t > 0$

$u(r, \theta, 0) = r\theta \;\text{و}\; u(1, \theta, t) = \theta t \;\text{و}\; |u(r, \theta, t)| < \infty,$

$u(r, 0, t) = rt \;\text{و}\; u_\theta(r, \pi, t) = r^2 t^2.$

9. $u_{tt} + u_{ttxx} + u_{xxxx} = xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x \;\text{و}\; u_t(x, 0) = x^2,$

$u_x(0, t) = t \;\text{و}\; u_x(1, t) = t^2,$

$u_{xxx}(0, t) = 1 \;\text{و}\; u_{xxx}(1, t) = t.$

10. $u_t + u_{tx} + u_{xxx} = xt, \qquad -1 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x^2 \;\text{و}\; u(-1, t) = u(1, t) + t,$

$u_x(-1, t) = u_x(1, t) + t^2 \;\text{و}\; u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) + 1.$

11. $u_{tt} + 2u_t + u_{txx} + u_{xxxx} = xt^2, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x^2 \;\text{و}\; u_t(x, 0) = x + 1,$

$u(0, t) = t^2 \;\text{و}\; u_x(1, t) = t,$

$u_{xx}(0, t) = t \;\text{و}\; u_{xxx}(1, t) = 1 + t.$

۴ ـ ۳ اصل دوهامل

در این بخش روش دیگری برای حل مسائل غیرهمگن ارائه می‌دهیم که تعمیمی از روش تغییر پارامترها در معادلات دیفرانسیل عادی خطی است و به اصل دوهامل شهرت دارد. این روش برای مسائل خطی با شرایط اولیه به کار می‌رود. ابتدا آن را برای مسئلهٔ موج یک‌بعدی بیان می‌کنیم.

فرض کنید $u_1(x,t)$ جواب مسئلهٔ همگن زیر باشد.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad t \geq 0,\ a \leq x \leq b\\
&u(x,0) = f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = g(x),\\
&\alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = 0, \qquad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0,\\
&\alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = 0, \qquad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0.
\end{aligned} \tag{۴ ـ ۱۳}$$

همچنین فرض کنید $u_2(x,t)$ جواب مسئلهٔ غیرهمگن زیر است.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = w(x,t), \qquad t \geq 0,\ a \leq x \leq b\\
&u(x,0) = 0 \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = 0,\\
&\alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = 0,\\
&\alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = 0.
\end{aligned} \tag{۴ ـ ۱۴}$$

اگر f و g و w قطعه قطعه پیوسته باشند، در این صورت این دو جواب موجود و $u = u_1 + u_2$ جواب مسئلهٔ غیرهمگن زیر است.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = w(x,t), \qquad t \geq 0,\ a \leq x \leq b\\
&u(x,0) = f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = g(x),\\
&\alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = 0,\\
&\alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = 0.
\end{aligned} \tag{۴ ـ ۱۵}$$

جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱۳) با روش جداسازی به‌دست می‌آید. در زیر نشان خواهیم داد جواب (۴ ـ ۱۴) نیز به‌سادگی از روی جواب (۴ ـ ۱۳) قابل حصول است. این مطلب در قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیه (اصل دوهامل) ۴ ـ ۱۴. *فرض کنید در مسئلهٔ (۴ ـ ۱۴) تابع $w(x,t)$ دارای مشتقات مرتبهٔ اول پیوسته و $v(x,t;s)$ برای $s \geq 0$ جواب مسئلهٔ همگن زیر باشد.*

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \qquad t \geq 0, \quad a \leq x \leq b$$
$$v(x, 0; s) = 0 \quad \text{و} \quad v_t(x, 0; s) = w(x, s), \qquad s \geq 0$$
$$\alpha_1 v(a, t; s) + \beta_1 v_x(a, t; s) = 0,$$
$$\alpha_2 v(b, t; s) + \beta_2 v_x(b, t; s) = 0. \tag{۴ ـ ۱۶}$$

آنگاه $u(x,t) = \int_0^t v(x, t-s; s)ds$ جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱۴) است.

برهان. ابتدا شرایط اولیه و مرزی را بررسی می‌کنیم. چون v دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته است پس جای مشتق و انتگرال قابل تعویض است. بنابراین $u(x,t)$ در شرایط مرزی صدق می‌کند. شرط اولیهٔ $u(x, 0) = 0$ بدیهی است. برای دومین شرط اولیه می‌نویسیم:

$$u_t(x,t) = v(x, 0; t) + \int_0^t v_t(x, t-s; s)ds = \int_0^t v_t(x, t-s; s)ds$$

درنتیجه باید داشته باشیم $u_t(x, 0) = 0$. از تساوی اخیر یکبار دیگر نسبت به t مشتق بگیرید تا به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= v_t(x, 0; t) + \int_0^t v_{tt}(x, t-s; s)ds \\ &= w(x,t) + \int_0^t v_{xx}(x, t-s; s)ds = w(x,t) + u_{xx}(x,t) \end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌گردد. ■

تذکر ۴ ـ ۱۵. چنانچه شرایط مرزی همگن نباشد با انتخاب تابع $u_q(x,t)$ که در بخش ۴ ـ ۱ معرفی شده و با تغییر تابع مجهول شرایط مرزی به همگن تبدیل می‌گردد.

مثال ۴ ـ ۱۱. با استفاده از اصل دوهامل مسئلهٔ زیر را حل کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = xt \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = x \quad \text{و} \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{و} \quad u(0, t) = t \quad \text{و} \quad u(1, t) = 0$$

حل. با توجه به شرایط مرزی u_q را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$u_q(x,t) = (1 - x)t$$

حال می‌گیریم: $u(x,t) = U(x,t) + (1-x)t$ و مسئله را برای U می‌نویسیم.

$$U_{tt} - U_{xx} = xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$U(x, 0) = x \quad \text{و} \quad U_t(x, 0) = x - 1 \quad \text{و} \quad U(0, t) = U(1, t) = 0. \tag{۴ ـ ۱۷}$$

جواب عمومی معادلهٔ همگن همراه با شرایط مرزی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$U(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n\cos(n\pi t)+b_n\sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)$$

با اعمال شرایط اولیهٔ $U_۱(x,t)$ به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$U_۱(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\Big(\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\cos(n\pi t)+\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\sin(n\pi t)\Big)\sin(n\pi x)$$

همچنین برای $v(x,t;s)$، با توجه به $w(x,s)=xs$ به‌دست می‌آوریم.

$$v(x,t;s)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n^۲\pi^۲}s\sin(n\pi t)\sin(n\pi x)$$

پس:

$$U_۲(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n^۲\pi^۲}\Big(\int_۰^t s\sin\left(n\pi(t-s)\right)ds\Big)\sin(n\pi x)$$

یا:

$$U_۲(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n^۲\pi^۲}\Big(\frac{t}{n\pi}-\frac{\sin(n\pi t)}{n^۲\pi^۲}\Big)\sin(n\pi x)$$

به این ترتیب جواب مسئلهٔ اولیه عبارت است از:

$$\begin{aligned}u(x,t)=(۱-x)t+\sum_{n=۱}^{\infty}\Bigg(&\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\cos(n\pi t)+\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\sin(n\pi t)\\&+\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n^۲\pi^۲}\Big(\frac{t}{n\pi}-\frac{\sin(n\pi t)}{n^۲\pi^۲}\Big)\Bigg)\sin(n\pi x).\end{aligned}$$

تذکر۴ ـ ۱۶. در مقایسه با روش غیرهمگن به همگن که در بخش ۴ ـ ۱ بیان شده است، دیده می‌شود که $U_۲(x,t)$ نقش $v_p(x,t)$، یعنی جواب مخصوص را ایفا می‌کند.

اکنون به بیان حالت کلی اصل دوهامل می‌پردازیم.

فرض کنید u تابع مجهول و w تابعی معلوم از متغیرهای t، x، y و z و P یک عملگر دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت و نسبت به t از مرتبهٔ m باشد. مسئلهٔ مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}&P(u)=w(x,y,z,t), && t\geq ۰\\&\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=۰}=f_j(x,y,z), && j=۰,۱,۲,\ldots,m-۱.\\&Mu=۰, && (۴ـ۱۸)\end{aligned}$$

که تساوی $Mu = 0$، نشان دهندهٔ شرایط مرزی همگن خطی با ضرایب ثابت است. برای حل این مسئله از دو قضیهٔ زیر می‌توان استفاده کرد.

قضیه ۴ ـ ۱۷. *اگر u_1 جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱۸) به‌ازای $w = 0$ و u_2 جواب مسئلهٔ زیر باشد،*

$$P(u) = w$$
$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$
$$Mu = 0, \tag{۴ ـ ۱۹}$$

آنگاه $u = u_1 + u_2$ جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱۸) است.

برهان. اگر $u = u_1 + u_2$ را در مسئلهٔ (۴ ـ ۱۸) قرار دهیم صدق می‌کند. ■

قضیه (اصل دوهامل) ۴ ـ ۱۸. *فرض کنید $v(x, y, z, t; s)$ جواب مسئلهٔ*

$$P(v) = 0$$
$$\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-2.$$
$$\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} = w(x, y, z, s),$$
$$Mu = 0$$

باشد، آنگاه $u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t-s, s)ds$ جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۱۹) است.

برهان. مشابه اثبات قضیهٔ ۴ ـ ۱۴ شرایط مرزی و شرایط اولیه برقرار است. برای بررسی اینکه u در معادلهٔ (۴ ـ ۱۹) صدق می‌کند، توجه کنید مشتق نسبت به x، y و z از انتگرال عبور می‌کند و روی v اثر می‌کند. اما مشتق نسبت به t علاوه بر اینکه از انتگرال عبور می‌کند و بر روی v اثر می‌کند، یک جمله دیگر که از قرار دادن t به‌جای s در تابع زیر انتگرال حاصل می‌گردد، به‌دست می‌دهد. چون مشتق v نسبت به t تا مرتبهٔ $m-2$ در $t = 0$ برابر صفر است، پس کلیهٔ مشتقات در v نسبت به تمام متغیرها، چنانچه مشتق نسبت به t از مرتبهٔ $m-2$ بیشتر نباشد، نیز در $t = 0$ برابر صفر است. به این ترتیب از اعمال P بر روی u به‌دست می‌آوریم:

$$P(u) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} + \int_0^t P\big(v(x, y, z, t-s; s)\big)ds = w(x, y, z, s)$$

چون $P\big(v(x, y, z, t-s; s)\big) = 0$. به این ترتیب اثبات کامل می‌گردد. ■

مثال ۴ ـ ۱۲. مطلوب است حل مسئلهٔ زیر:

$$
\begin{aligned}
&u_t-(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=xyzt, \qquad 0<x,y,z<1, \quad t>0\\
&u(x,y,z,0)=xyz,\\
&u(0,y,z,t)=u_x(1,y,z,t)=0,\\
&u_y(x,0,z,t)=u(x,1,z,t)=0,\\
&u(x,y,0,t)=u(x,y,1,t)=0.
\end{aligned}
$$

حل. جواب عمومی معادلهٔ همگن را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$
u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}e^{-[(n+\frac{1}{2})^2+(m+\frac{1}{2})^2+k^2]\pi^2 t}\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right)\cos\left((m+\frac{1}{2})\pi y\right)\sin(k\pi z)
$$

برای u_1 و v مقدار a_{nmk} به ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

برای u_1،

$$
a'_{nmk}=\frac{8(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2}\left(\frac{(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})\pi}-\frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}
$$

برای v،

$$
a''_{nmk}(s)=\frac{8(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2}\left(\frac{(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})\pi}-\frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}s
$$

با انتگرال‌گیری از v تابع u_2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
u_2(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a'_{nmk}\left[\left(\frac{t}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\right)+\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right)\cos\left((m+\frac{1}{2})\pi y\right)\sin(k\pi z)
$$

که در آن $\lambda=(n+\frac{1}{2})^2+(m+\frac{1}{2})^2+k^2$.

سرانجام جواب مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$
u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a'_{nmk}\left[\frac{t}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda^2}+1\right)e^{-\lambda t}\right]\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right)\cos\left((m+\frac{1}{2})\pi y\right)\sin(k\pi z).
$$

تمرین ۴ ـ ۳

مسائل زیر را با استفاده از اصل دوهامل حل کنید.

۱. $u_{tt} = 4u_{xx} + 3\sin x \cos t, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$u(x, 0) = \cos x$ و $u_t(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = u(\pi, t) = t.$

۲. $u_{tt} = u_{xx} + tx, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$u(x, 0) = \sin x$ و $u_t(x, 0) = x^2 - \pi x$ و $u_x(0, t) = 0$ و $u_x(\pi, t) = t.$

۳. $u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx} + xt^2, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$u(x, 0) = x + \sin x$ و $u_t(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = 0$ و $u_x(\pi, t) = t^2.$

۴. $u_{tt} - u_{xx} = 2x^2 t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2} x$ و $u_t(x, 0) = 0$ و $u_x(0, t) = 1$ و $u_x(1, t) = \frac{3\pi}{2}.$

۵. $u_t = u_{xx} + 2u_x + xt, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x$ و $u(0, t) = \sin t$ و $u_x(1, t) = \cos t.$

۶. $u_t = u_{xx} + xt^2, \qquad -\pi < x < \pi, \ t > 0$

$u(x, 0) = x^2$ و $u(-\pi, t) = u(\pi, t) + t$ و $u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t).$

۷. $u_t = u_{xx} + u + x\sin t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(x, 0) = \sin 2x$ و $u(0, t) = 0$ و $u(1, t) + u_x(1, t) = 0.$

۸. $u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$u(x, 0) = x$ و $u_t(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = u(\pi, t) = t$

$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0.$

۹. $u_{tt} + 16u_{xxxx} = xt^2, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$$u(x,0) = x + 1 \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u_x(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(\pi,t) = 0.$$

۱۰. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + xyt, \qquad 0 < x,y < 1, \quad t > 0$

$$u(x,y,0) = xy^2$$

$$u(0,y,t) = u_x(1,y,t) = u_y(x,0,t) = u(x,1,t) = 0.$$

۴ ـ ۴ تابع گرین

در بخش گذشته با استفاده از اصل دوهامل، روشی برای تعیین جواب مخصوص برای معادلهٔ وابسته به زمان معرفی کردیم. هدف از این بخش معرفی روشی برای تعیین جواب مخصوص برای معادلاتی است که مستقل از زمان هستند. خواهیم دید نتیجه مطلوب با استفاده از تابعی حاصل می‌شود که آن را تابع گرین می‌نامند.

فرض کنید روی $[x,b]$، $p(x) > 0$ و $q(x)$ دو تابع پیوسته و $a < \xi < b$ و $\delta(x-\xi)$ تابع دلتای دیراک باشد. مسئله با شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید.

$$Ly = [p(x)y']' + q(x)y = \delta(x-\xi)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0. \tag{۴ ـ ۲۰}$$

این مسئله دارای جواب یگانه فیزیکی است که پیوسته و مشتق آن دارای جهش است.

تعریف ۴ ـ ۱۹. هر جواب پیوسته مسئلهٔ فوق را تابع گرین عملگر L، تحت شرایط مرزی (۴ ـ ۲۰) گوییم و با $G(x;\xi)$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید در تابع گرین، x متغیر مستقل و ξ یک پارامتر است. برای محاسبهٔ تابع گرین، مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسئلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم و با λ_n و $\phi_n(x)$، $n = 0, 1, 2, \ldots$ نشان می‌دهیم.

$$Ly + \lambda y = 0 \qquad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{و} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

در این صورت:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_a^b \phi_n(x) f(x) dx$$

تبدیل متناهی اشترم ـ لیوویل وابسته خواهد بود. در حالتی که تمام مقادیر ویژه ناصفر باشند، تبدیل جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۲۰)، $Y(n)$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$Y(n) = \frac{\mathcal{F}(\delta(x-\xi))}{-\lambda_n} = \frac{\phi_n(\xi)}{-\lambda_n \|\phi_n\|^2}$$

پس:

$$G(x;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y(n)\phi_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(\xi)\phi_n(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2} \qquad (۴ ـ ۲۱)$$

اگر عملگر دیفرانسیل L مقدار ویژهٔ صفر داشته باشد، مثلاً $\lambda_0 = 0$ و ϕ_0 تابع ویژهٔ متناظر آن باشد، آنگاه با استفاده از قضیهٔ ۴ ـ ۱۳ برای تبدیل جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۲۰)، نتیجه می‌شود که

$$0 = -\lambda_0 \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(Ly) = \mathcal{F}(\delta(x-\xi)) = \phi_0(\xi)$$

ولی تابع ویژه یک تابع ناصفر است، لذا مسئلهٔ (۴ ـ ۲۰) جواب نخواهد داشت. بنابراین تابع گرین تنها در حالتی که مقادیر ویژهٔ عملگر دیفرانسیل ناصفر باشند تعریف می‌شود و در حالت دیگر تابع گرین اصلاح شده را به‌عنوان جواب معادلهٔ زیر همراه با شرایط مرزی (۴ ـ ۲۰) تعریف می‌کنیم:

$$Ly = [p(x)y']' + q(x)y = \delta(x-\xi) - \phi_0(\xi)\phi_0(x)$$

در این صورت رابطهٔ (۴ ـ ۲۱) تابع گرین اصلاح شده را نشان می‌دهد با این تفاوت که ضریب تابع $\phi_0(x)$ هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد. اولین خاصیت تابع گرین که از رابطهٔ (۴ ـ ۲۱) نتیجه می‌شود در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیه۴ ـ ۲۰. *اگر عدد صفر یک مقدار ویژهٔ اشترم ـ لیوویل وابسته به مسئلهٔ (۴ ـ ۲۰) نباشد، تابع گرین به‌طور یکتا مشخص می‌شود و متقارن است، یعنی* $G(x;\xi) = G(\xi;x)$.

کاربرد اصلی تابع گرین ارائهٔ یک نمایش انتگرالی برای جواب معادلات ناهمگن است. این مطلب در قضیهٔ زیر نشان داده شده است:

قضیه۴ ـ ۲۱. *اگر $G(x;\xi)$ تابع گرین (اصلاح شده) L و $f(x)$ روی $a \le x \le b$ پیوسته باشد، آنگاه مسئله با شرایط مرزی*

$$Ly = f(x) \qquad a \le x \le b$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{و} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{۴ ـ ۲۲}$$

در صورتی که دارای جواب باشد، $y(x) = \int_a^b G(x;\xi) f(\xi) d\xi$ *جواب آن خواهد بود.*

برهان. اگر عملگر L مقدار ویژهٔ صفر نداشته باشد، آنگاه $LG(x;\xi) = \delta(x-\xi)$، پس

$$Ly = \int_a^b LG(x;\xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

در صورتی که L مقدار ویژهٔ صفر داشته باشد، مسئلهٔ فوق تنها در صورتی جواب دارد که:

$$0 = -\lambda_0 \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(Ly) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\|\phi_0\|^2} \int_a^b \phi_0(x) f(x) dx$$

بنابراین در این حالت خواهیم داشت:

$$Ly = \int_a^b LG(x;\xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b (\delta(x-\xi) - \phi_0(\xi)\phi_0(x)) f(\xi) d\xi = f(x).$$

■

در حالت کلی محاسبهٔ همهٔ مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ یک عملگر برای به‌دست آوردن تابع گرین کار راحتی نیست. حتی در صورت محاسبهٔ این‌ها نمایش تابع گرین با سری نامتناهی کار کردن با آن را سخت می‌کند. در این راستا قضیهٔ زیر کمک می‌کند که بتوانیم تابع گرین را به روش ساده‌تری محاسبه کنیم:

قضیه ۴ ـ ۲۲. *تابع گرین روی* $(a,\xi) \cup (\xi,b)$ *دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته است. همچنین این تابع در* $x = \xi$*، پیوسته و مشتق آن در این نقطه دارای ناپیوستگی جهشی با مقدار جهش* $\frac{1}{p(\xi)}$ *است.*

برهان. روی (a,ξ) و (ξ,b) توابع ضرایب معادله پیوسته و طرف دوم معادله نیز پیوسته است، پس هر جواب روی این فواصل دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته است. اثبات پیوستگی تابع گرین در $x = \xi$ را به [۴] ارجاع می‌دهیم. حال تابع گرین را در معادله قرار دهید:

$$\big(p(x) G'(x;\xi)\big)' + q(x) G(x;\xi) = \delta(x-\xi)$$

از طرفین معادله روی $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ برای $\varepsilon > 0$ و کوچک انتگرال بگیرید تا به‌دست آورید

$$p(\xi+\varepsilon) G'(\xi+\varepsilon;\xi) - p(\xi-\varepsilon) G'(\xi-\varepsilon;\xi) + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x) G(x;\xi) dx = 1$$

حال اگر $\varepsilon \to 0$، به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\xi_+} G'(x,\xi) - \lim_{x\to\xi_-} G'(x;\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

■

ساختن تابع گرین

اگرچه با استفاده از تبدیل اشترم ـ لیوویل تابع گرین قابل حصول است، لیکن با توجه به قضیهٔ فوق آن را به مراتب مقدماتی‌تر و ساده‌تر می‌توان ساخت. تابع گرین روی $[a,\xi)$ جواب مسئله با شرط مرزی زیر است.

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0.$$

اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادلهٔ فوق باشند، در این صورت در جواب عمومی

$$y_L(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

A و B قابل تنظیم است تا تابع گرین در نقطهٔ $x=a$ در شرط مرزی فوق صدق کند. برای برقراری شرط مرزی یک معادله بین دو ثابت A و B برقرار می‌گردد. به این ترتیب یک دسته جواب به‌دست می‌آید. همچنین تابع گرین روی $(\xi,b]$ جواب مسئله با شرط مرزی زیر است.

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

برای برقراری شرط مرزی، اعداد C و D قابل تنظیم است تا

$$y_R(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x),$$

جواب باشد. به این ترتیب یک معادله نیز بین C و D به‌دست می‌آید.

حد چپ y_L در ξ و حد راست y_R در ξ موجود و به ترتیب به A و B و C و D وابسته‌اند. برای برقراری شرط پیوستگی، یک معادله بین این چهار ثابت باید برقرار باشد. سرانجام برای جهش مشتق تابع گرین باید رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to\xi^+} y'_R - \lim_{x\to\xi^-} y'_L = \frac{1}{p(\xi)}$$

برای برقراری این تساوی نیز یک معادلهٔ دیگر بین چهار ثابت A و B و C و D باید برقرار گردد. از حل این چهار معادله مقادیر A و B و C و D تعیین می‌گردد. چنانچه این مقادیر معین را در y_L و y_R قرار دهیم، آنگاه تابع گرین $G(x;\xi)$ به صورت زیر به‌دست می آید.

$$G(x;\xi)=\begin{cases} y_L(x) & a\leq x\leq \xi \\ y_R(x) & \xi\leq x\leq a \end{cases}$$

مثال ۴ ـ ۱۳. ابتدا تابع گرین مسئلهٔ زیر را پیدا کرده، سپس جواب مسئله را با استفاده از تابع گرین به‌دست آورید.

$$y''+y=x$$

$$y(\circ)=\circ \quad \text{و} \quad y'(\pi)=\circ$$

حل. $\sin x$ و $\cos x$ دو جواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل همگن وابسته هستند. بنابراین صورت عمومی توابع y_L و y_R به شکل زیر است.

$$y_L(x)=A\cos x+B\sin x$$

$$y_R(x)=C\cos x+D\sin x$$

برای برقراری شرط مرزی در نقطهٔ $a=\circ$ باید داشته باشیم: $y_L(\circ)=A=\circ$. پس کلیهٔ جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی $[\circ,\xi)$ عبارت است از:

$$y_L(x)=B\sin x.$$

همچنین برای برقراری شرط مرزی در نقطهٔ $b=\pi$ باید داشته باشیم: $y'_R(\pi)=D\cos\pi=\circ$ یا $D=\circ$. پس کلیهٔ جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی $(\xi,۱]$ عبارت است از:

$$y_R(x)=C\cos x$$

برای برقراری پیوستگی تابع گرین در نقطهٔ ξ لازم است داشته باشیم:

$$y_L(\xi)=y_R(\xi) \quad\Longrightarrow\quad B\sin\xi=C\cos\xi$$

برای برقراری شرط جهش مشتق در نقطهٔ ξ باید

$$y'_R(\xi)-y'_L(\xi)=\frac{۱}{p(\xi)}=۱$$

یا:

$$-C\sin\xi - B\cos\xi = 1$$

از حل این دو معادله برای B و C به‌دست می‌آوریم: $C = -\sin\xi$ و $B = -\cos\xi$، درنتیجه:

$$G(x;\xi) = \begin{cases} -\cos\xi\sin x & 0 \le x \le \xi \\ -\sin\xi\cos x & \xi \le x \le \pi \end{cases}$$

پس جواب مسئله عبارت است از:

$$y(x) = \int_0^x -\xi\sin\xi\cos x d\xi + \int_x^\pi -\xi\cos\xi\sin x d\xi = x + \sin x.$$

مثال ۴ ـ ۱۴. ابتدا جواب مسئلهٔ زیر را با استفاده از تابع گرین به‌دست آورید. سپس آن را به‌طور مستقیم محاسبه کنید.

$$y'' + 2y' + y = x,\ y(0) = 0 \text{ و } y(1) = 0.$$

حل. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن وابسته عبارت است از:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

برای برقراری شرط مرزی در نقطهٔ $a = 0$ باید داشته باشیم: $y(0) = c_1 = 0$ پس کلیهٔ جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی $[0,\xi)$ به‌صورت زیر است:

$$y_L(x) = Bxe^{-x}$$

برای برقراری شرط مرزی در نقطهٔ $b = 1$ باید داشته باشیم:

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -c_2$$

پس کلیهٔ جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی $(\xi, 1]$ عبارت است از:

$$y_R(x) = C(1-x)e^{-x}$$

برای برقراری پیوستگی در نقطهٔ ξ باید داشته باشیم:

$$y_R(\xi) = y_L(\xi) \quad \Longrightarrow \quad C(1-\xi)e^{-\xi} = B\xi e^{-\xi}$$

یا:

$$C(۱-\xi) = B\xi \qquad (۴\_۲۳)$$

برای برقراری مقدار جهش در مشتق در نقطهٔ ξ باید داشته باشیم:

$$y'_R(\xi) - y'_L(\xi) = \frac{۱}{p(\xi)} = \frac{۱}{e^{۲\xi}} = e^{-۲\xi}$$

یا:

$$B(۱-\xi)e^{-\xi} + C(۲-\xi)e^{-\xi} = e^{-۲\xi} \qquad (۴\_۲۴)$$

از حل معادلهٔ (۴ ـ ۲۳) و (۴ ـ ۲۴) برای B و C به‌دست می‌آوریم:

$$B = e^{-\xi} \quad \text{و} \quad C = \frac{\xi}{۱-\xi}e^{-\xi}$$

درنتیجه:

$$G(x;\xi) = \begin{cases} xe^{-(x+\xi)}, & ۰ \le x \le \xi \\ \frac{\xi(۱-x)}{۱-\xi}e^{-(x+\xi)}, & \xi \le x \le ۱ \end{cases}$$

به این ترتیب جواب مسئله به شکل زیر است:

$$y(x) = \int_۰^۱ \xi G(x;\xi)d\xi = \int_۰^x \frac{\xi^۲(۱-x)}{۱-\xi}e^{-(x+\xi)}d\xi + \int_x^۱ \xi x e^{-(x+\xi)}d\xi$$

$$= (۱-x)e^{-x}\int_۰^x \frac{\xi^۲ e^{-\xi}}{۱-\xi}d\xi + xe^{-x}\int_x^۱ \xi e^{-\xi}d\xi$$

$$= (۱-x)e^{-x}\sum_{k=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{k}(-۱)^{m+۱}\frac{k!}{m!}x^m(۱-e^{-x}) + xe^{-x}\left((x+۱)e^{-x}-۱\right)$$

که ساده کردن بیش از این مقدور نیست. حال به‌طور مستقیم مسئله را حل می‌کنیم. جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y(x) = c_۱e^{-x} + c_۲xe^{-x} + x - ۲$$

برای برقراری شرط مرزی در $a = ۰$ باید داشته باشیم:

$$y(۰) = c_۱ - ۲ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad c_۱ = ۲$$

برای برقراری شرط مرزی در $b = ۱$ باید داشته باشیم:

$$y(۱) = c_۱e^{-۱} + c_۲^{-۱} - ۱ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad c_۲ = e - ۲$$

پس جواب نهایی عبارت است از:

$$y(x) = ۲e^{-x} + (e - ۲)xe^{-x} + x - ۲$$

تذکر ۴ ـ ۲۳. در مثال اخیر دیدیم که حل مسئلهٔ شرایط مرزی با استفاده از تابع گرین به‌مراتب مشکل‌تر از حل مستقیم آن است. این حقیقت برای مثال ۱ و سایر مسائل نیز برقرار است. اهمیت تابع گرین برای معادلات دیفرانسیل عادی در کاربرد نظری آن است. به‌خصوص در اثبات وجود جواب تناوبی برای معادلات دیفرانسیل عادی بسیار مفید است.

تذکر ۴ ـ ۲۴. مسئلهٔ غیرهمگن همراه با شرایط مرزی غیرهمگن به‌صورت

$$L(y) = f(x),$$
$$\alpha_۱ y(a) + \alpha_۲ y'(a) = \alpha, \quad \beta_۱ y(b) + \beta_۲ y'(b) = \beta$$

نیز می‌تواند مطرح باشد. اگر y_q تابعی باشد که در شرایط مرزی صدق کند، آنگاه

$$y(x) = y_q + \int_a^b G(x;\xi)\big(f(\xi) - L(y_q)\big)d\xi$$

جواب مسئله است. زیرا اگر بگیریم $y = y_۱ + y_q$ در این صورت $y_۱$ جواب مسئلهٔ زیر است.

$$L(y_۱) = L(y) - L(y_q) = f(x) - L(y_q)$$
$$\alpha_۱ y_۱(a) + \alpha_۲ y'_۱(a) = ۰, \qquad \beta_۱ y_۱(b) + \beta_۲ y'_۱(b) = ۰.$$

مثال ۴ ـ ۱۵. مطلوب است حل

$$y'' = x^۲ + x$$
$$y(۰) = ۰ \quad \text{و} \quad y(۱) + y'(۱) = ۲$$

حل. جواب $y'' = ۰$ روی $۰ \leq x \leq \xi$ که در شرط مرزی $y(۰) = ۰$ صدق کند، تابع $y_۱(x) = Ax$ است. همچنین جواب $y'' = ۰$ روی $\xi \leq x \leq ۱$ که در $y(۱) + y'(۱) = ۰$ صدق کند، تابع $y_۲(x) = B(۲ - x)$ است. برای برقراری پیوستگی تابع گرین و شرط جهش مشتق آن باید داشته باشیم:

$$A\xi = B(۲ - \xi) \qquad \text{و} \qquad -B - A = ۱$$

پس $A = \frac{\xi}{۲} - ۱$ و $B = -\frac{\xi}{۲}$ و

$$G(x;\xi) = \begin{cases} -\left(۱ - \frac{\xi}{۲}\right)x & ۰ \leq x \leq \xi \\ -\frac{\xi}{۲}(۲ - x) & \xi \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

همچنین $y_q = x$. پس $f(x) - L(y_q) = x^۲ + x$

$$\begin{aligned} y(x) &= x + \int_۰^۱ G(x;\xi)(\xi^۲ + \xi)d\xi \\ &= x - \int_۰^x \left(\frac{\xi^۳}{۲} + \frac{\xi^۲}{۲}\right)(۲ - x)d\xi - \int_x^۱ (\xi^۲ + \xi)\left(۱ - \frac{\xi}{۲}\right)x d\xi \\ &= \frac{۱}{۱۲}x^۴ + \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱۱}{۲۴}x. \end{aligned}$$

تعریف تابع گرین برای مسئلهٔ

$$\begin{aligned} &L(y) = a_۱(x)y'' + a_۲(x)y' + a_۳(x)y = f(x) \qquad a \leq x \leq b \\ &\alpha_۱ y(a) + \alpha_۲ y'(a) = ۰, \qquad \beta_۱ y(b) + \beta_۲ y'(b) = ۰ \end{aligned} \tag{۴ ـ ۲۵}$$

به‌صورت زیر نیز معقول است.

تعریف ۴ ـ ۲۵. هر جواب پیوسته مسئلهٔ

$$\begin{aligned} &L(y) = \delta(x - \xi), \qquad a \leq x \leq b \\ &\alpha_۱ y(a) + \alpha_۲ y'(a) = ۰, \qquad \beta_۱ y(b) + \beta_۲ y'(b) = ۰ \end{aligned}$$

را تابع گرین عملگر L تحت شرایط مرزی فوق گوییم و با $G(x;\xi)$ نشان می‌دهیم.

اگر λ_n و $\phi_n(x)$ مانند قبل مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل وابسته باشند، آنگاه:

الف) $G(x;\xi) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{s(\xi)\phi_n(\xi)}{-\lambda_n \|\phi_n\|_s^۲}\phi_n(x)$ که $s(x)$ تابع وزن معادلهٔ اشترم ـ لیوویل متناظر است. در این حالت $G(x;\xi)$ متقارن نیست.

ب) این تابع گرین روی $(a,\xi) \cup (\xi,b)$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته، خود آن در نقطهٔ $x = \xi$ پیوسته و مشتق آن در نقطهٔ $x = \xi$ دارای ناپیوستگی جهشی با مقدار جهش $\frac{۱}{a_۱(\xi)}$ است.

ج) اگر عدد صفر یک مقدار ویژهٔ مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل وابسته به مسئلهٔ (۴ ـ ۲۴) نباشد، آنگاه تابع گرین یگانه است.

تذکر ۴ ـ ۲۶. به‌دلیل اهمیت خاصیت تقارن، معمولاً تعریف قبلی را به‌عنوان تعریف تابع گرین در نظر می‌گیرند.

تذکر ۴ ـ ۲۷. نظر به اینکه تابع گرین برای اولین بار در مسئلهٔ کابل تحت کشش با توزیع جرم مخصوص در طول آن مطرح شد، بعضی از مؤلفین برای حفظ این پدیده علامت $f(x)$ را در مسئلهٔ (۴ ـ ۲۲) با علامت منفی منظور می‌نمایند تا $f(x)$ مثبت گردد. لیکن حذف این علامت منفی یا وجود آن از نظر ریاضی فاقد اهمیت است.

اکنون به بیان تابع گرین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌پردازیم. قبل از ورود به بحث، تابع دلتای دیراک دو متغیره را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta(x-\xi, y-\eta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta).$$

این تابع دارای خواص زیر است.

الف) اگر $\xi \neq x$ یا $\eta \neq y$ آنگاه $\delta(x-\xi, y-\eta) = 0$.

ب) $\iint\limits_{R_\varepsilon} \delta(x-\xi, y-\eta)dxdy = 1$ هرگاه $R_\varepsilon = \{(x,y) : (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \varepsilon\}$.

ج) برای هر تابع پیوسته و دلخواه F در ناحیهٔ R و $(\xi, \eta) \in R$ داریم:

$$\iint\limits_{R} F(x,y)\delta(x-\xi, y-\eta)dxdy = F(\xi,\eta).$$

به‌طور مشابه تابع دلتای دیراک برای تعداد سه متغیر مستقل و بالاتر قابل تعریف است.

اگر $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ یک میدان و $(\xi,\eta) \in \Omega$، تابع گرین معادلهٔ لاپلاس را در این ناحیه به‌صورت زیر تعریف می‌کنند.

تعریف ۴ ـ ۲۸. تابع $G(x,y;\xi,\eta)$ را تابع گرین معادلهٔ لاپلاس در ناحیهٔ Ω می‌نامند، هرگاه

$$\begin{cases} \Delta G = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{در } \Omega \\ G = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۴ ـ ۲۶)$$

حال فرض کنید Ω یک میدان کراندار مستطیل شکل باشد. در این صورت مسئلهٔ مقادیر ویژهٔ وابسته به مسئلهٔ فوق عبارت است از:

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{در } \Omega \\ \phi = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۴ ـ ۲۷)$$

فرض کنید λ_{mn} مقادیر ویژه و ϕ_{mn} توابع ویژهٔ وابسته به آن برای $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ باشد، اگر G و δ را برحسب این توابع ویژه بسط دهیم، خواهیم داشت

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(\xi, \eta)\phi_{mn}(x, y)$$

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn}(\xi, \eta)\phi_{mn}(x, y)$$

که در آن:

$$b_{mn} = \frac{1}{\|\phi_{mn}\|^2}\iint_{\Omega}\delta(x - \xi, y - \eta)\phi_{mn}(x, y)dxdy = \frac{\phi_{mn}(\xi, \eta)}{\|\phi_{mn}\|^2},$$

و

$$\|\phi_{mn}\|^2 = \iint_{\Omega}\phi_{mn}^2(x, y)dxdy.$$

حال با قرار دادن سری‌های دوگانه G و δ در (۴ ـ ۲۶) و به‌کارگیری (۴ ـ ۲۷) برای λ_{mn} و ϕ_{mn} یعنی تساوی

$$\Delta\phi_{mn} + \lambda_{mn}\phi_{mn} = 0.$$

به‌دست می‌آوریم:

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}a_{mn}(\xi, \eta)\phi_{mn}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_{mn}(\xi, \eta)\phi_{mn}(x, y)}{\|\phi_{mn}\|^2}$$

پس باید داشته باشیم:

$$a_{mn}(\xi, \eta) = -\frac{\phi_{mn}(\xi, \eta)}{\lambda_{mn}\|\phi_{mn}\|^2}$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_{mn}(\xi, \eta)\phi_{mn}(x, y)}{\lambda_{mn}\|\phi_{mn}\|^2} \qquad (۴ ـ ۲۸)$$

تذکر ۴ ـ ۲۹. هر چند محاسبات بالا وجود تابع گرین را برای نواحی مستطیل شکل که مقادیر ویژهٔ ناصفر دارند، اثبات می‌کند ولی این مطلب برای هر ناحیهٔ باز و کراندار صحیح است. قضیهٔ زیر این نکته را بیان می‌کند.

قضیه ۴ ـ ۳۰. *اگر Ω باز و کراندار باشد، آنگاه تابع گرین معادلهٔ لاپلاس موجود است. به علاوه این تابع متقارن است، یعنی* $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$.

برهان. اثبات وجود تابع گرین را به فصل بعد موکول می‌کنیم. در اینجا تنها صحت قسمت دوم قضیه را نشان می‌دهیم. بنابر فرمول گرین برای دو تابع دلخواه ϕ و ψ در ناحیهٔ Ω داریم:

$$\iint_{\Omega}(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)dxdy = \int_{\partial\Omega}\Big(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big)dS$$

در این تساوی n بردار خارجی عمود بر سطح $\partial\Omega$ را نشان می‌دهد، اگر قرار دهیم $\phi(x, y) = G(x, y; \xi, \eta)$ و $\psi(x, y) = G(x, y; \xi^*, \eta^*)$، با توجه به اینکه $G(x, y; \xi, \eta)$ و $G(x, y; \xi^*, \eta^*)$ روی $\partial\Omega$ صفر هستند، نتیجه می‌شود:

$$\iint_{\Omega}G(x, y; \xi, \eta)\Delta G(x, y; \xi^*, \eta^*) - G(x, y; \xi^*, \eta^*)\Delta G(x, y; \xi, \eta)dxdy = 0$$

بنابر (۴ ـ ۲۶) و خاصیت ج) تابع دلتای دیراک به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega}G(x, y; \xi, \eta)\delta(x - \xi^*, y - \eta^*) - G(x, y; \xi^*, \eta^*)\delta(x - \xi, y - \eta)dxdy \\ &= G(\xi^*, \eta^*, \xi, \eta) - G(\xi, \eta, \xi^*, \eta^*). \end{aligned}$$

■

اکنون مسئلهٔ دیریکله ناهمگن زیر را روی Ω در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ u = g & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۴ ـ ۲۹)$$

در ارتباط با جواب این مسئله و تابع گرین قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۴ ـ ۳۱. *اگر $G(x, y; \xi, \eta)$ تابع گرین معادلهٔ لاپلاس روی Ω باشد، آنگاه جواب مسئلهٔ دیریکلهٔ (۴ ـ ۲۹) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:*

$$u(x, y) = \iint_{\Omega}G(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega}g(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial n}ds \qquad (۴ ـ ۳۰)$$

برهان. بنابر فرمول گرین برای دو تابع دلخواه ϕ و ψ با مشتقات قطعه قطعه پیوسته روی $\partial\Omega$ داریم:

$$\iint_{\Omega}(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)dxdy = \int_{\partial\Omega}\Big(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big)ds$$

که در آن ds عنصر طول قوس و n بردار قائم بر $\partial\Omega$ در جهت خارج ناحیه است. با قرار دادن

در فرمول فوق که u جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۲۹) $\phi(\xi,\eta) = G(\xi,\eta;x,y)$ و $\psi(\xi,\eta) = u(\xi,\eta)$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$\iint_{\Omega} \big(G(\xi,\eta;x,y)\Delta u(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\Delta G(\xi,\eta;x,y)\big)\,d\xi d\eta$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Big(G(\xi,\eta;x,y)\frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\Big)ds$$

با توجه به طرف دوم معادلات (۴ ـ ۲۶) و (۴ ـ ۲۹) این فرمول به‌صورت زیر ساده می‌گردد.

$$\iint_{\Omega} \big(G(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\delta(\xi-x,\eta-y)\big)\,d\xi d\eta = -\int_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}ds.$$

بنابر خاصیت تابع دلتای دیراک و خاصیت تقارنی تابع گرین نتیجه می‌شود:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} g(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}ds.$$

■

تذکر۴ ـ ۳۲. منظور از مشتق تابع گرین G در رابطهٔ انتگرالی بالا مشتق نسبت به ξ و η است، یعنی $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \xi}n_1 + \frac{\partial G}{\partial \eta}n_2$ که $\vec{n} = (n_1, n_2)$.

نتیجه۴ ـ ۳۳. اگر $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین معادلهٔ لاپلاس باشد، آنگاه

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}ds = 1.$$

برهان. جواب مسئلهٔ (۴ ـ ۲۸) با $f = 0$ و $g = 1$ تابع $u(x,y) = 1$ است. ■

مشابه مسئلهٔ دیریکله، برای شرایط مرزی نیومن و روبین هم می‌توان تابع گرین تعریف کرد که به کمک آن حل مسئلهٔ ناهمگن، آسان شود. برای راحتی توابع گرین متناظر این مسائل را تابع گرین مسئلهٔ نیومن و تابع گرین مسئلهٔ روبین می‌نامیم. چگونگی تعریف این دو و کاربرد آنها در قضایای زیر آمده است.

قضیه۴ ـ ۳۴. *اگر $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین مسئلهٔ نیومن روی Ω یعنی جواب مسئلهٔ زیر باشد:*

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{در } \Omega \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

آنگاه جواب مسئلهٔ

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

عبارت است از:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} G(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta) ds.$$

قضیه ۴ ـ ۳۵. *اگر $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین مسئلهٔ روبین روی Ω یعنی جواب مسئلهٔ زیر باشد*

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{در } \Omega \\ G = 0 & \text{روی } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{روی } \Gamma_2 \end{cases}$$

که $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ و $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$. آنگاه جواب مسئلهٔ

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ u = g_1 & \text{روی } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_2 & \text{روی } \Gamma_2 \end{cases}$$

عبارت است از:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta + \int_{\Gamma_1} g_1(\xi,\eta) \frac{\partial G}{\partial n} ds$$
$$+ \int_{\Gamma_2} g_2(\xi,\eta) G(x,y;\xi,\eta) ds.$$

تذکر ۴ ـ ۳۶. توابع گرین مسئلهٔ نیومن و مسئلهٔ روبین مشابه با تابع گرین مسئلهٔ دیریکله با استفاده از مسائل مقادیر ویژهٔ وابسته قابل تعیین است.

در شرایط مرزی دلخواه، تعریف تابع گرین و تعیین آن مشابه با شرایط مرزی فوق است، ولی فرمول‌های جواب پیچیده می‌شود. در این حالت می‌توان به مسئله به‌صورت زیر نگاه کرد.

فرض کنید $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین با شرایط مرزی دلخواه باشد.

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{در } \Omega \\ MG = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

که در آن $Mu = 0$ شرایط مرزی خطی همگن اختیاری است. این تابع گرین نیز با استفاده از مسئلهٔ مقادیر ویژه قابل حصول است. در مورد استفاده از این تابع گرین قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۴ ـ ۳۷. *اگر $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین فوق باشد، آنگاه جواب مسئلهٔ*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ Mu = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

عبارت است از:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

نتیجه ۴ ـ ۳۸. اگر $G(x,y;\xi,\eta)$ تابع گرین فوق و $u_h(x,y)$ جواب مسئلهٔ

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{در } \Omega \\ Mu = g & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

باشد، آنگاه جواب مسئلهٔ

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ Mu = g & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

به صورت زیر قابل حصول است.

$$u(x,y) = u_h(x,y) + \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

مثال ۴ ـ ۱۶. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\Delta u = xy^2 \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$
$$u(x,0) = x \ \text{و}\ u_y(x,1) = x^2 \ \text{و}\ u_x(0,y) = y \ \text{و}\ u(1,y) = y^2$$

حل. مسئلهٔ مقادیر ویژهٔ وابسته را به‌صورت زیر داریم:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$
$$u(x,0) = 0 \ \text{و}\ u_y(x,1) = 0 \ \text{و}\ u_x(0,y) = 0 \ \text{و}\ u(1,y) = 0$$

با گرفتن $u(x,y) = X(x)Y(y)$ و استفاده از روش جداسازی متغیرها مسائل اشترم ـ لیوویل وابسته را به‌صورت زیربه‌دست می آوریم که در آن $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \qquad\qquad Y'' + \beta^2 Y = 0,$$
$$X'(0) = 0,\ X(1) = 0, \qquad\qquad Y(0) = 0,\ Y'(1) = 0.$$

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ این مسائل اشترم ـ لیوویل عبارت‌اند از:

$$\gamma_m(x) = \cos\,(m+\frac{1}{2})\pi x,\ \psi \qquad\qquad {}_n(y) = \sin\,(n+\frac{1}{2})\pi y,$$
$$\alpha_m = \pi^2 (m+\frac{1}{2})^2, \qquad\qquad \beta_n = \pi^2 (n+\frac{1}{2})^2.$$

پس:

$$\phi_{mn}(x,y) = \gamma_m(x)\psi_n(y), \qquad \lambda_{mn} = \pi^2\Big((m+\frac{1}{2})^2 + (n+\frac{1}{2})^2\Big),$$

در نتیجه:

$$||\phi_{mn}||^۲ = \int_۰^۱\int_۰^۱ \cos^۲ (m+\frac{۱}{۲})\pi x \sin^۲ (n+\frac{۱}{۲})\pi y dx dy = \frac{۱}{۴}$$

و

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱۶\cos\pi(m+\frac{۱}{۲})\xi \sin\pi(n+\frac{۱}{۲})\eta}{\pi^۲((۲m+۱)^۲+(۲n+۱)^۲)} \cos\pi(m+\frac{۱}{۲})x\sin\pi(n+\frac{۱}{۲})y.$$

با توجه به قضیهٔ ۴ ـ ۳۵ برای مشخص شدن جواب، باید $\frac{\partial G}{\partial n}$ را روی قسمت‌های $y=۰$ و $x=۱$ از مرز ناحیه محاسبه کنیم. روی $y=۰$، داریم $\vec{n}=(۰,-۱)$، لذا $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \eta}$ و روی $x=۱$ داریم $\vec{n}=(۱,۰)$ بنابراین $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \xi}$ (تذکر ۴ ـ ۳۲).

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= -\sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۴}{\lambda_{mn}}\Big(\int_۰^۱\int_۰^۱\psi_n(\eta)\gamma_m(\xi)\xi\eta^۲ d\xi d\eta - \int_۰^۱ \xi\psi_n'(۰)\gamma_m(\xi)d\xi \\
&\qquad + \int_۰^۱ \eta^۲\psi_n(\eta)\gamma_m'(۱)d\eta + \int_۰^۱\xi^۲\psi_n(۱)\gamma_m(\xi)d\xi \\
&\qquad - \int_۰^۱ \eta\psi_n(\eta)\gamma_m(۰)d\eta\Big)\gamma_m(x)\psi_n(y) \\
&= -\sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱۶}{\lambda_{mn}}\Bigg(\Big(\frac{(-۱)^m}{\pi(m+\frac{۱}{۲})} - \frac{۱}{\pi^۲(m+\frac{۱}{۲})^۲}\Big)\frac{۲}{\pi(n+\frac{۱}{۲})} \\
&\qquad \Big(\frac{(-۱)^n}{\pi(n+\frac{۱}{۲})} - \frac{۱}{\pi^۲(n+\frac{۱}{۲})^۲}\Big) \\
&\qquad - \Big(\frac{(-۱)^m}{\pi(m+\frac{۱}{۲})} - \frac{۱}{\pi^۲(m+\frac{۱}{۲})^۲}\Big)\pi(n+\frac{۱}{۲}) \\
&\qquad \frac{۲\pi(m+\frac{۱}{۲})}{\pi(n+\frac{۱}{۲})}\Big(\frac{(-۱)^n}{\pi(n+\frac{۱}{۲})} - \frac{۱}{\pi^۲(n+\frac{۱}{۲})^۲}\Big)(-۱)^m \\
&\qquad - (-۱)^n\Big(\frac{(-۱)^m}{\pi(m+\frac{۱}{۲})} - \frac{۲(-۱)^m}{\pi^۳(m+\frac{۱}{۲})^۳}\Big) \\
&\qquad + \frac{(-۱)^n}{\pi^۲(n+\frac{۱}{۲})^۲}\Bigg)\gamma_m(x)\psi_n(y)
\end{aligned}$$

تذکر۴ ـ ۳۹. در فضای سه‌بعدی تابع گرین به‌طور مشابه تعریف و محاسبه می‌شود. قضایای قبل به‌صورت مشابه قابل بیان و اثبات است، تنها تفاوت در این است که سری و انتگرال دوگانه به سه‌گانه و انتگرال روی منحنی به انتگرال روی سطح تبدیل می‌گردد.

تذکر۴ ـ ۴۰. تعریف تابع گرین برای سایر معادلات از جمله حرارت و موج هم امکان‌پذیر است که در فصل بعد نمونه‌هایی از آن را خواهیم دید. ولی با این حال معمولاً تابع گرین برای معادلهٔ لاپلاس به‌کار می‌رود.

تمرین ۴ ـ ۴

۱. جواب هر یک از مسائل با شرایط مرزی زیر را تعیین کنید.

الف) $y''+y=1,\qquad y(0)=0$ و $y(1)=1$

ب) $y''+4y=e^x,\qquad y(0)=0$ و $y'(1)=0$

پ) $y''=\sin x,\qquad y(0)=0$ و $y(1)+2y'(1)=0$

ت) $y''+y=-x^2,\qquad y(0)+y'(0)=0$ و $y'(1)=2$

۲. ابتدا تابع گرین وابسته به هریک از مسائل زیر را بیابید. سپس با استفاده از آن جواب مسئلهٔ را معین کنید.

الف) $y''-y=x,\qquad y(0)=y(1)=0$

ب) $y''-y=\sin x,\qquad y'(0)=y'(1)=0$

پ) $y''+y=x,\qquad y(-1)=0$ و $y(1)=0$

ت) $y''+2y'+y=x,\qquad y(-\pi)=y(\pi)$ و $y'(-\pi)=y'(\pi)$

۳. تابع گرین را برای مسئلهٔ زیر بیابید.

$$xy''+y'=f(x),\qquad y(1)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}|y(x)|<\infty$$

۴. تابع گرین مسئلهٔ زیر را طبق هر دو تعریف این بخش به‌دست آورید. آنگاه جواب این مسئلهٔ را با استفاده از هر دو نوع تابع گرین معین نمایید.

$$y''+3y'+2y=x,\qquad y(0)=0 \quad \text{و} \quad y(1)=0$$

۵. مطلوب است حل مسائل زیر با استفاده از تابع گرین.

الف)
$$\Delta u = xy \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$
$$u(0,y) = y \text{ و } u(1,y) = y^2 \text{ و } u(x,0) = x \text{ و } u(x,1) = x^2$$

ب)
$$\Delta u = x^2y^2 \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$
$$u_x(0,y) = y^2 \text{ و } u_x(1,y) = y \text{ و } u_y(x,0) = x \text{ و } u_y(x,1) = x^2$$

پ)
$$\Delta u = xy^2 \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$
$$u_x(0,y) = y \text{ و } u(1,y) = y^2 \text{ و } u(x,0) = x \text{ و } u_y(x,1) = x^2$$

۶. تابع گرین مسئلهٔ زیر را بیابید. سپس آنرا با استفاده از این تابع گرین حل نمایید.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xyz, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$$
$$u(0,y,z) = u(1,y,z) = u(x,0,z) = u(x,1,z) = u_z(x,y,0)$$
$$= u_z(x,y,1) = 0$$

۷. تابع گرین مسئلهٔ زیر را بیابید. سپس آنرا با استفاده از این تابع گرین حل کنید.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\theta,\ r < 1, \quad 0 < \theta < \pi$$
$$u(r,0) = 0 \text{ و } u_\theta(r,\pi) = 0 \text{ و } u(1,\theta) = 0 \text{ و } \lim_{r\to 0} |u(r,\theta)| < \infty$$

۸. تابع گرین مسئلهٔ زیر را بیابید. سپس آنرا با استفاده از این تابع گرین حل کنید.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\sin 2\theta,\ r < 1,$$
$$u(1,\theta) = \cos\theta \text{ و } \lim_{r\to 0} |u(r,\theta)| < \infty$$

۹. تابع گرین مسئلهٔ نیومن زیر را بیابید. سپس با استفاده از آن جواب مسئله را به‌دست آورید.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xyz, \qquad 0 < x,y,z < 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x,y,z = 0,1 \text{ روی}$$

۱۰. تابع گرین مسئلهٔ نیومن معادلهٔ لاپلاس را برای داخل کره واحد بیابید.

۵

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی میدان‌های بی‌کران

در فصل‌های سوم و چهارم روش‌های گوناگون حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را روی میدان‌های مکان کران‌دار دیدیم. ابزار اصلی در حل اینگونه مسائل سری فوریه و یا تعمیم آن بوده است. در حالتی‌که میدان مکان بی‌کران گردد ابزار سری فوریه و یا تعمیم آن مفید نخواهد بود و باید برای حل اینگونه مسائل از ابزار دیگری استفاده کرد. تبدیلات فوریه که در فصل دوم به معرفی آن پرداختیم ابزار خوبی در این جهت است، لیکن این تبدیلات همانند تبدیلات فوریهٔ متناهی فقط دسته‌های خاصی از مسائل را حل می‌کند. لذا برای حل بیشتر اینگونه مسائل باید از ابزار و تکنیک‌های دیگری نیز استفاده کرد.

در بخش ۵ ـ ۱ به دسته‌بندی معادلات خطی مرتبهٔ دوم از دو متغیر می‌پردازیم. خواهیم دید دسته‌های خاصی از معادلات به معادلات دیفرانسیل عادی قابل تبدیل هستند و به راحتی حل می‌شوند. این روش حل که اولین‌بار برای حل معادلهٔ موج یک بعدی توسط دالامبر ارائه گردید، در بخش ۵ ـ ۲ معرفی می‌شود. بخش ۵ ـ ۳ کاربرد تبدیلات فوریهٔ نامتناهی و تبدیل

لاپلاس در حل معادلات جزئی روی میدان بی‌کران می‌آید. همچنین در این بخش به معرفی تبدیلات فوریهٔ تعمیم یافتهٔ نامتناهی و کاربرد آن خواهیم پرداخت. بخش ۵ ـ ۴ به استفاده از اصل دوهامل اختصاص داده شده است. بالاخره در بخش ۵ ـ ۵ تابع گرین و در ۵ ـ ٦ روش ریمان را ارائه می‌کنیم.

۵ ـ ۱ دسته‌بندی معادلات خطی مرتبهٔ دوم از دو متغیر

صورت کلی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی از دو متغیر مستقل x و y به شکل زیر است.

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x + E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y). \qquad (۵ ـ ۱)$$

در این معادله کلیهٔ ضرایب و تابع طرف دوم در میدانی مانند Ω پیوسته‌اند.

تعریف ۵ ـ ۱. معادلهٔ (۵ ـ ۱) را در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$، هذلولوی، سهموی یا بیضوی گوییم اگر مقدار

$$\Delta = B^{۲}(x_\circ,y_\circ) - ۴A(x_\circ,y_\circ)C(x_\circ,y_\circ)$$

به‌ترتیب مثبت، صفر یا منفی باشد. همچنین این معادله را روی Ω، هذلولوی، سهموی یا بیضوی گوییم اگر در هر نقطهٔ Ω، هذلولوی، سهموی یا بیضوی باشد.

تعریف ۵ ـ ۲. معادلهٔ دیفرانسیل عادی از مرتبهٔ اول

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} - B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = \circ \qquad (۵ ـ ۲)$$

را معادلهٔ مشخصهٔ (۵ ـ ۱) گویند. همچنین هر جواب این معادله منحنی مشخصهٔ (۵ ـ ۱) نامیده می‌شود. از حل معادلهٔ مشخصه برای $\frac{dy}{dx}$ وقتی‌که $A \neq \circ$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{B^{۲}-۴AC}}{۲A} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{B^{۲}-۴AC}}{۲A} \qquad (۵ ـ ۳)$$

هدف از ادامهٔ این بخش این است که با استفاده از تغییر متغیرهای مستقل معادلهٔ (۵ ـ ۱) را ساده کنیم. خواهیم دید که منحنی‌های مشخصه در این رابطه نقش اساسی دارند. این مطلب به نوع معادله بستگی دارد از این جهت حالات زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: معادلهٔ (۵ ـ ۱) هذلولوی است یا $\Delta > \circ$.

در این حالت از حل معادلات دیفرانسیل عادی مرتبهٔ اول (۵ ـ ۳)، جواب عمومی آنها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\phi(x,y)=C_1 \qquad \text{و} \qquad \psi(x,y)=C_2.$$

اکنون دو متغیر مستقل ξ و η را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\xi=\phi(x,y) \qquad \text{و} \qquad \eta=\psi(x,y)$$

معادلهٔ (۵ ـ ۱) را برحسب این متغیرهای جدید می‌نویسیم. برای این منظور محاسبات زیر به کار می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x \qquad \text{و} \qquad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\\
&u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

از جایگذاری در معادلهٔ (۵ ـ ۱) به‌دست می‌آوریم.

$$A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}+D^*u_\xi+E^*u_\eta+F^*u=G^*, \tag{۵ ـ ۴}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
A^*&=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,\\
B^*&=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y,\\
C^*&=A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2,\\
D^*&=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y,\\
E^*&=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y,\\
F^*&=F \qquad \text{و} \qquad G^*=G.
\end{aligned}$$

چون $\xi=\phi(x,y)$، پس $\xi_x+\xi_y\dfrac{dy}{dx}=0$ یا $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\xi_x}{\xi_y}$ بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$A^*=\xi_y^2\Big[A\Big(\frac{\xi_x}{\xi_y}\Big)^2+B\frac{\xi_x}{\xi_y}+C\Big]=\xi_y^2\Big[A\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2-B\frac{dy}{dx}+C\Big]=0.$$

به‌طور مشابه $C^*=0$ و معادلهٔ (۵ ـ ۱) برحسب متغیرهای جدید ξ و η به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$B^* u_{\xi\eta} = H^*$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{H^*}{B^*} = H_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad (۵ـ۵)$$

تعریف ۵ ـ ۳. معادلهٔ (۵ ـ ۵) را شکل کانونیک نوع اول معادلهٔ هذلولوی گویند.

حال اگر متغیرهای مستقل جدید را به‌صورت زیر بگیریم.

$$\alpha = \xi + \eta \quad \text{و} \quad \beta = \xi - \eta$$

در این‌صورت:

$$u_\xi = u_\alpha + u_\beta \quad \text{و} \quad u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}$$

معادلهٔ (۵ ـ ۵) برحسب متغیرهای جدید α و β به‌صورت زیر در می‌آید.

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \qquad (۶ـ۵)$$

تعریف ۵ ـ ۴. معادلهٔ (۵ ـ ۶) را شکل کانونیک نوع دوم معادلهٔ هذلولوی گویند.

تذکر ۵ ـ ۵. چنانچه $A \equiv 0$ و $C \neq 0$ باشد معادلهٔ مشخصه را به‌صورت

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - B\frac{dx}{dy} = 0,$$

در نظر می‌گیریم. چنانچه $A \equiv 0$ و $C \equiv 0$ در این صورت معادله هذلولوی و به‌صورت کانونیک نوع اول هذلولوی است. در حالت $A \equiv 0$ و $C \neq 0$ منحنی‌های مشخصه به شکل زیر در می‌آید.

$$\phi(x,y) = C_1 \quad \text{و} \quad \psi(x,y) = x = C_2.$$

همچنین متغیرهای جدید را به‌صورت $\eta = x$ و $\xi = \phi(x,y)$ داریم.

حالت ۲: معادلهٔ (۵ ـ ۱) سهموی یا $\Delta = 0$.

در این صورت معادلهٔ مشخصهٔ (۵ ـ ۲) به‌صورت $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$ ظاهر می‌گردد. پس فقط یک دسته منحنی مشخصهٔ $\phi(x,y) = C$ را داریم. متغیرهای جدید را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$\xi = \phi(x,y) \quad \text{و} \quad \eta = x.$$

برای η هر متغیر مستقل از ξ می‌توان انتخاب کرد. چنانچه A^* و B^* را محاسبه کنیم:

$$
\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0,\\
B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y\\
&= 2\left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

که در هر دو از خاصیت سهموی بودن یعنی $B^2 - 4AC = 0$ و تساوی $\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y = 0$ استفاده شده است. برای دیدن این تساوی، از تعریف ξ داریم، $\xi_x + \xi_y \dfrac{dy}{dx} = 0$ پس:

$$\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y = \sqrt{A}\left(-\xi_y \frac{B}{2A}\right) + \sqrt{C}\xi_y = \sqrt{A}\left(-\xi_y \frac{2\sqrt{AC}}{2A} + \sqrt{C}\xi_y\right) = 0.$$

با قرار دادن این مقادیر و تقسیم آن بر C^* به‌دست می آوریم.

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{۵ ـ ۷}$$

تعریف۵ ـ ٦. معادلهٔ (۵ ـ ۷) را شکل کانونیک معادلات سهموی گویند.

تذکر۵ ـ ۷. اگر در یک معادلهٔ سهموی داشته باشیم، $A \equiv 0$ آنگاه $B \equiv 0$ و $C \neq 0$. یعنی در این حالت معادله به‌فرم کانونیک معادلات سهموی است.

حالت ۳: معادلهٔ (۵ ـ ۱) بیضوی یا $\Delta < 0$.

در این حالت معادلهٔ مشخصه دارای جواب حقیقی نخواهد بود، یعنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\phi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = C_1 \quad \text{و} \quad \psi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = C_2$$

اگر معادلهٔ (۵ ـ ۱) برحسب متغیرهای حقیقی $\alpha = \alpha(x,y)$ و $\beta = \beta(x,y)$ بازنویسی شود، به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \tag{۵ ـ ۸}$$

تعریف۵ ـ ۸. معادلهٔ (۵ ـ ۸) را شکل کانونیک معادلهٔ بیضوی خوانند.

تذکر۵ ـ ۹. معادلهٔ موج یک بعدی به شکل کانونیک نوع دوم هذلولوی، معادلهٔ انتقال حرارت به شکل کانونیک سهموی و معادلهٔ لاپلاس به شکل کانونیک بیضوی است.

تذکر۵ ـ ۱۰. معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی ممکن است در دامنه‌های متفاوت دارای شکل کانونیک متفاوت باشد. برای مثال معادلهٔ $u_{xx} + xu_{yy} = ۰$ در $x > ۰$ بیضوی و در $x < ۰$، هذلولوی است.

تذکر۵ ـ ۱۱. مختصات (ξ, η) را مختصات مشخصه گویند.

تذکر۵ ـ ۱۲. در حالتی‌که معادلهٔ (۵ ـ ۱) با ضرایب ثابت باشد، از معادلهٔ مشخصهٔ (۵ ـ ۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_۱ \qquad \text{و} \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_۲$$

یا:

$$\phi(x, y) = y - \lambda_۱ x = C_۱ \qquad \text{و} \qquad \psi(x, y) = y - \lambda_۲ x = C_۲$$

یعنی در این حالت تغییر متغیرهای $\xi = y - \lambda_۱ x$ و $\eta = y - \lambda_۲ x$ و درنتیجه α و β خطی‌اند.

مثال۵ ـ ۱. نوع معادلهٔ $۴u_{xx} + ۵u_{xy} + u_{yy} + ۲u_x + u = xy$ را معین و آن را به شکل کانونیک بنویسید.

حل. چون $\Delta = ۵^۲ - ۱۶ = ۹ > ۰$ پس معادلهٔ هذلولوی است. معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$۴\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - ۵\frac{dy}{dx} + ۱ = ۰$$

پس $\frac{dy}{dx} = ۱$ و $\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۴}$. درنتیجه منحنی‌های مشخصه به‌صورت زیر هستند.

$$\phi(x, y) = y - x = C_۱ \qquad \text{و} \qquad \psi(x, y) = ۴y - x = C_۲$$

$$\xi = y - x \qquad \text{و} \qquad \eta = ۴y - x$$

حال معادله را به‌صورت کانونیک می‌نویسیم. $\eta_y = ۴$، $\xi_y = ۱$، $\eta_x = -۱$ و $\xi_x = -۱$.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi - u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + ۴u_\eta$$

$$u_{xx} = -(u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi})\xi_x - (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\eta_x = u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = -(u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi})\xi_y - (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\eta_y = -u_{\xi\xi} - ۵u_{\xi\eta} - ۴u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (u_{\xi\xi} + ۴u_{\eta\xi})\xi_y + (u_{\xi\eta} + ۴u_{\eta\eta})\eta_y = u_{\xi\xi} + ۸u_{\xi\eta} + ۱۶u_{\eta\eta}.$$

از قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ فوق به شکل کانونیک نوع اول هذلولوی می‌رسیم.

$$-۹u_{\xi\eta} - ۲u_{\xi} - ۲u_{\eta} + u = \frac{۱}{۹}(\eta - \xi)(\eta - ۴\xi)$$

یا

$$u_{\xi\eta} = \frac{۱}{۹}(u - ۲u_{\xi} - ۲u_{\eta}) - \frac{۱}{۸۱}(\eta - \xi)(\eta - ۴\xi).$$

مثال۵ ـ ۲. نوع معادلهٔ $x^۲u_{xx} + ۲xyu_{xy} + y^۲u_{yy} + u_y = x^۲ + y^۲$ را معین و سپس آن را به شکل کانونیک در آورید.

حل. داریم

$$\Delta = B^۲ - ۴AC = ۴x^۲y^۲ - ۴x^۲y^۲ = ۰$$

پس معادلهٔ سهموی است. معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$x^۲\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - ۲xy\frac{dy}{dx} + y^۲ = ۰$$

درنتیجه $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ یا $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ یا $\ln\left|\frac{y}{x}\right| = C$ یا $\frac{y}{x} = C_۱$. به این ترتیب متغیرهای جدید به‌صورت زیر به‌دست می آیند.

$$\xi = \frac{y}{x} \qquad \text{و} \qquad \eta = x$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\frac{y}{x^۲}u_\xi + u_\eta,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{۱}{x}u_\xi,\\
u_{xx} &= \frac{۲y}{x^۳}u_\xi + \frac{y^۲}{x^۴}u_{\xi\xi} - \frac{۲y}{x^۲}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\
u_{xy} &= -\frac{۱}{x^۲}u_\xi - \frac{y}{x^۳}u_{\xi\xi} + \frac{۱}{x}u_{\xi\eta},\\
u_{yy} &= \frac{۱}{x^۲}u_{\xi\xi},
\end{aligned}$$

از قرار دادن آنها در معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می آوریم:

$$\eta^۲u_{\eta\eta} + \frac{۱}{\eta}u_\xi = \eta^۲ + \xi^۲\eta^۲,$$

یا

$$u_{\eta\eta} = -\frac{۱}{\eta^۳}u_\xi + ۱ + \xi^۲$$

مثال ۵ ـ ۳. معادلهٔ $u_{xx} + ۴x^۲u_{yy} + u_y = x^۲ + y^۲$ را به شکل کانونیک در آورید.

حل. معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ + ۴x^۲ = ۰$$

پس $\frac{dy}{dx} = ۲ix$ و $\frac{dy}{dx} = -۲ix$. درنتیجه:

$$\phi(x,y) = y + ix^۲ = C_۱ \qquad \text{و} \qquad \psi(x,y) = y - ix^۲ = C_۲$$

$$\xi = y + ix^۲ \qquad \text{و} \qquad \eta = y - ix^۲$$

به این ترتیب

$$\alpha = y \qquad \text{و} \qquad \beta = x^۲$$

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = ۲xu_\beta,$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha,$$

$$u_{xx} = ۲u_\beta + ۴x^۲u_{\beta\beta},$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y = u_{\alpha\alpha},$$

از جایگذاری آنها در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{۱}{۴\beta}(-u_\alpha + \beta + \alpha^۲).$$

تمرین ۵ ـ ۱

۱. ناحیه‌هایی را که هر یک از معادلات زیر در آنها از نوع هذلولوی، سهموی و یا بیضوی‌اند معین کنید.

الف) $xu_{xx} + u_{yy} + u_x - u = x^۲$ ‏ ‏ ب) $u_{xx} + y^۲u_{yy} + u_y + xu = y^۲$

پ) $u_{xx} + xyu_{xy} + u_{yy} + u = x^۲$ ‏ ‏ ت) $x^۲u_{xx} - ۲xyu_{xy} + y^۲u_{yy} = e^x$

ث) $e^xu_{xx} + u_{xy} + e^yu_{yy} = x + y$ ‏ ‏ ج) $u_{xx} - yu_{xy} + yu_y + u = x\sin y$

۲. منحنی مشخصه و مختصات مشخصه را برای هر یک از معادلات زیر بیابید، سپس آن را به شکل کانونیک در آورید.

الف) $u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+4u_x+5u_y+u=e^x$ ب) $2u_{xx}-4u_{xy}+2u_{yy}+3u=xy$

پ) $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}+7u_y=\sin x$ ت) $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-8u_x=x$

ث) $u_{xy}+2u_{yy}+9u_x+u_y+u=2x$ ج) $6u_{xx}-u_{xy}+u=y^2$

چ) $u_{xy}+u_x+u_y=3x$ ح) $u_{yy}-9u_x+7u_y=\cos y$

۳. هر یک از معادلات زیر را به شکل کانونیک در آورید.

الف) $u_{xx}+y^2u_{yy}+u_x-u_y+u=xy$

ب) $yu_{xx}-yu_{yy}-2u_y+u_x=x^2y^2$

پ) $x^2u_{xx}+4xyu_{xy}+u_{yy}+u_x-u=x^2$

ت) $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xyu_x+y^2u_y=0$

ث) $\sin^2 xu_{xx}+\sin 2xu_{xy}+\cos^2 xu_{yy}=0$

ج) $e^xu_{xx}-e^yu_{yy}+u=xe^{x+y}$

۵ ـ ۲ جواب عمومی مسئلهٔ کوشی و مسئلهٔ گورسا

همان‌طوری‌که قبلاً بیان کردیم تعیین جواب عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی در حالت کلی مقدور نیست، حتی اگر آن معادلهٔ خطی باشد. لیکن جواب عمومی دو نوع خاص از اشکال کانونیک معادلات دیفرانسیل جزئی خطی با تغییر تابع مجهول و تبدیل معادلهٔ جزئی به معادلهٔ دیفرانسیل عادی قابل‌حل هستند. نظر به اینکه دالامبر اولین حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را با این روش انجام داد، این را روش دالامبر گوییم.

نوع اول قابل‌حل: فرض کنید در شکل کانونیک نوع اول هذلولی:

$$u_{\xi\eta}=H_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

عبارات u و u_ξ یا u و u_η در H_1 ظاهر نشده باشد، یعنی:

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\xi) \qquad \text{یا} \qquad u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\eta) \qquad (۵ ـ ۹)$$

برای حل معادلهٔ سمت راست می‌گیریم $v = u_\eta$ و معادله تبدیل می‌شود به $v_\xi = H_1(\xi, \eta, v)$.
برای حل معادلهٔ سمت چپ می‌گیریم $v = u_\xi$ و معادله تبدیل می‌شود به $v_\eta = H_1(\xi, \eta, v)$.

نظر به اینکه در معادلهٔ $v_\xi = H_1(\xi, \eta, v)$ متغیر مستقل η به‌عنوان پارامتر ظاهر شده است و فقط ξ متغیر معادلهٔ دیفرانسیل است، پس این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی با تابع مجهول v و متغیر مستقل η است. از حل آن v برحسب ξ قابل تعیین است و ثابت جواب عمومی معادله وابسته به پارامتر η خواهد شد. چون $v = u_\eta$، با قرار دادن v به‌دست آمده در این معادله و انتگرال‌گیری نسبت به η جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یعنی u برحسب ξ و η به‌دست می‌آید. از قرار دادن مقادیر ξ و η برحسب x و y جواب مسئلهٔ اولیه برحسب x و y حاصل می‌گردد. چون جواب اخیر حاوی کلیهٔ جواب‌های معادلهٔ اولیه است، آن را به‌عنوان جواب عمومی منظور می‌نمایند. جواب عمومی $u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\xi)$ به‌طور مشابه قابل حصول است.

نوع دوم قابل‌حل: فرض کنید در شکل کانونیک سهموی:

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

مشتق u_ξ به‌صورت صریح در H_3 ظاهر نشده باشد، یعنی داشته باشیم:

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\eta) \qquad (۵ ـ ۱۰)$$

در این معادله ξ به‌عنوان پارامتر ظاهر شده است و متغیر مستقل معادله η است. لذا با یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی مرتبهٔ دوم مواجه هستیم.

تذکر ۵ ـ ۱۳. نظر به اینکه تغییر متغیرها خطی بودن معادله را حفظ می‌کند، معادلات (۵ ـ ۱۰) و (۵ ـ ۹) خطی‌اند. لذا حل آنها برای جواب عمومی مقدور است. به‌خصوص در حالتی‌که معادله برحسب x و y خطی با ضرایب ثابت باشد، شکل کانونیک آنها نیز خطی و با ضرایب ثابت است.

مثال ۵ ـ ۴. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y = 3x - 2y$$

حل. ابتدا معادله را به‌صورت کانونیک در می‌آوریم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} - ۳\frac{dy}{dx} + ۲ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = ۱, \text{ و } \frac{dy}{dx} = ۲$$

پس $\phi(x,y) = y - x = C_۱$، $\psi(x,y) = y - ۲x = C_۲$ و درنتیجه $\xi = y - x$، $\eta = y - ۲x$.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi - ۲u_\eta$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + ۴u_{\xi\eta} + ۴u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - ۳u_{\xi\eta} - ۲u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

از قرار دادن آنها در معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم:

$$-u_{\xi\eta} + u_\xi = ۳x - ۲y = -\xi - \eta$$

در این معادله u و u_η وجود ندارد و می‌توان جواب عمومی آن را به‌دست آورید. برای این منظور می‌گیریم $v = u_\xi$ و به‌دست می‌آوریم، $v_\eta - v = \eta + \xi$. جواب عمومی این معادلهٔ مرتبهٔ اول عبارت است از:

$$v = C(\xi)e^{\eta} - \eta - \xi - ۱,$$

پس

$$u(\xi,\eta) = \phi(\xi)e^{\eta} - (\eta + ۱)\xi - \frac{۱}{۲}\xi^{۲} + \psi(\eta)$$

توجه کنید $\phi(\xi)$ تابع اولیهٔ $C(\xi)$ و $\psi(\eta)$ ثابت انتگرال نسبت به ξ است. جواب نهایی را برحسب x و y به‌صورت زیر داریم.

$$u(x,y) = \phi(y-x)e^{y-۲x} + \psi(y-۲x) - (y - ۲x + ۱)(y - x) - \frac{۱}{۲}(y-x)^{۲}.$$

در این جواب عمومی ϕ و ψ توابع اختیاری‌اند که باید دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته باشند.

مثال۵ ـ ۵. مطلوب است تعیین جواب عمومی معادلهٔ

$$u_{xx} + ۲u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = ۲y$$

حل. معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - ۲\frac{dy}{dx} + ۱ = ۰$$

پس $\frac{dy}{dx} = ۱$ و $\phi(x,y) = y - x = C_۱$. یعنی معادلهٔ سهموی است.

$$\xi = y - x \quad \text{و} \quad \eta = x$$

$$u_x = -u_\xi + u_\eta \quad \text{و} \quad u_y = u_\xi$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

از قرار دادن آنها در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$u_{\eta\eta} + u_\eta + u = ۲(\xi + \eta)$$

برای این معادلهٔ دیفرانسیل عادی معادلهٔ مشخصه عبارت است از $r^۲ + r + ۱ = ۰$ و $r = -\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$. درنتیجه جواب عمومی آن عبارت است از:

$$u(\xi,\eta) = \left(\phi(\xi)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}\eta + \psi(\xi)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}\eta\right)e^{-\frac{۱}{۲}\eta} + ۲(\xi+\eta) - ۲$$

درنتیجه:

$$u(x,y) = \left(\phi(y-x)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \psi(y-x)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right)e^{-\frac{۱}{۲}x} + ۲y - ۲$$

تذکر۵ ـ ۱۴. معادلات از نوع (۵ ـ ۱۰) به‌صورت طبیعی ظاهر نمی‌شوند. ولی معادلات از نوع (۵ ـ ۹) در مسائل فراوانی ظاهر می‌شوند. معمولاً اینگونه معادلات همراه با یکی از دو شرط زیر هستند.

مسئلهٔ کوشی: چنانچه همراه با معادلهٔ هذلولوی مقدار تابع مجهول و مشتق مرتبهٔ اول آن نسبت به یک متغیر مثلاً x، در $x = x_۰$ داده شده باشد. این شرط همراه را شرط کوشی و مسئله را مسئلهٔ کوشی گویند. مسئلهٔ کوشی نسبت به زمان را مسئله با شرط اولیه نیز می‌گویند.

مسئلهٔ گورسا: این مسئله یک معادلهٔ هذلولوی است که مقدار تابع مجهول روی یکی از منحنی‌های مشخصهٔ معادله و همچنین روی یک منحنی صعودی دیگر داده شده است.

درمثال‌های زیر نشان داده شده است که چگونه به کمک این شرایط می‌توان به جواب خصوصی مسئله رسید.

مثال۵ ـ ٦. مطلوب است حل مسئلهٔ کوشی زیر:

$$4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=2$$
$$u(0,y)=y^2 \qquad \text{و} \qquad u_x(0,y)=y$$

حل. از حل معادلهٔ مشخصهٔ $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\frac{dy}{dx}+1=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx}=1 \qquad \text{و} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}$$

درنتیجه:

$$\phi(x,y)=y-x=C_1 \qquad \text{و} \qquad \psi(x,y)=y-\frac{x}{4}=C_2$$

و:

$$\xi=y-x \qquad \text{و} \qquad \eta=y-\frac{x}{4}$$
$$u_x=-u_\xi-\frac{1}{4}u_\eta \qquad \text{و} \qquad u_y=u_\xi+u_\eta,$$
$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+\frac{1}{2}u_{\xi\eta}+\frac{1}{16}u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy}=-u_{\xi\xi}-\frac{5}{4}u_{\xi\eta}-\frac{1}{4}u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$

از قرار دادن آنها در معادلهٔ فوق به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{9}{4}u_{\xi\eta}+\frac{3}{4}u_\eta=2$$

یا

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_\eta=-\frac{8}{9}.$$

حال می‌گیریم $v=u_\eta$. درنتیجه:

$$v_\xi-\frac{1}{3}v=-\frac{8}{9}$$
$$v=C(\eta)e^{\frac{1}{3}\xi}+\frac{8}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad u(\xi,\eta)=\phi(\eta)e^{\frac{1}{3}\xi}+\frac{8}{3}\eta+\psi(\xi)$$

بالاخره،

$$u(x,y)=\phi\Big(y-\frac{1}{4}x\Big)e^{\frac{1}{3}(y-x)}+\frac{8}{3}\Big(y-\frac{x}{4}\Big)+\psi(y-x)$$

حال شرایط کوشی را اعمال کنیم:

$$u(0,y) = \phi(y)e^{\frac{1}{3}y} + \frac{8}{3}y + \psi(y) = y^2,$$
$$u_x(0,y) = -\frac{1}{4}\phi'(y)e^{\frac{1}{3}y} - \frac{1}{3}\phi(y)e^{\frac{1}{3}y} - \frac{2}{3} - \psi'(y) = y.$$

حال از معادلهٔ اول مشتق بگیرید و با معادلهٔ دوم جمع کنید تا به‌دست آورید:

$$\frac{3}{4}\phi'(y)e^{\frac{1}{3}y} + 2 = 3y,$$

یا:

$$\phi'(y) = (4y - \frac{8}{3})e^{-\frac{1}{3}y},$$

یا:

$$\phi(y) = -(12y + 28)e^{-\frac{1}{3}y} + C.$$

درنتیجه:

$$\psi(y) = y^2 + \frac{28}{3}y - Ce^{\frac{1}{3}y} + 28,$$

و سرانجام:

$$u(x,y) = -(12y - 3x + 28)e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + (y-x)^2 + \frac{28}{3}(y-x) + 28$$

مثال ۵ ـ ۷. مسئلهٔ گورسای زیر را حل کنید.

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x - u_y = x^2 - y^2$$
$$u(x,y) = \sin 2x \qquad \text{روی } y - x = 0$$
$$u(x,y) = y\cos y \qquad \text{روی } y = 2x$$

حل. معادلهٔ مشخصه عبارت است از $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$ یا $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ درنتیجه:

$$\phi(x,y) = y - x = C_1 \qquad \text{و} \qquad \psi(x,y) = y + x = C_2$$

و

$$\xi = y - x \qquad \text{و} \qquad \eta = y + x$$

درنتیجه:

$$u_x = -u_\xi + u_\eta \quad \text{و} \quad u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \quad \text{و} \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

از قرار دادن آنها در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$-۴u_{\xi\eta} - ۲u_\xi = \xi\eta$$

یا:

$$u_{\xi\eta} + \frac{۱}{۲}u_\xi = -\frac{۱}{۴}\xi\eta$$

حال بگیرید $v = u_\xi$، درنتیجه:

$$v_\eta + \frac{۱}{۲}v = -\frac{۱}{۴}\xi\eta$$

پس:

$$v = C(\xi)e^{-\frac{۱}{۲}\eta} - \frac{۱}{۲}\xi\eta + \xi \quad \Longrightarrow \quad u(\xi,\eta) = \phi(\xi)e^{-\frac{۱}{۲}\eta} - \frac{۱}{۴}\xi^۲\eta + \frac{۱}{۲}\xi^۲ + \psi(\eta)$$
$$u(x,y) = \phi(y-x)e^{-\frac{۱}{۲}(y+x)} - \frac{۱}{۴}(y-x)^۲(y+x) + \frac{۱}{۲}(y-x)^۲ + \psi(y+x).$$

با اعمال شرایط مسئله به‌دست می‌آوریم

$$u(x,x) = \phi(۰)e^{-x} + \psi(۲x) = \sin ۲x,$$
$$u(x,۲x) = \phi(x)e^{-\frac{۳}{۲}x} - \frac{۳}{۴}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \psi(۳x) = ۲x\cos ۲x.$$

از تساوی اول نتیجه می‌شود:

$$\psi(x) = \sin x - \phi(۰)e^{-\frac{۱}{۲}x}$$

و از تساوی دوم به‌دست می‌آید:

$$\phi(x) = \left(۲x\cos ۲x + \frac{۳}{۴}x^۳ - \frac{۱}{۲}x^۲ - \sin ۳x\right)e^{\frac{۳}{۲}x} + \phi(۰)$$

درنتیجه:

$$u(x,y) = \Big(۲(y-x)\cos ۲(y-x) + \frac{۳}{۴}(y-x)^۳ - \frac{۱}{۲}(y-x)^۲ - \sin ۳(y-x)\Big)e^{y-۲x}$$
$$-\frac{۱}{۴}(y-x)^۲(y+x-۲) + \sin(y+x).$$

مثال ۵ ـ ۸. یک مثال معروف از مسائل کوشی معادلهٔ موج یک بعدی همراه با شرایط اولیهٔ زیر است:

$$u_{tt} - c^{2}u_{xx} = 0 \qquad t \geq 0,\ -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x, 0) = g(x) \tag{۵ ـ ۱۱}$$

این معادله اولین معادلهٔ دیفرانسیل جزئی بود که حل شد. این کار توسط دالامبر و با استفاده از روش تغییر متغیر انجام گرفت. معادلهٔ مشخصهٔ این مسئله به‌صورت $\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2} - c^{2} = 0$ و جواب آن $\frac{dx}{dt} = c$ و $\frac{dx}{dt} = -c$ است، پس منحنی‌های مشخصه عبارت‌اند از:

$$x - ct = C_1 \quad \text{و} \quad x + ct = C_2$$

در نتیجه به کمک تغییر متغیرهای زیر شکل کانونیک معادله به‌دست می‌آید.

$$\xi = x - ct \quad \text{و} \quad \eta = x + ct$$

چنانچه معادلهٔ (۵ ـ ۱۱) را برحسب ξ و η بنویسیم، به‌دست می‌آوریم $-4c^{2}u_{\xi\eta} = 0$ یا

$$u_{\xi\eta} = 0$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت زیر است:

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

یا:

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

اکنون برای برقراری شرایط کوشی باید داشته باشیم:

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{۵ ـ ۱۲}$$

$$u_t(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x) \tag{۵ ـ ۱۳}$$

چنانچه از (۵ ـ ۱۳) انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\phi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{c}\int_{0}^{x} g(s)ds \tag{۵ ـ ۱۴}$$

از حل (۵ ـ ۱۲) و (۵ ـ ۱۴) برای $\phi(x)$ و $\psi(x)$ حاصل می‌گردد:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - \frac{A}{2}$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + \frac{A}{2}$$

پس جواب نهایی عبارت است از:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \qquad (5-15)$$

این جواب به جواب دالامبر معادلهٔ موج معروف است. در فصل بعد در مورد معادلهٔ موج و جواب دالامبر بیشتر صحبت خواهیم کرد.

تمرین ۵ ـ ۲

جواب عمومی معادلات ۱ و ۲ را بیابید.

۱. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$

۲. $yu_{xx} - yu_{yy} - 2u_y = x^2 + y^2$

جواب مسائل ۳ تا ۱۱ را به‌دست آورید.

۳. $xy^3u_{xx} - x^3yu_{yy} - y^3u_x + x^3u_y = x^4 - y^4$

برای $2 \le x \le 0$ روی $y^2 - x^2 = 8$ داشته باشیم: $u(x,y) = \sin \pi x$

برای $4 \le x \le 2$ روی $y^2 + x^2 = 16$ داشته باشیم: $u(x,y) = e^{x-2} - 1$

۴. $xy^3u_{xx} - x^3yu_{yy} - y^3u_x + x^3u_y = x^2 + y^2$

برای $4 \le x \le 0$ روی $x^2 + y^2 = 16$ داشته باشیم: $u(x,y) = x^2 + 1$

برای $4 \le y \le 2$ روی $x = 0$ داشته باشیم: $u(x,y) = e^{y-4}$

۵. $u_{xx} - u_{yy} = xy$

روی $x + y = 0$ داشته باشیم: $u(x,y) = -y^2$

روی $y = x^2$، داشته باشیم: $u(x,y) = x^2$

۶. $xu_{xx} - x^2 u_{yy} - u_x = 2y + x^2$

برای $2 \leq y \leq 0$ روی $y - \dfrac{x^2}{2} = 0$ داشته باشیم: $u(x,y) = y^2$

برای $4 \leq y \leq 2$ روی $y + \dfrac{x^2}{2} = 4$ داشته باشیم: $u(x,y) = 4\cos \pi y$

۷. $u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = x + y$

$u(x,0) = \sin x$ و $u_y(x,0) = \cos x.$

۸. $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2x + y$

$u(x,0) = x^2$ و $u_y(x,0) = x^4.$

۹. $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 2x - 3y$

$u(x,0) = x$ و $u_y(x,0) = \sin x.$

۱۰. $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = e^{x+y}$

$u(x,0) = e^x$ و $u_y(x,0) = x^2.$

۱۱. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad x >, y > 0$

$u(x,1) = x$ و $u_y(x,1) = x^2.$

۵ ـ ۳ روش تبدیلات انتگرالی

هدف از این بخش کاربرد تبدیلات فوریه و تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روی یک مکان بی‌کران است. روش حل مشابه با تبدیلات فوریهٔ متناهی است. به این ترتیب که نسبت به یک متغیر از مسئله تبدیل می‌گیریم. به این ترتیب آن متغیر به یک پارامتر تبدیل می‌شود با تکرار این عمل سرانجام به یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی خطی دست می‌یابیم که

حل آن به‌سادگی مقدور است. سرانجام با تبدیل معکوس جواب نهایی حاصل می‌گردد. مثال اول را با تبدیل لاپلاس شروع می‌کنیم.

مثال ۵ ـ ۹. مسئله با شرایط اولیه ـ مرزی زیر را حل کنید

$$\begin{aligned}
&w_{tt} - 4w_{xx} = e^{t-x}, \qquad x \geq 0,\ t \geq 0\\
&w(x,0) = 0 \quad \text{و} \quad w_t(x,0) = 0, \qquad x \geq 0\\
&w(0,t) = \sin t, \qquad \lim_{x\to\infty} w(x,t) = 0
\end{aligned}$$

حل. از مسئله نسبت به t تبدیل لاپلاس بگیرید و قرار دهید $\mathcal{L}w(x,t) = W(x,s) = W$.

$$\begin{aligned}
&s^2W - 4W_{xx} = \frac{e^{-x}}{s-1}\\
&W(0,s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = 0
\end{aligned}$$

جواب عمومی این معادله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$W(x,s) = C_1 e^{\frac{l}{d}ts2x} + C_2 e^{-\frac{s}{2}x} + \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}e^{-x}$$

برای برقراری $\lim_{x\to\infty} W(x,s) = 0$، باید داشته باشیم $C_1 = 0$ و برای برقراری $W(0,s) = \frac{1}{s^2+1}$، باید $C_2 = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}$. درنتیجه:

$$W(x,s) = \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}\right)e^{-\frac{s}{2}x} + \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}e^{-x}$$

حال اگر تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = &\left(\sin\left(t-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}e^{(t-\frac{x}{2})} - \frac{1}{4}e^{2(t-\frac{x}{2})} - \frac{1}{12}e^{-2(t-\frac{x}{2})}\right)u_{\frac{x}{2}}(t)\\
&+ \left(-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}\right)e^{-x}
\end{aligned}$$

مثال ۵ ـ ۱۰. مسئلهٔ زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{aligned}
&u_t = ku_{xx} + e^{-x+t}, \qquad x \geq 0,\ t \geq 0\\
&u(x,0) = e^{-x} \quad \text{و} \quad u(0,t) = e^{t}, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0.
\end{aligned}$$

حل. اگر نسبت به t تبدیل لاپلاس بگیریم و قرار دهیم $\mathcal{L}u(x,t) = U(x,s)$.

$$sU - e^{-x} = kU_{xx} + e^{-x}\frac{1}{s-1}, \qquad U(0,s) = \frac{1}{s-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0.$$

از حل معادله به‌دست می‌آوریم.

$$U(x,s) = C_۱ e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + C_۲ e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} + \left(\frac{۱}{s-۱} + ۱\right)\frac{۱}{s-k}e^{-x}$$
$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad C_۱ = ۰$$
$$U(۰,s) = \frac{۱}{s-۱} \quad \Longrightarrow \quad C_۲ = \frac{۱}{s-۱} - \left(\frac{۱}{s-۱} + ۱\right)\frac{۱}{s-k}$$

پس

$$U(x,s) = \left(\frac{۱}{s-۱} - \frac{۱}{s-k} - \frac{۱}{s-۱}\frac{۱}{s-k}\right)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} + \left(\frac{۱}{s-۱} + ۱\right)\frac{۱}{s-k}e^{-x}$$

یا

$$U(x,s) = \frac{k}{k-۱}\left(\frac{۱}{s-۱} - \frac{۱}{s-k}\right)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} + \left(\frac{-۱}{k-۱}\frac{۱}{s-۱} + \frac{k}{k-۱}\frac{۱}{s-k}\right)e^{-x}$$

اکنون برای رسیدن به جواب مسئله از فرمول تبدیل وارون زیر برای مقادیر $\alpha > ۰$، استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}^{-۱}\{e^{-\alpha\sqrt{s}}\} = \frac{\alpha}{۲\sqrt{\pi t^۳}}e^{-\frac{\alpha^۲}{۴t}} \qquad (۵ \_ ۱۶)$$

درنتیجه برای $x > ۰$، جواب به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = \frac{k}{k-۱}(e^t - e^{kt}) * \frac{x}{۲\sqrt{\pi k t^۳}}e^{-\frac{x^۲}{۴kt}} + \left(\frac{-۱}{k-۱}e^t + \frac{k}{k-۱}e^{kt}\right)e^{-x}$$

تذکر۵ ـ ۱۵. همانطور که در مثال فوق دیده می‌شود، استفاده از تبدیل لاپلاس منجر به محاسبهٔ پیچیدهٔ وارون تبدیل لاپلاس مانند رابطهٔ (۵ ـ ۱۶) می‌شود. در زیر همین مثال را با استفاده از تبدیل فوریهٔ نامتناهی سینوسی حل می‌کنیم. هر چند کاربرد این تبدیل نیز منجر به محاسبهٔ انتگرال‌های پیچیده‌ای می‌شود که با استفاده از نظریهٔ مانده‌ها قابل محاسبه است. با این حال پیچیدگی محاسبهٔ تبدیل وارون ضعف مشترک روش تبدیلات است که در اکثر مسائل دیده می‌شود.

مثال۵ ـ ۱۱. برای حل مسئلهٔ مثال قبل، تبدیل فوریهٔ سینوسی نامتناهی مناسب است. با تبدیل سینوسی نامتناهی گرفتن از مسئله به‌دست می‌آوریم.

$$U_t + kw^۲U = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}(wke^t + \frac{e^t w}{۱+w^۲})$$
$$U(w,۰) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{w}{۱+w^۲}$$

جواب این مسئله به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$U(w,t) = -\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big(\frac{kw}{۱+kw^۲} + \frac{w}{(۱+kw^۲)(۱+w^۲)} - \frac{w}{۱+w^۲}\Big)e^{-kw^۲t}$$
$$+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big(\frac{kw}{۱+kw^۲} + \frac{w}{(۱+kw^۲)(۱+w^۲)}\Big)e^{t}$$

پس جواب نهایی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$u(x,t) = -\frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty\Big(\frac{kw}{۱+kw^۲} + \frac{w}{(۱+kw^۲)(۱+w^۲)} - \frac{w}{۱+w^۲}\Big)e^{-kw^۲t}\sin wx dw$$
$$+\frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty\Big(\frac{kw}{۱+kw^۲} + \frac{w}{(۱+kw^۲)(۱+w^۲)}\Big)e^{t}\sin wx dw$$

تذکر۵ ـ ۱۶. توجه کنید که از هر تبدیلی در هر مسئله‌ای نمی توان استفاده کرد. برای مثال تبدیلات فوریهٔ سینوسی و کسینوسی در مسائلی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند که معادله فاقد مشتق مرتبهٔ فرد نسبت به متغیری باشد که تبدیل فوریه نسبت به آن متغیر گرفته شده است. به‌علاوه، برای تبدیل سینوسی باید مقدار تابع مجهول به‌ازای متغیر مورد نظر در نقطهٔ صفر مشخص باشد. همچنین برای استفاده از تبدیل فوریهٔ کسینوسی باید مقدار مشتق تابع مجهول در نقطهٔ صفر داده شده باشد. در مثال ۵ ـ ۹ می‌توان از تبدیل فوریهٔ سینوسی نسبت به متغیر x استفاده کرد. همچنین داده‌های مسئله برای به کار بردن هر دو تبدیل سینوسی و کسینوسی نسبت به متغیر t کافی است، منتها مشکل دیگری سر راه کاربرد این دو تبدیل وجود دارد. نکتهٔ دیگری که باید توجه کرد این است که باید تبدیل توابع درگیر در مسئله وجود داشته باشند. در همین مثال ۵ ـ ۹ وجود جملهٔ e^{t-x} در عبارت ناهمگن معادله استفاده از تبدیلات فوریهٔ سینوسی و کسینوسی را غیر ممکن می‌کند. زیرا نمی‌توان تبدیل فوریهٔ این عبارت را نسبت به متغیر t به‌دست آورد. همچنین جملهٔ $\sin t$ در شرایط اولیهٔ مسئله، مشکل مشابهی دارد. نکتهٔ قابل توجه در استفاده از تبدیلات انتگرالی این است که همیشه به جوابی می‌رسیم که تبدیل آن وجود دارد و ممکن است مسئله جواب‌های دیگری هم داشته باشد که در این روش نتوانیم آنها را پیدا کنیم.

مثال۵ ـ ۱۲. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_t = c^۲u_{xx} + bu_{xxt} + te^{-۲x}, \qquad x \geq ۰,\ t \geq ۰$$
$$u(x,۰) = e^{-x} \quad \text{و} \quad u_x(۰,t) = t, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,۰) = ۰$$

حل. جملات این معادله همگی نسبت به متغیر x از مرتبهٔ زوج هستند. همچنین شرط مرزی مسئله که مشتق تابع را مشخص می‌کند، نشان می‌دهد که در این مسئله می‌توان از تبدیل

فوریهٔ کسینوسی استفاده کرد. قراردهید $U(w,t)=\mathcal{F}_c\{u(x,t)\}$:

$$U_t = c^۲\Big(-w^۲U-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}t\Big)+b\frac{d}{dt}\Big(-w^۲U-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}t\Big)+t\frac{۲}{w^۲+۴}$$
$$U(w,\circ)=\frac{۱}{w^۲+۱}.$$

جواب این مسئله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$U(w,t)=\Big(۱-e^{-\frac{c^۲w^۲}{۱+bw^۲}t}\Big)\frac{۱}{c^۲w^۲}\Big[\sqrt{\frac{۲}{\pi}}+\frac{۱+bw^۲}{c^۲w^۲}\Big(\frac{۲}{w^۲+۴}-c^۲\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big)\Big]$$
$$+\frac{۱}{w^۲+۱}e^{-\frac{c^۲w^۲}{۱+bw^۲}t}+\frac{۱}{c^۲w^۲}\Big(\frac{۲}{w^۲+۴}-c^۲\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\Big)t$$

بدین ترتیب جواب نهایی حاصل می‌گردد.

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_\circ^\infty U(w,t)\cos wx\,dw$$

تذکر۵ ـ ۱۷. محاسبهٔ انتگرال فوق با نظریه مانده‌ها مقدور است. چنانچه از تبدیل لاپلاس در حل مثال فوق استفاده کنیم باید $\mathcal{L}^{-۱}\Big\{e^{-x\sqrt{\frac{s}{bs+c^۲}}}\Big\}$ را محاسبه کنیم.

مثال۵ ـ ۱۳. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_{xx}+u_{yy}=\circ,\qquad -\infty<x<\infty,\ y>\circ$$
$$u(x,\circ)=f(x),\qquad \lim_{|x|\to\infty}u(x,y)=\circ,\qquad \lim_{y\to\infty}u(x,y)=\circ.$$

حل. اگر از مسئله نسبت به متغیر x تبدیل فوریهٔ نامتناهی بگیریم و$U(w,y)$ تبدیل فوریهٔ $u(x,y)$ باشد، به‌دست می‌آوریم.

$$U_{yy}-w^۲U=\circ$$
$$U(w,\circ)=\mathcal{F}(f)=F(w),\qquad \lim_{y\to\infty}U(w,y)=\circ,$$

جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$U(w,y)=A(w)e^{|w|y}+B(w)e^{-|w|y}$$

برای برقراری شرط $\lim_{y\to\infty}U(w,y)=\circ$، باید داشته باشیم $A(w)=\circ$ و برای برقراری $U(w,\circ)=F(w)$ باید داشته باشیم $B(w)=F(w)$. پس:

$$U(w,y)=F(w)e^{-|w|y}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(w)) = f(x)$$

و

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|w|y}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+x^2}$$

درنتیجه:

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x) * \frac{y}{y^2+x^2}$$

یا

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)y}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi$$

همانطور که در تذکر ۵ ـ ۱۶ اشاره شد، شرایط مرزی مسئله محدودیتی در استفاده از تبدیلات سینوسی و کسینوسی اعمال می‌کند. چنانچه مسئله در دامنهٔ $0 \le x < \infty$ تعریف شده باشد و شرط مرزی در $x = 0$ به‌صورت

$$\alpha u(0,\cdot) + \beta u_x(0,\cdot) = g$$

باشد، که $\alpha\beta \neq 0$، آنگاه هیچ‌کدام از این دو تبدیل مفید نخواهند بود. در این حالت باید تبدیل فوریهٔ مناسب مسئله را بسازیم. به همین منظور مسئلهٔ اشترم ـ لیوویل تکین مسئله را برای متغیر x روی میدان $x \ge 0$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید این مسئله به‌صورت زیر باشد:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0) - hX(0) = 0, \qquad$$ h ثابت حقیقی مثبت

در این‌صورت تبدیل زیر برای حل این مسئله مناسب است.

تعریف ۵ ـ ۱۸. برای تابع f قطعه به قطعه پیوسته و انتگرال‌پذیر به قلمرو $[0,\infty)$ که $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$، تابع

$$\mathcal{F}(f) = F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)(w\cos wx + h\sin wx)dx$$

تبدیل فوریهٔ تعمیم یافته f نامیده می‌شود.

قضیه۵ ـ ۱۹. *فرض کنید f به قلمرو $[\circ, \infty)$ دارای مشتق مرتبهٔ اول پیوسته و مشتق مرتبهٔ دوم قطعه به قطعه پیوسته و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \circ$. آنگاه برای مقادیر مثبت h،*

$$\mathcal{F}(f'') = -w^{\text{۲}}\mathcal{F}(f) - \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}w\big(f'(\circ) - hf(\circ)\big)$$

و

$$f(x) = \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty F(w)\frac{w\cos wx + h\sin wx}{h^{\text{۲}} + w^{\text{۲}}}dw$$

برهان. طبق تعریف $\mathcal{F}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f'') &= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty f''(x)(w\cos wx + h\sin wx)dx \\
&= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\Big[f'(x)(w\cos wx + h\sin wx)\Big|_\circ^\infty\Big] \\
&\quad - \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty f'(x)(-w^{\text{۲}}\sin wx + wh\cos wx)dx \\
&= -\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}wf'(\circ) - \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\Big[f(x)(-w^{\text{۲}}\sin wx + wh\cos wx)\Big|_\circ^\infty\Big] \\
&\quad - w^{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty f(x)(w\cos wx + h\sin wx)dx \\
&= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}w\big(hf(\circ) - f'(\circ)\big) - w^{\text{۲}}\mathcal{F}(f).
\end{aligned}$$

برای اثبات فرمول تبدیل معکوس قرار دهید $p(x) = hf(x) - f'(x)$. در این‌صورت تبدیل فوریهٔ سینوسی نامتناهی $p(x)$ برابر $F(w)$ است. چون:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s(p) &= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty p(x)\sin wx dx = \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty \big(hf(x) - f'(x)\big)\sin wx dx \\
&= \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty f(x)\big(w\cos wx + h\sin wx\big)dx - \sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}f(x)\sin wx\Big|_\circ^\infty \\
&= F(w)
\end{aligned}$$

از حل معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول $f'(x) - hf(x) = -p(x)$ برای $h > \circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
f(x)e^{-hx} &= \int_x^\infty p(s)e^{-hs}ds \\
&= \int_x^\infty \Big(\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\int_\circ^\infty F(w)\sin ws dw\Big)e^{-hs}ds
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(w) \Big(\int_x^\infty \sin ws e^{-hs} ds \Big) dw$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(w) e^{-hx} \frac{w \cos wx + h \sin wx}{w^2 + h^2} dw$$

یا

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(w) \frac{w \cos wx + h \sin wx}{w^2 + h^2} dw$$

■

مثال ۵ ـ ۱۴. مطلوب است حل مسئلهٔ انتقال حرارت زیر:

$$u_t = u_{xx} + te^{-x} \qquad t \geq 0,\ x \geq 0$$
$$u(x, 0) = e^{-x} \quad \text{و} \quad u(0, t) - u_x(0, t) = t$$

حل. تبدیل مطلوب فوریهٔ تعمیم یافته برای متغیر x به‌صورت زیر است.

$$\mathcal{F}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)(w \cos wx + \sin wx) dx$$

اگر $U(w,t) = \mathcal{F}(u(x,t))$ باشد. با تبدیل گرفتن از مسئله به‌دست می‌آوریم:

$$U_t + w^2 U = \sqrt{\frac{2}{\pi}} wt + t\mathcal{F}(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (w + \frac{2w}{1 + w^2}) t$$
$$U(w, 0) = \mathcal{F}(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2w}{1 + w^2}$$

از حل این مسئله به‌دست می‌آوریم:

$$U(w,t) = \Big[\frac{2w}{1 + w^2} + \frac{1}{w^4}(w + \frac{2w}{1 + w^2})\Big] \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-w^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2}(w + \frac{2w}{1 + w^2})(t - \frac{1}{w^2})$$

به این ترتیب جواب به‌صورت انتگرال زیر ظاهر می‌شود.

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Big(\Big[\frac{2w}{1 + w^2} + \frac{1}{w^4}(w + \frac{2w}{1 + w^2})\Big] e^{-w^2 t} + \frac{1}{w^2}(w + \frac{2w}{1 + w^2})(t - \frac{1}{w^2}) \Big) \frac{w \cos wx + \sin wx}{1 + w^2} dw.$$

تمرین ۵ ـ ۳

مسائل زیر را به کمک تبدیل انتگرالی مناسب حل کنید.

۱. $u_t = u_{xx} + tu, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$

$u(x,t)$ کران‌دار است و $u(x,0) = e^{-x^2}$

۲. $u_t - u_{xx} + 2u = \delta(x)\delta(t), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$

$u(x,0) = e^{-|x|}, \qquad \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$

۳. $u_t - u_{xx} + 2tu = \delta(x)\delta(t), \qquad 0 \leq x < \infty,\ t \geq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad u_x(0,t) = t$ و $u(x,0) = xe^{-x}$

۴. $u_{xx} + u_{yy} = e^{-x-y}, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$

$u_x(0,y) = \sin x^2,$ و $u(x,0) = xe^{-x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0, \qquad \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0.$

۵. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + tye^{-x}, \qquad x \geq 0,\ t \geq 0,\ 0 < y < 1$

$u(0,y,t) = e^{-t-y}$ و $u(x,y,0) = \dfrac{y}{1+x^2}$

$u(x,1,t) = t\sin xe^{-x}.$ و $u(x,0,t) = 0$

۶. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + e^{t-x-y^2}, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ t \geq 0$

$u(x,y,0) = e^{-x-y}, \quad u_t(x,y,0) = 0, \quad u(0,y,t) = t\sin y^2$

$u_y(x,0,t) = \dfrac{e^t}{|x|^{\frac{1}{2}}}, \quad u(\infty,y,t) = u(x,\infty,t) = 0$

۷. $u_t = ku_{xx}, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < t$

$u(x,0) = f_0, \quad u(0,t) = f_1,$

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = f_0$ $\qquad$ f_0 و f_1 مقادیر ثابت هستند

۸. $u_t = ku_{xx}, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < t$

$u(x,0) = x, \quad u(0,t) = a, \quad \lim\limits_{x\to\infty}(u(x,t) - x) = 0$

۹. $u_{tt} + 2u_t - u_{xx} + u = e^{t-2x}, \qquad x \geq 0,\ t \geq 0$

$u(x, 0) = e^{-3x}, \quad u_t(x, 0) = 0$

$u_x(0, t) - 2u(0, t) = t, \quad u(\infty, t) = 0$

۱۰. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + e^{t-x^2-y}, \qquad t \geq 0,\ -\infty < x < \infty,\ y \geq 0$

$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = e^{-y}\cos x^2$

$u(\pm\infty, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) - u_y(x, 0, t) = te^{-|x|}$

۱۱. $u_{tt} + u_{xxxx} = 2u_{xxt} + te^{-x}, \qquad t \quad 0,\ x > 0$

$u(x, 0) = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}$

$u_x(0, t) = t,\ u_{xxx}(0, t) = e^t, \quad u(\infty, t) = 0$

۱۲. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \qquad -\infty < z < \infty,\ y > 0,\ -\pi < x < \pi,\ t >$
0

$u(x, y, z, 0) = txe^{-y-z^2}, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0$

$u(\pi, y, z, t) = u(-\pi, y, z, t), \quad u_x(\pi, y, z, t) = u_x(-\pi, y, z, t)$

$u_y(x, 0, z, t) = \dfrac{tx}{1 + z^2}, \quad u(x, \infty, z, t) = 0, \quad u(x, y, \pm\infty, t) = 0.$

۱۳. $u_{tt} - u_{xx} + 2u_x = e^{t-2x}, \qquad x \geq 0,\ t \geq 0$

$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = e^{-3x}$

$u_x(0, t) - 3u(0, t) = e^t, \quad u(\infty, t) = 0$

(**راهنمایی:** بگیرید $u(x, t) = v(x, t)e^x$.)

۵ ـ ۴ اصل دوهامل

در این بخش، به بیان اصل دوهامل و کاربرد آن می‌پردازیم. در این قسمت دامنهٔ جواب مسئله، یک ناحیهٔ بی‌کران است و حداکثر از یک طرف محدود می‌شود. قضایای اصل

دوهامل در نواحی کران‌دار که در فصل قبل بیان شدند، در حالت بی‌کران با اثباتی مشابه معتبر هستند. لذا این قضایا بدون اثبات مطرح می‌شوند و در این بخش به چند مثال بسنده می‌کنیم.

فرض کنید u تابعی مجهول و w تابعی معلوم از متغیرهای t، x، y و z و P یک عملگر دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت از مرتبهٔ m نسبت به t باشد. مسئلهٔ مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&P(u) = w(x,y,z,t) \qquad t \geq ۰,\ ۰ \leq x,\ ۰ \leq y,\ -\infty < z < \infty \\
&\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = f_j(x,y,z) \qquad j = ۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱ \\
&M_k u = h_k \qquad k = ۱, ۲, \ldots, n
\end{aligned} \tag{۵ ـ ۱۷}$$

که تساوی اخیر نشان دهندهٔ شرایط مرزی غیرهمگن خطی با ضرایب ثابت برای متغیرهای مکان در مبدأ است. برای حلِ مسئلهٔ فوق قضیهٔ زیر مفید است.

قضیه۵ ـ ۲۰. *فرض $u_۱$ جواب مسئلهٔ (۵ ـ ۱۷) به‌ازای $f_j = ۰$ برای $j = ۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱$ و $h_k = ۰$، برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ و $u_۲$ جواب این مسئله به‌ازای $w \equiv ۰$ و $h_k = ۰$، برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ و $u_۳$ جواب آن برای $w \equiv ۰$ و $f_j = ۰$ برای $j = ۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱$ باشد، آنگاه $u = u_۱ + u_۲ + u_۳$ جواب مسئلهٔ (۵ ـ ۱۷) است.*

اصل دوهامل همانند قضیهٔ ۴ ـ ۱۴ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه (اصل دوهامل) ۵ ـ ۲۱. *فرض کنید $v(x,y,z,t;s)$ جواب مسئلهٔ همگن زیر باشد.*

$$\begin{aligned}
&P(v) = ۰, \\
&\frac{\partial^j v}{\partial t^j} = ۰ \qquad j = ۰, ۱, ۲, \ldots, m-۲, \qquad \frac{\partial^{m-۱} v}{\partial t^{m-۱}} = w(x,y,z,s), \\
&M_k v = ۰ \qquad k = ۱, ۲, \ldots, n
\end{aligned}$$

آنگاه:

$$u_۱(x,y,z,t) = \int_۰^t v(x,y,z,t-s;s)ds$$

جواب مسئلهٔ (۵ ـ ۱۷) به‌ازای $f_j = ۰$، $h_k = ۰$، $j = ۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱$، $k = ۱, ۲, \ldots, n$ است.

مثال۵ ـ ۱۵. معادلهٔ موج ناهمگن زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$$

حل. برای $v(x,t;s)$، با توجه به حل دالامبر برای معادلهٔ موج (مثال ۵ ـ ۸) به‌دست می‌آوریم.

$$v(x,t;s) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau,s)d\tau$$

پس u_1 عبارت است از:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau,s)d\tau ds$$

برای u_2 نیز داریم.

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

پس جواب مسئله عبارت است از:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau,s)d\tau ds \quad (۵ ـ ۱۸)$$

مثال ۵ ـ ۱۶. مسئلهٔ انتقال حرارت زیر را با فرض کران‌داری $u(x,t)$ برای هر t ثابت به کمک اصل دوهامل حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + t\sin x, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

$$u(x,0) = \cos x$$

حل. جواب این مسئله را به‌صورت $u = u_1 + u_2$ داریم. تابع u_1 به‌صورت

$$u_1(x,t) = \int_0^t v(x, t-s; s)ds$$

که در آن $v(x,t;s)$ جواب

$$v_t = v_{xx}, \qquad v(x,0) = s\sin x,\ -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

و u_2 جواب مسئلهٔ زیر است:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \cos x, \ -\infty < x < \infty, \ t \geq 0$$

به کمک تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$v(x,t;s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} s \sin y e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos y e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

در نتیجه:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\cos y \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{s}{\sqrt{t-s}} \sin y e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} ds \Big) dy.$$

۵ ـ ۵ تابع گرین

در این بخش به مطالعهٔ تابع گرین در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روی میدان بی‌کران می‌پردازیم. فرض کنید Ω یک میدان در $\mathbb{R}^2$ با مرز $\partial\Omega$ و Δ مانند قبل عملگر لاپلاس در $\mathbb{R}^2$ باشد.

تعریف ۵ ـ ۲۲. تابع $G(x,y,\xi,\eta)$ را تابع گرین معادلهٔ لاپلاس روی Ω برای مسئلهٔ دیریکله گویند اگر

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{در } \Omega \\ G = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۵ ـ ۱۹)$$

می‌توان تابع گرین G را بدین صورت تفسیر کرد که میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد که در اثر یک منبع واحد در نقطهٔ (ξ,η) به‌دست آمده است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که این تابع متقارن باشد. یعنی اگر میدانی در اثر قرار گرفتن یک منبع واحد در نقطهٔ (x,y) به‌دست بیاید، مقدار تابع در نقطهٔ (ξ,η) برابر مقدار قبل است. اثبات این مطلب که در قضیهٔ ۴ ـ ۳۰ در فصل قبل نشان داده شده است، برای نواحی بی‌کران نیز معتبر است. همچنین همه قضایای ۴ ـ ۳۱ تا ۴ ـ ۳۸ نیز در حالت بی‌کران معتبر هستند. منتهی در این فصل روش دیگری برای ساختن تابع گرین ارائه می‌کنیم. به همین منظور ابتدا قضیهٔ زیر را ببینیم.

قضیه ۵ ـ ۲۳. *اگر $\Phi(x,y;\xi,\eta)$ یک جواب معادلهٔ*

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \delta(x-\xi, y-\eta) \qquad \text{برای هر } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{۵ ـ ۲۰}$$

برای نقطهٔ ثابت $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ باشد و تابع $\psi(x,y)$ جواب مسئلهٔ همگن

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{در } \Omega \qquad \psi = \Phi \quad \text{روی } \partial\Omega \tag{۵ ـ ۲۱}$$

باشد آنگاه $G = \Phi - \psi$ تابع گرین مسئلهٔ دیریکلهٔ روی Ω است.

برهان. به راحتی می‌توان دید که G در مسئلهٔ (۵ ـ ۱۹) صدق می‌کند. ■

تذکر ۵ ـ ۲۴. از آنجا که تابع گرین مسئلهٔ نیومن و روبین، مشابه مسئلهٔ دیریکله، تنها با تغییر شرط مرزی مربوط تعریف می‌شود، قضیه‌ای مشابه قضیهٔ فوق برای مسئلهٔ نیومن و روبین نیز برقرار است.

برای پیدا کردن تابع Φ می‌توان فرض کرد که یک تابع متقارن است و تنها به $r = \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وابسته است، یعنی $\Phi(x,y;\xi,\eta) = \phi(r)$ در این صورت معادلهٔ (۵ ـ ۲۱) تبدیل می‌شود به

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \delta(r)$$

برای $r \neq 0$ جواب این معادله را به‌صورت $\phi(r) = a + b\ln r$ به‌دست می‌آوریم. برای برقراری تساوی در $r = 0$ از تساوی (۵ ـ ۲۰) استفاده می‌کنیم. برای این منظور دیسک به شعاع ε و به مرکز $r = 0$ را در نظر بگیرید و با B_ε نشان دهید. در این صورت بنابر قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$1 = \iint\limits_{B_\varepsilon} \delta(x-\xi, y-\eta)\,dxdy = \iint\limits_{B_\varepsilon} \Delta\Phi\,dxdy = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial n}dS$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial r}dS = \int_0^{2\pi} \frac{b}{r} r\,d\theta = 2\pi b$$

که ∂B_ε مرز دیسک B_ε است. پس $b = \frac{1}{2\pi}$ و مقدار a اختیاری است. برای سادگی می‌گیریم $a = 0$ و

$$\Phi(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln r \qquad \text{و} \qquad r = \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

مثال۵ ـ ۱۷. فرض کنید $f(x,y)$ روی $y \geq ۰$ و $g(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\begin{aligned} &\Delta u = f \qquad y > ۰, -\infty < x < \infty \\ &u(x, ۰) = g(x) \end{aligned}$$

حل. ابتدا تابع گرین مسئلهٔ دیریکله را روی $y > ۰$ تعیین می‌کنیم.

$$\Phi(x,y;\xi,\eta) = \frac{۱}{۴\pi} \ln\left((x-\xi)^۲ + (y-\eta)^۲\right) \qquad \text{و} \qquad G = \Phi - \psi$$

که ψ جواب مسئلهٔ زیر است.

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = ۰ \\ &\psi(x, ۰) = \Phi(x, ۰; \xi, \eta). \end{aligned}$$

تابع $\psi(x,y) = \Phi(x,y;\xi,-\eta)$ در تمام نقاط غیر از $(\xi,-\eta)$ هارمونیک است. چون $\eta > ۰$ باید $(\xi,-\eta)$ در نیم‌صفحهٔ پایینی قرار داشته باشد، پس $\psi(x,y)$ جواب معادلهٔ لاپلاس در ناحیهٔ $y > ۰$ است. همچنین

$$\psi(x, ۰) = \Phi(x, ۰; \xi, -\eta) = \Phi(x, ۰; \xi, \eta).$$

پس تابع گرین به‌صورت زیر خواهد بود:

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{۱}{۴\pi} \ln \frac{(x-\xi)^۲ + (y-\eta)^۲}{(x-\xi)^۲ + (y+\eta)^۲}$$

به علاوه:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y,\xi,۰) &= -\frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,۰) \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{(y+\eta)}{(x-\xi)^۲+(y+\eta)^۲} + \frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^۲+(y-\eta)^۲}\right)\Bigg|_{\eta=۰} \\ &= \frac{۱}{\pi}\frac{y}{(x-\xi)^۲+y^۲} \end{aligned}$$

با توجه به قضیهٔ ۴ ـ ۳۱ جواب مسئلهٔ فوق را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\int_۰^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{۱}{۴\pi} \ln \frac{(x-\xi)^۲ + (y-\eta)^۲}{(x-\xi)^۲ + (y+\eta)^۲} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &+ \int_{-\infty}^\infty \frac{۱}{\pi}\frac{y g(\xi)}{(x-\xi)^۲+y^۲}\,d\xi. \end{aligned}$$

تذکر ۵ ـ ۲۵. روشی که در مثال بالا برای به‌دست آوردن $\psi(x,y)$ به‌کار رفت به روش تصویری معروف است. این روش برای میدان‌های با مرز ساده که تصویر یا قرینهٔ نقطهٔ (ξ,η) نسبت به مرز از نظر هندسی قابل تعریف است، به کار می‌رود. این نقطه را اگر $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ بنامیم و تابع $\Phi(x,y;\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ را در نظر بگیریم این تابع در همه جای صفحه قابل تعریف است مگر در نقطهٔ $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ و از آنجا که این نقطه در خارج از ناحیهٔ مورد نظر قرار دارد، تابع $\Phi(x,y;\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ جواب معادلهٔ لاپلاس را در آن ناحیه می‌دهد. تنها باید شرط مرزی را با $\Phi(x,y;\xi,\eta)$ مقایسه کرد تا به تابع $\psi(x,y)$ رسید.

مثال ۵ ـ ۱۸. مطلوب است حل مسئلهٔ روبین زیر روی میدان $x>0$ و $y>0$

$$\Delta u = f \qquad x \quad 0, y > 0$$
$$u(x,0)=g(x) \quad \text{و} \quad u_x(0,y)=h(y).$$

حل. ابتدا تابع گرین را به‌دست می‌آوریم. مسئلهٔ $\psi(x,y)$ را روی $x>0$ و $y>0$ به‌صورت زیر داریم:

$$\Delta\psi = 0 \qquad x>0,\ y>0$$
$$\psi(x,0)=\Phi(x,0;\xi,\eta) \quad \text{و} \quad \psi_x(0,y)=\Phi_x(0,y;\xi,\eta)$$

برای تعیین جواب این مسئله از تابع Φ استفاده می‌کنیم. برای این منظور می‌گیریم،

$$\psi(x,y)=\Phi(x,y;\xi,-\eta)+\Phi(x,y;-\xi,\eta)-\Phi(x,y;-\xi,-\eta)$$

این تابع با استفاده از سه تصویر (ξ,η) در صفحه ساخته شده است، تا جواب مسئلهٔ فوق باشد. پس

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Phi(x,y;\xi,\eta)-\Phi(x,y;\xi,-\eta)-\Phi(x,y;-\xi,\eta)+\Phi(x,y;-\xi,-\eta)$$

یا

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(y+\eta)^2\right)}{\left((x-\xi)^2+(y+\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(y-\eta)^2\right)}$$

طبق قضیهٔ ۴ ـ ۳۵ جواب مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^\infty g(\xi)G_\eta(x,y;\xi,0)d\xi$$
$$+\int_0^\infty h(\eta)G(x,y;0,\eta)d\eta.$$

مثال ۵ ـ ۱۹. محاسبهٔ تابع گرین در دایرهٔ $B=\{(x,y)\mid x^{۲}+y^{۲}=۱\}$ به حل مسئله زیر منجر می‌شود.

$$\Delta u=۰,\qquad x^{۲}+y^{۲}<۱ \tag{۵ ـ ۲۲}$$

$$u(x,y)=\Phi(x,y;\xi,\eta)\qquad x^{۲}+y^{۲}=۱ \tag{۵ ـ ۲۳}$$

اگر O مرکز دایره باشد، انعکاس نقطهٔ $P=(\xi,\eta)$ نسبت به دایره واحد، نقطهٔ $\widetilde{P}=(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$ روی خط OP است که

$$OP\cdot O\widetilde{P}=۱$$

درواقع $\widetilde{\xi}=\dfrac{\xi}{\xi^{۲}+\eta^{۲}}$ و $\widetilde{\eta}=\dfrac{\eta}{\xi^{۲}+\eta^{۲}}$. اکنون اگر قرار دهیم

$$u(x,y)=\Phi(\sigma x,\sigma y;\sigma\widetilde{\xi},\sigma\widetilde{\eta})$$

که $\sigma=(\xi^{۲}+\eta^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$، آنگاه u یک تابع هارمونیک درون دایره است. به‌علاوه اگر (x,y) روی مرز دایره باشد، یعنی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ آنگاه:

$$\sigma^{۲}\left((x-\widetilde{\xi})^{۲}+(y-\widetilde{\eta})^{۲}\right)=(x-\xi)^{۲}+(y-\eta)^{۲}$$

بنابراین روی مرز دایره:

$$u(x,y)=\Phi(\sigma x,\sigma y;\sigma\widetilde{\xi},\sigma\widetilde{\eta})=\Phi(x,y;\xi,\eta)$$

درنتیجه تابع گرین دایره به‌صورت زیر است:

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Phi(x,y;\xi,\eta)-\Phi(\sigma x,\sigma y;\sigma\widetilde{\xi},\sigma\widetilde{\eta})$$

برای محاسبهٔ فرمول قضیهٔ ۴ ـ ۳۵، توجه کنید بردار خارجی عمود بر سطح دایره در نقطهٔ (ξ,η)، بردار $\vec{n}=(\xi,\eta)$ است.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n}&=\frac{\partial G}{\partial \xi}\cdot\xi+\frac{\partial G}{\partial \eta}\cdot\eta\\
&=\xi\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(x,y;\xi,\eta)-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\sigma x,\sigma y;\sigma\widetilde{\xi},\sigma\widetilde{\eta})\cdot\frac{\eta^{۲}}{(\xi^{۲}+\eta^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Big)\\
&\quad+\eta\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(x,y;\xi,\eta)-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\sigma x,\sigma y;\sigma\widetilde{\xi},\sigma\widetilde{\eta})\cdot\frac{\xi^{۲}}{(\xi^{۲}+\eta^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Big)
\end{aligned}$$

از طرفی وقتی (ξ,η) روی دایره باشد، $\xi^2+\eta^2=1$، $\sigma=1$، $\tilde{\xi}=\xi$ و $\tilde{\eta}=\eta$، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{\xi}{2\pi}\Big(\frac{(\xi-x)-(\xi-x)\cdot\eta^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\Big)+\frac{\eta}{2\pi}\Big(\frac{(\eta-y)-(\eta-y)\cdot\xi^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1-\xi x-\eta y-2\xi^2\eta^2+\xi\eta(x\eta+y\xi)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\Big)\end{aligned}$$

درنتیجه جواب مسئلهٔ

$$\begin{cases}\Delta u=f & x^2+y^2<1\\ u=g & x^2+y^2=1\end{cases}$$

به‌صورت زیر است:

$$u(x,y)=\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1}\frac{1}{4\pi}\ln\Bigg(\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\xi^2+\eta^2)\Big(\big(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}-x\big)^2+\big(\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}-y\big)^2\Big)}\Bigg)\cdot f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+\int\limits_{\xi^2+\eta^2=1}\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1-\xi x-\eta y-2\xi^2\eta^2+\xi\eta(x\eta+y\xi)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\Big)\cdot g(\xi,\eta)ds$$

تذکر ۵ ـ ۲۶. تابع گرین برای معادلهٔ لاپلاس در فضای $\mathbb{R}^3$ به‌صورت مشابه قابل تعریف است. بدین ترتیب که جواب $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ از مسئلهٔ زیر تابع گرین مسئلهٔ دیریکله در میدان $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$، است.

$$\begin{cases}\Delta G=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), & \text{در } \Omega\\ G=0 & \text{روی } \partial\Omega\end{cases}$$

خواص تابع گرین در این حالت، مشابه بعد دو است. این مطالب به طور خلاصه در قضیهٔ زیر آمده است. از آنجا که اثبات آنها مشابه حالت قبل است از تکرار آن خودداری شده است.

قضیه ۵ ـ ۲۷. *فرض کنید $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ یک میدان و $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ تابع گرین مسئلهٔ دیریکله در Ω باشد، آنگاه*

۱. *تابع G متقارن است، یعنی $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$.*

۲. *جواب مسئلهٔ*

$$\begin{cases}\Delta u=f & \text{در } \Omega\\ u=g & \text{روی } \partial\Omega\end{cases}$$

عبارت است از:

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) f(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta + \iint\limits_{\partial\Omega} g \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (۵ - ۲۴)$$

۳. برای محاسبهٔ تابع گرین می‌توان قرار داد

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \Phi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) - \psi(x,y,z)$$

که در آن Φ یک جواب

$$\Delta\Phi = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \qquad \text{در } \mathbb{R}^{۳} \qquad (۵ - ۲۵)$$

برای یک نقطهٔ ثابت $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^{۳}$ است و ψ در مسئلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} \Delta\psi = ۰ & \text{در } \Omega \\ \psi = \Phi & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

۴. اگر $r = \left((x-\xi)^{۲} + (y-\eta)^{۲} + (z-\zeta)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$، آنگاه یک جواب برای (۵ ـ ۲۵) به‌صورت زیر است:

$$\Phi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{۱}{۴\pi r}.$$

مثال ۵ ـ ۲۰. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$\Delta u = ۰, \qquad -\infty < z < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ x > ۰$$
$$u(۰,y,z) = g(y,z)$$

حل. ابتدا تابع گرین مسئله را به‌دست می‌آوریم. داریم

$$\Phi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{۱}{۴\pi} \frac{۱}{\sqrt{(x-\xi)^{۲} + (y-\eta)^{۲} + (z-\zeta)^{۲}}}$$

همچنین ψ جواب مسئلهٔ زیر است.

$$\Delta\psi = ۰, \qquad -\infty < z < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ x > ۰$$
$$\psi(۰,y,z) = \Phi(۰,y,z).$$

با استفاده از روش تصویری، جواب این مسئله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\psi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \Phi(x,y,z;-\xi,\eta,\zeta) = \frac{۱}{۴\pi} \frac{۱}{\sqrt{(x+\xi)^{۲} + (y-\eta)^{۲} + (z-\zeta)^{۲}}}$$

و

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\Phi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)-\Phi(x,y,z;-\xi,\eta,\zeta)$$

با استفاده از (۵ ـ ۲۴) جواب مسئلهٔ اولیه به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\eta,\zeta)\frac{\partial G}{\partial\xi}(x,y,z;0,\eta,\zeta)d\eta d\zeta\\&=-\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\eta,\zeta)d\eta d\zeta}{(x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

برای معادلات موج و انتقال حرارت نیز تعریف تابع گرین مقدور است، لیکن به‌علت نقش اصل دوهامل در حل اینگونه مسائل، از تابع گرین در حل آنها کمتر استفاده می‌شود. در ادامهٔ این بخش به بحث تابع گرین برای معادلات حرارت و موج می‌پردازیم.

تعریف۵ ـ ۲۸. فرض کنید $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ و $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$ نقطهٔ ثابت باشد، جواب مسئلهٔ

$$u_t-k\Delta u=0,\qquad t\geq 0,\ (x,y,z)\in\Omega$$

$$u(x,y,z,0)=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\qquad \alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=0 \quad \text{روی } \partial\Omega$$

را تابع گرین معادلهٔ حرارت برای میدان Ω متناظر با شرط مرزی داده شده می‌گوییم و با $G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)$ نشان می‌دهیم.

مثال۵ ـ ۲۱. تابع گرین معادلهٔ حرارت را برای $\Omega=\mathbb{R}$ بیابید.

حل. به‌دنبال $G(x,t;\xi)$ هستیم که در مسئلهٔ زیر صدق کند.

$$u_t-ku_{xx}=0\qquad -\infty<x<\infty,\ t\geq 0.$$

$$u(x,0)=\delta(x-\xi)\qquad u(\pm\infty,t)=0$$

اگر نسبت به x تبدیل فوریه بگیریم، $U(w,t)=\mathcal{F}\{u(x,t)\}$ به مسئلهٔ زیر می‌رسیم.

$$U_t+kw^2U=0,\qquad U(w,0)=\frac{e^{iw\xi}}{\sqrt{2\pi}}$$

پس:

$$U(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-kw^2t+iw\xi}$$

درنتیجه:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-kw^2t+iw\xi}e^{-iwx}dw$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^۲}{۴kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(w\sqrt{kt}+i\frac{x-\xi}{۲\sqrt{kt}}\right)^۲} dw$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^۲}{۴kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^۲} \frac{۱}{\sqrt{kt}} dy$$

بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$G(x,t;\xi) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi kt}} e^{-\frac{(x-\xi)^۲}{۴kt}} \qquad (۵ \_ ۲۶)$$

تذکر۵ ـ ۲۹. به طور مشابه تابع گرین معادلهٔ انتقال حرارت روی فضای $\Omega = \mathbb{R}^۲$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$G(x,y,t;\xi,\eta) = \frac{۱}{۴\pi kt} e^{-\frac{(x-\xi)^۲+(y-\eta)^۲}{۴kt}}.$$

همچنین روی فضای $\Omega = \mathbb{R}^۳$، این تابع به‌صورت زیر است.

$$G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta) = (۴\pi kt)^{-\frac{۳}{۲}} e^{-\frac{(x-\xi)^۲+(y-\eta)^۲+(z-\zeta)^۲}{۴kt}}.$$

یکی از خواص مهم تابع گرین معادلهٔ حرارت، خاصیت تقارن آن است. مشابه تابع گرین معادلهٔ لاپلاس داریم:

قضیه۵ ـ ۳۰. *تابع گرین معادلهٔ انتقال حرارت در ناحیهٔ باز Ω متقارن است، یعنی* $G(x,y,t;\xi,\eta) = G(\xi,\eta,t;x,y)$.

برهان. اگر قرار دهیم $\phi(x,y,t) = G(x,y,t;\xi,\eta)$ و $\psi(x,y,t) = G(x,y,t;\xi^*,\eta^*)$، با توجه به شرایط مرزی مشابه $G(x,y,t;\xi,\eta)$ و $G(x,y;\xi^*,\eta^*)$ روی $\partial\Omega$، نتیجه می‌شود

$$\int_\Omega \phi(x,y,\tau)\Delta\psi(x,y,t-\tau) - \Delta\phi(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau)dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \phi(x,y,\tau)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y,t-\tau) - \frac{\partial\phi}{\partial n}(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau)dS = ۰$$

از طرفی:

$$\frac{d}{d\tau}\big(\phi(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau)\big) = \phi_t(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau) - \phi(x,y,\tau)\psi_t(x,y,t-\tau)$$

$$= k\Delta\phi(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau) - k\phi(x,y,\tau)\Delta\psi(x,y,t-\tau)$$

بنابراین:

$$۰ = \int_۰^t \int_\Omega \frac{d}{d\tau}\big(\phi(x,y,\tau)\psi(x,y,t-\tau)\big)dxdyd\tau$$

$$= \int_\Omega \phi(x,y,t)\psi(x,y,0) - \phi(x,y,0)\psi(x,y,t)dxdy$$

$$= \int_\Omega \phi(x,y,t)\delta(x-\xi^*,y-\eta^*) - \delta(x-\xi,y-\eta)\psi(x,y,t)dxdy$$

$$= \phi(\xi^*,\eta^*,t) - \psi(\xi,\eta,t)$$

■

قضیهٔ زیر کاربرد تابع گرین معادلهٔ حرارت را نشان می‌دهد. هرچند این قضیه و قضیهٔ قبل در بعد ۲ مطرح می‌شوند، ولی نتایج آنها به طور مشابه برای ابعاد دیگر نیز صحیح است.

قضیه۵ ـ ۳۱. *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ و $G(x,y,t;\xi,\eta)$ تابع گرین معادلهٔ حرارت برای میدان Ω، همراه با شرایط مرزی مسئلهٔ زیر باشد. آنگاه جواب مسئلهٔ*

$$\begin{aligned}
&u_t - k\Delta u = f(x,y,t), && (x,y)\in\Omega,\ t>0,\\
&u(x,y,0) = h(x,y), && (x,y)\in\Omega,\\
&\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,t), && (x,y)\in\partial\Omega,\ t>0,
\end{aligned}$$

برای $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$، به‌صورت زیر است، مشروط بر اینکه انتگرال‌های مربوط موجود باشد.

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) = &\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\\
&+\int_\Omega G(x,y,t;\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta
\end{aligned} \qquad (۲۷ـ۵)$$

برای $\alpha \neq 0$ و $\beta = 0$:

$$-\frac{k}{\alpha}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,t-\tau;\xi,\eta)g(\xi,\eta,\tau)dSd\tau$$

برای $\alpha = 0$ و $\beta \neq 0$:

$$+\frac{k}{\beta}\int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)g(\xi,\eta,\tau)dSd\tau$$

برهان. $u(x,y,t)$ را جواب مسئلهٔ فوق بگیرید، در این صورت:

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{d}{d\tau}\big(u(\xi,\eta,\tau)G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)\big)d\xi d\eta d\tau$$

$$= \int_\Omega u(\xi,\eta,t)G(x,y,0;\xi,\eta) - u(\xi,\eta,0)G(x,y,t;\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$= \int_\Omega u(\xi,\eta,t)\delta(x-\xi,y-\eta) - h(\xi,\eta)G(x,y,t;\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$= u(x,y,t) - \int_{\Omega} G(x,y,t;\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

از طرفی سمت چپ تساوی بالا برابر است با:

$$\int_0^t\int_{\Omega} u_t(\xi,\eta,\tau)G(x,y,t-\tau;\xi,\eta) - u(\xi,\eta,\tau)G_t(x,y,t-\tau;\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau$$
$$= k\int_0^t\int_{\Omega} \Delta u(\xi,\eta,\tau)G(x,y,t-\tau;\xi,\eta) - u(\xi,\eta,\tau)\Delta_{x,y}G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau$$

با توجه به خاصیت تقارن تابع گرین داریم:

$$\Delta_{x,y}G(x,y,t-\tau;\xi,\eta) = \Delta_{\xi,\eta}G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)$$

بنابراین

$$= k\int_0^t\int_{\Omega} \Delta u(\xi,\eta,\tau)G(x,y,t-\tau;\xi,\eta) - u(\xi,\eta,\tau)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,t-\tau;\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau$$
$$= k\int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi,\eta,\tau)G(x,y,t-\tau;\xi,\eta) - u(\xi,\eta,\tau)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,t-\tau;\xi,\eta)dSd\tau$$

برای $\beta = 0$، شرط مرزی تابع گرین به‌صورت $G(x,y,t;\xi,\eta) = 0$ است و با قرار دادن آن در رابطهٔ فوق به عبارت مورد نظر قضیه می‌رسیم. همچنین برای $\alpha = 0$، شرط مرزی تابع گرین به‌صورت $\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla_{x,y}G.\vec{n} = 0$ خواهد بود که با توجه به تقارن تابع گرین عبارت مشابه دیگر به‌دست می‌آید. ■

تذکر ۵ ـ ۳۲. اگر ناحیهٔ Ω بی‌کران باشد، مانند مثال ۵ ـ ۲۱، آنگاه در قضیهٔ قبل جملات مربوط به شرط مرزی حذف خواهد شد.

معادلهٔ موج زیر را در نظر بگیرید که در میدان $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ مطرح شده است.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2\Delta u = f(x,y,z,t), && (x,y,z)\in\Omega,\ t>0,\\
&u(x,y,z,0) = h_1(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0) = h_2(x,y,z), && (x,y,z)\in\Omega\\
&\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,z,t), && (x,y,z)\in\partial\Omega,\ t>0.
\end{aligned} \tag{۵ ـ ۲۸}$$

برای چنین مسئله‌ای تابع گرین را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵ ـ ۳۳. برای نقطهٔ ثابت $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$، جواب مسئلهٔ

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2\Delta u = 0, && (x,y,z)\in\Omega,\ t>0,\\
&u(x,y,z,0) = 0, \quad u_t(x,y,z,0) = \delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), && (x,y,z)\in\Omega\\
&\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = 0, && (x,y,z)\in\partial\Omega
\end{aligned} \tag{۵ ـ ۲۹}$$

را تابع گرین وابسته به مسئلهٔ فوق گویند و با $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$ نشان می‌دهند.

مشابه معادلات حرارت و لاپلاس در ارتباط با تابع گرین معادلهٔ موج و مسئلهٔ (۵ ـ ۲۸) قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه ۵ ـ ۳۴. *تابع گرین، متقارن است، یعنی* $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z)$. *در ضمن اگر* $u(x, y, z, t)$ *جواب مسئلهٔ (۵ ـ ۲۸) باشد، آنگاه برای* $\alpha = \circ$ *یا* $\beta = \circ$،

$$u(x, y, z, t) = \int_\circ^t \int_\Omega G(x, y, z, t - \tau; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau$$
$$+ \int_\Omega \Big(G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) h_\text{۲}(\xi, \eta, \zeta) - G_t(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) h_\text{۱}(\xi, \eta, \zeta) \Big) d\xi d\eta d\zeta$$

برای $\alpha = \circ$ و $\beta \neq \circ$

$$+ c^\text{۲} \int_\circ^t \int_{\partial\Omega} \frac{\text{۱}}{\beta} G(x, y, z, t - \tau; \xi, \eta, \zeta) g(\xi, \eta, \zeta, \tau) dS d\tau$$

برای $\alpha \neq \circ$ و $\beta = \circ$

$$- c^\text{۲} \int_\circ^t \int_{\partial\Omega} \frac{\text{۱}}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, z, t - \tau; \xi, \eta, \zeta) g(\xi, \eta, \zeta, \tau) dS d\tau$$

مثال ۵ ـ ۲۲. تابع گرین مسئلهٔ زیر را به‌دست آورید و آن را حل کنید.

$$u_{tt} - c^\text{۲} u_{xx} = h(x, t) \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq \circ$$
$$u(x, \circ) = f(x), \quad u_t(x, \circ) = g(x). \qquad -\infty < x < \infty$$

حل. تابع گرین، جواب مسئلهٔ زیر است.

$$v_{tt} - c^\text{۲} v_{xx} = \circ$$
$$v(x, \circ) = \circ, \quad v_t(x, \circ) = \delta(x - \xi), \qquad t \geq \circ,\ \xi, x \in \mathbb{R}$$

برای تعیین از مسئله ابتدا تبدیل فوریهٔ نامتناهی می‌گیریم.

$$V(w, t) = \mathcal{F}\{v(x, t)\}$$

ابتدا به‌دست می‌آوریم:

$$V_{tt} + c^\text{۲} w^\text{۲} V = \circ$$
$$V(w, \circ) = \circ, \quad V_t(w, \circ) = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}} e^{iw\xi}.$$

پس:

$$V(w, t) = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}} \frac{e^{iw\xi}}{cw} \sin cwt$$

درنتیجه:

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}e^{iw\xi}\frac{\sin cwt}{cw}dw$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(x-\xi)}\frac{\sin cwt}{cw}dw$$
$$= \frac{1}{2c}\left(u_{ct}(x-\xi) - u_{-ct}(x-\xi)\right)$$

که منظور از u_a تابع پله‌ای است. به این ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$G(x,t;\xi) = \frac{1}{2c}\left(u_0(x-\xi-ct) - u_0(x-\xi+ct)\right)$$

حال برای تعیین جواب نهایی از قضیهٔ ۵ ـ ۳۴ استفاده می‌کنیم.

$$u(x,t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2c}\left(u_0(x-\xi-c(t-\tau)) - u_0(x-\xi+c(t-\tau))\right)h(\xi,\tau)d\xi d\tau$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2c}\left(u_0(x-\xi-ct) - u_0(x-\xi+ct)\right)g(\xi)d\xi$$
$$- \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2c}\left((-c)\delta(x-\xi-ct) - c\delta(x-\xi+ct)\right)f(\xi)d\xi$$
$$= \int_0^t\int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} h(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)$$

تمرین ۵ ـ ۵

مسائل زیر را حل کنید.

۱. $\Delta u = x^2y^2, \qquad x \quad 0,\ y > 0$

$u(x,0) = x, \qquad u(0,y) = y^3$

۲. $\Delta u = x\cos y,\ x > \qquad 0,\ -\infty < y < \infty$

$u_x(0,y) = y^3$

۳. $\Delta u = xy^2z^3, \qquad x \quad 0,\ y > 0,\ z > 0$

$u(0,y,z) = y^3z^2, \qquad u_y(x,0,z) = x^2z^3, \qquad u(x,y,0) = xy$

۴. $\Delta u = r\sin\theta,\ r > \qquad ۱$

$u(۱,\theta) = \cos^{۲}\theta.$

۵. $\Delta u = r^{۲}\sin\theta\cos\varphi,\ r \qquad \geq ۱,\ \circ \leq \theta \leq ۲\pi,\ \circ \leq \varphi \leq \pi$

$u(۱,\theta,\varphi) = \cos^{۲}\theta\sin\varphi,\ u(r, \quad \circ,\varphi) = u(r,۲\pi,\varphi),$

$u_\theta(r,\circ,\varphi) = u_\theta(r,۲\pi,\varphi),$

۶. $\Delta u - k^{۲}u = xy,\ x > \qquad \circ,\ y > \circ$

$u(\circ,y) = y^{۲}, \quad u_y(x,\circ) = \cos x.$

۷. $u_t = ku_{xx} + xe^t, \qquad x \quad \circ,\ \not> > \circ$

$u(x,\circ) = x^{۲}, \quad u_x(\circ,t) = t^{۲}.$

۸. $u_t = k\Delta u + xy^{۲}\sin t,\ x > \qquad \circ,\ -\infty < y < \infty,\ t > \circ$

$u(x,y,\circ) = x^{۲}y,\ u \quad (\circ,y,t) = ye^t.$

۹. $u_t = k\Delta u + xyzt,\ x > \qquad \circ,\ -\infty < y < \infty,\ z > \circ,\ t > \circ$

$u(x,y,z,\circ) = x+yz,\ u \quad _z(\circ,y,z,t) = yz^{۲}e^t, \quad u(x,y,\circ,t) = x^{۲}yt^{۲}.$

۱۰. $u_{tt} = c^{۲}u_{xx} + xe^t, \qquad x \quad \circ,\ \not> > \circ$

$u(x,\circ) = x^{۲}, \quad u_t(x,\circ) = e^x, \quad u(\circ,t) = e^{۲t}.$

۱۱. $u_{tt} = c^{۲}\Delta u + xy^{۲}e^t, \qquad x \quad \circ,\ \not>\infty < y < \infty,\ t > \circ$

$u(x,y,\circ) = x^{۲}y,\ u \quad _t(x,y,\circ) = x^{۲}y^{۲}, \quad u(\circ,y,t) = e^y t.$

۱۲. $u_{tt} = c^{۲}\Delta u + x^{۲}yz^{۳}\sin t,\ x > \qquad \circ,\ y > \circ,\ -\infty < z < \infty,\ t > \circ$

$u_x(\circ,y,z,t) = yz\cos t,\ u(x, \quad \circ,z,t) = x^{۲}zt^{۲}.$

$u(x,y,z,\circ) = xe^{y+z}, \quad u_t(x,y,z,\circ) = xyz$

۵ ـ ۶ تغییر مجهول و روش ریمان

به کمک تغییر تابع مجهول می‌توان بعضی جملات را از معادله حذف کرد و آن را ساده‌تر کرد. بدین ترتیب می‌توان جوابی برای آن پیدا کرد. در این بخش در ابتدا خواهیم دید چگونه حالت کلی معادلات لاپلاس، حرارت و موج را می‌توان ساده کرد.

در بخش اول این فصل دیدیم که صورت کانونیک یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی از مرتبهٔ دوم و با ضرایب ثابت، با تغییر متغیرهای مناسب، یکی از اشکال زیر را به‌خود می‌گیرد که ضرایب ثابت هستند:

۱. کانونیک نوع اول هذلولوی: $u_{rs} = a_1 u_r + a_2 u_s + a_3 u + f_1(r, s)$

۲. کانونیک نوع دوم هذلولوی: $u_{rr} - u_{ss} = a_1^* u_r + a_2^* u_s + a_3 u + f_1^*(r, s)$

۳. کانونیک سهموی: $u_{ss} = b_1 u_r + b_2 u_s + b_3 u + f_2(r, s)$

۴. کانونیک بیضوی: $u_{rr} + u_{ss} = c_1 u_r + c_2 u_s + c_3 u + f_3(r, s)$

مشابه روش دالامبر برای حل معادلهٔ موج اگر در فرم کانونیک نوع اول هذلولوی، $a_1 = a_3 = 0$ یا $a_2 = a_3 = 0$ باشد، می‌توان جواب عمومی معادله را به‌دست آورد. همچنین در روش تبدلات دیدیم، چنانچه مشتقات مرتبهٔ اول در فرم کانونیک نوع دوم هذلولوی و یا در فرم کانونیک سهموی، u_s ظاهر نگردد، محاسبهٔ تبدیل مشتقات تابع مجهول برحسب تبدیل تابع مجهول ساده‌تر و سریعتر قابل تعیین است. حال به‌دنبال این هستیم که با استفاده از تغییر تابع مجهول، حتی‌المقدور جملات مشتقات را در فرم‌های کانونیک حذف کنیم. برای این‌کار می‌گیریم:

$$u(r, s) = v(r, s) e^{ar+bs} \qquad (۵ ـ ۳۰)$$

و مقادیر ثابت a و b را طوری انتخاب می‌کنیم تا جملات نامطلوب در معادلهٔ v حذف شود. از قرار دادن (۵ ـ ۳۰) در معادلهٔ کانونیک نوع اول هذلولوی به‌دست می‌آوریم:

$$v_{rs} + (b - a_1) v_r + (a - a_2) v_s + (ab - a_1 a - a_2 b - a_3) v = f_1 e^{-(ar+bs)} \qquad (۵ ـ ۳۱)$$

برای اینکه مشتقات مرتبهٔ اول حذف شوند، کافیست قرار دهیم: $a = a_2$ و $b = a_1$. در این‌صورت فرم کانونیک نوع اول هذلولوی به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$v_{rs} = (a_1 a_2 + a_3) v + g_1 \qquad (۵ ـ ۳۲)$$

که در آن $g_1 = f_1 e^{-(a_2 r + a_1 s)}$. نکتهٔ قابل توجه این است که حذف v و یکی از مشتقات با انتخاب مناسب a و b مقدور نیست.

با گرفتن $a = \frac{a_1^*}{2}$ و $b = -\frac{a_2^*}{2}$ فرم کانونیک نوع دوم هذلولوی به‌صورت زیر در می‌آید.

$$v_{rr} - v_{ss} = h_1^* v + g_1^* \tag{۵ ـ ۳۳}$$

برای $b_1 \neq 0$ با گرفتن $b = \frac{b_2}{2}$ و $a = -\frac{1}{b_1}\left(b_3 + \frac{b_2^2}{4}\right)$ فرم کانونیک سهموی می‌شود:

$$v_{ss} = h_2 v_r + g_2 \tag{۵ ـ ۳۴}$$

در حالتی‌که $b_1 = 0$ باشد، این فرم کانونیک سهموی برای جواب عمومی قابل‌حل است. سرانجام با گرفتن $a = \frac{c_1}{2}$ و $b = \frac{c_2}{2}$ فرم کانونیک هذلولوی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$v_{rr} + v_{ss} = h_3 v + g_3 \tag{۵ ـ ۳۵}$$

تعیین تبدیلات فوریهٔ مناسب معادلهٔ (۵ ـ ۳۳)، (۵ ـ ۳۴) و (۵ ـ ۳۵) به‌سادگی قابل تعیین و قابل‌حل است. با وجود این معادلهٔ (۵ ـ ۳۲) با روش‌های قبلی قابل‌حل نیست. حل این معادله به روش ریمان مقدور است که در ادامه بیان می‌شود.

فرم کانونیک نوع اول هذلولوی یعنی معادلهٔ

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y) \tag{۵ ـ ۳۶}$$

را در نظر بگیرید. در اینجا L نمایش دهندهٔ عملگر خطی و $a(x,y)$، $b(x,y)$، $c(x,y)$ و $f(x,y)$ توابعی مشتق‌پذیر در میدانی مانند Ω در صفحهٔ (x,y) است. فرض کنید $v(x,y)$ و $v(x,y)$ دو تابع دلخواه با مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته روی Ω باشد. در این صورت روابط زیر همواره برقرارند:

$$vu_{xy} - uv_{xy} = (vu_x)_y - (uv_y)_x,$$

$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x,$$

$$vbu_y = (bvu)_y - u(bv)_y.$$

در نتیجه

$$vL[u] - uM[v] = U_x + V_y. \tag{۵ ـ ۳۷}$$

که در آن M عملگر زیر است:

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$$

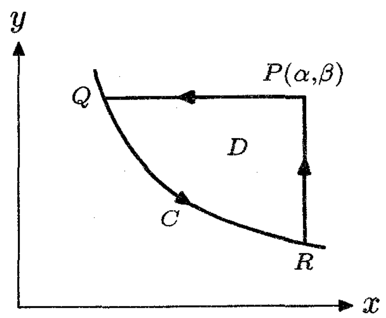
و

$$U = auv - uv_y \quad \text{و} \quad V = buv + vu_x \tag{۵ ـ ۳۸}$$

عملگر M را عملگر الحاقی عملگر L گویند. اگر $M = L$، آنگاه L را عملگر خودالحاق گویند. حال قضیهٔ گرین را برای میدان Ω به‌کار می‌بریم.

$$\iint_{\Omega}(U_x + V_y)dxdy = \oint_{\partial\Omega} U dy - V dx. \tag{۵ ـ ۳۹}$$

فرض کنید C یک منحنی پیوسته در صفحهٔ (x, y) باشد که شرایط اولیهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۳٦) روی آن داده شده است (به شکل زیر توجه کنید.).



نمودار ۵ ـ ۱.

فرض بر این است که خطوط موازی محورهای مختصات منحنی C را در یک نقطه قطع می‌کنند. یعنی مماس بر C در هیچ نقطه‌ای موازی محورها نیست. نقطهٔ P به مختصات (α, β) را در نظر بگیرید و خطوط موازی محورها را رسم کنید تا C را در نقاط Q و R قطع کند. حال تساوی (۵ ـ ۳۹) را برای میدان D و مرز آن منحنی بستهٔ $PQRP$، در نظر می‌گیریم.

$$\iint_{D}(vL[u] - uM[v])dxdy = \int_{Q}^{R}(Udy - Vdx) + \int_{R}^{P} Udy - \int_{P}^{Q} Vdx \tag{۵ ـ ۴۰}$$

از (۵ ـ ۳۸) به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{P}^{Q} Vdx = \int_{P}^{Q} bvudx + \int_{P}^{Q} vu_x dx$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء حاصل می‌شود.

$$\int_P^Q v u_x dx = [uv]_P^Q - \int_P^Q u v_x dx.$$

به این ترتیب

$$\int_P^Q V dx = [uv]_P^Q + \int_P^Q u(bv - v_x)dx$$

از قرار دادن این انتگرال در (۵ ـ ۴۰) به‌دست می‌آوریم:

$$[uv]_P = [uv]_Q + \int_P^Q u(bv - v_x)dx - \int_R^P u(av - v_y)dy - \int_Q^R (U dy - V dx) + \iint_D (vL[u] - uM[v])dxdy \qquad (۵ ـ ۴۱)$$

حال فرض کنید $v(x, y; \alpha, \beta)$ جواب معادلهٔ الحاقی

$$M[v] = 0 \qquad (۵ ـ ۴۲)$$

باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} v_x = bv & \text{برای } y = \beta، \\ v_y = av & \text{برای } x = \alpha، \\ v = 1 & \text{برای } x = \alpha \text{ و } y = \beta، \end{cases} \qquad (۵ ـ ۴۳)$$

تابع $v(x, y; \alpha, \beta)$ را تابع ریمان گویند. اگر $u(x, y)$ جواب معادلهٔ $Lu = f$ باشد، با جایگزینی در (۵ ـ ۴۱) می‌شود:

$$[u]_P = [uv]_Q - \int_Q^R uv(ady - bdx) + \int_Q^R (uv_y dy + vu_x dx) + \iint_D vf dxdy \qquad (۵ ـ ۴۴)$$

به این ترتیب مقدار $u(P)$ از روی مقادیر u و u_x در امتداد منحنی C قابل تعیین است.

چنانچه u و u_y در امتداد C داده شده باشد، با استفاده از اتحاد

$$[uv]_R - [uv]_Q = \int_Q^R (uv)_x dx + (uv)_y dy$$

از تساوی (۵ ـ ۴۴) به‌دست می‌آوریم:

$$[u]_P = [uv]_R - \int_Q^R uv(ady - bdx) - \int_Q^R (uv_x dx + vu_y dy) + \iint_D vf dxdy \qquad (۵ ـ ۴۵)$$

از جمع (۵ ـ ۴۴) و (۵ ـ ۴۵) حاصل می‌شود

$$[u]_P = \frac{۱}{۲}([uv]_Q + [uv]_R) - \int_Q^R uv(ady - bdx) - \frac{۱}{۲}\int_Q^R u(v_x dx - v_y dy)$$
$$+ \frac{۱}{۲}\int_Q^R v(u_x dx - u_y dy) + \iint_D vf dxdy \qquad (۵ ـ ۴۶)$$

تذکر ۵ ـ ۳۵. چنانچه در معادلهٔ (۵ ـ ۳۶) داشته باشیم $a = ۰$ و $b = ۰$، و به‌صورت فرم کانونیک نوع اول هذلولی (۵ ـ ۳۲) باشد، در این‌صورت (۵ ـ ۴۲)، (۵ ـ ۴۳) و (۵ ـ ۴۶) به‌صورت زیر ساده می‌گردد.

$$M[v] = v_{xy} + cv = ۰,$$
$$v_x(x,\beta) = ۰,\ v_y(\alpha,y) = ۰,\ v(\alpha,\beta) = ۱.$$
$$[u]_P = \frac{۱}{۲}([uv]_Q + [uv]_R) - \frac{۱}{۲}\int_Q^R u(v_x dx - v_y dy)$$
$$+ \frac{۱}{۲}\int_Q^R v(u_x dx - u_y dy) + \iint_D vf dxdy \qquad (۵ ـ ۴۷)$$

مثال ۵ ـ ۲۳. مطلوب است حل معادلهٔ تلگراف:

$$w_{tt} + aw_t + bw = c^۲ w_{xx} \qquad t \geq ۰,\ -\infty < x < \infty$$
$$w(x,۰) = f(x),\ w_t(x,۰) = g(x)$$

حل. با گرفتن $w = ue^{-\frac{a}{۲}t}$ و $\xi = x + ct$ و $\eta = x - ct$ این مسئله به مسئلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$u_{\xi\eta} + ku = ۰,\ k = \frac{a^۲ - ۴b}{۱۶c^۲}$$
$$u(\xi,\eta)\big|_{\xi=\eta} = f(\xi),\ [u_\xi - u_\eta]_{\xi=\eta} = c^{-۱}g(\xi).$$

اکنون تابع ریمان $v(\xi,\eta;\alpha,\beta)$ که باید در مسئلهٔ زیر صدق کند را تعیین می‌کنیم.

$$v_{\xi\eta} + kv = ۰.$$
$$v_\xi(\xi,\beta;\alpha,\beta) = ۰,\ v_\eta(\alpha,\eta;\alpha,\beta) = ۰,\ v(\alpha,\beta;\alpha,\beta) = ۱. \qquad (۵ ـ ۴۸)$$

برای برقراری شرایط تکمیلی می‌گیریم: $s = (\xi - \alpha)(\eta - \beta)$ و $v(\xi,\eta;\alpha,\beta) = F(s)$ این v در دو شرط تکمیلی مربوط به مشتق صدق می‌کند. پس کافی است F را طوری تعیین کنیم تا

در معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$sF_{ss} + F_s + kF = 0.$$

اگر بگیرید $\lambda = \sqrt{4ks}$، معادلهٔ فوق می‌شود:

$$F''(\lambda) + \frac{1}{\lambda}F'(\lambda) + F(\lambda) = 0$$

این معادلهٔ بسل از مرتبهٔ صفر است. جواب این معادله که در $\lambda = 0$ کران‌دار بماند، $J_0(\lambda)$ است. پس $F(\lambda) = J_0(\lambda)$ یا:

$$v(\xi, \eta; \alpha, \beta) = J_0\left(\sqrt{4k(\xi - \alpha)(\eta - \beta)}\right)$$

این v هم در معادلهٔ (۵ ـ ۴۸) و هم در شرایط تکمیلی همراه صدق می‌کند. حال باید از فرمول (۵ ـ ۴۷) استفاده کنیم و جواب مسئلهٔ اولیه را به‌دست آوریم. منحنی C در صفحهٔ (ξ, η) خط $\xi = \eta$ است. ابتدا اجزاء مورد نیاز را در (۵ ـ ۴۷) معین می‌کنیم.

$$[v_\xi]_{\xi=\eta} = \frac{\sqrt{k}(\xi - \beta)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}}[J'_0(\lambda)]_{\xi=\eta}$$

$$[v_\eta]_{\xi=\eta} = \frac{\sqrt{k}(\xi - \alpha)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}}[J'_0(\lambda)]_{\xi=\eta}$$

پس

$$[v_\xi - v_\eta]_{\xi=\eta} = \frac{\sqrt{k}(\alpha - \beta)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}}[J'_0(\lambda)]_{\xi=\eta}$$

از شرایط اولیهٔ مربوط به u داریم:

$$u(Q) = f(\beta),\ u(R) = f(\alpha),\ [u_\xi - u_\eta]_{\xi=\eta} = c^{-1}g(\xi).$$

از قرار دادن این مقادیر در (۵ ـ ۴۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{k}(\alpha - \beta)}{\sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}} J'_0\left(\sqrt{4k(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}\right) f(\tau)d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_\alpha^\beta J_0\left(\sqrt{4k(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}\right) g(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

از جایگزین کردن ξ و η به‌جای α و β و مجدداً قرار دادن متغیرهای اصلی x و t به‌جای آنها به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} G(x, t, \tau)d\tau$$

که در آن:

$$G(x,t,\tau)=\frac{-2\sqrt{k}ctf(\tau)J_0'\left(\sqrt{4k(\tau-x)^2-c^2t^2}\right)}{\sqrt{(\tau-x)^2-c^2t^2}}$$
$$+c^{-1}g(\tau)J_0\left(\sqrt{4k(\tau-x)^2-c^2t^2}\right).$$

تمرین ۵ ـ ۶

مسائل زیر را حل کنید.

1. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+u_x+u_y=xy,$
   $u(x,0)=\sin x,\ u_y(x,0)=x.$

2. $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}+7u_y=\sin x,$
   $u(x,0)=x,\quad u_y(x,0)=x^2.$

3. $u_{xx}+10u_{xy}+9u_{yy}+u_y=xy,$
   $u(0,y)=y^2,\quad u_x(0,y)=y^3.$

4. $3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}+u_y+u=x\sin y,$
   $u(x,0)=x,\quad u_y(x,0)=\cos x.$

5. $u_t=c^2u_{xx}+2u_x+xt^2,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0,$
   $u(x,0)=e^x.$

6. $u_{tt}+2u_t=u_{xx}+4u_x+u+xt,\ t>0,\ x\in\mathbb{R},$
   $u(x,0)=x^2,\quad u_t(x,0)=x.$

7. $u_{xx}+u_{yy}+2u_x+4u_y+u=xy,\ x>0,\ y>0,$
   $u(0,y)=e^{-y},\quad u(x,0)=x.$

۶

بررسی کیفی جواب‌های معادلات دیفرانسیل

در این فصل به بررسی وجود و یکتایی جواب معادلات حرارت، لاپلاس و موج می‌پردازیم و بعضی از رفتارهای این معادلات، نظیر اصل ماکزیمم در معادلات حرارت و لاپلاس را بیان می‌کنیم.

۶ ـ ۱ معادلهٔ لاپلاس

معادلهٔ لاپلاس در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی ظاهر می‌شود. در واقع معادلهٔ لاپلاس بیانگر حالات تعادل است. برای مثال وقتی انتقال حرارت در یک جسم به حالت تعادل برسد، جواب معادلهٔ لاپلاس دما را در نقاط مختلف نشان می‌دهد. اکنون اگر $u(x)$ را نشان دهندهٔ چگالی یک مادهٔ شیمیایی در محیط بگیریم، وقتی در حالت تعادل باشیم، میزان شار خروجی مادهٔ شیمیایی مذکور از هر ناحیهٔ V برابر صفر است.

$$\int_{\partial V} F\cdot \vec{n}\,ds = 0 \tag{۶ ـ ۱}$$

F شار چگالی را نشان می‌دهد که متناسب با گرادیان تابع u است.

$$F = -a\nabla u, \qquad (a > 0)$$

با توجه به قضیهٔ دیورژانس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\int_V \operatorname{div} F\,dx = \int_{\partial V} F\cdot \vec{n}\,ds = 0$$

از آنجاکه ناحیهٔ V دلخواه است نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{div} F = 0$$

به‌عبارت دیگر:

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0.$$

اگر تابع u در ناحیهٔ Ω در معادلهٔ لاپلاس صدق کند، آن را یک تابع هارمونیک می‌نامند. یکی از خواص مهم تابع هارمونیک این است که ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه می‌گیرد. این خاصیت به یکتایی جواب معادلهٔ لاپلاس و پیوستگی جواب به شرایط مرزی منجر می‌شود.

قضیه (اصل ماکزیمم) ۶ ـ ۱. *اگر $u \in C^2(\Omega)$ یک تابع هارمونیک در ناحیهٔ Ω باشد، که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیهٔ باز و هموار است. آنگاه:*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

برهان. برای $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$، قرار دهید:

$$v(x) = u(x) + \varepsilon(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

در این صورت:

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon\Delta(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = 2\varepsilon n > 0$$

تابع v ماکزیمم خود را روی $\partial\Omega$ می‌گیرد. زیرا اگر در نقطهٔ درونی $x_0 \in \Omega$، ماکزیمم v اتخاذ شود، بنابر آزمون مشتق دوم باید تمام مشتقات جزیی $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) = 0$ و همچنین $\Delta v(x_0) \le 0$، که با رابطهٔ بالا تناقض دارد. بنابراین برای هر $x \in \Omega$،

$$u(x) \le v(x) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} v(x) = \max_{x\in\partial\Omega} v(x) \le M + \varepsilon C$$

که $M = \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$ و $C = \max\limits_{x\in\partial\Omega}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$. حال اگر $\varepsilon \to 0$ نتیجه خواهد شد:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \le M.$$

■

تذکر۶ ـ ۲. اگر به‌جای u تابع $-u$ را در قضیهٔ قبل قرار دهیم، نتیجه خواهد شد که مینیمم تابع هارمونیک نیز روی مرز ناحیه اتخاذ می‌شود.

تذکر۶ ـ ۳. اثبات قضیهٔ قبل برای توابعی که در نامساوی $\Delta u \ge 0$ صدق کنند، نیز معتبر است. یعنی هر تابع u با شرط $\Delta u \ge 0$ در ناحیهٔ Ω، ماکزیمم خود را روی $\partial\Omega$ می‌گیرد. همچنین اگر $\Delta u \le 0$ در Ω، آنگاه مینیمم u روی $\partial\Omega$ گرفته می‌شود.

نتیجه۶ ـ ۴. اگر $u \in C^2(\Omega)$ یک تابع هارمونیک باشد، آنگاه:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$$

برهان. ماکزیمم تابع $|u|$ برابر ماکزیمم u است یا ماکزیمم $-u$، که متناظر همان مینیمم u باشد. با توجه به قضیهٔ ۶ ـ ۱ و تذکر ۶ ـ ۲ اثبات کامل می‌شود. ■

قضیه (یکتایی جواب معادلهٔ لاپلاس) ۶ ـ ۵. *مسئلهٔ زیر حداکثر یک جواب دارد.*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{در } \Omega \\ u = g & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۶ ـ ۲)$$

برهان. اگر u_1 و u_2 دو جواب مسئلهٔ فوق باشند، آنگاه $v = u_1 - u_2$ در مسئلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{در } \Omega \\ v = 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

بنابر نتیجهٔ ۶ ـ ۴،

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |v(x)| = 0$$

یعنی:

$$u_1 - u_2 = v = 0 \qquad \text{در } \Omega$$

■

قضیه (پیوستگی جواب نسبت به شرط مرزی) ۶ ـ ۶. *جواب مسئلهٔ (۶ ـ ۲) به‌طور پیوسته وابسته به شرایط مرزی است، یعنی اگر تابع g مقدار کمی تغییر کند، جواب مسئله نیز تغییرات کوچکی خواهد داشت.*

برهان. فرض کنید u_1 و u_2 دو جواب مسئله برای توابع g_1 و g_2 باشد، در این‌صورت $v = u_1 - u_2$ در مسئلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{در } \Omega \\ v = g_1 - g_2 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

بنابر اصل ماکزیمم:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |g_1(x) - g_2(x)|$$

بنابراین اگر $|g_1(x) - g_2(x)| < \varepsilon$ روی $\partial\Omega$، آنگاه:

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon \qquad \text{در } \Omega$$

■

در پایان این بخش خاصیت فیزیکی تابع هارمونیک به‌طور واضح‌تر نشان داده می‌شود. خاصیت مقدار میانگین نشان می‌دهد که تابع هارمونیک در هر نقطه برابر میانگین مقادیر اطرافش است، که به نوعی بیانگر حالت تعادل در یک پدیدهٔ فیزیکی است. در ادامهٔ این بخش با استفاده از این خاصیت، اصل ماکزیمم قوی اثبات می‌شود که نشان می‌دهد ماکزیمم تابع هارمونیک در درون ناحیه نمی‌تواند اتخاذ شود و حتماً روی مرز گرفته می‌شود.

قضیه ۶ ـ ۷. *اگر تابع u در ناحیهٔ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ هارمونیک باشد، آنگاه برای هر گوی $B(x,r) \subseteq \Omega$،*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(x,r)} u(y)ds = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x,r)} u(y)dy$$

برهان. تابع v را مزدوج هارمونیک u می‌گیریم. در این صورت $f = u + iv$ در ناحیهٔ Ω تحلیلی است. بنابر قضیهٔ کوشی برای توابع تحلیلی نتیجه می‌شود:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

با تغییر متغیر $z = z_\circ + re^{i\theta}$ نتیجه می‌شود:

$$f(z_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} f(z_\circ + re^{i\theta})d\theta.$$

اگر قسمت حقیقی رابطهٔ فوق را در نقطهٔ $x = z_\circ$ در نظر بگیریم:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} u(x + (r\cos\theta, r\sin\theta))d\theta,$$

بنابر تعریف انتگرال روی خم برابر مقدار زیر خواهد بود.

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(x,r)} u(y)ds$$

اکنون توجه کنید که:

$$\int_{B(x,r)} u(y)dy = \int_\circ^r \int_{\partial B(x,t)} u(y)dsdt = \int_\circ^r 2\pi t u(x)dt = \pi r^2 u(x).$$

■

تذکر۶ ـ ۸. این قضیه در ابعاد دیگر نیز صحیح است، متنها به جای $2\pi r$ در تساوی اول، حجم $(n-1)$ ـ بعدی کره $\partial B(x,r)$ را بایدِ قرار داد و در تساوی دوم به جای πr^2، حجم n ـ بعدی گوی $B(x,r)$.

قضیه (اصل ماکزیمم قوی) ۶ ـ ۹. *اگر Ω ناحیهٔ همبند و u تابع هارمونیک درون آن باشد. به‌علاوه $x_\circ \in \Omega$ یک نقطهٔ درونی باشد که:*

$$u(x_\circ) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$$

آنگاه تابع u در Ω ثابت است.

برهان. قضیه را در بعد ۲ ثابت می‌کنیم، ولی با توجه به تذکر ۶ ـ ۸ همین اثبات برای ابعاد بالاتر نیز صحیح است. فرض کنید $M = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$ و $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی که $u(x_\circ) = M$.
در این صورت می‌توان گوی $B(x_\circ, r) \subseteq \Omega$ را انتخاب کرد، پس

$$M = u(x_\circ) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x_\circ,r)} u(y)dy \le \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x_\circ,r)} Mdy = M$$

بنابراین تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که $u \equiv M$ در $B(x_\circ, r)$. بنابراین مجموعه

$$A = \{\, x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

باز است. از طرفی پیوستگی u باعث می‌شود این مجموعه بسته نیز باشد، از همبندی Ω نتیجه می‌شود که $A = \Omega$، یعنی u درون Ω برابر مقدار ثابت M است. ■

تذکر ۶ ـ ۱۰. نتیجهٔ مشابه برای مینیمم تابع هارمونیک نیز برقرار است.

در پایان نشان می‌دهیم که معادلهٔ لاپلاس جواب کران‌دار غیربدیهی ندارد که در سرتاسر ناحیهٔ $\mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد.

قضیه (لیوویل) ۶ ـ ۱۱. *اگر $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع هارمونیک و کران‌دار باشد، آنگاه u یک تابع ثابت است.*

برهان. قضیه را در بعد ۲ اثبات می‌کنیم، ولی با توجه به تذکر ۶ ـ ۸ همین اثبات برای ابعاد بالاتر نیز صحیح است. فرض کنیم $|u(x)| < M$ برای هر $x \in \mathbb{R}^2$. از طرفی $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ نیز یک تابع هارمونیک است. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای هر عدد دلخواه $r > 0$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y)dy$$

بنابر قضیهٔ گرین می‌توان نوشت:

$$\int_{B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y)dy = \int_{\partial B(x_0,r)} u dx_2 = \int_0^{2\pi} u\big(x_0 + (r\cos\theta, r\sin\theta)\big) r\cos\theta d\theta$$

بنابراین:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0)\right| \le \frac{1}{\pi r^2}\left|\int_{B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y)dy\right| \le \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} M r d\theta = \frac{2M}{r}$$

درنتیجه اگر $r \to \infty$ نتیجه می‌شود $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = 0$. به‌طور مشابه $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_0) = 0$ و چون x_0 را نقطهٔ دلخواهی گرفتیم، بنابراین مشتقات u در سرتاسر $\mathbb{R}^2$ برابر صفر است. یعنی u یک تابع ثابت است. ■

تمرین ۶ ـ ۱

۱. نشان دهید که اگر:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} = 0, \qquad 0 < x < 1$$

تابع u ماکزیمم خود را در بازهٔ $0 \le x \le 1$ در نقاط $x = 0$ یا $x = 1$ می‌گیرد.

۲. نشان دهید که اگر:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

که $b(x) < 0$، $u(0) \leq 0$ و $u(1) \leq 0$، آنگاه $u(x) \leq 0$ برای هر $0 \leq x \leq 1$.

(**راهنمایی:** نشان دهید مقدار ماکزیمم u نمی‌تواند مثبت باشد.)

۳. ثابت کنید اگر تابع u در ناحیهٔ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ در معادلهٔ زیر صدق کند،

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} = F(x).$$

که $F \geq 0$، در این صورت u ماکزیمم خود را در درون ناحیهٔ Ω نمی‌تواند اتخاذ کند.

۴. اگر تابع $u(x,y)$ در ناحیهٔ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ در معادلهٔ زیر صدق کند،

$$\begin{cases} u_{xx} + e^x u_{yy} - e^{x+y}u = 0 & \text{در } \Omega \\ u \leq 0 & \text{روی } \partial\Omega \end{cases}$$

ثابت کنید $u(x,y) \leq 0$ در سرتاسر Ω.

۶ ـ ۲ معادلهٔ حرارت

معادلهٔ حرارت که یک معادلهٔ انتشاری است، تغییرات چگالی یک کمیت شیمیایی یا تغییرات حرارت یک شیء را نسبت به زمان نشان می‌دهد. اگر V ناحیه‌ای هموار باشد، نرخ تغییرات کل کمیت u درون V برابر است با منفی شاری که از مرز ∂V می‌گذرد، یعنی

$$\frac{d}{dt}\int_V u dx = -\int_{\partial V} F \cdot \vec{n}\, ds \qquad (۶ ـ ۳)$$

$\vec{n}$ بردار عمود خارجی سطح ∂V است و F جریان چگالی را نشان می‌دهد. در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی F متناسب جهت عکس گرادیان u است. زیرا جریان از نواحی با کمیت بیشتر به سمت نواحی با کمیت کمتر اتفاق می‌افتد.

$$F = -a\nabla u \qquad (a > 0).$$

با جایگزین کردن این تساوی در رابطهٔ (۶ ـ ۳) و با توجه به قضیهٔ دیورژانس

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F\cdot \vec{n}\, ds$$

نتیجه می‌شود:

$$\int_V u_t dx = \int_V \operatorname{div}(a\nabla u) dx = \int_V a\Delta u dx$$

رابطهٔ اخیر برای هر ناحیهٔ دلخواه V برقرار است، بنابراین

$$u_t = c^{2}\Delta u \tag{۶ ـ ۴}$$

که $a = c^{2}$. این معادله با تغییر t به $-t$ شکل خود را از دست خواهد داد. (ضریب ثابت، منفی می‌شود) از نظر فیزیکی این مطلب بدین صورت تعبیر می‌شود که معادلهٔ حرارت نسبت به زمان برگشت ناپذیر است. یعنی با استفاده از معادلهٔ (۶ ـ ۴) تنها نسبت به آینده می‌توان اطلاعاتی را به‌دست آورد و هر نوع اطلاعات در مورد گذشته با افزایش زمان از بین می‌رود.

تذکر ۶ ـ ۱۲. اگر دما در یک جسم به حالت تعادل رسیده باشد، در این صورت تغییرات دما نسبت به زمان یعنی u_t، برابر صفر است. در نتیجه معادلهٔ (۶ ـ ۴) در حالت تعادل، به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود.

در اکثر مسائل، معادلهٔ (۶ ـ ۴) روی میدان استوانه‌ای $U_T = U \times (0, T]$ در نظر گرفته می‌شود که $T > 0$ عددی ثابت و U میدان کران‌دار و بازی در $\mathbb{R}^n$ است. مرز U_T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Gamma_T := \overline{U}_T - U_T = \overline{U} \times \{t = 0\} \cup \partial U \times [0, T]$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که جواب معادلهٔ حرارت در ناحیهٔ U_T، ماکزیمم و مینیمم خود را روی مرز Γ_T اتخاذ می‌کند. این خاصیت به اصل ماکزیمم معروف است.

قضیه (اصل ماکزیمم) ۶ ـ ۱۳. *فرض کنید U میدان باز و کران‌دار در $\mathbb{R}^n$ بوده و $u \in C(\overline{U}_T) \cap C^{2}(U_T)$ یک جواب معادلهٔ حرارت (۶ ـ ۴) باشد. در این صورت:*

$$\max_{\overline{U}_T} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t). \tag{۶ ـ ۵}$$

برهان. برای $\varepsilon > 0$ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon(x_1^{2} + \cdots + x_n^{2})$$

که $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$. در این صورت:

$$v_t - c^2 \Delta v = -2\varepsilon n c^2 < 0 \tag{۶ ـ ۶}$$

اگر ماکزیمم v در نقطه‌ای از U_T اتفاق بیفتد، بنابر آزمون مشتق دوم، در آن نقطه تمام مشتقات جزیی $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$، $v_t \geq 0$ و به علاوه $\Delta v \leq 0$. (اگر ماکزیمم در نقطه‌ای از $U \times (0, T)$ به‌دست آید، $v_t = 0$ و اگر در نقطه‌ای از $U \times \{t = T\}$، تنها می‌توان نتیجه گرفت $v_t \geq 0$.) در هر صورت $v_t - c^2 \Delta v \geq 0$ که با رابطهٔ (۶ ـ ۶) تناقض دارد. بنابراین v ماکزیمم خود را در Γ_T می‌گیرد. اکنون فرض کنید $M = \max\limits_{\Gamma_T} u(x,t)$ و $C = \max\limits_{x \in \overline{U}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$، آنگاه

$$\max_{\overline{U}_T} v(x,t) = \max_{\Gamma_T} v(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} u(x,t) + \varepsilon \max_{\Gamma_T} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \leq M + \varepsilon C$$

درنتیجه برای هر $(x,t) \in \overline{U}_T$،

$$u(x,t) \leq v(x,t) \leq M + \varepsilon C$$

چون ε یک مقدار دلخواه است، پس:

$$\max_{\overline{U}_T} u(x,t) \leq M.$$

■

نتیجه۶ ـ ۱۴. اگر $u \in C(\overline{U}_T) \cap C^2(U_T)$ جواب معادلهٔ حرارت باشد، آنگاه

$$\min_{\overline{U}_T} u(x,t) = \min_{\Gamma_T} u(x,t). \tag{۶ ـ ۷}$$

همچنین:

$$\max_{\overline{U}_T} |u(x,t)| = \max_{\Gamma_T} |u(x,t)|. \tag{۶ ـ ۸}$$

برهان. با قرار دادن $-u$ به‌جای u در قضیهٔ۶ ـ ۱۳، رابطهٔ اول نتیجه می‌شود. رابطهٔ دوم نیز از روابط ماکزیمم و مینیمم (۶ ـ ۵) و (۶ ـ ۷) به‌دست می‌آید. ■

نتیجه۶ ـ ۱۵. مسئله با شرایط مرزی زیر حداکثر یک جواب در $C(\overline{U}_T) \cap C^2(U_T)$ دارد.

$$\begin{aligned} u_t - c^2 \Delta u &= f \qquad \text{در } U_T \\ u &= g \qquad \text{روی } \Gamma_T \end{aligned}$$

برهان. اگر u و $\tilde{u}$ دو جواب این مسئله باشند، رابطهٔ (۶ ـ ۸) را برای $w = u - \tilde{u}$ به کار برید،

مشابه قضیهٔ ۶ ـ ۵. ■

در اثبات قضیهٔ ۶ ـ ۱۳ شرط کران‌داری ناحیهٔ U ضروری است، زیرا در غیر این صورت مقدار C بینهایت خواهد شد. قضیهٔ زیر اصل ماکزیمم معادلهٔ حرارت را برای میدان بی‌کران $\mathbb{R}^n \times (\circ, T)$، که $\circ < T \leq \infty$، اثبات می‌کند. در این حالت شرط کران‌داری جواب را باید جایگزین شرط کران‌داری ناحیه قرار دهیم.

قضیه۶ ـ ۱۶. *فرض کنید $u \in C(\mathbb{R}^n \times [\circ, T)) \cap C^{۲}(\mathbb{R}^n \times (\circ, T))$ یک جواب کران‌دار معادلهٔ حرارت زیر باشد،*

$$\begin{aligned} u_t - c^{۲}\Delta u &= \circ \qquad \text{در } \mathbb{R}^n \times (\circ, T) \\ u &= g \qquad \text{روی } \mathbb{R}^n \times \{t = \circ\} \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [\circ, T)} u(x,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x).$$

برهان. قرار دهید $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [\circ, T)} u$ که عددی متناهی است، زیرا بنابر فرض جواب u کران‌دار است. همچنین قرار دهید $N = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} g$، در این صورت $M \leq N$. اکنون برای $\varepsilon > \circ$، تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(۲nc^{۲}t + x_۱^{۲} + \cdots + x_n^{۲})$$

در این صورت با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که:

$$v_t - c^{۲}\Delta v = \circ \qquad \text{در } \mathbb{R}^n \times (\circ, T)$$

مقدار ثابت $r > \circ$ را در نظر بگیرید به گونه‌ای که $\frac{M-N}{\varepsilon} < r^{۲}$ و قرار دهید $U = B(\circ, r)$. بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۱۳،

$$\max_{\overline{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$$

از طرفی:

$$v(x,\circ) = u(x,\circ) - \varepsilon(x_۱^{۲} + \cdots + x_n^{۲}) \leq g(x) \leq N$$

و برای $x \notin U$ که $x_۱^{۲} + \cdots + x_n^{۲} \geq r^{۲}$ است،

$$v(x,t) \leq u(x,t) - \varepsilon(۲nc^{۲}t + r^{۲}) \leq M - \varepsilon r^{۲} < N$$

در نتیجه:

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T)} v \le N$$

بنابراین برای (x,t) ثابت داریم:

$$u(x,t) = v(x,t) + \varepsilon(2nc^2t + x_1^2 + \cdots + x_n^2) \le N + \varepsilon(2nc^2t + x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

اگر ε به صفر میل کند، نتیجه می‌شود $u(x,t) \le N$، درنتیجه

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T)} u(x,t) \le N$$

بنابراین $M = N$. ■

نتیجه۶ ـ ۱۷. مسئلهٔ زیر حداکثر دارای یک جواب کران‌دار است.

$$\begin{aligned} u_t - c^2\Delta u &= f \qquad \text{در } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) &= g \qquad \text{روی } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}$$

برهان. اصل ماکزیمم جوابهای کران‌دار، روی نواحی بیکران که در قضیهٔ قبل بیان شد، به راحتی یکتایی جواب کران‌دار را مشابه نتیجهٔ۶ ـ ۱۵ اثبات می‌کند. ■

تذکر۶ ـ ۱۸. چنانچه شرط کران‌دار بودن u را حذف کنیم، یگانگی جواب ممکن است برقرار نباشد. برای مثال،

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{1}{t^2}}$$

در معادلهٔ حرارت، $u_t - u_{xx} = 0$، در بعد یک همراه با شرط اولیهٔ $u(x,0) = 0$ صدق می‌کند. جواب دیگر این معادله، $u(x,t) \equiv 0$ است. قابل توجه است که برای برقراری یکتایی جواب می‌توان شرط کران‌داری u را با شرط $|u(x,t)| < Me^{\alpha x^2}$ عوض کرد که α و M اعدادی مثبت هستند. همچنین اصل ماکزیمم قضیهٔ ۶ ـ ۱۶، با این شرط به جای شرط کران‌داری جواب u درست است.

تمرین ۶ ـ ۲

۱. ثابت کنید تابع معرفی شده در تذکر ۶ ـ ۱۸، جواب معادلهٔ حرارت در $|x| < 1$ و $t > 0$ است.

۲. نشان دهید در قضیهٔ ٦ ـ ۱۳ اگر تابع u به جای آنکه جواب معادلهٔ حرارت باشد، در شرط $u_t - c^2\Delta u \leq 0$ صدق کند اصل ماکزیمم همچنان برقرار است.

۳. اگر تابع $u(x,y,t)$ جواب مسئلهٔ زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
&u_t - c^2\Delta u + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0, \qquad t > 0,\ (x,y) \in \Omega \\
&u(x,y,0) \geq 0, \qquad (x,y) \in \Omega \\
&u(x,y,t) = 0 \qquad t > 0,\ (x,y) \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

در این صورت $u \geq 0$ برای هر $(x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty)$.

۴. معادلهٔ حرارت زیر را که در بعد یک است، در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&u_t - c^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad t > 0,\ a \leq x \leq b \\
&u(x,0) = g(x), \qquad a \leq x \leq b \\
&u(a,t) = \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t), \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

الف) اگر u و $\tilde{u}$ دو جواب مسئلهٔ فوق باشند، قرار دهید $w = u - \tilde{u}$ و تابع انرژی $e(t) = \int_a^b w^2(x,t)dx$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $e'(t) \leq 0$.

ب) ثابت کنید $e(t) = 0$ برای هر $t \geq 0$ و نتیجه بگیرید مسئلهٔ فوق جواب یکتا دارد.

پ) اگر شرایط مرزی مسئلهٔ فوق را با $u_x(a,t) = \alpha(t),\ u_x(b,t) = \beta(t)$ جایگزین کنیم، گزاره‌های قبل درست است.

ت) مسئله را در ابعاد بالاتر بازنویسی کنید و به‌طور مشابه اثبات دیگری برای نتیجهٔ ٦ ـ ۱۵ به‌دست آورید.

٦ ـ ۳ معادلهٔ حرارت یک میله

در این قسمت به بررسی جواب معادلهٔ حرارت در بعد یک می‌پردازیم.

$$
\begin{cases}
u_t - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\
u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}
\end{cases}
\qquad (٦ ـ ٩)
$$

اگر از معادلهٔ (٦ ـ ۹) نسبت به متغیر x تبدیل فوریه بگیریم، و قرار دهیم $U(w,t)=\mathcal{F}(u(x,t))$، نتیجه می‌شود:

$$U_t(w,t)=-c^2w^2U(w,t)$$
$$\hat{U}(w,0)=\mathcal{F}(g)=G(w)$$

جواب این معادلهٔ عبارت است از:

$$U(w,t)=G(w)e^{-c^2w^2t}$$

از طرفی داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-c^2w^2t})=\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$

در نتیجه:

$$u(x,t)=g(x)*\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}=\frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}dy \qquad (٦ ـ ۱۰)$$

نکتهٔ قابل توجه در محاسبات فوق این است که ممکن است تابع g تبدیل فوریه نداشته باشد و نتوان جواب مسئله را به ترتیب بالا به‌دست آورد. ولی با این حال قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که رابطهٔ (٦ ـ ۱۰) برای هر تابع پیوسته و کران‌دار g جواب معادلهٔ حرارت را نشان می‌دهد.

قضیه٦ ـ ۱۹. *فرض کنید g تابعی پیوسته و کران‌دار باشد. در این صورت*

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}g(y)dy$$

تنها جواب کران‌دار مسئلهٔ (٦ ـ ۹) است.

برهان. یکتایی جواب به کمک نتیجهٔ ٦ ـ ۱۷ برقرار است. اکنون تنها نشان می‌دهیم تابع $u(x,t)$ با ضابطهٔ فوق در مسئلهٔ (٦ ـ ۹) صدق می‌کند. قرار دهید $\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $t>0$ و $x\in\mathbb{R}$،

$$\Phi_t-c^2\Phi_{xx}=0$$

از طرفی مشتقات تابع $\Phi(x,t)$ برای هر t ثابت کران‌دار است، بنابراین

برای هر $t>0$ و $x\in\mathbb{R}$ $\qquad u_t-c^2u_{xx}=\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_t(x-y,t)-c^2\Phi_{xx}(x-y,t)]g(y)dy=0$

برای بررسی شرط مرزی، ابتدا توجه کنید برای هر $t > \circ$ رابطهٔ زیر برقرار است (تمرین ۲):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,t)dx = 1 \tag{۶ ـ ۱۱}$$

اکنون برای $x_\circ \in \mathbb{R}$ ثابت و $\varepsilon > \circ$، مقدار $\delta > \circ$ را انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که اگر $|y - x_\circ| < \delta$، داشته باشیم:

$$|g(y) - g(x_\circ)| < \varepsilon \tag{۶ ـ ۱۲}$$

در این صورت برای $|x - x_\circ| < \frac{\delta}{2}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x_\circ)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t)\big(g(y) - g(x_\circ)\big)dy \right| \\
&\le \int_{|y-x_\circ|<\delta} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_\circ)|dy \\
&\quad + \int_{|y-x_\circ|>\delta} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_\circ)|dy \\
&= I + J
\end{aligned}$$

با توجه به روابط (۶ ـ ۱۱) و (۶ ـ ۱۲) نتیجه می‌شود:

$$I \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t)dy = \varepsilon$$

از طرفی اگر $|x - x_\circ| < \frac{\delta}{2}$ و $|y - x_\circ| \ge \delta$ آنگاه:

$$|y - x_\circ| \le |y - x| + |x - x_\circ| \le |y - x| + \frac{\delta}{2} \le |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_\circ|$$

بنابراین $\frac{1}{2}|y - x_\circ| \le |y - x|$، درنتیجه اگر $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$،

$$\begin{aligned}
J &\le 2M \int_{|y-x_\circ|>\delta} \Phi(x-y,t)dy = \frac{M}{\sqrt{c^2\pi t}} \int_{|y-x_\circ|>\delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}} dy \\
&\le \frac{M}{\sqrt{c^2\pi t}} \int_{|y-x_\circ|>\delta} e^{-\frac{(y-x_\circ)^2}{16c^2t}} dy = \frac{8M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{c^2t}}}^{\infty} e^{-r^2} dr
\end{aligned}$$

چون مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} e^{-r^2} dr$ کران‌دار است، پس J به سمت صفر میل می‌کند وقتی $t \to \circ^+$. درنتیجه اگر $|x - x_\circ| < \frac{\delta}{2}$ و t به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه $|u(x,t) - g(x_\circ)| < 2\varepsilon$. ■

تذکر۶ ـ ۲۰. اگر تابع g کران‌دار، پیوسته و $g \geq 0$ و $g \not\equiv 0$، آنگاه تنها جواب مسئلهٔ حرارت که به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} g(y)dy$$

برای همه نقاط $x \in \mathbb{R}$ و $t > 0$، مثبت است. این پدیده بدین صورت تفسیر می‌شود که سرعت پخش حرارت نامتناهی است. یعنی اگر دمای اولیه نامنفی باشد و تنها در بعضی از نقاط مثبت باشد، آنگاه دما در هر لحظه بعد، در همه‌جا مثبت خواهد شد. این پدیده در ابعاد بالاتر نیز درست است. برای مثال اگر دمای یک کوه یخ را در یک نقطه بالا ببریم، در لحظهٔ بعد دما در همه نقاط بیشتر از صفر خواهد شد!

تذکر۶ ـ ۲۱. قضیهٔ فوق به‌طور مشابه در هر فضای nـ بعدی برقرار است. با این تفاوت که شکل جواب به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = (4c^2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4c^2 t}} g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

قضیهٔ زیر برای حل مسائل انتقال حرارت روی میدان مکان $[0,\infty)$ مفید است.

قضیه۶ ـ ۲۲. *اگر تابع g در مسئلهٔ انتقال حرارت*

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = g(x).$$

فرد باشد، آنگاه برای هر t ثابت $u(x,t)$، نسبت به x فرد است. همچنین اگر g زوج باشد، این جواب نسبت به x زوج است.

برهان. فرض کنید g تابعی فرد است، $g(-x) = -g(x)$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
u(-x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\frac{(-x-y)^2}{4c^2 t}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(-z) e^{-\frac{(-x+z)^2}{4c^2 t}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -g(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4c^2 t}} dz = -u(x,t)
\end{aligned}$$

پس u نسبت به x فرد است. قسمت دوم قضیه به‌طور مشابه اثبات می‌شود. ■

در مثال بعدی خواهیم دید که چگونه به کمک قضیهٔ فوق می‌توان مسئلهٔ انتقال حرارت روی میدان مکان $[0,\infty)$ را حل کرد.

مثال۶ ـ ۱. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad 0 \leq x < \infty,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = g(x), \qquad u(0,t) = 0.$$

حل. اگر تابع $G(x)$ را توسعهٔ فرد تابع $g(x)$ بگیریم، آنگاه با توجه به قضیهٔ ۶ ـ ۲۲ جواب مسئلهٔ

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = G(x),$$

تابعی فرد است و درنتیجه در رابطهٔ $u(0,t) = 0$ صدق می‌کند. بنابراین جواب این مسئله در $x \geq 0$ همان جواب مورد نظر است.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} G(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} g(y)dy - \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} g(-y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4c^2 t}}\right) g(y)dy \end{aligned}$$

تمرین ۶ ـ ۳

۱. ثابت کنید تابع معرفی شده در تذکر ۶ ـ ۱۸، جواب معادلهٔ حرارت در $|x| < 1$ و $t > 0$ است.

۲. رابطهٔ (۶ ـ ۱۱) را ثابت کنید.

۳. فرمول انتگرالی جواب معادلهٔ زیر را برای هر مقدار ثابت c به‌دست آورید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + cu = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

۴. به کمک قضیهٔ ۶ ـ ۲۲ فرمول جواب مسئلهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad 0 \leq x < \infty,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = g(x), \qquad u_x(0,t) = 0$$

۵. اگر تابع $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $g(0) = 0$ نشان دهید، فرمول

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)\,ds$$

جواب معادلهٔ حرارت زیر است.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u(0,t) = g(t) & t > 0 \end{cases}$$

(راهنمایی: قرار دهید $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ و تابع v را به‌صورت یک تابع فرد توسعه دهید و از اصل دوهامل استفاده کنید.)

٦. اگر تابع g شرایط تمرین قبل را داشته باشد، فرمول جواب مسئلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = h(x,t) & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u_x(0,t) = g(t) & t > 0 \end{cases}$$

٦ ـ ۴ موج یک بعدی و حل دالامبر

معادلهٔ موج در بعد یک که ارتعاش یک طناب را نشان می‌دهد، عبارت است از:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{٦ ـ ۱۳}$$

$u(x,t)$ نشان دهندهٔ مکان نقطهٔ x در زمان t است. ثابت c در این معادله، سرعت موج نامیده می‌شود. همان‌طور که در مثال ۵ ـ ۸ دیده شد، شکل عمومی جواب معادلهٔ موج به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct), \tag{٦ ـ ۱۴}$$

که در آن ϕ و ψ توابع مشتق‌پذیری هستند که به وسیلهٔ شرایط اولیه و مرزی معادلهٔ موج مشخص می‌شوند. اگر معادلهٔ را در سرتاسر ناحیهٔ $-\infty < x < \infty$، همراه با شرایط اولیهٔ زیر در نظر بگیریم:

$$u(x, \circ) = f(x), \qquad u_t(x, \circ) = g(x). \tag{۶ ـ ۱۵}$$

در این صورت با توجه به رابطهٔ (۶ ـ ۱۴) باید داشته باشیم:

$$f(x) = u(x, \circ) = \phi(x) + \psi(x)$$
$$g(x) = u_t(x, \circ) = c\phi'(x) - c\psi'(x)$$

با انتگرال گرفتن از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود،

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{۱}{c}\int_{\circ}^{x} g(\tau)d\tau + K$$

که $K = \phi(\circ) - \psi(\circ)$. بدین ترتیب توابع ϕ و ψ عبارت‌اند از:

$$\phi(x) = \frac{۱}{۲}f(x) + \frac{۱}{۲c}\int_{\circ}^{x} g(\tau)d\tau + \frac{K}{۲} \tag{۶ ـ ۱۶}$$

$$\psi(x) = \frac{۱}{۲}f(x) - \frac{۱}{۲c}\int_{\circ}^{x} g(\tau)d\tau - \frac{K}{۲} \tag{۶ ـ ۱۷}$$

بنابراین جواب مسئله برابر است با:

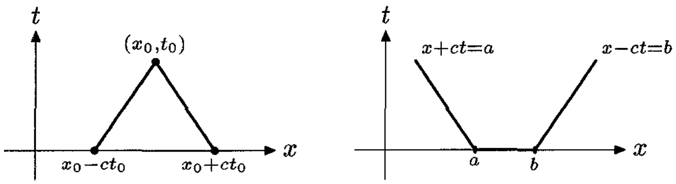
$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau. \tag{۶ ـ ۱۸}$$

این شکل جواب معادلهٔ موج، جواب دالامبر نامیده می‌شود. با مشتق گرفتن از تابع $u(x,t)$، به‌راحتی می‌توان دید که در معادلهٔ موج (۶ ـ ۱۳) با شرایط اولیهٔ (۶ ـ ۱۵) صدق می‌کند. برای این امر تنها لازم است تابع f دوبار و تابع g یک‌بار مشتق‌پذیر باشند. روند پیدا کردن جواب، یکتایی جواب معادله را نشان می‌دهد.

اکنون نقطهٔ $P = (x_\circ, t_\circ)$ را با $t_\circ > \circ$ در صفحهٔ (x,t) درنظر بگیرید. از این نقطه خطوط مشخصه را رسم کنید. این خطوط محور x ها را در نقاط $x_\circ - ct_\circ$ و $x_\circ + ct_\circ$ قطع می‌کنند. به فاصلهٔ $D_\circ = [x_\circ - ct_\circ, x_\circ + ct_\circ]$ روی محور x ها و فرمول (۶ ـ ۱۸) توجه کنید. دیده می‌شود که $u(x_\circ, t_\circ)$ به مقدار g روی $D_\circ$ و مقدار f در نقاط مرزی $D_\circ$ وابسته است. به‌عبارت دیگر اگر مقدار f و g در خارج از این فاصله تغییر کند، مقدار $u(x_\circ, t_\circ)$ تغییری نخواهد کرد. به همین علت فاصلهٔ $D_\circ$ را دامنهٔ وابستگی نقطهٔ P گویند. (نمودار ۶ ـ ۱) به‌سادگی دیده می‌شود چنانچه نقطهٔ $P_۱ = (x_۱, t_۱)$ در داخل مثلث به رئوس

$(x_\circ, t_\circ)$، $(x_\circ - ct_\circ, \circ)$ و $(x_\circ + ct_\circ, \circ)$ قرار داشته باشد دامنهٔ وابستگی آن زیرمجموعه‌ای از $D_\circ$ است.

حال از جهت دیگری این مطلب را بررسی می‌کنیم. برای این منظور فاصلهٔ $I = [a, b]$ را روی محور x ها در نظر بگیرید و خطوط مشخصهٔ $x + ct = a$ و $x - ct = b$ را ترسیم کنید. ناحیهٔ بین این خطوط را D_I بنامید. این ناحیه تحت تأثیر بازهٔ I است، بدین معنا که اگر مقادیر f و g تنها در این فاصله تغییر کند، مقدار u تنها در نقاط واقع در ناحیهٔ D_I تغییر می‌کند. (نمودار ۶ ـ ۱) همچنین اگر نقطهٔ $P_۲ = (x_۲, t_۲)$ در خارج این ناحیه واقع باشد، مقدار شرایط اولیهٔ f و g روی I هیچ‌گونه تأثیری روی مقدار u در نقطهٔ $P_۲$ نخواهد داشت. به‌همین علت این ناحیه را میدان اثر بازهٔ I می‌نامند، و آن را بدین شکل می‌توان تعبیر کرد که سرعت پخش موج متناهی است، برخلاف معادلهٔ حرارت (تذکر ۶ ـ ۲۰ را ببینید).



نمودار۶ ـ ۱.

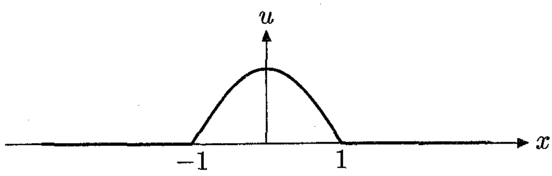
مثال۶ ـ ۲. معادلهٔ موج زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = \circ, \qquad -\infty < x < \infty,\ \circ < t\\
&u(x, \circ) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{۲}\right) & |x| < ۱\\ \circ & |x| \geq ۱ \end{cases}\\
&u_t(x, \circ) = \circ, \qquad -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

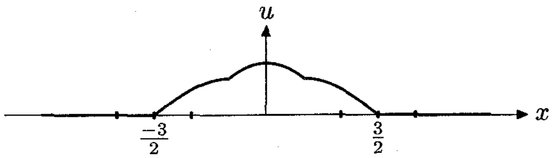
دامنهٔ اثر بازهٔ $[-۱, ۱]$، فاصله بین خطوط $x + t = -۱$ و $x - t = ۱$ است. بنابراین در لحظهٔ t، مقدار $u(x, t)$ برای نقاط x در خارج از بازهٔ $(-t - ۱, t + ۱)$ برابر صفر است. همچنین برای $t > ۱$، دامنهٔ وابستگی نقاطی که در بازهٔ $(۱ - t, t - ۱)$ قرار دارند، در ناحیهٔ $|x| > ۱$ قرار دارد، بنابراین مقدار $u(x, t)$ در این نقاط برابر صفر است. بنابراین در نقاط

$$\{(x, t) \mid |x| > t + ۱ \text{ یا } |x| < t - ۱\}$$

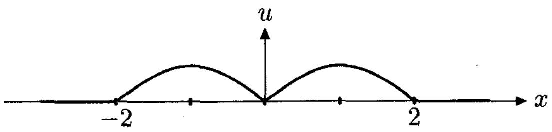
تساوی $u(x, t) = \circ$ برقرار است.



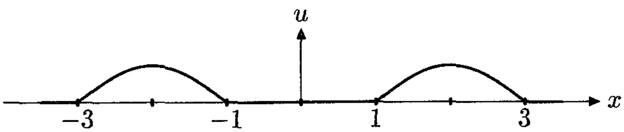
نمودار ۶ ـ ۲. نمودار تابع u در لحظهٔ $t = ۰$.



نمودار ۶ ـ ۳. نمودار تابع u در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۲}$.



نمودار ۶ ـ ۴. نمودار تابع u در لحظهٔ $t = ۱$.



نمودار ۶ ـ ۵. نمودار تابع u در لحظهٔ $t = ۲$.

اکنون اگر یک طناب مرتعش را در نظر بگیریم که یک طرف آن ثابت است و حرکت نمی‌کند، به معادلهٔ موج (۶ ـ ۱۳)، باید یک شرط مرزی اضافه کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به مکان نقاط این طناب بدین صورت خواهد بود:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < \infty,\ 0 < t \\
u(x, 0) = f(x) & 0 \le x < \infty \\
u_t(x, 0) = g(x) & 0 \le x < \infty \\
u(0, t) = 0 & 0 \le t
\end{cases}
\qquad (۶ ـ ۱۹)
$$

با توجه به رابطهٔ (۶ ـ ۱۴)، جواب این مسئله باید در رابطهٔ زیر صدق کند.

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct), \qquad 0 \le x, t$$

با استفاده از شرایط اولیه در نقاط $x \ge 0$، نتیجه می‌شود که روابط (۶ ـ ۱۶) و (۶ ـ ۱۷) تنها برای مقادیر $x > 0$ برقرار است. بنابراین فرمول دالامبر (۶ ـ ۱۸) برای $x > ct$ معتبر است. برای نقاط $x \le ct$، با استفاده از شرط مرزی معادله نتیجه می‌شود:

$$u(0,t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = 0$$

اگر قرار دهیم $\alpha = ct$، نتیجه می‌شود:

$$\psi(-\alpha) = -\phi(\alpha), \qquad \alpha \ge 0$$

بنابراین اگر $x \le ct$ با توجه به رابطهٔ (۶ ـ ۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\psi(x-ct) = -\phi(ct-x) = -\frac{1}{2}f(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} g(\tau)d\tau - \frac{K}{2}$$

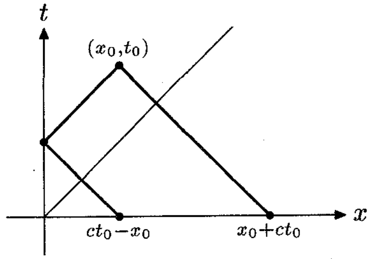
درنتیجه جواب معادلهٔ (۶ ـ ۱۹) بدین صورت است:

$$
u(x,t) = \begin{cases}
\frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau, & x > ct \\
\frac{1}{2}\big(f(x+ct) - f(ct-x)\big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau)d\tau, & x \le ct
\end{cases}
$$

به‌راحتی با جایگزینی در مسئله می‌توان دید که تابع فوق جواب معادلهٔ (۶ ـ ۱۹) است، به شرط آنکه

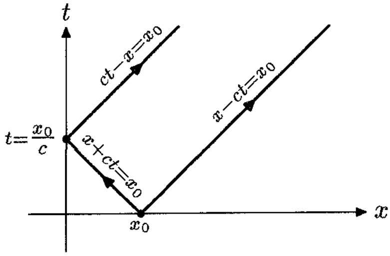
$$f(0) = f''(0) = g(0) = 0.$$

تذکر ۶ ـ ۲۳. اگر $x_0 > ct_0$ باشد، دامنهٔ وابستگی نقطهٔ (x_0, t_0) بازهٔ $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ است و اگر $x_0 < ct_0$، دامنهٔ وابستگی بازه $[ct_0 - x_0, x_0 + ct_0]$ خواهد بود.(نمودار ۶ ـ ۶)



نمودار ۶ ـ ۶. دامنهٔ وابستگی نقطهٔ $(x_\circ, t_\circ)$

همچنین میدان اثر نقطهٔ $(x_\circ, \circ)$ آن قسمت از ناحیهٔ بین خطوط $x + ct = x_\circ$ ،$x - ct = x_\circ$ و $ct - x = x_\circ$ است که در ناحیهٔ $x, t > \circ$ قرار می‌گیرند. (نمودار ۶ ـ ۷)



نمودار ۶ ـ ۷. میدان اثر نقطهٔ $x_\circ$

تذکر ۶ ـ ۲۴. اگر شرط مرزی مسئلهٔ ناهمگن باشد، یعنی:

$$u(\circ, t) = p(t), \qquad t \geq \circ$$

در این حالت نیز برای $x > ct$ فرمول دالامبر (۶ ـ ۱۸) همچنان برقرار است. برای $x \leq ct$، اگر شرط مرزی را به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$u(\circ, t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = p(t)$$

اکنون قرار دهید $\alpha = ct$، آنگاه:

$$\psi(-\alpha) = p\left(\frac{\alpha}{c}\right) - \phi(\alpha), \qquad \alpha > \circ$$

و برای $x \leq ct$ داریم:

$$\psi(x - ct) = p\left(t - \frac{x}{c}\right) - \phi(ct - x)$$

درنتیجه برای $x \leq ct$ جواب معادله عبارت است از:

$$u(x,t) = p\big(t - \frac{x}{c}\big) + \frac{۱}{۲}\big(f(x+ct) - f(ct-x)\big) + \frac{۱}{۲c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau)d\tau.$$

در این حالت نیز شرط آنکه رابطهٔ بالا در مسئله صدق کند، این است که:

$$p(\circ) = f(\circ), \quad p'(\circ) = g(\circ), \quad p''(\circ) = c^۲ f''(\circ)$$

مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد. در این روش با توسعهٔ معادله در سرتاسر اعداد حقیقی از فرمول دالامبر (۶ ـ ۱۸) استفاده می‌کنیم. در این جهت قضیهٔ زیر به کار می‌آید:

قضیه۶ ـ ۲۵. *فرض کنید در مسئلهٔ*

$$u_{tt} = c^۲ u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \circ < t$$
$$u(x,\circ) = f(x) \qquad u_t(x,\circ) = g(x)$$

تابع f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته و تابع g دارای مشتق مرتبه اول پیوسته باشد، در این صورت:

الف) *اگر f و g توابع فرد باشند، آنگاه برای t ثابت، $u(x,t)$ نسبت به x فرد است.*

ب) *اگر f و g توابع زوج باشند، آنگاه برای t ثابت، $u(x,t)$ نسبت به x زوج است.*

برهان. فرض کنید f و g فرد باشند. با توجه به (۶ ـ ۱۸) می‌نویسیم:

$$u(-x,t) = \frac{۱}{۲}\big(f(-x-ct) + f(-x+ct)\big) + \frac{۱}{۲c}\int_{-x-ct}^{-x+ct} g(s)ds$$
$$= -\frac{۱}{۲}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) - \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = -u(x,t)$$

به‌طور مشابه اگر f و g زوج باشند، می‌توان نتیجه گرفت: $u(-x,t) = u(x,t)$. ■

اکنون مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن جواب این مسئله به دنبال جوابی از مسئلهٔ زیر هستیم که $u(\circ,t) = \circ$ و برای $x \geq \circ$ داشته باشیم $F(x) = f(x)$ و $G(x) = g(x)$.

$$u_{tt} = c^۲ u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \ \circ \leq t$$
$$u(x,\circ) = F(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,\circ) = G(x) \qquad (۶ ـ ۲۰)$$

چون $u(x,t)$ پیوسته است، پس کافی است $u(x,t)$ نسبت به x تابعی فرد باشد. در این‌صورت باید $F(x)$ و $G(x)$ فرد باشند، تا طبق قضیهٔ فوق $u(x,t)$ نیز فرد شود. پس می‌گیریم:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\geq \circ \\ -f(-x) & x<\circ \end{cases} \quad \text{و} \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq \circ \\ -g(-x) & x<\circ \end{cases} \qquad (\text{۶ ـ ۲۱})$$

به این ترتیب، جواب مسئلهٔ (۶ ـ ۲۰) با F و G داده شده در (۶ ـ ۲۱) جواب مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) است. طبق (۶ ـ ۱۸) جواب (۶ ـ ۲۰) عبارت است از:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}\big(F(x+ct)+F(x-ct)\big)+\frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct}G(s)ds$$

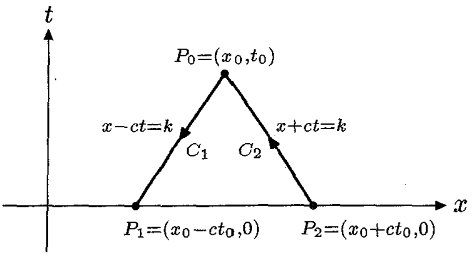
حال اگر مقادیر F و G را برحسب f و g منظور کنیم، همان فرمول قبلی به‌دست می‌آید.

تذکر۶ ـ ۲۶. اگر شرط مرزی مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) را با رابطهٔ $u_x(\circ,t)=\circ$ عوض کنیم، در این صورت باید توابع f و g را به‌صورت زوج توسعه دهیم. البته در این حالت به روش دالامبر و محاسبهٔ توابع ϕ و ψ نیز می‌توان به جواب رسید (تمرین ۷).

برای پیدا کردن جواب معادلهٔ موج ناهمگن در میدان مکان $(-\infty,\infty)$ یا $(\circ,\infty)$ می‌توان از اصل دوهامل استفاده کرد (مثال ۵ ـ ۱۵ را ببینید).

$$\begin{aligned} &u_{tt}-c^{۲}u_{xx}=h(x,t), && t\geq \circ \\ &u(x,\circ)=f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,\circ)=g(x) && \qquad (\text{۶ ـ ۲۲}) \end{aligned}$$

در اینجا به کمک قضیهٔ انتگرالگیری گرین، روش دیگری برای حل مسئلهٔ ناهمگن ارائه می‌کنیم. برای این منظور $P_\circ=(x_\circ,t_\circ)$ را نقطه‌ای در صفحه و $c_۱$ و $c_۲$ را دو خط با شیب‌های $\pm\frac{۱}{c}$ گذرا از نقطهٔ $P_\circ$ درنظر می‌گیریم. این دو خط محور x ها را در دو نقطهٔ $P_۱=(x_\circ-ct_\circ,\circ)$ و $P_۲=(x_\circ+ct_\circ,\circ)$ قطع می‌کنند. درون مثلث $P_\circ P_۱P_۲$ را ناحیهٔ R می‌نامیم.



نمودار۶ ـ ۸.

حال از معادلهٔ $u_{tt}^{2} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$ درون این ناحیه انتگرال می‌گیریم. با استفاده از قضیهٔ گرین نتیجه می‌شود:

$$\iint\limits_R h(x,t)dR = \iint\limits_R (u_{tt} - c^2 u_{xx})dR = \int_{\partial R} -c^2 u_x dt - u_t dx \qquad (۶ \text{ـ} ۲۳)$$

مرز ∂R از سه پاره خط P_0P_1، P_1P_2 و P_2P_0 تشکیل شده است. در امتداد P_1P_2 داریم $dt = 0$، بنابراین:

$$\int_{P_1P_2} -c^2 u_x dt - u_t dx = -\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_t(x, 0)dx$$

در راستای P_2P_0 داریم $dx = -cdt$، درنتیجه:

$$\int_{P_2P_0} -c^2 u_x dt - u_t dx = \int_{P_2P_0} cu_x dx + cu_t dt = \int_{P_2P_0} d(cu)$$
$$= cu(x_0, t_0) - cu(x_0 + ct_0, 0)$$

به‌طور مشابه:

$$\int_{P_0P_1} -c^2 u_x dt - u_t dx = cu(x_0, t_0) - cu(x_0 - ct_0, 0)$$

بنابراین معادلهٔ (۶ ـ ۲۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\iint\limits_R h(x,t)dR = 2cu(x_0, t_0) - cu(x_0 + ct_0, 0) - cu(x_0 - ct_0, 0) - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_t(x, 0)dx$$

اگر در این رابطه به جای (x_0, t_0)، (x,t) را قرار دهیم و شرایط اولیه را جایگزین کنیم، جواب بدین صورت حاصل خواهد شد:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau + \frac{1}{2c}\iint\limits_R h(x,t)dR$$
(۶ ـ ۲۴)

به‌راحتی با محاسبهٔ انتگرال تابع h در ناحیهٔ R می‌توان دید که این فرمول همان رابطهٔ (۵ ـ ۱۸) است.

تذکر۶ ـ ۲۷. چنانچه مسئلهٔ ناهمگن روی میدان $0 < x < \infty$ همراه با شرط مرزی $u(0,t) = 0$ یا $u_x(0,t) = 0$ برقرار باشد با توسعهٔ معادله به‌صورت زوج یا فرد، نتایج مشابهی حاصل خواهد شد. چنانچه این مسئله همراه با شرط مرزی ناهمگن $u(0,t) = p(t)$ یا $u_x(0,t) = q(t)$ باشد، با تغییر تابع مجهول $u(x,t) = v(x,t) + p(t)$ یا $u(x,t) = v(x,t) + q(t)x$ به حالت شرط مرزی همگن تبدیل می‌گردد.

مثال ۶ ـ ۳. مطلوب است حل مسئلهٔ

$$u_{tt}=u_{xx}+x^{2}t,\ x \geq 0, \quad t\geq 0$$
$$u(x,0)=\cos x,\ u_t(x,0)=x^{2}, \quad u_x(0,t)=e^{t^{2}}$$

حل. برای اینکه شرط مرزی همگن شود، قرار دهید: $u(x,t)=v(x,t)+xe^{t^{2}}$ در این صورت مسئلهٔ v را به‌صورت زیر داریم:

$$v_{tt}=v_{xx}+x^{2}t-2txe^{t^{2}}$$
$$v(x,0)=\cos x-x,\ v_t(x,0)=x^{2}, \quad v_x(0,t)=0$$

حال مسئلهٔ را نسبت به x روی $(-\infty,\infty)$ بسط زوج می‌دهیم تا به‌دست آوریم:

$$v_{tt}=v_{xx}+x^{2}t-2t|x|e^{t^{2}}, \qquad t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$$
$$v(x,0)=\cos x-|x|, \quad v_t(x,0)=x^{2}$$

جواب این مسئله و مسئلهٔ قبلی روی $[0,+\infty)$ یکسان است. با توجه به قضایای ۵ ـ ۲۰ و ۵ ـ ۲۱ جواب این مسئله عبارت است از:

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x+t)-|x+t|+\cos(x-t)-|x-t|\big)+\frac{1}{6}\big((x+t)^{3}-(x-t)^{3}\big)\\
&\quad+\int_0^t\frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)}(y^{2}s-2sye^{s^{2}})dyds\\
&=\cos x\cos t-\frac{1}{2}(|x+t|+|x-t|)+\frac{1}{3}(3xt^{2}+t^{3})\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t s\Big(\frac{1}{3}\big((x+t-s)^{3}-(x-t+s)^{3}\big)-[(x+t-s)^{2}-(x-t+s)^{2}]\Big)e^{s^{2}}ds\\
&=\cos x\cos t-\frac{1}{2}(|x+t|+|x-t|)+\frac{1}{3}(3xt^{2}+t^{3})\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t s\Big(x(t-s)^{2}+\frac{1}{3}(t-s)^{3}-4x(t-s)\Big)e^{s^{2}}ds\\
&=\cos x\cos t-\frac{1}{2}(|x+t|+|x-t|)+\frac{1}{3}(3xt^{2}+t^{3})-\frac{1}{2}(x+t)\\
&\quad-\frac{1}{2}\Big(xt^{2}+\frac{1}{3}t^{3}-4xt-x\Big)e^{t^{2}}+\frac{1}{2}(4x-2xt-t^{2}+1)\int_0^t e^{s^{2}}ds.
\end{aligned}$$

تمرین ۶ ـ ۴

۱. جواب هر یک از مسائل با مقادیر اولیهٔ زیر را برای $t\geq 0$ و $-\infty<x<\infty$ بیابید.

الف) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \log(1 + x^2), \quad u_t(x,0) = \sin x$

ب) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = x^3, \quad u_t(x,0) = x^2$

پ) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = e^x$

۲. جواب هر یک از مسائل ناهمگن با شرایط اولیهٔ زیر را برای $t \geq 0$، $-\infty < x < \infty$ بیابید.

الف) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = te^x, \quad u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x^2$

ب) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin x, \quad u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 1 + x$

پ) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2 + t^2, \quad u(x,0) = x^2 \quad u_t(x,0) = 0$

ت) $u_{tt} - 4u_{xx} = t^2 \sin x, \quad u(x,0) = \tan^{-1} x \quad u_t(x,0) = x^2$

۳. جواب مسئله با شرایط اولیه و مرزی زیر را بیابید.

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad 0 \leq x < \infty,\ t \geq 0$$

$$u(x,0) = x^4 \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = x^6 \quad \text{و} \quad u(0,t) = 0$$

۴. نشان دهید برای آنکه رابطهٔ ارائه شده در تذکر ۶ ـ ۲۴، جواب مسئله باشد باید

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = g(0), \quad p''(0) = c^2 f''(0)$$

۵. الف) هرگاه شرط مرزی مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) را به رابطهٔ $u_x(0,t) = 0$ تغییر دهیم، جواب مسئله را به روش دالامبر به‌دست آورید.

ب) جواب قسمت قبل را با توسعهٔ زوج مسئله پیدا کنید. جواب به‌دست آمده را با جواب قسمت قبل مقایسه کنید.

پ) تحت چه شرایطی برای توابع g, f و q، جواب به‌دست آمده در مسئلهٔ (۶ ـ ۱۹) صدق می‌کند؟

ت) اگر شرط مرزی ناهمگن $u_x(0,t) = q(t)$ استفاده شود، جواب مسئله به چه صورتی تغییر خواهد کرد؟

۶. با به‌کارگیری تکنیک قضیهٔ گرین، برای $x_0 < ct_0$ در درون ذوزنقه ایجاد شده توسط رئوس (x_0, t_0)، $(x_0 + ct_0, 0)$، $(ct_0 - x_0, 0)$ و $\left(0, t_0 - \frac{x_0}{c}\right)$ جواب مسئلهٔ (۶ ـ ۲۲) را در دامنهٔ $x \geq 0$، به روش دیگری محاسبه کنید.

۷. جواب مسئله با شرایط اولیه ـ مرزی زیر را بیابید.

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad 0 \le x < \infty,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = \sin x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \text{و} \quad u_x(0,t) = 0$$

۸. مسئلهٔ زیر را حل کنید.

$$u_{tt} - 9u_{xx} = e^t \cos x,\ x \ge 0,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \text{و} \quad u(0,t) = t^2.$$

۹. مسئلهٔ غیرهمگن با شرایط اولیه ـ مرزی زیر را حل کنید.

$$u_{tt} - 16u_{xx} = e^{t+x}, \qquad x \ge 0,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = \sin x \quad \text{و} \quad u_t(x,t) = \cos 2x \quad \text{و} \quad u_x(0,t) = \sin t.$$

۱۰. مطلوب است حل مسئله با شرایط اولیه ـ مرزی زیر.

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 \le x < \infty,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = \cos x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{و} \quad u(0,t) + u_x(0,t) = 0$$

۱۱. مسئلهٔ زیر را حل کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = tx,\ x \ge 0,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \text{و} \quad u(0,t) - u_x(0,t) = t.$$

۶ ـ ۵ تار مرتعش

در فصل ۳ معادلهٔ موج در یک دامنهٔ کران‌دار به روش جداسازی حل شد و جواب به‌صورت یک سری فوریه بیان شد. به کمک روش دالامبر نیز می‌توان این مسئله را حل کرد، منتها نسبت به دامنه‌های بی‌کران به محاسبات بیشتری نیاز است. با این حال مزیت این روش این است که در هر نقطه مقدار جواب به‌طور دقیق مشخص می‌شود.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \le x \le l$$
$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad 0 \le t \tag{۶ ـ ۲۵}$$

مشابه بخش قبل جواب عمومی معادلهٔ موج به‌صورت زیر است.

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

با استفاده از شرایط اولیهٔ معادله برای $0 \le x \le l$، داریم:

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$
$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x)$$

از این روابط، توابع ϕ و ψ در بازهٔ $0 \le x \le l$ مشخص می‌شوند:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\tau)d\tau + \frac{K}{2} \qquad 0 \le x \le l \tag{۶ ـ ۲۶}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\tau)d\tau - \frac{K}{2} \qquad 0 \le x \le l \tag{۶ ـ ۲۷}$$

بنابراین جواب معادله در حالت $0 \le x + ct \le l$ و $0 \le x - ct \le l$، به‌صورت زیر برقرار است:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau.$$

با استفاده از شرایط مرزی معادله، جواب در حالت‌های دیگر نیز به‌دست خواهد آمد:

$$u(0,t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = 0, \qquad t \ge 0 \tag{۶ ـ ۲۸}$$

$$u(l,t) = \phi(l+ct) + \psi(l-ct) = 0, \qquad t \ge 0 \tag{۶ ـ ۲۹}$$

با قرار دادن $\alpha = ct$ در رابطهٔ (۶ ـ ۲۸) نتیجه می‌شود:

$$\psi(-\alpha) = -\phi(\alpha), \qquad \alpha \ge 0 \tag{۶ ـ ۳۰}$$

همچنین اگر در رابطهٔ (۶ ـ ۲۹) قرار دهیم $\alpha = l + ct$، نتیجه می‌شود:

$$\phi(\alpha) = -\psi(2l - \alpha), \qquad \alpha \ge l \tag{۶ ـ ۳۱}$$

روابط (۶ ـ ۳۰) و (۶ ـ ۳۱) دامنهٔ تعریف ϕ و ψ را توسعه می‌دهد، طوری که $\phi(\alpha)$ برای هر مقدار $\alpha \ge 0$ تعریف شده است و $\psi(\alpha)$ برای هر مقدار $\alpha \le 0$. با استفاده از این روابط برای هر (x,t) دلخواه می‌توان جواب معادله را به‌دست آورد. برای مثال اگر $\frac{2l-x}{c} \le t \le \frac{x+l}{c}$ باشد، آنگاه $2l \le x + ct \le 3l$ و $-l \le x - ct \le 0$، در نتیجه:

$$\phi(x+ct) = -\psi(2l-x-ct) = \phi(x+ct-2l)$$

$$\psi(x-ct) = -\phi(ct-x)$$

چون $0 \leq x+ct-2l \leq l$ و $0 \leq ct-x \leq l$ با استفاده از روابط (۶ ـ ۳۳) و (۶ ـ ۲۷) نتیجه می‌شود:

$$\phi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct-2l) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct-2l} g(\tau)d\tau + \frac{K}{2}$$

$$\psi(x-ct) = -\frac{1}{2}f(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} g(\tau)d\tau - \frac{K}{2}$$

بنابراین جواب معادله در این حالت عبارت است از:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct-2l) - f(ct-x)\big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct-2l} g(\tau)d\tau$$

تذکر ۶ ـ ۲۸. اگر شرایط مرزی مسئلهٔ ناهمگن باشد، یعنی:

$$u(0,t) = p(t), \qquad u(l,t) = q(t)$$

روابط (۶ ـ ۳۰) و (۶ ـ ۳۱) به روابط زیر تبدیل می‌شوند.

$$\psi(-\alpha) = p\left(\frac{\alpha}{c}\right) - \phi(\alpha), \qquad \alpha \geq 0$$

$$\phi(\alpha) = q\left(\frac{\alpha - l}{c}\right) - \psi(2l-\alpha), \qquad \alpha \geq l$$

همچنین اگر شرایط مرزی به‌صورت زیر باشد، روابط مشابهی به‌دست می‌آید:

$$u_x(0,t) = p(t), \qquad u_x(l,t) = q(t)$$

مثال ۶ ـ ۴. تابع $u(x,t)$ در معادلهٔ موج زیر صدق می‌کند.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < 1, \ 0 < t$$

$$u(x,0) = \sin \pi x \quad u_t(x,0) = x(1-x)$$

$$u(0,t) = t \qquad u(1,t) = 0$$

مقدار $u(\frac{1}{3}, 3)$ را به‌دست آورید.

حل. با توجه به روابط (۶ ـ ۳۳) و (۶ ـ ۲۷):

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{K}{2} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{K}{2} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

همچنین از مقادیر مرزی مسئله نتیجه می‌شود:

$$u(0,t)=\phi(t)+\psi(-t)=t, \qquad t\geq 0$$

$$u(1,t)=\phi(1+t)+\psi(1-t)=0, \qquad t\geq 0$$

بنابراین:

$$\psi(-t)=t-\phi(t), \qquad t\geq 0$$

$$\phi(1+t)=-\psi(1-t), \qquad t\geq 0$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\phi(\frac{1}{3}+3)&=-\psi(-\frac{4}{3})=-\frac{4}{3}+\phi(\frac{4}{3})\\&=-\frac{4}{3}-\psi(\frac{2}{3}),\\ \psi(\frac{1}{3}-3)&=\frac{8}{3}-\phi(\frac{8}{3})=\frac{8}{3}+\psi(-\frac{2}{3})\\&=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}-\phi(\frac{2}{3}).\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}u(\frac{1}{3},3)&=\phi(\frac{1}{3}+3)+\psi(\frac{1}{3}-3)=2-\psi(\frac{2}{3})-\phi(\frac{2}{3})\\&=2-\sin\frac{2\pi}{3}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

با توسعهٔ معادله به سرتاسر مجموعهٔ اعداد حقیقی و با استفاده از رابطهٔ (۶ ـ ۱۸) نیز می‌توان مسئلهٔ تار مرتعش (۶ ـ ۲۵) را حل کرد. به همین منظور $F(x)$ و $G(x)$ را به ترتیب توسعه فرد و تناوبی با دورهٔ تناوب $2l$ توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نظر بگیرید. در این صورت جواب مسئلهٔ

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty,\ t\geq 0$$

$$u(x,0)=F(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,0)=G(x)$$

جواب مسئلهٔ مورد نظر خواهد بود. برای دیدن این مطلب ابتدا جواب مسئلهٔ فوق را با توجه به رابطهٔ (۶ ـ ۱۸) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(F(x+ct)+F(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}G(s)ds \qquad (۶ ـ ۳۲)$$

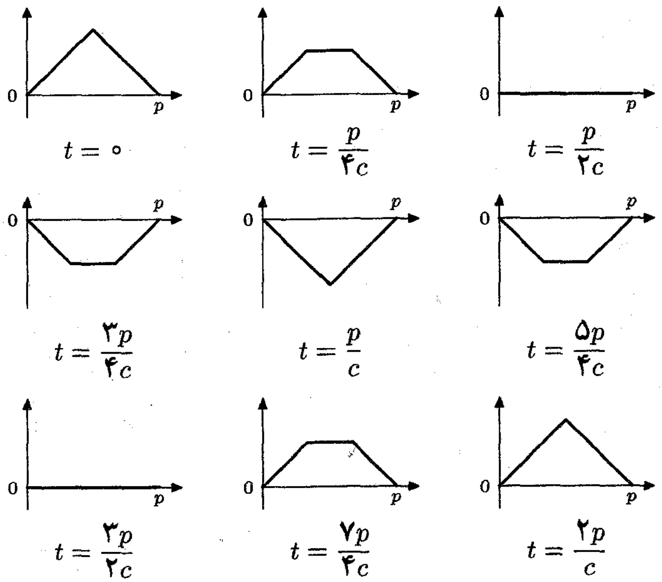
در نتیجه در نقاط مرزی خواهیم داشت:

$$u(\circ,t)=\frac{۱}{۲}\big(F(ct)+F(-ct)\big)+\frac{۱}{۲c}\int_{-ct}^{ct}G(s)ds=\circ$$

$$\begin{aligned}u(l,t)&=\frac{۱}{۲}\big(F(l+ct)+F(l-ct)\big)+\frac{۱}{۲c}\int_{l-ct}^{l+ct}G(s)ds\\&=\frac{۱}{۲}\big(F(l+ct)-F(-l+ct)\big)+\frac{۱}{۲c}\int_{l-ct}^{-l+ct}G(s)ds+\frac{۱}{۲c}\int_{-l+ct}^{l+ct}G(s)ds\\&=\frac{۱}{۲}\big(F(l+ct)-F(۲l-l+ct)\big)+\frac{۱}{۲c}\int_{-(-l+ct)}^{-l+ct}G(s)ds+\frac{۱}{۲c}\int_{-l}^{l}G(s)ds\\&=\circ\end{aligned}$$

به این ترتیب شرایط مرزی برقرار است. همچنین روی $(\circ,l)$ داریم: $F(x)=f(x)$ و $G(x)=g(x)$. پس شرایط اولیه نیز برقرار است.

مثال ۶ ـ ۵. فرض کنید $g(x)\equiv\circ$ و $f(x)=\begin{cases}x & \circ<x<\frac{p}{۲}\\ \frac{p}{۲}-x & \frac{p}{۲}<x<p\end{cases}$ در این صورت وضعیت تار را در یک دورهٔ تناوب $\frac{۲p}{c}$ در لحظات گوناگون به‌صورت زیر داریم.



نمودار ۶ ـ ۹.

آخرین مطلب این فصل به یکتایی جواب معادلهٔ موج اختصاص دارد. هرچند شیوهٔ پیدا

کردن جواب به گونه‌ای بود که یکتایی را بیان می‌کرد. زیرا هر جواب معادله باید در روابطی که به‌دست آمده‌اند، صدق کند. اما در اینجا اثبات دیگری با استفاده از تابع انرژی معادلهٔ موج برای یکتایی جواب بیان می‌شود.

قضیه۶ ـ ۲۹. *مسئلهٔ زیر حداکثر یک جواب دارد.*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^۲ u_{xx} = h(x,t) && a < x < b,\ t > ۰ \\ &u(x,۰) = f(x), \quad u_t(x,۰) = g(x) && a \leq x \leq b \\ &u_x(a,t) = p(t) \ \text{یا}\ u(a,t) = p(t) && t \geq ۰ \\ &u_x(b,t) = q(t) \ \text{یا}\ u(b,t) = q(t) && t \geq ۰ \end{aligned}$$

برهان. فرض کنید v و w دو جواب این مسئله باشد، در این صورت $u = v - w$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^۲ u_{xx} = ۰ && a < x < b,\ t > ۰ \\ &u(x,۰) = u_t(x,۰) = ۰ && a < x < b \\ &u_x(a,t) = ۰ \ \text{یا}\ u(a,t) = ۰ && t \geq ۰ \\ &u_x(b,t) = ۰ \ \text{یا}\ u(b,t) = ۰ && t \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۶ ـ ۳۳)$$

حال نشان می‌دهیم $u \equiv ۰$. برای این منظور تابع زیر را که به انرژی معادلهٔ موج معروف است، در نظر بگیرید:

$$I(t) = \frac{۱}{۲}\int_a^b (c^۲ u_x^۲ + u_t^۲)dx$$

اگر از I نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_a^b (c^۲ u_x u_{xt} + u_t u_{tt})dx = \int_a^b (c^۲ u_x u_{xt} + c^۲ u_t u_{xx})dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(c^۲ u_x u_t)dx = c^۲ u_x u_t \Big|_a^b = ۰ \end{aligned}$$

بنابراین تابع $I(t)$، ثابت است. از طرفی از شرایط اولیه (۶ ـ ۳۳) نتیجه می‌شود: $I(۰) = ۰$. در نتیجه $I(t) = ۰$ برای $t \geq ۰$. از مثبت بودن توابع زیر انتگرال $I(t)$ نتیجه می‌شود که $u_x(x,t) = u_t(x,t) = ۰$ برای $t \geq ۰$ و $a < x < b$. یعنی u یک تابع ثابت است و با توجه به شرایط اولیه باید $u \equiv ۰$. ■

این روش برای وقتی که با یک معادلهٔ موج در دامنهٔ نامتناهی سروکار داریم، نیز قابل

استفاده است. به‌همین منظور باید نشان دهیم تنها جواب معادلهٔ زیر $u \equiv 0$ است.

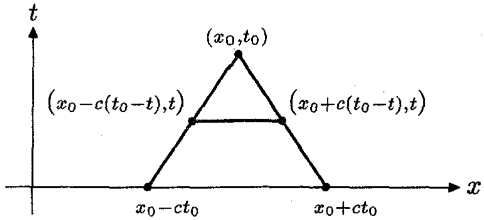
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$
$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

قضیهٔ زیر نتیجه‌ای قوی‌تر از این مطلب را بیان می‌کند.

قضیه۶ ـ ۳۰. *اگر* $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ *در بازه* $(x_0 - ct_0, x_0 + ct_0)$، *آنگاه* $u(x_0, t_0) = 0$.

برهان. تابع انرژی زیر را درنظر بگیرید:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_{x_0 - c(t_0 - t)}^{x_0 + c(t_0 - t)} (c^2 u_x^2 + u_t^2)\,dx$$



نمودار۶ ـ ۱۰.

اکنون از $I(t)$ مشتق می‌گیریم، مشابه قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= (c^2 u_x u_t)\Big|_{x_0 - c(t_0 - t)}^{x_0 + c(t_0 - t)} - \frac{c}{2}(c^2 u_x^2 + u_t^2)\Big|_{x = x_0 + c(t_0 - t)} \\
&\qquad - \frac{c}{2}(c^2 u_x^2 + u_t^2)\Big|_{x = x_0 - c(t_0 - t)} \\
&= -\frac{c}{2}(cu_x + u_t)^2\Big|_{x = x_0 + c(t_0 - t)} - \frac{c}{2}(cu_x + u_t)^2\Big|_{x = x_0 - c(t_0 - t)} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

بنابراین $I(t) \leq I(0)$. از طرفی بنابر فرض قضیهٔ $I(0) = 0$ و چون I تابعی مثبت است درنتیجه $I(t) = 0$ یعنی برای $0 \leq t < t_0$ و $x_0 - c(t_0 - t) < x < x_0 + c(t_0 - t)$،

$$u_t = u_x = 0$$

بنابراین u داخل ناحیهٔ مثلثی که در نمودار ۶ ـ ۱۰ نشان داده شده است، ثابت است. بنابراین

$u \equiv 0$ داخل مثلث، به‌خصوص $u(x_0, t_0) = 0$. ■

تمرین ۶ ـ ۵

۱. الف) هرگاه شرط مرزی مسئلهٔ تار مرتعش را به رابطهٔ $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ تغییر دهیم، کدام یک از توسعه‌های زوج یا فرد معادله برای رسیدن به جواب مفید است؟

ب) اگر شرط مرزی ناهمگن $u_x(0,t) = q(t)$ استفاده شود، جواب مسئله به چه صورتی خواهد بود؟

ج) مسئله را در حالت ناهمگن $u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$ همراه با شرط مرزی ناهمگن $u_x(0,t) = q(t)$ حل کنید.

۲. با توسعه جواب به سرتاسر اعداد حقیقی جواب مسئلهٔ زیر را پیدا کنید. سپس مقدار $u(\frac{1}{3}, 2)$ را به‌دست آورید.

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \qquad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \text{و} \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

۳. مسئلهٔ زیر را به روش دالامبر برای مقادیر $t \le 1$ به‌دست آورید.

$$u_{tt} - 9u_{xx} = xt^2, \qquad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = \sin x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = \cos x \quad \text{و} \quad u_x(0,t) = u(1,t) = 0.$$

۴. مقدار $u(\frac{1}{3}, 3)$ را از مسئلهٔ زیر به‌دست آورید.

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \qquad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = \cos \pi x$$
$$u(0,t) = \sin t \quad \text{و} \quad u_x(1,t) = \cos t.$$

۵. مقدار $u(\frac{1}{2}, 2)$ را از مسئلهٔ زیر به‌دست آورید.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$$
$$u(x,0) = x(x-2) \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$$
$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

۷

معادلات مرتبهٔ اول

صورت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول برای تابع مجهول $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عبارت است از:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \qquad (۱ - ۷)$$

معمولاً همراه با این نوع معادلات، مقدار تابع u روی یک رویهٔ مشخص داده می‌شود.

$$u = g \qquad \text{روی } \Gamma \quad (۲ - ۷)$$

این شرط را دادهٔ کوشی یا شرط کوشی می‌نامند. همچنین فرض می‌شود که توابع F و $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ هموار هستند.

در این فصل نشان خواهیم داد که چگونه جواب‌های این گونه معادلات از حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به‌دست می‌آید. این شیوهٔ حل، روش مشخصه‌ها نامیده می‌شود و ایدهٔ اصلی آن بدین صورت است که برای به‌دست آوردن مقدار تابع u در نقطهٔ x، یک منحنی پیدا کرده که از یک نقطه روی Γ شروع شده و به x ختم شود. مختصات این منحنی و مقدار تابع u روی آن در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی صدق می‌کنند.

۷ ـ ۱ معادلات خطی

ابتدا با یک مثال شروع می‌کنیم. معادلهٔ $u_t + cu_x = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر $u(x,t)$ جواب معادله باشد، متغیرهای x و t را تابعی از s گرفته و از تابع $u\big(x(s), t(s)\big)$ نسبت به s مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{du}{ds} = u_x \dot{x}(s) + u_t \dot{t}(s)$$

اگر داشته باشیم:

$$\dot{x}(s) = c \quad \text{و} \quad \dot{t}(s) = ۱$$

آنگاه $x - ct$ مقداری ثابت دارد. در این صورت $\frac{du}{ds} = ۰$ روی هر خط راست $x - ct = k$، یعنی u روی هر خط مقدار ثابتی دارد. اگر شرط کوشی مسئله به‌صورت زیر باشد

$$u(x, ۰) = f(x),$$

آنگاه خط راست گذرا از (x,t) با شیب $\frac{۱}{c}$ از نقطهٔ $(x - ct, ۰)$ نیز می‌گذرد. بنابراین جواب مسئله به‌صورت $u(x,t) = f(x - ct)$ خواهد بود.

در حالت کلی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ اول در صفحه، به‌صورت زیر خواهند بود:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u + d(x,y) = ۰ \tag{۷ ـ ۳}$$

فرض کنید u یک جواب معادلهٔ فوق با شرایط اولیهٔ (۷ ـ ۲) باشد و $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ خمی باشد که از یک نقطهٔ Γ شروع شده است و قرار دهید:

$$z(t) = u\big(x(t), y(t)\big)$$

در این صورت:

$$\dot{z}(t) = u_x \dot{x}(t) + u_y \dot{y}(t). \tag{۷ ـ ۴}$$

اگر فرض کنیم $x(t)$ و $y(t)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی زیر صدق می‌کند.

$$\dot{x}(t) = a\big(x(t), y(t)\big)$$

$$\dot{y}(t) = b\big(x(t), y(t)\big)$$

آنگاه با استفاده از معادلهٔ (۷ ـ ۳) و (۷ ـ ۴) نتیجه می‌شود که معادلهٔ زیر برای تابع $z(t)$ برقرار است:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -c\big(x(t),y(t)\big)u\big(x(t),y(t)\big) - d\big(x(t),y(t)\big)\\ &= -c\big(x(t),y(t)\big)z(t) - d\big(x(t),y(t)\big)\end{aligned}$$

بنابراین اگر بتوانیم جوابی برای دستگاه معادلات زیر پیدا کنیم، منحنی $\gamma(t)$ و مقدار u روی آن مشخص می‌شود. این دستگاه معادلات، معادلات مشخصه و منحنی $\gamma(t)$ خم مشخصه مسئلهٔ (۷ ـ ۳) نامیده می‌شوند.

$$\begin{cases}\dot{x} = a(x,y)\\ \dot{y} = b(x,y)\\ \dot{z} = -c(x,y)z - d(x,y)\end{cases} \qquad (۷ ـ ۵)$$

شرایط اولیهٔ این دستگاه معادلات، از دادهٔ کوشی (۷ ـ ۲) به‌دست می‌آید، به این ترتیب که $(x_\circ, y_\circ)$ را نقطهٔ دلخواهی از Γ در نظر می‌گیریم و نقطهٔ شروع منحنی $\gamma(t)$ قرار می‌دهیم. بنابراین می‌توان شرایط اولیهٔ زیر را برای معادلات مشخصهٔ (۷ ـ ۵) در نظر گرفت:

$$\begin{cases}x(\circ) = x_\circ\\ y(\circ) = y_\circ\\ z(\circ) = u(x_\circ, y_\circ) = g(x_\circ, y_\circ)\end{cases} \qquad (۷ ـ ٦)$$

مثال ۷ ـ ۱. مسئلهٔ کوشی زیر را در نظر بگیرید:

$$xu_x + yu_y = u$$

$$u(x, ۱) = g(x)$$

معادلات مشخصهٔ آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases}\dot{x} = x\\ \dot{y} = y\\ \dot{z} = z\end{cases} \qquad (۷ ـ ۷)$$

همچنین با در نظر گرفتن نقطهٔ شروع $(x_\circ, ۱)$، شرایط اولیهٔ زیر برقرار است:

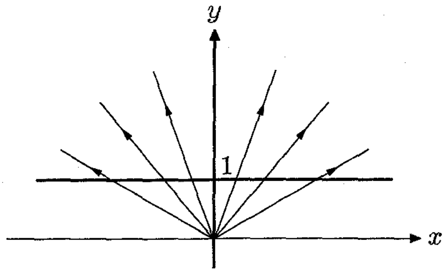
$$\begin{cases}x(\circ) = x_\circ\\ y(\circ) = ۱\\ z(\circ) = g(x_\circ)\end{cases} \qquad (۷ ـ ۸)$$

درنتیجه جواب دستگاه (۷ ـ ۷) با شرایط اولیهٔ (۷ ـ ۸) عبارت است از:

$$x(t) = x_\circ e^t$$

$$y(t) = e^t$$

$$z(t) = g(x_\circ)e^t$$



نمودار۷ ـ ۱.

خم‌های مشخصهٔ این مسئله در نمودار ۷ ـ ۱ نشان داده شده‌اند. این خم‌ها خطوط راستی هستند که از مبداء می‌گذرند و نیم‌صفحهٔ $y > \circ$ را می‌پوشانند. اگر u جواب مسئله باشد، آنگاه روی هر خم مشخصه داریم:

$$u(x_\circ e^t, e^t) = g(x_\circ)e^t$$

اگر (x, y) نقطهٔ دلخواهی از نیم‌صفحه باشد، با قرار دادن $t = \ln y$ و $x_\circ = \frac{x}{y}$ نتیجه می‌شود:

$$u(x, y) = yg(\frac{x}{y})$$

قضیه۷ ـ ۱. اگر ضرایب a، b، c و d به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، آنگاه معادلهٔ مشخصهٔ (۷ ـ ۵) همراه با شرایط اولیهٔ (۷ ـ ٦) دارای جواب یکتای $X(t, x_\circ, y_\circ)$، $Y(t, x_\circ, y_\circ)$ و $Z(t, x_\circ, y_\circ)$ است. به‌علاوه مشتق توابع X، Y و Z نسبت به $x_\circ$ و $y_\circ$ موجود و پیوسته است.

اثبات قضیهٔ فوق را در [۱۰] ببینید. این قضیه نشان می‌دهد که از هر نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ) \in \Gamma$ یک خم مشخصه می‌گذرد و مقدار تابع u روی آن به‌دست می‌آید. ولی برای آنکه به جواب معادلهٔ (۷ ـ ۳) با شرط کوشی (۷ ـ ۲) برسیم، باید عکس این کار را انجام داد. یعنی برای هر نقطهٔ (x, y) باید مقادیر $(t, x_\circ, y_\circ)$ را پیدا کرد به‌طوری که:

$$X(t, x_\circ, y_\circ) = x,$$
$$Y(t, x_\circ, y_\circ) = y.$$

صحت این مطلب با استفاده از قضیهٔ تابع وارون نشان داده می‌شود. ابتدا فرض کنیم $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ یک پرمایش Γ باشد که $\Phi(0) = (x_0, y_0)$. همچنین $\gamma(t,s) = \Big(X\big(t, \Phi(s)\big), Y\big(t, \Phi(s)\big)\Big)$ منحنیِ مشخصه‌ای باشد که از نقطهٔ $\Phi(s)$ شروع می‌شود. بردار عمود بر Γ در نقطهٔ $\Phi(s)$ برابر $\vec{n} = \big(\varphi_2'(s), -\varphi_1'(s)\big)$ خواهد بود. در قضیهٔ ۷ ـ ۳ نشان داده می‌شود که اگر

$$\big(a(x_0, y_0), b(x_0, y_0)\big) \cdot \vec{n}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad (۷ ـ ۹)$$

منحنی‌های $\gamma(t,s)$ برای مقادیر مختلف s یک همسایگی (x_0, y_0) را می‌پوشانند. رابطهٔ بالا به شرط غیرمشخصه بودن، منحنی Γ تعبیر می‌شود.

تعریف ۷ ـ ۲. منحنی Γ نسبت به معادلهٔ خطی (۷ ـ ۳) غیرمشخصه نامیده می‌شود، هرگاه در هر نقطهٔ $(x_0, y_0) \in \Gamma$ رابطهٔ (۷ ـ ۹) برقرار باشد.

قضیه ۷ ـ ۳. *تابع $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ در یک همسایگی $(0, 0)$ وارون‌پذیر است، به شرط آنکه رابطهٔ (۷ ـ ۹) برقرار باشد.*

برهان. با توجه به قضیهٔ تابع وارون کافی است وارون‌پذیری ماتریس زیر بررسی شود:

$$D\gamma(0,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial t}\big(0, \Phi(0)\big) & \dfrac{\partial X}{\partial s}\big(0, \Phi(0)\big) \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial t}\big(0, \Phi(0)\big) & \dfrac{\partial Y}{\partial s}\big(0, \Phi(0)\big) \end{bmatrix}$$

از طرفی بنابر معادلهٔ مشخصهٔ (۷ ـ ۵) روابط زیر برقرارند:

$$\frac{\partial X}{\partial t}\big(0, \Phi(0)\big) = a(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial t}\big(0, \Phi(0)\big) = b(x_0, y_0)$$

همچنین با توجه به شرایط اولیهٔ (۷ ـ ٦) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial X}{\partial s}\big(0, \Phi(0)\big) = \frac{d}{ds}\Big[X\big(0, \Phi(s)\big)\Big]_{s=0} = \frac{d}{ds}\big[\varphi_1(s)\big]_{s=0} = \varphi_1'(0)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial s}\big(0, \Phi(0)\big) = \frac{d}{ds}\Big[Y\big(0, \Phi(s)\big)\Big]_{s=0} = \frac{d}{ds}\big[\varphi_2(s)\big]_{s=0} = \varphi_2'(0)$$

بنابراین

$$\det D\gamma(0,0) = \begin{bmatrix} a(x_0, y_0) & \varphi_1'(0) \\ b(x_0, y_0) & \varphi_2'(0) \end{bmatrix} = \big(a(x_0, y_0), b(x_0, y_0)\big) \cdot \big(\varphi_2'(0), -\varphi_1'(0)\big)$$

درنتیجه اگر رابطهٔ (۷ ـ ۹) برقرار باشد، تابع γ در یک همسایگی $(0, 0)$ وارون‌پذیر است. ■

قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که در همسایگی هر نقطهٔ Γ به شرط غیرمشخصه بودن آن می‌توان توابع $t(x,y)$ و $s(x,y)$ را تعریف کرد، به‌صورتی که

$$\gamma\big(t(x,y), s(x,y)\big) = (x,y).$$

در این صورت جواب معادلهٔ (۷ ـ ۳) با شرط کوشی (۷ ـ ۲) در همسایگی Γ با قرار دادن

$$u(x,y) = z\big(t(x,y), s(x,y)\big)$$

به‌دست می‌آید. این روش حل معادلهٔ دیفرانسیل را روش خم‌های مشخصه می‌نامند.

مثال ۷ ـ ۲. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید که Γ خم $y = x^۳$ است.

$$xu_x + ۲yu_y = ۳u$$
$$u(x,y) = x^۲ + x \qquad \text{روی } \Gamma$$

شرط غیرمشخصه بودن Γ در نقطهٔ $(s, s^۳)$ عبارت است از:

$$(s, ۲s^۳)\cdot(-۳s^۲, ۱) = -s^۳$$

بنابراین Γ در همه نقاط به غیر از نقطهٔ $(۰,۰)$ غیرمشخصه است. معادلات مشخصهٔ مسئله عبارت‌اند از:

$$\dot{x} = x \quad \text{و} \quad \dot{y} = ۲y \quad \text{و} \quad \dot{z} = ۳z$$

همچنین شرایط اولیهٔ این دستگاه بدین صورت است:

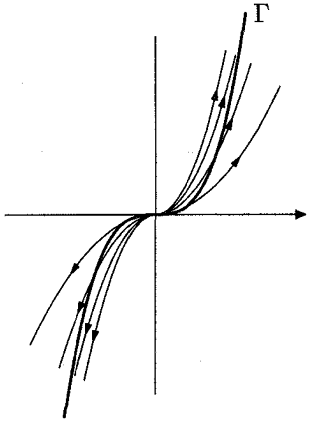
$$x(۰) = s \quad \text{و} \quad y(۰) = s^۳ \quad \text{و} \quad z(۰) = s^۲ + s$$

درنتیجه جواب معادلات مشخصه برابر است با:

$$x(t) = se^t \quad \text{و} \quad y(t) = s^۳e^{۲t} \quad \text{و} \quad z(t) = (s^۲ + s)e^{۳t}$$

نمودار ۷ ـ ۲ منحنی‌های مشخصه را نشان می‌دهد که تنها ربع اول و سوم صفحه را می‌پوشانند. بنابراین با این روش، تنها جواب مسئله را در این ناحیه می‌توانیم به‌دست آوریم. به همین منظور توابع s و t را برحسب x و y محاسبه می‌کنیم:

$$s = \frac{y}{x^۲} \quad \text{و} \quad t = \ln\frac{x^۳}{y}$$



نمودار ۷ ـ ۲.

درنتیجه:

$$u(x,y) = (x^{۲} + y)\frac{x^{۵}}{y^{۲}}$$

به دلیل اینکه منحنی Γ در مبداء غیر مشخصه نیست، با روش خم‌های مشخصه نمی‌توان جواب مسئله را در همسایگی مبداء به‌دست آورد. اما با توجه به اینکه هر خم مشخصه وقتی $t \to \infty$ به مبدأ میل می‌کند و در این حالت $z(t) \to ۰$، باید داشته باشیم $u(۰,۰) = ۰$. این مقدار از شرط کوشی مسئله نیز به‌دست می‌آید. توجه کنید که اگر دادهٔ کوشی با شرط صفر بودن تابع در مبداء سازگار نباشد، مثلاً $u(x,x^{۳}) = x^{۲} + ۱$، مسئله در همسایگی مبدأ جواب پیوسته نخواهد داشت.

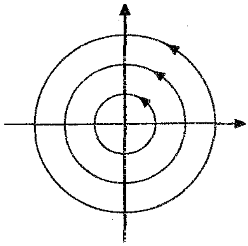
تذکر ۷ ـ ۴. در ساختن معادلات مشخصه هر مسئله، ابتدا فرض کرده‌ایم که معادله جواب مشتق‌پذیر دارد، سپس با مشتق گرفتن از آن روی یک منحنی خاص که همان منحنی مشخصه باشد، تغییرات آن را محاسبه کردیم. به همین دلیل در هر کجا به تناقصی برخورد کنیم، می‌توان چنین نتیجه گرفت که معادله از ابتدا جواب مشتق‌پذیر ندارد. بنابراین روش خم‌های مشخصه نه تنها روشی است که جواب مسئله را در همسایگی دادهٔ اولیه به ما می‌دهد، بلکه در شرایطی همانند مثال بالا می‌توان از آن برای اثبات عدم وجود جواب استفاده کرد. مثال زیر این کاربرد روش خم‌های مشخصه را بهتر نشان می‌دهد.

مثال ۷ ـ ۳. معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$xu_y - yu_x = u$$
$$u(x, \circ) = g(x)$$

معادلات مشخصهٔ آن عبارت‌اند از:

$$\dot{x} = -y \quad \text{و} \quad \dot{y} = x \quad \text{و} \quad \dot{z} = z$$



نمودار۷ ـ ۳.

همراه با شرایط اولیهٔ زیر:

$$x(\circ) = x_\circ \quad \text{و} \quad y(\circ) = \circ \quad \text{و} \quad z(\circ) = g(x_\circ)$$

جواب دستگاه معادلات مشخصه عبارت است از:

$$x(t) = x_\circ \cos t \quad \text{و} \quad y(t) = x_\circ \sin t \quad \text{و} \quad z(t) = g(x_\circ)e^t$$

خم‌های مشخصه دایره‌های به مرکز مبدأ در صفحه هستند. مشکل اینجاست که اگر u جواب مسئله باشد، آنگاه:

$$u(x_\circ \cos t, x_\circ \sin t) = g(x_\circ)e^t$$

به‌ازای t و $t + ۲\pi$ یک نقطه از منحنی مشخصه به‌دست می‌آید، اما از رابطهٔ بالا دو مقدار متفاوت برای u به‌دست می‌آوریم. این مطلب ثابت می‌کند که مسئلهٔ فوق نمی‌تواند جواب سرتاسری در تمام صفحه داشته باشد. البته در همسایگی محور x ها با قرار دادن $x_\circ = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $t = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$ می‌توان جواب موضعی زیر را به‌دست آورد:

$$u(x, y) = g\left(\sqrt{x^۲ + y^۲}\right)e^{\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

تذکر ۷ ـ ۵. معادلهٔ (۷ ـ ۳) برای سادگی در بعد دو درنظر گرفته شده است. تمام نتایج در ابعاد بالاتر به‌طور مشابه برقرار است. در حالت کلی صورت معادلهٔ خطی در بعد n به‌صورت زیر است .

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + b(x)u + c(x) = 0$$

که $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ است. در این حالت معادله همراه با شرط کوشی روی یک رویهٔ $(n-1)$ بعدی داده می‌شود.

$$u = g \qquad \text{روی } \Gamma$$

در چنین حالتی معادلات مشخصه عبارت‌اند از:

$$\dot{x}_i = a_i(x) \qquad 1 \leq i \leq n$$
$$\dot{z} = -b(x)z - c(x)$$

همچنین شرط غیرمشخصه بودن Γ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \vec{n} \neq 0$$

که $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح رویهٔ Γ است.

تمرین ۷ ـ ۱

۱. هرکدام از مسائل با شرط اولیهٔ زیر را حل کنید:

الف) $xu_x - yu_y = 2u\ ,\quad u(x, 1) = g(x)$

ب) $xu_x + 2yu_y = 3u\ ,\quad u(x, y, 0) = g(x, y)$

پ) $xu_x + yu_y + u_z = u\ ,\quad u(x, y, 0) = e^{x+y}$

ت) $xu_y - yu_x = u\ ,\quad u(x, 0) = \sin x$

ث) $yu_x - xu_y = 2xyu\ ,\quad u(x, x) = x^2$

۲. جوابی برای معادلهٔ $yu_x + u_y = x$ پیدا کنید که روی منحنی $x = y^2$ مقدار آن برابر $u = \frac{2}{3}y^3$ باشد. اگر u تنها در محدودهٔ $1 < y < 2$ روی منحنی $x = y^2$ مشخص باشد، در چه ناحیه‌ای از صفحهٔ جواب تعریف می‌شود.

۳. در مسئلهٔ مثال ۷ ـ ۳ نشان دهید که اگر تابع $g(x)$ در شرط زیر صدق کند:

$$g(-x) = g(x)e^{\pi} \qquad x > ۰$$

آنگاه با حذف نیم‌خط $\{(۰, y)|y < ۰\}$ از صفحهٔ مسئله دارای یک جواب سرتاسری است.

۴. نشان دهید که برای هر تابع مشتق‌پذیر دلخواه $f(x)$، معادله با شرایط اولیهٔ زیر لزوماً جواب ندارد:

$$x^۲ u_x + ۲xyu_y = xu$$
$$u(x, ۴x^۲) = f(x)$$

تمام توابع f را به‌دست آورید که برای آن معادلهٔ فوق دارای جواب است.

۷ ـ ۲ معادلات شبه خطی

شکل عمومی معادلات شبه خطی مرتبهٔ اول از یک تابع دو متغیره به‌صورت زیر است:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = ۰$$
$$u = g \qquad \text{روی } \Gamma \qquad (۷ ـ ۱۰)$$

مشابه حالت خطی اگر $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ خمی باشد که از یک نقطهٔ Γ شروع شده است و $z(t) = (x(t), y(t))$، آنگاه معادلات مشخصه آن عبارت است از:

$$\dot{x} = a(x, y, z) \quad \text{و} \quad \dot{y} = b(x, y, z) \quad \text{و} \quad \dot{z} = -c(x, y, z)$$

اگر برای هر $s \in \Gamma$، $x(t, s)$، $y(t, s)$ و $z(t, s)$ جواب معادلهٔ مشخصه باشد، برای پیدا کردن جواب مسئلهٔ (۷ ـ ۱۰) باید متغیرهای (t, s) را با (x, y) عوض کنیم و این کار با استفاده از قضیهٔ ۷ ـ ۳ امکان‌پذیر است. در این حالت شرط غیرمشخصه بودن Γ در نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ به‌صورت زیر است.

$$\Big(a\big(x_۰, y_۰, g(x_۰, y_۰)\big), b\big(x_۰, y_۰, g(x_۰, y_۰)\big)\Big) \cdot \vec{n}(x_۰, y_۰) \neq ۰$$

مثال ۷ ـ ۴. معادلهٔ زیر مفروض است.

$$(y+u)u_x + yu_y = x - y$$
$$u(x, 1) = x + 1$$

شرط غیرمشخصه بودن خط $y = 1$ عبارت است از:

$$(y+u, y)\cdot(0, 1) = 1 \neq 0$$

بنابراین در همسایگی خط $y = 1$، می‌توان جواب موضعی برای معادله به وسیلهٔ روش خم‌های مشخصه نوشت. معادلات مشخصه عبارت‌اند از:

$$\dot{x} = y + z\,, \qquad \dot{y} = y, \qquad \dot{z} = x - y$$
$$x(0) = x_0\,, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = x_0 + 1$$

تابع y به‌راحتی مشخص می‌شود:

$$y(t) = e^t$$

و از طرفی

$$\ddot{x} = \dot{y} + \dot{z} = y + x - y = x$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ x برابر است با:

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

درنتیجه:

$$z(t) = \dot{x} - y = (A-1)e^t - Be^{-t}$$

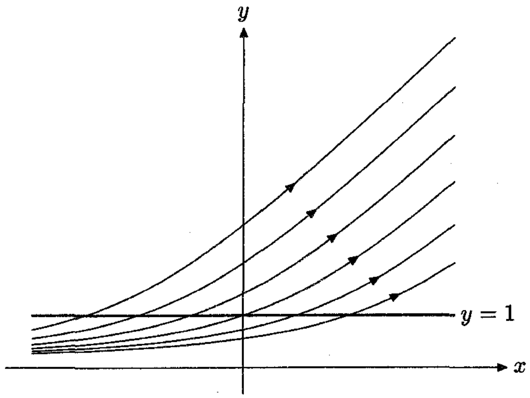
با توجه به شرایط اولیهٔ معادله باید $A = x_0 + 1$ و $B = -1$.

$$x(t) = (x_0+1)e^t - e^{-t}\,, \qquad y(t) = e^t, \qquad z(t) = x_0 e^t + e^{-t}$$
$$u\big((x_0+1)e^t - e^{-t}, e^t\big) = x_0 e^t + e^{-t}$$

برای حذف x_0 و t قرار می‌دهیم $y = e^t$ و $x_0 = \dfrac{yx + 1 - y^2}{y^2}$، در این صورت

$$u(x,y) = x - y + \frac{2}{y}.$$

جواب به‌دست آمده در ناحیهٔ $y > \circ$ معتبر است. اگر خم‌های مشخصه را ترسیم کنیم، تمام این منحنی‌ها ناحیهٔ $y > \circ$ را می‌پوشانند. (نمودار ۷ ـ ۴) بدین ترتیب جواب فوق نه تنها در همسایگی خط $y = ۱$ تعریف شده است، بلکه در تمام نقاط ناحیهٔ $y > \circ$ معتبر است.



نمودار ۷ ـ ۴.

در مثال زیر خم‌های مشخصهٔ یکدیگر را قطع می‌کنند. این نکته بیانگر این مطلب است که معادلهٔ دیفرانسیل جزئی نمی‌تواند جواب سرتاسری داشته باشد.

مثال ۷ ـ ۵. مسئلهٔ کوشی زیر را در نظر بگیرید:

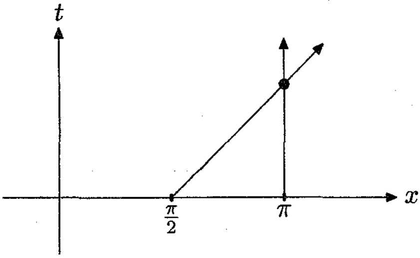
$$u_t + uu_x = \circ$$
$$u(x, \circ) = \sin x$$

دستگاه معادلات مشخصهٔ آن عبارت‌اند از:

$$\dot{x}(s) = z, \qquad \dot{t}(s) = ۱, \qquad \dot{z}(s) = \circ$$
$$x(\circ) = x_\circ, \qquad t(\circ) = \circ, \qquad z(\circ) = \sin x_\circ$$

جواب این دستگاه به‌صورت زیر است:

$$x(s) = x_\circ + s\sin x_\circ, \qquad t(s) = s,\ z \qquad (s) = \sin x_\circ.$$



نمودار ۷ ـ ۵.

خم مشخصهٔ گذرا از نقطهٔ x_0 خط راستی با شیب $\sin x_0$ است و اکثر منحنی‌های مشخصه همدیگر را قطع می‌کنند. برای مثال منحنی‌های مشخصه‌ای که از نقاط π و $\frac{\pi}{2}$ شروع می‌شوند، یکدیگر را در نقطهٔ $(\pi, \frac{\pi}{2})$ قطع می‌کنند. چون u روی هر خم مشخصه مقداری ثابت دارد، بنابراین نمی‌توان جواب را در نقطهٔ $(\pi, \frac{\pi}{2})$ تعریف کرد. در نتیجه جواب مسئله در سرتاسر صفحه تعریف نمی‌شود.

تذکر ۷ ـ ۶. همان‌طور که برای معادلات خطی گفته شد، برای معادلات شبه‌خطی نیز تمام نتایج در ابعاد بالاتر برقرار است. اگر هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ را با $x = (x_1, \dots, x_n)$ نشان دهیم، شکل عمومی معادلات شبه خطی در بعد n بدین صورت هستند:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)u_{x_i} + b(x,u) = 0.$$

در این حالت معادلات مشخصه بدین قرارند:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= a_i(x,z) \qquad 1 \le i \le n \\ \dot{z} &= -b(x,z). \end{aligned}$$

تمرین ۷ ـ ۲

۱. جواب هرکدام از معادلات شبه‌خطی با شرط کوشی زیر را به روش خم‌های مشخصه پیدا کنید. جواب به‌دست آمده در چه ناحیه‌ای معتبر است.

الف) $uu_x + u_y = 1$ ، $u(x,x) = \frac{1}{2}x$

ب) $u_y = xuu_x$ ، $u(x,0) = x$

پ) $-\frac{1}{2}xu_x + uu_y = u + x$ ، $u(x, x^2 + x) = x^2 - x$

ت) $uu_x + u_y = 1$ ، $u(2x^2, 2x) = 0$ ، برای $x > 0$

ث) $(۳y-۲u)u_x+(u-۳x)u_y = ۲x-y \ , \ u(x,x) = ۰$

۲. الف) ابتدا نشان دهید که منحنی $۴x - y^۲ = ۰$ با شرط کوشی $u = \frac{۱}{۲}y$ نسبت به معادلهٔ $uu_x + u_y = ۱$ غیر مشخصه نیست. سپس با حل معادلات مشخصه نشان دهید که این معادله در هیچ همسایگی منحنی $۴x - y^۲ = ۰$ دارای جواب نیست.
ب) ثابت کنید که منحنی $۲x - y^۲ = ۰$ با شرط کوشی $u = y$ نیز نسبت به معادلهٔ بالا غیر مشخصه نیست، ولی مسئله دارای چند جواب مختلف است.

۳. نشان دهید مسئلهٔ $u_x + u_t = u^۲$ با شرط اولیهٔ $u(x,۰) = x$ نمی‌تواند جواب کران‌دار داشته باشد.

۷ ـ ۳ معادلات غیرخطی

صورت عمومی معادلهٔ غیرخطی در صفحه به‌صورت زیر است:

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = ۰ \qquad (۷ ـ ۱۱)$$

که $F(x,y,z,p,q)$ تابعی هموار است. مشابه قبل اگر $u(x,y)$ جواب مسئله باشد، خم $\gamma(t) = (x(t),y(t))$ را در صفحه در نظر گرفته و قرار می‌دهیم:

$$z(t) = u\big(x(t),y(t)\big)$$

$$p(t) = u_x\big(x(t),y(t)\big)$$

$$q(t) = u_y\big(x(t),y(t)\big)$$

برای پیدا کردن خم‌های مشخصهٔ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی، از توابع $(x(t),y(t),z(t),p(t),q(t))$ می‌سازیم. اگر از $p(t)$ و $q(t)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\dot{p}(t) = u_{xx}\dot{x}(t) + u_{xy}\dot{y}(t)$$

$$\dot{q}(t) = u_{yx}\dot{x}(t) + u_{yy}\dot{y}(t) \qquad (۷ ـ ۱۲)$$

از طرف دیگر از معادلهٔ (۷ ـ ۱۱) نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

$$F_x + F_z u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} = ۰$$

$$F_y + F_z u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} = 0 \qquad (۷ - ۱۳)$$

از مقایسهٔ روابط (۷ ـ ۱۲) و (۷ ـ ۱۳) می‌توان قرار داد:

$$\dot{x}(t) = F_p\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big)$$
$$\dot{y}(t) = F_q\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big)$$

بدین ترتیب بقیه معادلات مورد نظر به‌دست خواهند آمد:

$$\dot{p}(t) = u_{xx}F_p + u_{xy}F_q = -F_x - F_z p$$
$$\dot{q}(t) = u_{yx}F_p + u_{yy}F_q = -F_y - F_z q$$
$$\dot{z}(t) = u_x\dot{x}(t) + u_y\dot{y}(t) = pF_p + qF_q$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی فوق، معادلات مشخصهٔ مسئلهٔ غیرخطی (۷ ـ ۱۱) است.

مثال ۷ ـ ٦. مسئلهٔ کوشی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$u_x^2 + u_y + u = 0$$
$$u(x, 0) = x$$

با قرار دادن $F(x, y, z, p, q) = p^2 + q + z$، دستگاه معادلات مشخصهٔ آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

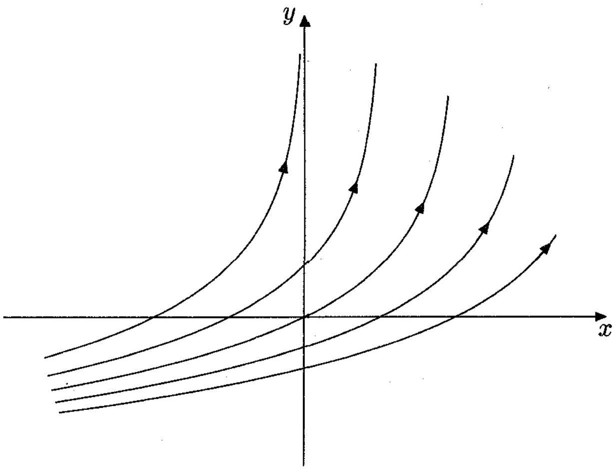
$$\dot{x}(t) = F_p = 2p, \qquad \dot{y}(t) = F_q = 1,$$
$$\dot{p}(t) = -F_x - F_z p = -p, \qquad \dot{q}(t) = -F_y - F_z q = -q,$$
$$\dot{z}(t) = pF_p + qF_q = 2p^2 + q$$

شرایط اولیهٔ معادلات مشخصه را به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت.

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = x_0$$

اما اگر از دادهٔ کوشی مسئله نسبت به x مشتق بگیریم، نتیجه خواهد شد $u_x(x, 0) = 1$. بنابراین باید $p(0) = 1$. همچنین اگر معادله را در نقطهٔ $(x, 0)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$0 = u_x^2(x, 0) + u_y(x, 0) + u(x, 0) = 1 + u_y(x, 0) + x$$



نمودار ۷ ـ ۶.

بنابراین $q(\circ) = -x_\circ - ۱$. در نتیجه جواب دستگاه معادلات مشخصه عبارت‌اند از:

$$x(t) = ۲ + x_\circ - ۲e^{-t}, \qquad y(t) = t, \qquad z(t) = -e^{-۲t} + (x_\circ + ۱)e^{-t},$$
$$p(t) = e^{-t}, \qquad q(t) = -(x_\circ + ۱)e^{-t}$$

نمودار ۷ ـ ۶ خم‌های مشخصه را نشان می‌دهند که تمام صفحه را می‌پوشانند. اکنون با قرار دادن $t = y$ و $x_\circ = x - ۲ + ۲e^{-y}$ جواب مسئله به‌دست می‌آید.

$$u(x,y) = -e^{-۲y} + (x - ۱ + ۲e^{-y})e^{-y} = e^{-۲y} + (x - ۱)e^{-y}$$

تذکر ۷ ـ ۷. پیدا کردن شرایط اولیهٔ $p(\circ)$ و $q(\circ)$ همیشه کار راحتی نیست و باید با مشتق گرفتن از دادهٔ کوشی و به کمک معادلهٔ اصلی این مقادیر را تعیین کرد. البته این کار تنها به شرط غیرمشخصه بودن رویهٔ Γ امکان‌پذیر است. (تمرین ۴) به علاوه برای اینکه بتوان در پایان جواب را برحسب متغیرهای x و y نوشت به این شرط نیاز داریم. این شرط در حالتی که معادلهٔ غیرخطی باشد، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(F_p, F_q)\cdot \vec{n} \neq \circ \qquad \text{روی } \Gamma \qquad (۷ ـ ۱۴)$$

تذکر ۷ ـ ۸. از معادلات مشخصه در حالت غیرخطی می‌توان حالت‌های خطی و شبه‌خطی را که در بخش‌های قبل گفته شد، نتیجه گرفت. در حالت خطی می‌توان قرار داد:

$$F(x,y,z,p,q) = a(x,y)p + b(x,y)q + c(x,y)z + d(x,y)$$

در این صورت دستگاه معادلات مشخصه به شکل زیر به‌دست خواهند آمد:

$$\dot{x}(t) = F_p = a(x,y)$$

$$\dot{y}(t) = F_q = b(x,y)$$

$$\dot{z}(t) = pF_p + qF_q = pa(x,y) + qb(x,y) = -c(x,y)z - d(x,y)$$

این معادلات که همان معادلات (۷ ـ ۵) هستند، مستقل از $p(t)$ و $q(t)$ بوده و قابل حل خواهند بود. همچنین در حالت شبه‌خطی، نتیجه یکسان بوده و همان معادلات مشخصهٔ فصل قبل به‌دست می‌آید. در ضمن شرط غیرمشخصه بودن رویه‌ها در همهٔ حالت‌ها از رابطهٔ (۷ ـ ۱۴) به‌دست می‌آید.

تمرین ۷ ـ ۳

۱. جواب هرکدام از معادلات غیر خطی با شرط کوشی زیر را به روش خم‌های مشخصه پیدا کنید.

الف) $u_x^2 + u_y^2 = u^2 , \qquad u(x,0) = 1$

ب) $u_x^2 + u_y^2 = u^2 , \qquad u(x,y) = 1$ ، برای $x^2+y^2 = 1$

پ) $u_y = u_x^3 , \qquad u(x,0) = 2x^{\frac{3}{2}}$

ت) $u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) , \qquad u(x,0) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$

۲. معادلات غیرمشخصهٔ مسئلهٔ کوشی غیرخطی زیر را به‌دست آورید. نشان دهید که نمی‌توان مقادیر اولیهٔ این مسئله را در تمام نقاط به‌دست آورد.

$$u_x^2 + u_xu_y + u = 0$$

$$u(0,y) = y$$

۳. جواب مسئلهٔ زیر را به‌دست آورده و نشان دهید که در چه نواحی این جواب معتبر است.

$$u_x^2 + u_xu_y + u_y^2 = u$$

$$u(x,x) = x^2$$

۴. شکل کلی معادلهٔ غیرخطی را همراه با دادهٔ کوشی $u = g(x,y)$ روی منحنی Γ، در نظر بگیرید. منحنی Γ را با $(\phi_1(s), \phi_2(s))$ پرمایش کنید و از دادهٔ کوشی نسبت به پارامتر s مشتق بگیرید. رابطه‌ای بین u_x و u_y روی Γ به‌دست می‌آید. نشان دهید به کمک این رابطه و معادلهٔ اصلی، به شرط غیرمشخصه بودن رویه می‌توان مقادیر u_x و u_y را روی Γ به‌دست آورد.

۷ ـ ۴ معادلات اصل بقا

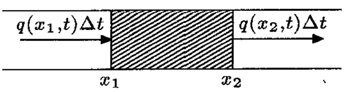
یکی از معروف‌ترین معادلات مرتبهٔ اول، معادلات مربوط به اصول بقاست. اینگونه معادلات در حالت کلی دارای جواب پیوسته نیستند. تطبیق پدیده‌های فیزیکی مربوط به آن با مدل ریاضی آن از جمله مباحث جذاب این دسته معادلات است.

اگر مسیر جریانی از یک ماده را در راستای یک خط راست در نظر بگیریم، مانند حرکت گاز یا جریان آب در یک لوله، چگالی مقدار ماده در زمان t در نقطهٔ x را با $\rho(x,t)$ نشان می‌دهیم. دو نقطهٔ x_1 و x_2 را از این مسیر در نظر بگیرید، مقدار ماده‌ای که در فاصلهٔ بین این دو نقطه در زمان t قرار دارد، عبارت است از:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx$$

بنابراین میزان تغییر این ماده در بین زمان‌های t و $t + \Delta t$ برابر خواهد بود با:

$$\int_{x_1}^{x_2} \big(\rho(x, t+\Delta t) - \rho(x,t)\big)dx$$



نمودار ۷ ـ ۷.

از طرف دیگر اگر $q(x,t)$ را سرعت جریان در نقطهٔ x در لحظهٔ t بگیریم، در فاصلهٔ

زمانی $(t, t+\Delta t)$ مقدار $q(x_1, t)\Delta t$ ماده از نقطهٔ x_1 وارد محدودهٔ مورد نظر شده و مقدار $q(x_2, t)\Delta t$ از نقطهٔ x_2 خارج شده است. در این صورت باید:

$$\int_{x_1}^{x_2} \big(\rho(x, t+\Delta t) - \rho(x, t)\big) dx = \big(q(x_1, t) - q(x_2, t)\big)\Delta t$$

بنابراین وقتی $\Delta t \to 0$ نتیجه می‌شود:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) dx + q(x_2, t) - q(x_1, t) = 0 \qquad (۷ \text{ ـ } ۱۵)$$

معادلهٔ بالا صورت انتگرالی معادلهٔ اصل بقا نامیده می‌شود. اگر x_1 را ثابت بگیریم و $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$، آنگاه:

$$\rho_t(x, t) + q_x(x, t) = 0 \qquad (۷ \text{ ـ } ۱۶)$$

معادلهٔ فوق صورت دیفرانسیلی معادلهٔ اصل بقاست. ارتباط بین جریان q با چگالی ρ از مدل‌های فیزیکی مسئله نتیجه می‌شود. در بسیاری از مدل‌ها جریان را تابعی از چگالی در نظر می‌گیرند، مثلاً $q = F(\rho)$. در این صورت معادلهٔ اصل بقا به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + F'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (۷ \text{ ـ } ۱۷)$$

در این معادلهٔ ρ باید تابعی مشتق‌پذیر باشد، در حالیکه در فرم انتگرالی (۷ ـ ۱۵) حتی لازم نیست که جواب پیوسته باشد. به همین دلیل در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی جواب‌های ناپیوسته از اصل بقا موجودند.

مثال۷ ـ ۷. اگر یک جاده را در نظر بگیریم و در هر نقطهٔ x، تعداد خودروها را در فاصلهٔ $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ با $\rho(x, t)$ نشان دهیم. (هر واحد را می‌توان معادل ۱۰۰ متر گرفت.) سرعت متوسط همهٔ خودروها در این فاصله به تعداد آنها وابسته است. آن را با $V(\rho)$ نشان می‌دهیم. هر چه تعداد خودروها بیشتر باشد، $V(\rho)$ کمتر است. جریان حرکت خودروها در این فاصله با سرعت $V(\rho)\rho$ تغییر می‌کند. بنابراین با قرار دادن $F(\rho) = V(\rho)\rho$ معادلهٔ اصل بقا خودرو در جاده به‌صورت (۷ ـ ۱۷) خواهد بود.

اکنون مسئلهٔ اصل بقا را به‌صورت یک مسئلهٔ کوشی در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &u_t + f(u)u_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \\ &u(x, 0) = u_0(x) \end{aligned} \qquad (۷ \text{ ـ } ۱۸)$$

که $f = F'$. این معادله که یک معادلهٔ شبه‌خطی است، معادلات مشخصهٔ آن به‌صورت زیر

هستند.

$$\dot{t}(s) = 1, \quad \dot{x}(s) = f(z), \quad \dot{z}(s) = 0$$
$$t(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad z(0) = u_0(x_0)$$

بنابراین خم‌های مشخصه، خطوط راست در صفحه با شیب $f(u_0(x_0))$ هستند و u روی هر کدام از آنها مقدار ثابتی دارد. دادهٔ کوشی u_0 و همچنین تابع f حالت‌های مختلفی برای خم‌های مشخصه پدید می‌آورند. مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه برای یک معادله وقتی شرایط اولیه تغییر می‌کند پدیده‌های فیزیکی مختلفی اتفاق می‌افتد.

مثال ۷ ـ ۸. معادلهٔ زیر را که به معادلهٔ برگر معروف است، در نظر بگیرید:

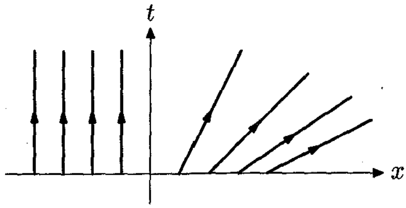
$$u_t + uu_x = 0$$

اگر شرط اولیه به‌صورت زیر باشد:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

شکل ۷ ـ ۸ خم‌های مشخصه را در این حالت نشان می‌دهد. به کمک روش خم‌های مشخصه جواب زیر برای معادله به‌دست می‌آید که در تمام ناحیهٔ $t > 0$ معتبر است.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{t+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

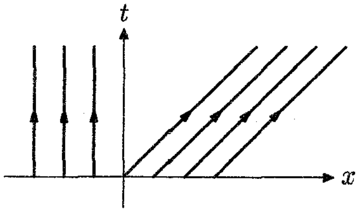


نمودار ۷ ـ ۸.

به راحتی می‌توان دید که اگر u_0 تابع غیر نزولی و پیوسته باشد، تمام خم‌های مشخصه نیم‌صفحهٔ $t > 0$ را می‌پوشانند و جواب مسئله به‌صورت یکتا مشخص می‌شود. اما اگر شرط

اولیهٔ یک تابع غیر نزولی باشد که دارای ناپیوستگی است، مثل

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

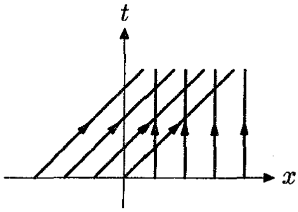


نمودار ۷ ـ ۹.

خم‌های مشخصه در این حالت دیگر نیم صفحهٔ $t > 0$ را نمی‌پوشانند (شکل ۷ ـ ۹). به همین دلیل به روش خم‌های مشخصه نمی‌توان جواب را در ناحیه‌ای که پوشیده نمی‌شود، به طور یکتا تعیین کرد. اما همانطور که در ادامه اشاره خواهیم کرد، در این حالت می‌توان دو نوع جواب پیوسته و ناپیوسته برای مسئله پیدا کرد. اگر دادهٔ اولیهٔ مسئله یک تابع نزولی مانند تابع زیر باشد.

$$u_2(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

خم‌های مشخصه همدیگر را قطع می‌کنند و نمی‌توان جواب پیوسته برای مسئله پیدا کرد (شکل ۷ ـ ۱۱). برای اینگونه داده‌های کوشی که برای آنها جواب پیوسته وجود ندارد، به کمک مدل انتگرالی معادلهٔ اصل بقا جواب مسئله را پیدا می‌کنیم.



نمودار ۷ ـ ۱۰.

قضیهٔ زیر شرط لازم برای پیوستگی جواب مسئله اصل بقا را نشان می‌دهد.

قضیه ۷ ـ ۹. *اگر مسئلهٔ (۷ ـ ۱۸) دارای جواب پیوسته در $t > 0$ باشد، آنگاه تابع $f(u_0(x))$ غیر نزولی است.*

برهان. به راحتی می‌توان دید که اگر دو نقطهٔ $x_2 > x_1$ وجود داشته باشند که $f(u_0(x_2)) < f(u_0(x_1))$ خم‌های مشخصه‌ای که از دو نقطهٔ x_1 و x_2 می‌گذرند همدیگر را قطع می‌کنند، در حالی که مقدار u روی این خم‌ها به ترتیب باید برابر مقادیر ثابت $u_0(x_1)$ و $u_0(x_2)$ باشد. ■

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که مسئله جواب پیوسته ندارد. اگر $u(x,t)$ جواب فیزیکی معادلهٔ اصل بقا باشد:

$$u_t + F(u)_x = 0 \tag{۷ ـ ۱۹}$$

که در زمان t دارای نقطهٔ ناپیوستگی $x = s(t)$ است. به جای صورت دیفرانسیلی معادلهٔ اصل بقا، صورت انتگرالی را در فاصلهٔ $x_1 < s(t) < x_2$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = F(u(x_1,t)) - F(u(x_2,t)) \tag{۷ ـ ۲۰}$$

با قراردادن حد چپ و راست u در نقطهٔ ناپیوستگی با نمادهای $u_l = \lim_{x\to s(t)^-} u(x,t)$ و $u_r = \lim_{x\to s(t)^+} u(x,t)$ و همچنین با گرفتن $\sigma = \dot{s}(t)$ به‌عنوان سرعت تغییر نقطهٔ ناپیوستگی داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \frac{d}{dt}\Big(\int_{x_1}^{s(t)} u(x,t)dx + \int_{s(t)}^{x_2} u(x,t)dx\Big)$$

$$= \sigma u_l + \int_{x_1}^{s(t)} u_t(x,t)dx - \sigma u_r + \int_{s(t)}^{x_2} u_t(x,t)dx \tag{۷ ـ ۲۱}$$

اکنون اگر $x_1 \to s(t)^-$ و $x_2 \to s(t)^+$، عبارت بالا به

$$\sigma(u_l - u_r) = \sigma[u]$$

میل می‌کند که $[u] = u_l - u_r$ میزان پرش تابع u را در نقطهٔ ناپیوستگی $x = s(t)$ نشان می‌دهد. همچنین سمت راست تساوی (۷ ـ ۲۰) در حالت حدی به

$$F(u_l) - F(u_r) = [F(u)]$$

میل می‌کند که منظور از $[F(u)]$ میزان پرش تابع $F(u)$ است. بنابراین اگر جواب معادلهٔ اصل بقا ناپیوستگی داشته باشد، باید روی خم $x = s(t)$ که نقاط ناپیوستگی را نشان می‌دهد، رابطهٔ

زیر برقرار باشد.

$$\sigma[u] = [F(u)]$$

این رابطه را شرط جهش یا شرط رانکین—هاگونیو[1] می‌نامند.

مثال ۷ ـ ۹. در معادلهٔ برگر که $F(u) = \frac{1}{2}u^2$، شرط جهش در نقاط ناپیوستگی بدین صورت است:

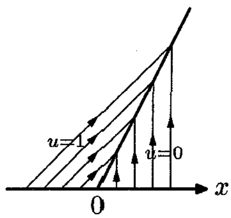
$$\sigma(u_l - u_r) = \frac{1}{2}u_l^2 - \frac{1}{2}u_r^2$$

بنابراین:

$$\sigma = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

اکنون اگر شرط اولیه را تابع u_2 در مثال ۷ ـ ۸ بگیریم، در این حالت خم‌های مشخصه همدیگر را قطع می‌کنند و جواب پیوسته وجود ندارد. اگر $x = s(t)$ خم ناپیوستگی جواب باشد، انتظار می‌رود در سمت چپ آن مقدار تابع برابر یک و در سمت راست برابر صفر باشد. بنابراین $\dot{s}(t) = \sigma = \frac{1}{2}$ و چون جواب در لحظهٔ $t = 0$ دارای ناپیوستگی در $x = 0$ است، پس $s(0) = 0$ و در نتیجه $s(t) = \frac{t}{2}$. بدین ترتیب جواب مسئله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < \frac{t}{2} \\ 0 & x > \frac{t}{2} \end{cases}$$



نمودار ۷ ـ ۱۱.

در مثال بعد جواب تا یک زمان مثبت، پیوسته است و از لحظه‌ای به بعد دچار ناپیوستگی می‌شود.

1. Rankine-Hugoniot

مثال ۷ ـ ۱۰. اگر معادلهٔ برگر را با شرط اولیهٔ زیر در نظر بگیریم:

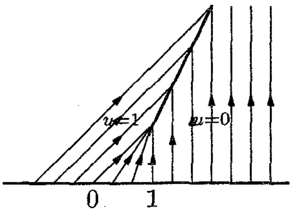
$$u(x,0)=\begin{cases}1 & x<0\\ 1-x & 0\leq x\leq 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

به کمک خم‌های مشخصه جواب برای $0 \leq t \leq 1$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x\leq t\leq 1\\ \dfrac{1-x}{1-t} & 0\leq t\leq x\leq 1\\ 0 & 0\leq t\leq 1\leq x\end{cases}$$

برای زمان $t>1$، خم‌های مشخصه با شیب یک و شیب صفر همدیگر را قطع می‌کنند و نمی‌توانیم جواب پیوسته داشته باشیم. در امتداد منحنی ناپیوستگی، داریم: $u_r=0, u_l=1$، بنابراین $\sigma=\frac{1}{2}$ و $s(1)=1$، در نتیجه $s(t)=\frac{1+t}{2}$ و جواب مسئله برای $t>1$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x<\dfrac{1+t}{2}\\ 0 & x>\dfrac{1+t}{2}\end{cases}$$



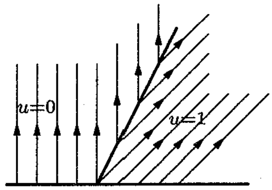
نمودار ۷ ـ ۱۲.

از نظر فیزیکی مسائل اصل بقا جواب یکتا دارند، اما از نظر ریاضی مثال‌هایی وجود دارند که حتی با اعمال شرط جهش جواب‌های متعددی پیدا می‌کنند. مثال زیر یکی از اینگونه مثال‌ها را نشان می‌دهد.

مثال ۷ ـ ۱۱. مثال ۷ ـ ۸ همراه با شرط اولیهٔ u_1 را در نظر بگیرید. همانطور که در آنجا اشاره شد، خم‌های مشخصه قسمتی از صفحه را نمی‌پوشانند و روی هر خم مشخصه مقدار u

معلوم است. اگر بخواهیم قسمت خالی صفحه را پر کنیم و به دنبال جواب ناپیوسته باشیم که سمت چپ منحنی ناپیوستگی $u = 0$ و در سمت راست $u = 1$ باشد. در این صورت از شرط جهش نتیجه می‌شود $\sigma = \frac{1}{2}$ و جواب به‌صورت زیر است.

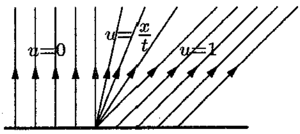
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < \frac{t}{2} \\ 1 & x > \frac{t}{2} \end{cases}$$



نمودار۷ ــ ۱۳.

اما به طریق دیگری نیز می‌توان این قسمت خالی صفحه را پر کرد، طوری که جواب پیوسته باشد، مثلاً:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x < t \\ 1 & t \leq x \end{cases}$$



نمودار۷ ــ ۱۴.

همچنین برای هر پارامتر $\gamma \in [0, 1]$ می‌توان جواب زیر را در نظر گرفت که در شرط جهش یا رانکین–هاگونیو صدق می‌کند.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq \gamma t \\ \gamma & \gamma t < x < \frac{\gamma+1}{2}t \\ 1 & \frac{\gamma+1}{2}t \leq x \end{cases}$$

برای اینکه به جواب فیزیکی مورد نظر برسیم، شرطی به جواب معادله اضافه می‌کنیم. این شرط به شرط آنتروپی معروف است. در حالتی که معادلهٔ اصل بقا (۷ ـ ۱۹) جواب ناپیوسته داشته باشد، انتظار داریم وقتی روی خم‌های مشخصه در زمان به عقب برمی‌گردیم، خم مشخصهٔ دیگری را قطع نکنیم. برای مثال در شکل ۷ ـ ۱۳ این خاصیت را نداریم. در اصل اگر u_l و u_r حد چپ و راست u در نقطهٔ ناپیوستگی باشد و σ سرعت منحنی ناپیوستگی در آن نقطه، باید داشته باشیم:

$$F'(u_l) > \sigma > F'(u_r)$$

این شرط را شرط آنتروپی می‌نامند. $F'(u_l)$ شیب خم‌های مشخصه در سمت چپ منحنی ناپیوستگی است و همچنین $F'(u_r)$ شیب خم‌های مشخصه در سمت راست است و شرط آنتروپی تضمین می‌کند که وقتی از نقطهٔ ناپیوستگی روی خم‌های مشخصه در زمان به عقب برگردیم، به خم مشخصهٔ دیگری نمی‌رسیم. در حالتی که $F'' > ۰$ باشد، تابع F' صعودی است و شرط آنتروپی به رابطهٔ

$$u_l > u_r$$

تبدیل می‌شود. یعنی در هر نقطهٔ ناپیوستگی جهش $u(x,t)$ به سمت پایین است. منحنی ناپیوستگی در حالتی که در شرط‌های آنتروپی و جهش صدق کند، موج شوک نامیده می‌شود. در مثال قبل تنها جوابی که در شرط آنتروپی صدق می‌کند، حالت $\gamma = ۱$ است. ثابت می‌شود هر مسئلهٔ اصل بقا همراه با شرط‌های آنتروپی و جهش جواب یکتا دارد.

مثال۷ ـ ۱۲. معادلهٔ برگر را با شرط اولیهٔ زیر در نظر بگیرید

$$u(x,۰) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & ۰ \le x \le ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases}$$

با ترکیب مثال‌های ۷ ـ ۹ و ۷ ـ ۱۱ برای $۰ \le t < ۲$ جواب پیوستهٔ زیر برای مسئله پیدا می‌شود.

$$u(x,t) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \dfrac{x}{t} & ۰ < x < t \\ ۱ & t < x < ۱ + \dfrac{t}{۲} \\ ۰ & x > ۱ + \dfrac{t}{۲} \end{cases}$$

در امتداد موج شوک $x = s(t)$ انتظار می‌رود که در سمت چپ $u = \frac{x}{t}$ و در سمت راست $u = ۰$ باشد. این خواسته منطبق بر شرط آنتروپی جواب است. به کمک شرط جهش داریم:

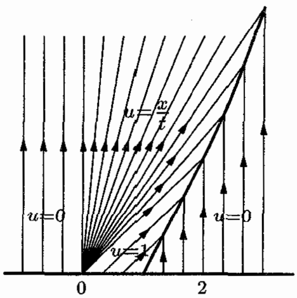
$$[u] = \frac{s(t)}{t}, \qquad [F(u)] = \frac{۱}{۲}\left(\frac{s(t)}{t}\right)^۲, \qquad \sigma = \dot{s}(t)$$

در نتیجه برای $t \geq ۲$:

$$\dot{s}(t) = \frac{s(t)}{۲t}$$

به علاوه باید $s(۲) = ۲$. پس $s(t) = \sqrt{۲t}$ و جواب مسئله برای $t \geq ۲$ به‌صورت زیر است.

$$u(x,t) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{x}{t} & ۰ < x < \sqrt{۲t} \\ ۰ & x > \sqrt{۲t} \end{cases}$$



نمودار۷ ـ ۱۵.

تمرین ۷ ـ ۴

۱. معادلهٔ اصل بقا (۷ ـ ۱۹) با شرایط اولیهٔ زیر که u_l و u_r مقادیری ثابت هستند، به مسئلهٔ ریمان معروف است.

$$u(x,۰) = \begin{cases} u_l & x < ۰ \\ u_r & x > ۰ \end{cases}$$

الف) اگر $F'' > ۰$، نشان دهید در حالتی که $u_l > u_r$، تنها جواب آنتروپی مسئله به‌صورت زیر است.

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \frac{x}{t} < \sigma \\ u_r & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases}$$

که $\sigma = \dfrac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}$. در این حالت جواب دارای موج شوک است.

ب) اگر $u_l < u_r$، نشان دهید تنها جواب آنتروپی بدین صورت است:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \dfrac{x}{t} < F'(u_l) \\ G(\frac{x}{t}) & F'(u_l) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r & \dfrac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases}$$

که $G = (F')^{-1}$. در این حالت جواب فاقد موج شوک است.

۲. جواب آنتروپی مسئلهٔ ترافیک در مثال ۷ ـ ۷ را برای تابع سرعت $V(\rho) = k - \rho$ با شرط اولیهٔ زیر به‌دست آورید. (k مقداری ثابت است که تعداد حداکثر ممکن خودروها در یک واحد را نشان می‌دهد.)

$$u(x, \circ) = \begin{cases} k & x < \circ \\ \circ & x > \circ \end{cases}$$

مسئلهٔ بالا مدلی ساده برای حالتی است که خودروها پشت چراغ قرمز ایستاده‌اند. مدت زمانی را به‌دست آورید که چراغ باید سبز بماند تا خودروهایی که در فاصلهٔ ۵۰۰ متری چراغ ایستاده‌اند، بتوانند از چراغ قرمز عبور کنند.

مراجع

[1] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis*, MacGraw-Hill, New York, 1974.

[2] Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, MacGraw-Hill, New York, 1963.

[3] Churchill, R.V. , *Modern Operational Mathematics in Engineering*, MacGraw-Hill, New York, 1944.

[4] Coddington E.A. and Levinson N., *Theory of ordinary Differential Equations*, MacGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Duoandikoetxea J., *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2000.

[6] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[7] Evans, G., Blackledge J. and Yardley P., *Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer, 2000.

[8] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, 8th ed., Wiley, New York, 1999.

[9] Mint-U T., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 2nd ed., North Holland, New York, 1980. , New York, 1963.

[10] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1991.

[11] Renardy, M. and Rogers, R.C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.

[12] Sneddon I.N., *Fourier Transforms*, MacGraw-Hill, New York, 1951.

[13] Tolstov G.P., *Fourier Series*, Prentice-Hall, 2nd ed., 1965.

فهرست راهنما