سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون
مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۳

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

معاونت دانش‌پژوهان جوان

به نام او

آزمون مرحله دوم سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۱ و ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۳ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. در تدوین راه حل‌ها جنبهٔ آموزشی این امر مد نظر قرار گرفته و برای بعضی سؤالات بیش از یک راه حل ارائه شده است. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبهٔ آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه حل‌ها نیامده باشند.

۱. فروش‌گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همهٔ سبدها را با هم برابر کرد؟

راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همهٔ تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همهٔ سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همهٔ سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیش‌ترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطهٔ N و P، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطهٔ Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. ثابت کنید:

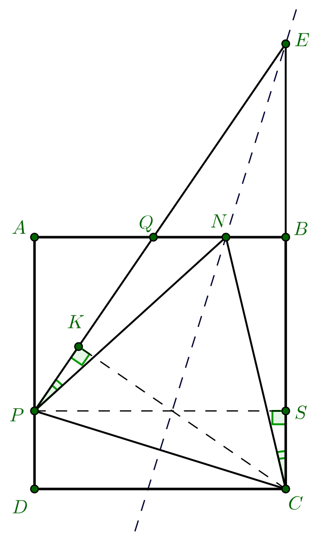
$$\widehat{BCQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{PQA}.$$

راه حل. خط PQ را امتداد می‌دهیم تا خط BC را در نقطهٔ E قطع کند. طبق فرض $PN = NC$، پس $\angle NPC = \angle PCN$. همچنین می‌دانیم $\angle QPN = \angle NCB$. از جمع این دو رابطه درمی‌یابیم مثلث EPC متساوی‌الساقین است. در این مثلث ارتفاع‌های CK و PS را رسم می‌کنیم. چون مثلث EPC متساوی‌الساقین است $PS = CK$. از طرفی PS برابر طول ضلع مربع است پس $CK = CB$. در چهارضلعی $QBCK$ مجموع زاویه‌های $\angle QBC$ و $\angle CKQ$ برابر ۱۸۰ درجه است. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP.$$

توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه CKQ و CBQ به حالت وتر و یک ضلع $(CQ = CQ, CK = CB)$ همنهشت هستند. بنابراین QC نیمساز $\angle KQB, \angle KCB$ است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{۲} = \frac{\angle AQP}{۲}.$$



۳. اعداد حقیقی و نامنفی x، y و z مفروض هستند. می‌دانیم:

$$۲(xy+xz+zy)=x^۲+y^۲+z^۲.$$

ثابت کنید:

$$\frac{x+y+z}{۳}\geq \sqrt[۳]{۲xyz}.$$

راه حل نخست:

فرض کنید $x\geqslant y\geqslant z$

$$x^۲+y^۲+z^۲=۲(xy+yz+zx)$$
$$\Rightarrow ۱x^۲+x(-۲y-۲z)+y^۲+z^۲-۲yz=۰$$
$$\Rightarrow x=(y+z)\pm\sqrt{(y+z)^۲-y^۲-z^۲+۲yz}=(y+z)\pm۲\sqrt{yz}=(y+z)\pm۲\sqrt{yz}=(\sqrt{y}\pm\sqrt{z})^۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-\sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

که با فرض $x\geqslant y\geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$ یا معادلا $x=y+z+۲\sqrt{yz}$ رخ می‌دهد. حال با جای‌گذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y+z+۲\sqrt{yz}+y+z}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{۲(y+z+۲\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم $y=۰$ ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت است. حال فرض کنید y مخالف صفر است ($y=۰$ بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر y تقسیم کنید و فرض کنید $\frac{z}{y}=t$ پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{۲t+۲\sqrt{t}+۲}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{۲(t+۱+۲\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می‌آید:

$$\frac{۲t+۲\sqrt{۲t}+۲}{۳}=\frac{(\sqrt{t}+۱)+(\sqrt{t}+۱)+۲t}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{(\sqrt{t}+۱)^۲۲t}$$
$$=\sqrt[۳]{۲(t+۱+۲\sqrt{t})t}$$

راه حل دوم:

فرض کنید $x \geqslant y \geqslant z$

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲(xy + yz + zx)$$
$$\Rightarrow x^{۲} + x(-۲y - ۲z) + y^{۲} + z^{۲} - ۲yz = ۰$$
$$\Rightarrow x = (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^{۲} - y^{۲} - z^{۲} + ۲yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^{۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geqslant y \geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا

$$x = y + z + ۲\sqrt{yz}$$

رخ می‌دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y + z + ۲\sqrt{yz} + y + z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(y + z + ۲\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید $A = \frac{y+z}{۲}$ و $B = \sqrt{yz}$ حال چون $A \geqslant B$ (نابرابری حسابی-هندسی) می‌توان فرض کرد $A = B + e$ که $e \geqslant ۰$ در این صورت با جای‌گذاری $A = B + e$ در رابطهٔ قبل به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$۲B + \frac{۴e}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(۴B + ۲e)B^{۲}}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^{۳} \geqslant ۸B^{۳} + ۴eB^{۲}$$

اما داریم:

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^{۳} = ۸B^{۳} + ۳(۲B)^{۲}\frac{۴e}{۳} + ۶B(\frac{۴e}{۳})^{۲} + (\frac{۴e}{۳})^{۳} \geqslant ۸B^{۳} + ۱۶B^{۲}e \geqslant ۸B^{۳} + ۴eB^{۲}$$

پس رابطهٔ مورد نظر ثابت شد.

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m.$$

راه حل نخست:

عدد طبیعی k و عدد صحیح نامنفی t را طوری انتخاب می‌کنیم که k بر n بخش‌پذیر نباشد و $m = kn^t$. (ابتدا t را بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم که m بر n^t بخش‌پذیر باشد، سپس k را برابر حاصل تقسیم m بر n^t در نظر می‌گیریم.) با این جای‌گذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^{n^n} = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجهٔ n^t می‌گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر n^{kt} تقسیم می‌کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \qquad (۱)$$

اگر $t \geq n$ آن‌گاه $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$، پس $n^m \geq n^{n^n}$ و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq n^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq ۱ \Rightarrow n = ۱$$

و جواب $m = n = ۱$ به دست می‌آید.

اما اگر $n > t$ آن‌گاه $n - t$ مثبت است و $n^{n-t} - kt$ عددی صحیح. فرض کنید $s = n^{n-t} - kt$، در این صورت $n^s = k^k$. اگر $s < ۰$ آن‌گاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می‌شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر $s = ۰$ آن‌گاه $k = ۱$ که در انتها بررسی شده. فرض کنیم $s > ۰$، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از n و k را بشمارد آن‌گاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی $n^s = k^k$ را می‌شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول n و k یکسان‌اند. فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_r^{\alpha_r}$ و $k = p_۱^{\beta_۱} \cdots p_r^{\beta_r}$ تجزیهٔ این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_۱^{\alpha_۱})^s \cdots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_۱^{\beta_۱})^k \cdots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان‌های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر $k \geq s$ آن‌گاه $\beta_i \geq \alpha_i$ و در نتیجه k بر n بخش‌پذیر است که خلاف فرض اولیه است.

اگر $s < k$ آن‌گاه $\beta_i < \alpha_i$ و در نتیجه n بر k بخش‌پذیر است. پس n^{n-t} هم بر k بخش‌پذیر است. از دو طرف تساوی (۱) رادیکال فرجهٔ k می‌گیریم

$$n^{\frac{n^{n-t}}{k}-t} = k$$

چون توان n در این عبارت صحیح است و k مضربی از n نیست به ناچار $s = 0$ و $k = 1$. یعنی $n^{n-t} - t = 0$، اما

$$t = n^{n-t} \geq n^{1} \geq n > t$$

و به تناقض می‌رسیم.

راه حل دوم:

ابتدا توجه کنید که اگر $n = ۱$ آن‌گاه $m = ۱$ و جواب $m = n = ۱$ به دست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم $n > ۱$. فرض کنیم $r = \log_n m$، در این صورت $m = n^r$ و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون $n > ۱$ باید توان‌های n در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \qquad (۲)$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایهٔ n) از دو طرف تساوی $n^{n^n} = m^m$ به دست می‌آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \qquad (۳)$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل n و عددهایی گویا و مثبت مثل p و q تساوی $n^p = q$ برقرار شود آن‌گاه q عددی طبیعی است.

اثبات. فرض کنید $p = \frac{a}{b}$ و $q = \frac{c}{d}$ نمایش‌های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b | c^b \Rightarrow d | c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

ادامهٔ راه‌حل. بنابر تساوی (۲) r گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض $p = n - r$ و $q = r$ داریم $n^p = q$. گویا بودن p و q نتیجهٔ مستقیم گویا بودن r است. پس بنابر لم، q باید عددی طبیعی باشد. یعنی r عددی طبیعی است.

اگر $r < n$ آن‌گاه $n^{n-r} \geq n^۱ > r$ در نتیجه تساوی امکان پذیر نیست.

اگر $r > n$ آن‌گاه $n^{n-r} < ۱ < r$ در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.

اگر $n = r$ آن‌گاه $r = n^{n-r} = ۱$ پس $n = r = ۱$ که خلاف فرض $n > ۱$ است.

در نتیجه تنها جواب $m = n = ۱$ است.

۵. زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

الف. یک مجموعهٔ توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعهٔ توانای متناهی؛ بیش از چهار عضو ندارد.

راه حل.

الف. $\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}\}$ یک مجموعهٔ توانای ۴ عضوی است:

$$۱^x = ۱, \quad \left(\frac{۱}{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}, \quad \left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}.$$

(البته این مثال را می‌توان با تحلیل صورت کلی مجموعه‌های توانا - همان‌طور که در ادامه خواهد آمد - به دست آورد.)

ب. ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می‌کنیم:

- برای هر عدد مثبت x و اعداد مثبت $a < b$، $a^x < b^x$.
- اگر عدد حقیقی a بیشتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x زیاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر $x < y$، $a^x < a^y$.
- اگر عدد حقیقی مثبت a کمتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x کم می‌شود.

حال به سراغ حل مسأله می‌رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعهٔ توانای متناهی نمی‌تواند هم‌زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این‌صورت مجموعهٔ توانای متناهی S وجود دارد که هم شامل عضوی بزرگتر از ۱ و هم شامل عضوی کوچک‌تر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعهٔ S را با a و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با b نمایش می‌دهیم. (بنابر متناهی بودن S چنین اعضایی وجود دارند.) در نتیجه $a < ۱ < b$. داریم $a^b < a^۱ = a$، اما a کوچکترین عضو S است، پس a^b نمی‌تواند در S باشد. همین‌طور $b = b^۱ > b^a > b^۰ = ۱$، اما S شامل عضوی بین ۱ و b نیست، پس b^a هم نمی‌تواند در S باشد. پس هیچ یک از دو عدد a^b و b^a در S قرار ندارند و این توانا بودن S را نقض و لم را ثابت می‌کند. $\square$

با توجه به لم، مجموعه‌های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم S مجموعهٔ توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ اعضای بزرگتر از ۱ در S باشند. از آنجایی که S عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از n بیشتر است و در نتیجه $n \geq 3$. برای هر $1 \leq i < n$، $a_n^{a_i}$ از a_n بیشتر است، پس در S قرار نمی‌گیرد. پس توانا بودن S ایجاب می‌کند که $a_i^{a_n}$ در S باشد. حال

$$a_1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \cdots < a_{n-1}^{a_n}$$

n عضو بزرگتر از ۱ در S هستند، از طرف دیگر $a_1 < \cdots < a_n$ همهٔ اعضای بزرگتر از ۱ در S بودند، پس

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

حال بیایید توانا بودن S را در مورد a_1 و a_{n-1} بررسی کنیم. (با توجه به $n \geq 3$، $1 < n-1$) با توجه به $a_1 > 1$ داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_n} = a_2.$$

پس $a_1^{a_{n-1}}$ عددی بین a_1 و a_2 است و چنین عددی در S وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_n} = a_n.$$

پس $a_{n-1}^{a_1}$ هم در S قرار ندارد. پس S نمی‌تواند توانا باشد و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید S یک مجموعهٔ توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ اعضای کمتر از ۱ در آن باشند. پس n حداقل ۴ است. $a_n < 1$ پس برای هر $1 \leq i < n$، $1 = a_n^0 > a_n^{a_i} > a_n^1 = a_n$.
پس $a_n^{a_i}$ در S قرار ندارد و $a_i^{a_n}$ عضو S است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \cdots < a_{n-1}^{a_n} < 1.$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = a_n^{\frac{1}{a_n}},\ a_{n-2} = a_{n-1}^{\frac{1}{a_n}},\ \ldots, a_1 = a_2^{\frac{1}{a_n}}.$$

پس اگر a_n را با a نشان دهیم، اعضای S به صورت زیر هستند:

$$\cdots < a^{\frac{1}{a^2}} < a^{\frac{1}{a}} < a.$$

حال توجه کنید که $a_{n-1} < 1$، پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1.$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}}$ در S قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_n$ پس داریم:

$$\begin{aligned} a_{n-2}^{a_{n-1}} &= \left(a^{1/a^2}\right)^{\left(a^{1/a}\right)} = a \implies a^{a^{(1/a)-2}} = a \\ &\Rightarrow a^{\frac{1}{a}-2} = 1 \end{aligned}$$

که با توجه به این که $a \neq 1$ پس $\frac{1}{a} - 2 = 0$ و در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. پس $a_{n-2} = \frac{1}{16}, a_{n-1} = \frac{1}{4}, a_n = \frac{1}{2}$. حال $n \geq 4$ پس $n - 3 \geq 1$ و $a_{n-3} = a_{n-2}^2 = \frac{1}{2^8}$. حال شرط توانا بودن را برای a_{n-2} و a_{n-3} بررسی می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{2^8}} = a_{n-2}^{a_{n-3}} < 1.$$

همین‌طور

$$\frac{1}{2} < a_{n-3}^{a_{n-2}} = \left(\frac{1}{2^8}\right)^{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

پس هیچ یک از دو عدد $a_{n-2}^{a_{n-3}}$ و $a_{n-3}^{a_{n-2}}$ در S قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می‌شود. پس مجموعه‌های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند.
پس هر دو نوع مجموعهٔ توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همهٔ به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همهٔ اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $\sqrt{۲n} + ۱$ است.

راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکتهٔ واضح و کلیدی دقت کنید که اگر k گروه با اعضای $۱, ۲, ..., k$ داشته‌باشیم، در مرحلهٔ بعد هم k گروه با اعضای $۱, ۲, ..., k$ خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.

لم: اگر $n = \binom{k}{۲}$ همواره پس از $\binom{k}{۲}$ حرکت، در نهایت $k - ۱$ گروه خواهیم داشت که به ازای هر i که $۱ \leq i < k$ گروهی با i عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای $k = ۲$ بدیهی است و برای $k = ۳$ نیز داریم $n = \binom{۳}{۲} = ۳$ که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می‌رسیم.

فرض می‌کنیم حکم استقرا به ازای هر $۱ \leq k \leq m$ برقرار باشد، حال حکم را برای $k = m + ۱$ اثبات می‌کنیم. بنابرین فرض کنید گروه اصلی گروهی با $\binom{m+۱}{۲}$ عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از $\binom{m}{۲}$ حرکت، $m - ۱$ گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq m - ۱$ گروهی با i عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با $\binom{m+۱}{۲} - \binom{m}{۲} = m$ است. بنابر این حکم با استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیماندهٔ سوالات می‌رویم: فرض کنید $n = \binom{k}{۲} + t$ به طوری که $n \leq \binom{k+۱}{۲}$ می‌خواهیم اثبات کنیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه n نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید $\binom{k+۱}{۲}$ معماباز داریم که $\binom{k+۱}{۲} - \binom{k}{۲} - t$ تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم.) در هر مرحله هم اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می‌باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می‌بازند!). طبق لم می‌دانیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ ، گروهی با i عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از k بیشتر نمی‌شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از k بیشتر نمی‌شود. پس حکم به این صورت نتیجه می‌شود:

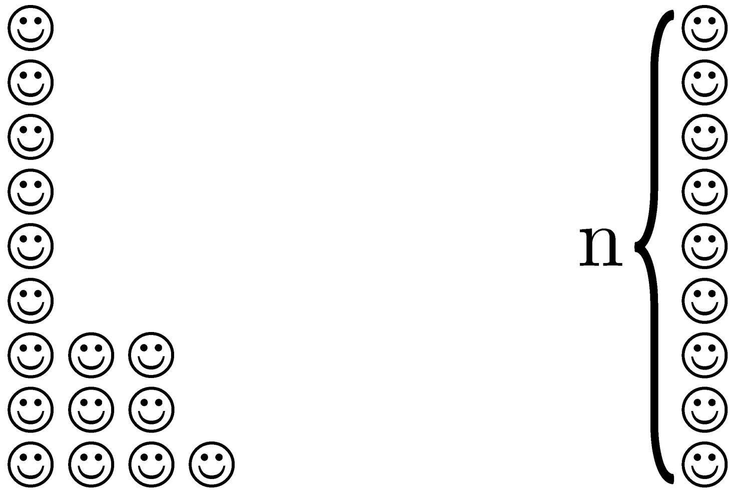
$$\frac{k^۲-k}{۲} = \binom{k}{۲} < n = \binom{k}{۲} + t \leq \binom{k+۱}{۲}$$
$$\Rightarrow k^۲ - k + \frac{۱}{۴} < ۲n \Rightarrow (k - \frac{۱}{۲})^۲ < ۲n \Rightarrow k < \sqrt{۲n} + \frac{۱}{۲} < \sqrt{۲n} + ۱$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دستهٔ n تایی از دوایر داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر $\sqrt{۲n}+۱$ دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دوایر، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوییم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دوایر باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دوایرشان مرتب شده‌باشند. در شکل زیر قیافهٔ دسته‌بندی (n) را در سمت راست و قیافهٔ دسته‌بندی $(۱,۳,۹,۳)$ را در سمت چپ می‌بینید.



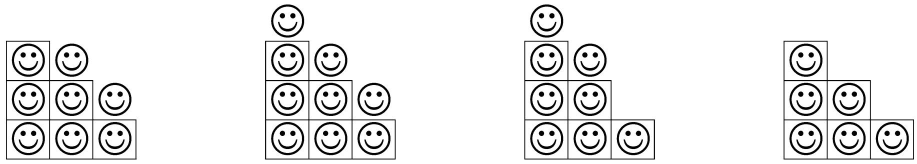
تعریف ۲: یک «پلکان به طول k» شامل $\binom{k+۱}{۲}$ دایره‌است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های $۱,۲,۳,۴,...,k$ تایی قرار داشته‌باشند.

تعریف ۳: یک «پلکان به طول k و تاج t» (که $t \le k$) پلکانی به طول k است که به t دستهٔ بزرگ‌تر آن یک دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل $t+\binom{k+۱}{۲}$ دایره‌است که در دسته‌های $۱,۲,...,k-t,k-t+۲,...,k,k+۱$ تایی قرار گرفته‌اند. اگر $t=k+۱$ پلکان به طول k و تاج t را همان پلکان به طول $k+۱$ در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول k و تاج ۰ یک پلکان به طول k است.

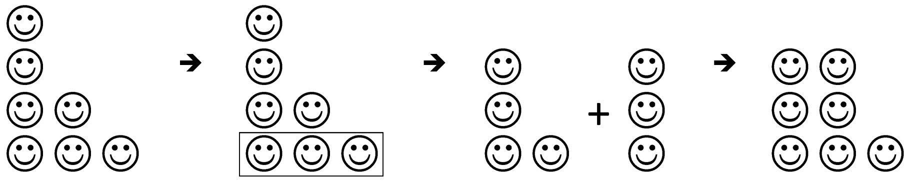
تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با m دایره» دسته‌بندی شامل m دایره است که اگر $\binom{k+۱}{۲} \le m < \binom{k+۲}{۲}$ این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول k و تاج $m-\binom{k+۱}{۲}$ باشد.

تعریف ۵: یک «پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r» (که $t \le k+۱$) پلکانی با دسته‌های $x_۰,x_۱,...,x_k$ است ($x_۰$ می‌تواند ۰ باشد) که اگر $k-i$ به پیمانهٔ $k+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r,r+۱,...,r+t-۱\}$ باشد $x_i=i+۱$ و در غیر این صورت $x_i=i$. پس پلکان به طول k و تاج t و جایگاه ۰ یک پلکان به طول k و تاج t است.

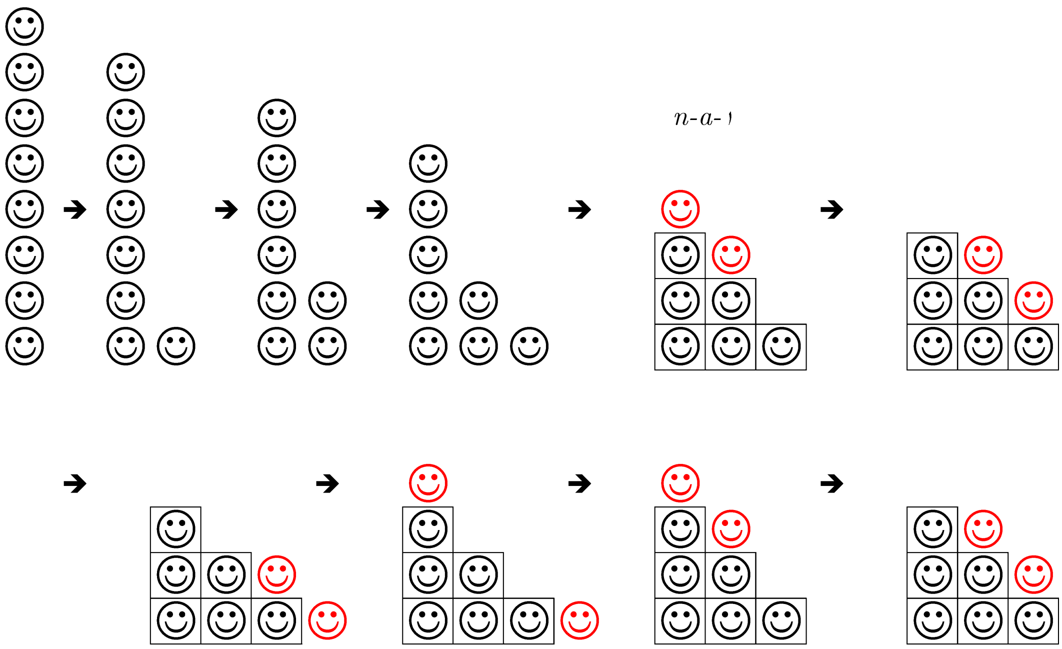
شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.



نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته‌باشیم، در هر مرحله قیافهٔ دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس این ستون بر حسب تعداد دوایرش در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافهٔ دستهٔ $(2,1,4)$ به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید $\binom{a+1}{2} < n \leq \binom{a+2}{2}$ و $b = n - \binom{a+1}{2}$ در ادامهٔ راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحلهٔ $n-a-1$ به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.

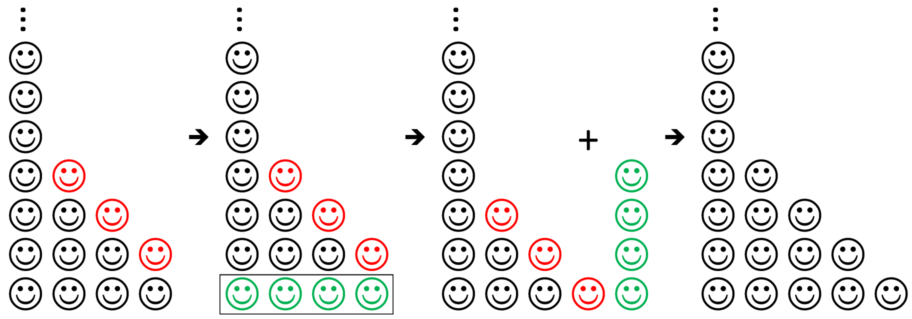


حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

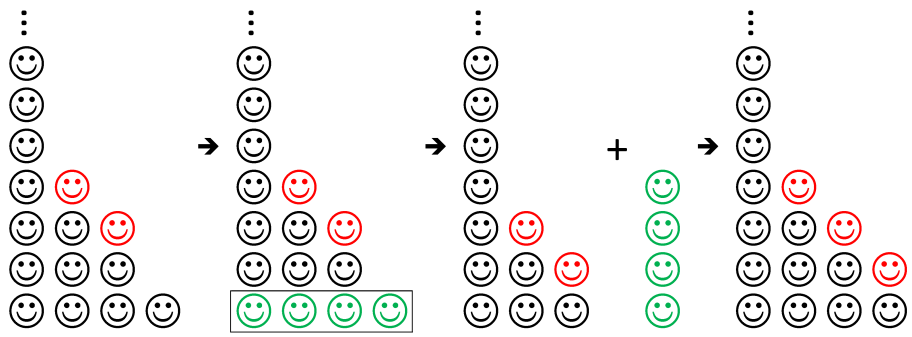
ادعا ۱: در مرحلهٔ lام ($l < n$)، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک دسته با $n-l$ دایره است.

اثبات ادعا: به استقرا روی l حکم را ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحلهٔ $l-1$ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با $l-1$ دایره به همراه یک دسته با $n-l+1$ دایره است. حال دو حالت داریم:

حالت نخست: k وجود داشته‌باشد که $l-۱=\binom{k+۱}{۲}-۱$. در این حالت پلکانی به طول $k-۱$ و تاج $k-۱$ داریم پس دسته‌ها به طول $۲,۳,...,k-۱,k,n-l+۱$ هستند. که در مرحلهٔ بعد طول دسته‌ها برابر $۱,۲,۳,...,k-۲,k-۱,k,n-l$ خواهد شد. که این یک پلکان به طول $k+۱$ به همراه یک ستون با $n-l$ دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با $n-l>۰$ دایره و یک ساختار پلکانی lتایی است.



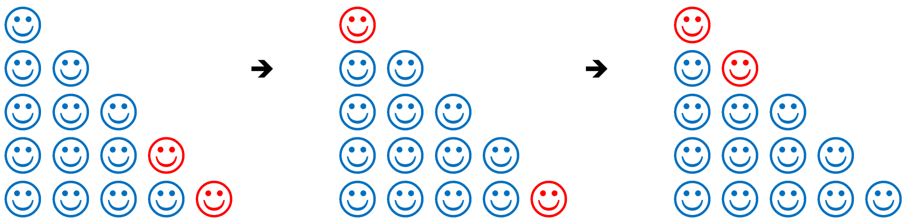
حالت دوم: $\binom{k}{۲}\le k-l<\binom{k+۱}{۲}-۱$ در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول $k-۱$ و تاج به طول نامنفی و کم‌تر از $k-۱$ است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول ۱ است. پس طول دسته‌ها به شکل $(۱,...,k-t-۱,k-t+۱,...),n-l+۱$ است (طول بزرگترین دستهٔ ساختار k یا $k-۱$ است.). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول k ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل $([۰,]...,k-t-۲,k-t,...,k),n-l$ خواهند بود (طول کوچکترین دستهٔ ساختار ۱ یا ۲ خواهد بود.) که این یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک ستون با $n-l>۰$ دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود.

حال می‌دانیم که ادعای ۱ برای هر $l<n$ درست است. پس این حکم برای $l=n-a-۱$ نیز درست است. پس در مرحلهٔ $n-a-۱$ یک ساختار پلکانی به طول $n-a-۱$ و یک ستون به طول $a+۱$ داریم. از آنجایی که $\binom{a+۱}{۲}<n\le\binom{a+۲}{۲}$ پس $\binom{a}{۲}\le n-a-۱\le\binom{a+۱}{۲}$ که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول $a-۱$ و تاج به طول مثبت (شاید a) دارد. پس با اضافه کردن دسته به طول $a+۱$ پلکانی به طول a به همراه تاج به طول مثبت (شاید $a+۱$) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از $a+۱$ بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایرهٔ قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول $a+۱$ ایجاد کنند. با توجه به نکتهٔ ۱، پلکان به طول $a+۱$ پس از هر مرحله به خودش

تبدیل می‌شود. پس در قیافهٔ شامل دایره‌های قرمز و آبی، طول دسته‌ها هیچ‌گاه بیشتر از $a+1$ نمی‌شود. حال اگر در هر مرحله دایره‌های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می‌شود که دایره‌های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره‌های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره‌های آبی در دسته‌هایشان همواره کم‌تر مساوی $a+1$ است.



حال توجه کنید که

$$\binom{a+1}{2} < n \Rightarrow (a+1)^2-(a+1) < 2n \Rightarrow (a+1)^2-(a+1)+\tfrac{1}{4} < 2n \Rightarrow ((a+1)-\tfrac{1}{2})^2 < 2n \Rightarrow (a+1)-\tfrac{1}{2} < \sqrt{2n} \Rightarrow a+1 < \sqrt{2n}+1$$

پس تعداد دایره‌های درون هر دسته همواره کم‌تر از $\sqrt{2n}+1$ است.

اکنون می‌خواهیم کمی فراتر از راه‌حل سوال رفته و ساختار دسته‌بندی‌ها را پس از مرحلهٔ $n-a+1$ نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته‌بندی ها یک پلکان به طول a و تاج b و جایگاه 0 تشکیل داده‌اند. ادعا ۲: در مرحلهٔ $a-n+1+r$ پلکانی به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی r استقرا می‌زنیم. پایه همان نتیجهٔ ادعای ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای $r-1$ در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت نخست: a به پیمانهٔ $a+1$ عضو مجموعهٔ $\{r-1, r-2, ..., r+t-2\}$ نباشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ $x.$ در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای صفر دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای a دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای a دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ x_{i-1} قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a-j$ به پیمانهٔ $a+1$ عضو مجموعهٔ $\{r, r+1, ..., r+t-1\}$ باشد $x_j = j+1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

حالت دوم: a به پیمانهٔ $a+1$ عضو مجموعهٔ $\{r-1, r-2, ..., r+t-2\}$ باشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ $x.$ در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای ۱ دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای $a+1$ دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای $a+1$ دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ x_{i-1} قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a-j$ به پیمانهٔ $a+1$ عضو مجموعهٔ $\{r, r+1, ..., r+t-1\}$ باشد $x_j = j+1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول

a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

پس ادعای ۲ نیز ثابت شد. اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که پس از مرحلهٔ $n-a-1$ دسته‌بندی‌ها به نظم واضحی هر $a+1$ مرحله تکرار می‌شوند و چون پیش از مرحلهٔ $n-a-1$ دسته‌ای به طول $a+2$ داشتیم، پس مرحلهٔ $n-a-1$ اولین مرحله‌ایست که این تناوب شروع می‌شود. پس قیافه‌ی دسته‌بندی‌ها پس از مرحلهٔ $n-a-1$ مانند شکل زیر خواهد بود: