

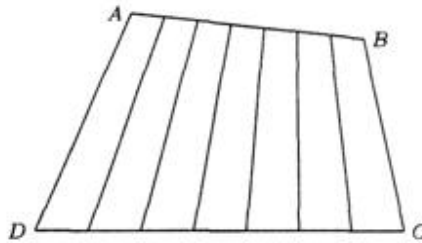
## مسأله های مرحله ی اول هفتمین دوره ی المپیاد ریاضی

### دانش آموزان کشور، آذر ماه ۱۳۶۸

۱. نشان دهید اگر  $a, b, c$  و طول های اضلاع یک مثلث باشند، داریم

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$$

۲. در چهارضلعی ABCD (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم [کرده] و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به دست آید.



ثابت کنید دست کم یکی از چهارضلعی های کوچک مساحتی برابر  $\frac{1}{7}$  مساحت چهارضلعی ABCD دارد.

۳. ثابت کنید معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$  که در آن  $x, y, z$  و  $t$  اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴. اگر  $d_1, d_2, d_3$  و فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم الزاویه از سه ضلع آن و  $a$  طول وتر مثلث باشد، نشان دهید

$$\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} < \sqrt{2a}$$

۵.  $n$  نقطه در روی صفحه مفروض است به طوری که فاصله ی بین هر دو نقطه از آن ها بزرگ تر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفت هایی از این نقاط که فاصله ی آن ها دقیقاً مساوی یک باشد از  $3n$  تجاوز نمی کند.

۶. روی محیط دایره ای به شعاع یک متر نقطه ی دلخواه  $A$  را انتخاب و در جهت مثبت دایره ی مثلثاتی

نقاط  $A_1, A_2, A_3, \dots$  را طوری انتخاب می کنیم که متر  $\widehat{A_0 A_1} = 1$  متر،  $\widehat{A_1 A_2} = \frac{1}{2}$  متر،  $\dots$ ، متر  $\widehat{A_{n-1} A_n} = \frac{1}{n}$  و ... (تعداد نقاط نامتناهی است).

الف) نشان دهید هیچ دو نقطه ی  $A_i$  و  $A_j$  ( $i \neq j$ ) بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقلاً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط  $A_i$  واقع بر آن بینهایت است.