انتگرالگیری چندگانه ۱۴

در این فصل به حساب انتگرال توابع دو و چندمتغیره می‌پردازیم . برای احتراز از قلمرو حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که در آن همین مباحث از دیدگاه دقیقتری بررسی می‌شوند ، ما توجه خود را معطوف مسائل ملموسی از هندسه ، فیزیک ، و مهندسی می‌کنیم . در واقع ، حل این‌گونه مسائل‌بود که پایه‌گذاران حساب دیفرانسیل و انتگرال را ملزم به طرح انتگرالهای چندگانه ساخت .

۱۴.۱ انتگرالهای مضاعف

در فصل ۴ مفهوم انتگرال معین یک تابع یک متغیره معرفی شد . مفهوم مشابه برای‌یک تابع چند متغیره ***انتگرال چندگانه*** است . بحث را با انتگرال یک تابع دومتغیره ، به‌نام ***انتگرال مضاعف*** ، شروع می‌کنیم . در اینجا به‌جای تابع $f(x)$ تعریف شده بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ ، تابع $f(x, y)$ را درنظر می‌گیریم که بر ***ناحیهٔ انتگرالگیری*** مناسبی چون R تعریف شده‌است . ولی نواحی دوبعدی ، به خلاف بازه‌های یک‌بعدی ، می‌توانند مجموعه‌های بسیارپیچیده‌ای باشند . در واقع ، مرز ناحیهٔ R ممکن است آنقدر نامنتظم باشد که نتوان به R مساحت تعریف شده‌ای نسبت داد ؛ و درنتیجه ، R نامزد مناسبی برای ناحیهٔ انتگرالگیری نیست . لذا ، از اول خود را به ردهٔ خاصی از ناحیه‌ها ، به نام ***نرمال*** (یعنی ، فارغ از " عیب ") محدود می‌کنیم . این نواحی همه مساحت دارند ، و به‌علاوه رده آنقدر وسیع است که تمام نواحی موجود در کاربردهای عملی حساب دیفرانسیل و انتگرال را دربر دارد . حال‌به‌چند تعریف مقتضی می‌پردازیم .

مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

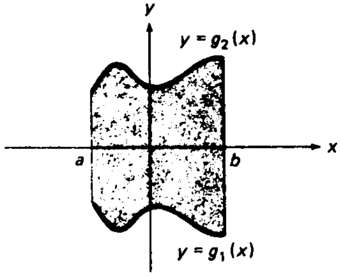
$$a \leq x \leq b, \qquad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \tag{1}$$

را که در آن توابع g_1 و g_2 بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته‌اند ، یک ***ناحیهٔ به‌طور قائم ساده*** می‌نامند ،

ولی مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

$$c \leq y \leq d, \qquad h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \tag{1'}$$

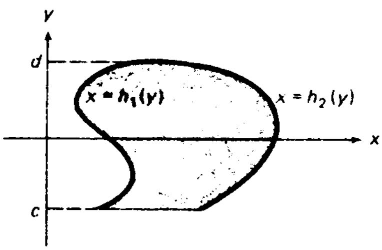
که در آنها توابع h_1 و h_2 بر بازهٔ $[c, d]$ پیوسته‌اند، یک ***ناحیهٔ به طور افقی ساده*** نام دارد. مثلاً، ناحیهٔ شکل ۱ به‌طور قائم ساده است، ولی ناحیهٔ شکل ۲ به‌طور افقی ساده‌است.



یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده

شکل ۱

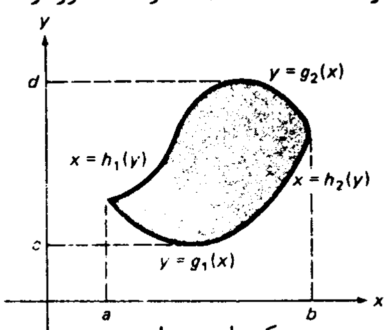
منظور از ***ناحیهٔ ساده*** یعنی ناحیه‌ای که هم به‌طور قائم ساده باشد هم به‌طور افقی. یک



یک ناحیهٔ به طور افقی ساده

شکل ۲

چنین ناحیه در شکل ۳ نموده شده است. بالاخره، منظور از ***ناحیهٔ نرمال*** یعنی یک‌ناحیهٔ

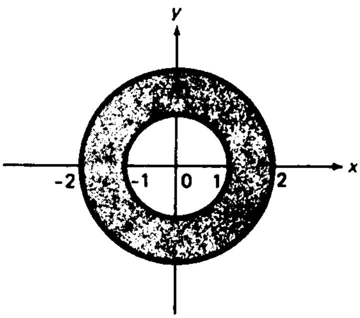


یک ناحیه ساده

شکل ۳ .

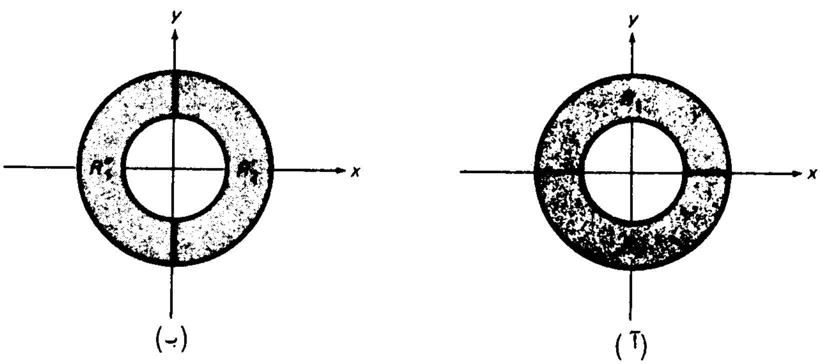
بستهٔ کراندار که بتوان آن را به وسیلهٔ رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیه که هر یک به طور قائم یا افقی ساده‌اند (یا هر دو) تقسیم کرد (زیر ناحیه‌های مجاور مرزهای مشترک دارند) . طبیعی است که یک ناحیهٔ به‌طور قائم یا افقی ساده را نرمال می‌گیریم .

مثال ۱ . ناحیهٔ طوقی $R = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ شکل ۴ نه به‌طور افقی و نه به‌طور قائم ساده نیست . اما R نرمال است . درواقع ، محور x ، R را به زیرناحیه‌های به طورقائم سادهٔ



شکل ۴

R_1 و R_2 مثل شکل ۵ (آ) ، تقسیم می‌کند ، و نیز محور y ، R را به زیر ناحیه‌های به طور افقی سادهٔ R'_1 و R'_2 ، مثل شکل ۵ (ب) ، تقسیم خواهد کرد .



شکل ۵

این نواحی همه مساحت دارند که به آسانی حساب می‌شود . مساحت ناحیهٔ به طور قائم سادهٔ تعریف شده با نامساویهای (۱) مساحت بین منحنی بالایی $y = g_2(x)$ ومنحنی

پایینی $y = g_1(x)$ از a تا b است که ، بنا بر صفحهٔ ۳۸۷ ، مساوی است با

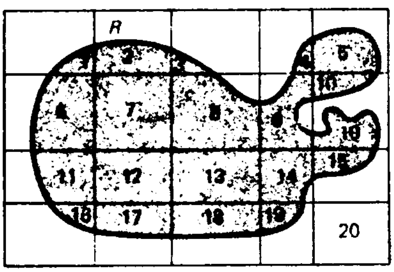
$$A = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx, \tag{۲}$$

ولی مساحت ناحیهٔ بهطور افقی سادهٔ تعریف شده با نامساویهای (′۱) مساحت بین منحنی سمت راست $x = h_2(y)$ و منحنی سمت چپ $x = h_1(y)$ از c تا d است که ، بنابر صفحهٔ ۴۱۳، برابر است با

$$A = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\, dy, \tag{۲′}$$

اگر ناحیه ساده باشد ، مساحتش از هر یک از فرمولهای (۲) و (′۲) به دست میآید ، زیرا هر دو به کار میروند . بالاخره ، مساحت ناحیهٔ نرمال R بهطور طبیعی و به صورت مجموع مساحات زیرنواحی بهطور افقی یا قائمی تعریف میشود که R با رسم خطوط موازی محورهای مختصات به آنها تجزیه میگردد (ما عدم وابستگی مساحت R به طرز تجزیهٔ آن را ازدید هندسه واضح میگیریم) .

نه فقط هر ناحیهٔ نرمال مساحت تعریف شده دارد ، بلکه اگر چنین ناحیهٔ R با خطوطی افقی و قائم موازی محورهای مختصات تجزیه شود ، هر بخش از R که در سلولی از افراز (مستطیل) قرار دارد دارای مساحت است . این امر در شکل ۶ نموده شده است، که درآن ناحیهٔ نرمال R در یک زمینه مرکب از بیست سلول مستطیلی (ناشی از تقاطع پنج

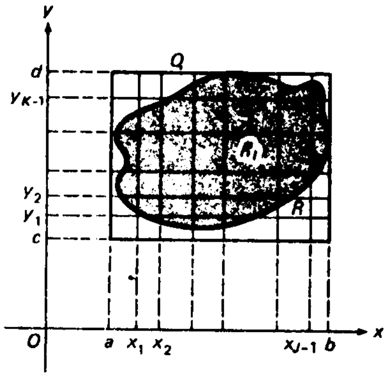


شکل ۶

خط افقی و شش خط قائم) رسم، و به نوزده زیر ناحیهٔ ناتهی افراز شده است (توجه کنید که سلول 20 نقطهای از R را ندارد) . زیرناحیههای 1 تا 8 و 11 تا 19 همه سادهاند؛ و درواقع ، زیرناحیههای 7 ، 12، و 13 مستطیلی میباشند . زیرناحیهٔ 9 بهطور افقی سادهاست ، ولی زیرناحیهٔ 10 از دو قطعهٔ ناهمبند تشکیل شده است . یکی ساده و دیگری نرمال ، و البته مساحتش مجموع مساحات دو قطعه گرفته میشود . شکل آنقدر کلی هست که همهٔ حالات

(زیر ناحیه‌های ساده ، زیر ناحیه‌های نرمال ، و " زیرناحیه‌های " مرکب از چند قطعه)را نشان می‌دهد ، و در هر حالت ، دست کم در اصول ، انتساب مساحت به زیرناحیه‌ها آسان است .

تعریف انتگرال مضاعف . حال آماده‌ایم انتگرال مضاعف تابع دومتغیره $f(x, y)$ روی ناحیهٔ نرمال R را تعریف کنیم . فرض کنیم $Q = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ ناحیهٔ مستطیلی بسته‌ای باشد که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و شامل R باشد (ر.ک. شکل۷) ، و نقاط x_j $(j = 0, 1, \dots, J)$ و y_k $(k = 0, 1, \dots, K)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$



شکل ۷

به ترتیب با اندازهٔ مش μ_x و μ_y باشند که در صفحهٔ ۳۶۸ تعریف شده‌اند . این یعنی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,$$

و

$$\mu_x = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_J - x_{J-1}\},$$
$$\mu_y = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_K - y_{K-1}\}.$$

در این صورت ، دو مجموعه از خطوط

$$x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \dots, \quad x = x_{J-1}, \quad x = b,$$
$$y = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \dots, \quad y = y_{K-1}, \quad y = d, \qquad (۳)$$

موازی محورهای مختصات *افرازی* از مستطیل Q تشکیل می‌دهند؛ این خطوط Q را به JK زیر مستطیل و ناحیهٔ R را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ ناتهی $R_1, R_2, \dots, R_n$ تقسیم می‌کنند که $n \le JK$ (معمولاً "$n < JK$) ؛ر.ک. شکل .به‌طورکلی ،بعضی‌از زیرناحیه‌ها غیرمستطیلی‌اند

که مرزهایشان از قسمتهایی‌از خطوط (۳)وقسمتهایی از مرز R تشکیل شده‌اند ،ولی همانطور که قبلا" توضیح دادیم ، چون R یک ناحیهٔ نرمال است ، هر زیرناحیهٔ R_i دارای مساحت تعریف شدهٔ ΔA_i می‌باشد. به ازای تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ ، فرض کنیم (p_i, q_i) نقطهٔ دلخواهی در R_i باشد ، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\, \Delta A_i$$

را تشکیل می‌دهیم . فرض‌کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max\{\mu_x, \mu_y\},$$

به نام اندازهٔ‌مش افراز ، به صفر نزدیک شود ، کمیت S *بی‌توجه به انتخاب اعداد* x_j ، y_k ، p_i و q_i *صادق در شرایط داده‌شده* ، به‌حدی متناهی نزدیک گردد . در این صورت ، این حد *انتگرال (مضاعف)* f روی R نام داشته و با

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

نموده می‌شود ، و گوییم f بر R *انتگرالپذیر* است . لذا ،

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i) \Delta A_i, \qquad (۴)$$

که درآن f *انتگرالده* و R *ناحیهٔ انتگرالگیری* انتگرال سمت چپ خوانده می‌شود .

مثال ۲ . هرگاه A مساحت R باشد ، آنگاه‌به ازای هر افراز ناحیهٔR به وسیلهٔ خطوط موازی محورهای مختصات ،

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

لذا ، با اختیار $f(x, y) \equiv 1$ در فرمول (۴) ، خواهیم داشت

$$\iint_R 1\, dA = \iint_R dA = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\mu \to 0} A = A.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$A = \iint_R dA. \qquad (۵)$$

با آنکه فرض کرده‌ایم مرز ناحیهٔ انتگرالگیری R از نمودارهای توابع پیوسته‌ای از x یا y تشکیل‌شده‌است ، ماراجع به پیوستگی انتگرالده $f(x, y)$ انتگرال‌مضاعف فرضی نکرده‌ایم ، و ممکن است توابع ناپیوسته نیز انتگرالپذیر باشند. ولی ، همانطور که انتظار می‌رود ، قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۳۷۱ ، راجع به انتگرالپذیری توابع پیوسته به انتگرالهای‌مضاعف‌سرایت می‌کند.

قضیهٔ ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری بر یک ناحیه را ایجاب می‌کند). *هرگاه تابع $f(x, y)$ بر ناحیهٔ نرمال R پیوسته باشد ، آنگاه $f(x, y)$ بر R انتگرالپذیر می‌باشد.*

ما برهان را ، که به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته تعلق دارد ، حذف‌می‌کنیم.

تعریف انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ ، جدا از نکات فنی مربوط به ماهیت ناحیهٔ انتگرالگیری R و طرز افراز آن ، اساسا " همان‌تعریف‌انتگرال‌معمولی یا " سادهٔ" $\int_a^b f(x)\, dx$ است. لذا ، انتگرالهای‌مضاعف و انتگرالهای ساده از قواعد مشابهی تبعیت می‌کنند. حال مهمترین قواعد از این نوع را ذکر کرده ، برهان آنها را حذف می‌کنیم زیرا شبیه‌برهانهای نظیر برای انتگرالهای ساده می‌باشند. در هر حالت ، R یک ناحیهٔ نرمال می‌باشد.

(یک) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده و c یک ثابت باشد ، آنگاه cf نیز بر R انتگرالپذیر است و

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر R انتگرالپذیرباشند ، آنگاه‌مجموع $f + g$ نیز بر R انتگرالپذیر بوده و

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA.$$

(سه) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده‌و $c \le f(x, y) \le C$ ، که در آن c و C ثابت‌اند ، آنگاه

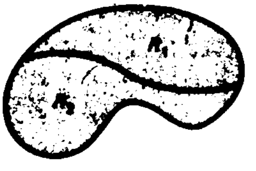
$$cA \le \iint_R f(x, y)\, dA \le CA,$$

که در آن A مساحت R است. بخصوص ، هرگاه $f(x, y) \ge 0$ ، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\, dA \ge 0.$$

(چهار) هرگاه f بر R پیوسته بوده و R به دو زیر ناحیهٔ نرمال R_1 و R_2 بدون نقاط درونی مشترک (مثل شکل ۸) تجزیه شده باشد ، آنگاه

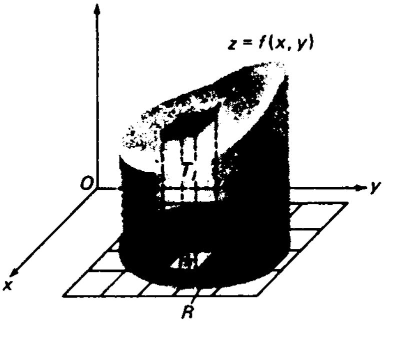
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA.$$



شکل ۸

این مشابه قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۳۸۲ ،است و ما فرض پیوستگی f را طریقهٔ آسان تضمین وجود هر سه انتگرال می‌دانیم .

حجم زیر یک سطح به‌عنوان انتگرال مضاعف . حال ،به کمک انتگرال مضاعف ،عبارتی برای حجم زیر سطح S به دست می‌آوریم ، که در آن S نمودار یک تابع نامنفی پیوسته مانند $f(x, y)$ است که بر ناحیهٔ نرمال R تعریف شده است . این حجم ناحیهٔ توپر T مانند شکل ۹ است ، که در آن R قاعدهٔ آن و سطح S بالای آن بوده سطح جانبی‌اش از پاره‌خطهایی



شکل ۹

موازی محور z تشکیل شده است ؛ T را می‌توان یک " شبه استوانه " تصور کرد ، زیرا S در حالت‌کلی موازی R نیست .همانطورکه‌خطوط(۳) Rرابه n زیرناحیهٔ‌دوبعدی $R_1, R_2, \ldots, R_n$

تقسیم می‌کنند، **صفحات** باهمان معادله (در فضای سه‌بعدی) T را به n زیرناحیه‌ٔ سه‌بعدی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم می‌کنند. که هر یک ستون باریکی با بالای خمیده می‌باشد. تابع f پیوسته است؛ و درنتیجه، مقدارش بر زیر ناحیه‌ٔ R_i، دست‌کم وقتی R_i به‌قدر کافی کوچک باشد، فقط کمی تغییر می‌کند. لذا، اگر f را بر R_i با مقدار ثابت $f(p_i, q_i)$ بگیریم که (p_i, q_i) نقطهٔ *دلخواهی* در R_i است، تقریب مناسبی به دست می‌آوریم. این معادل است با اینکه ستون T_i با بالای خمیده را با یک استوانهٔ معمولی به ارتفاع $f(p_i, q_i)$ وبالای تخت موازی قاعده‌اش R_i عوض کنیم؛ این در شکل برای یک ستون " درونی " باقاعدهٔ مستطیلی نموده شده است، که در آن استوانه یک متوازی‌السطوح قائم است. بنابر مثال ۱، صفحهٔ ۶۹۹، این استوانه، چه قاعده‌اش مستطیلی باشد یا نه، به حجم $f(p_i, q_i)\Delta A_i$ است. بنابر این، اگر تمام ستونها را بااستوانه‌هایتقریب‌ساز عوض کنیم، جسم جدیدی به‌دست‌می‌آید که از n استوانه تشکیل‌شده و حجمش مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\,\Delta A_i,$$

یعنی، مجموع احجام n استوانه. معقول است که این مجموع را تقریب مناسبی برای‌حجم V جسم T بگیریم، که این تقریب وقتی اندازهٔ هر زیر ناحیهٔ R_i کوچک شود، یعنی وقتی اندازهٔ مش μ افراز R به صفر نزدیک شود، بهتر می‌شود (توجه کنید که $\mu < \varepsilon$ ایجاب می‌کند که هر $\Delta A_i < \varepsilon^2$). حال، بااین‌انگیزه، V را مساوی حد زیر **تعریف**‌می‌کنیم:

$$V = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\,\Delta A_i,$$

یعنی،

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA,$$

که در آن وجود انتگرال مضاعف از قضیهٔ ۱ و فرض پیوستگی f نتیجه می‌شود.

به‌طورکلی، فرض کنیم S_1 و S_2 دو سطح باشند که تصاویرشان روی صفحهٔ xy ناحیهٔ نرمال R بوده، و S_1 و S_2 نمودار دو تابع پیوستهٔ $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ صادق در نامساوی $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ باشند. در این صورت، بنابر همان نوع استدلال به کار رفته‌دربخش ۳.۴ برای به دست آوردن فرمولی جهت مساحت بین دو منحنی، حجم بین S_1 و S_2 مساوی است با

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\,dA,$$

محاسبهٔ مستقیم انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ با شروع از تعریفش به عنوان مقدار حدی یک مجموع ریمان ناممکن است مگر در ساده‌ترین حالات (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳) .لذا، باید روش دیگری برای محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف به دست آوریم . برای این کار، چند انتگرال مختلف معرفی می‌کنیم که مستلزم محاسبهٔ دو انتگرال ساده اند .

انتگرالهای مکرر. فرض کنیم R یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده باشد که با نامساویهای $a \le x \le b \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعریف شده است ، که در آنها g_1 و g_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[a, b]$ می‌باشند ، و $f(x, y)$ را یک تابع دومتغیره می‌گیریم که بر R تعریف شده است . در این صورت ، انتگرال

$$I_R = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx \qquad (۶)$$

را *انتگرال مکرر* f روی R می‌نامیم . برای به دست آوردن I_R ، ابتدا با *ثابت‌گرفتن* x در انتگرالدهٔ $f(x, y)$ وحدود انتگرالگیری $g_1(x)$ و $g_2(x)$ ، از $f(x, y)$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم[۱] . حاصل این انتگرالگیری به x بستگی دارد؛ و درنتیجه ، تابعی از x ، مثلاً "$i(x)$" ، به دست می‌آید . سپس از $i(x)$ نسبت به x بین حدود ثابت a و b انتگرال گرفته ،عددی به‌دست می‌آوریم‌که در فرمول(۶) با I_R نموده شده‌است . به‌همین نحو ، اگر R یک‌ناحیهٔ به‌طور افقی‌ساده‌باشدکه‌با‌نامساویهای $c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)$ تعریف شده است ، که در آنها h_1 و h_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[c, d]$ اند ، انتگرال

$$J_R = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy \qquad (۶')$$

انتگرال مکرر f روی R نام دارد . اما ،برای به دست آوردن J_R ،ابتدا از $f(x, y)$ ،با *ثابت گرفتن* y در انتگرالده $f(x, y)$ و حدود انتگرالگیری $h_1(y)$ و $h_2(y)$ ، نسبت به x انتگرال‌گرفته تابعی از y ، مثلاً "$j(y)$" ، به دست می‌آوریم و سپس از آن نسبت به y بین حدود ثابت c و d انتگرال می‌گیریم . توجه کنید که در هر مرحله از محاسبهٔ I_R و J_R ، انتگرال تابع یک متغیره‌ای را محاسبه می‌کنیم؛ و لذا ،مجازیم از ابزار اصلی محاسبهٔ انتگرالها ،یعنی‌قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، استفاده کنیم .

---

۱. *این فرایند نوعی "انتگرالگیری جزئی" شبیه مشتقگیری جزئی است (برای محاسبهٔ* $\partial f(x, y)/\partial y$ ، x *را ثابت گرفته و نسبت به* y *مشتق می‌گیریم).*

تبصره. در بحث فوق تلویحا " فرض‌کرده‌ایم انتگرالهای (۶) و (۶') وجود دارند. می‌توان نشان داد که پیوستگی توابع f ، g_1 ، و g_2 پیوستگی انتگرال داخلی $i(x)$ در (۶) ، و در نتیجه وجود (۶) ، را تضمین می‌کند ، ولی پیوستگی توابع f ، h_1 ، و h_2 پیوستگی انتگرال داخلی $j(y)$ در (۶') ، و درنتیجه وجود (۶') ، را تضمین خواهد کرد . یادآور می‌شویم که پیوستگی g_1 ، g_2 ، h_1 ، و h_2 از اول ، در تعریف نواحی به‌طور قائم و به طور ساده ، فرض شده است .

برای آنکه نمادها ساده باشند ، معمولا " کروشه‌های داخلی فرمولهای (۶) و (۷) را حذف می‌کنند . لذا ، از این به بعد انتگرالهای مکرر I_R و J_R را به صورت

$$I_R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx, \qquad J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

یا

$$I_R = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy, \qquad J_R = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx$$

می‌نویسیم ، که در آنها حذف کروشه‌ها به قیمت جداسازی دیفرانسیلهای dx و dy تمام شده است ، به این‌صورت که dx فقط پشت علامت انتگرالی که حدود انتگرالگیریش تابع x اند ظاهر شده ، و dy فقط پشت علامت انتگرالی آمده که حدود انتگرالگیریش تابع y می‌باشند.

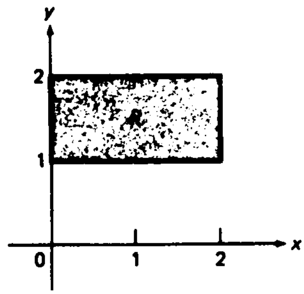
مثال ۳. دو انتگرال مکرر I_R و J_R تابع $f(x, y) = 3xy^2 - 2x^2y$ را روی مستطیل R محدود به خطوط $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ حساب کنید .

حل. I_R و J_R هر دو وجود دارند ، زیرا f پیوسته بوده و R بوضوح ساده است (ر.ک. شکل ۱۰) . با محاسبهٔ I_R ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^2 dx \int_1^2 (3xy^2 - 2x^2y)\, dy = \int_0^2 \Big[xy^3 - x^2y^2 \Big]_{y=1}^{2} dx \\ &= \int_0^2 (7x - 3x^2)\, dx = \left[\frac{7}{2} x^2 - x^3 \right]_0^2 = 14 - 8 = 6, \end{aligned}$$

که در آن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبار به کار رفته است . به همین نحو ، از محاسبهٔ J_R نتیجه می‌شود که

$$J_R = \int_1^2 dy \int_0^2 (3xy^2 - 2x^2y)\,dx = \int_1^2 \left[\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}x^3y\right]_{x=0}^2 dy$$
$$= \int_1^2 \left(6y^2 - \frac{16}{3}y\right)dy = \left[2y^3 - \frac{8}{3}y^2\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 6.$$



شکل ۱۰

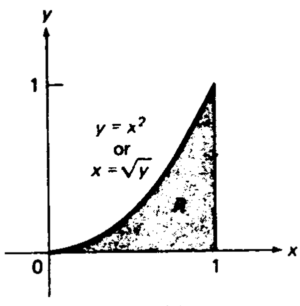
البته، تساوی $I_R = J_R$ تصادفی نیست، وبعدا" خواهیم دیدکه هردو با $\iint_R (3xy^2 - 2x^2y)\,dA$ یعنی انتگرال مضاعف f روی R، مساویند.

مثال ۴. انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y)\,dy$$

را حساب کرده، و سپس ترتیب انتگرالگیری را عکس نمایید.

حل. چون باانتگرالی‌از نوع I_R شروع کرده‌ایم، فورا" معلوم می‌شود که ناحیهٔ انتگرالگیری R به‌طورقائم ساده‌است. درواقع، R ناحیهٔ تعریف‌شده‌بانامساویهای $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2$ است؛ یعنی، ناحیهٔ ۱۱ که به محور x، خط $x = 1$، و سهمی $y = x^2$ محدودشده است.



شکل ۱۱

از محاسبهٔ I_R معلوم می‌شود که

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y)\,dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}.$$

برای عکس‌کردن ترتیب انتگرالگیری، باید انتگرال مکرر دیگر J_R را تشکیل دهیم. در این کار R باید به طور افقی نیز ساده باشد. اما اگر خطی افقی از چپ به راست R را قطع کند، در نقطه‌ای از سهمی $y = x^2$ وارد R شده و R را در نقطه‌ای از خط $x = 1$ ترک می‌کند. لذا، چون $y = x^2$ معادل $x = \sqrt{y}$ به ازای $y \geq 0$ است، ناحیهٔ R را می‌توان با نامساویهای $\sqrt{y} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ نیز تعریف کرد؛ و درنتیجه، علاوه‌بر به طور قائم ساده‌بودن به طور افقی ساده می‌باشد. لذا، می‌توان ترتیب انتگرالگیری را عکس کرده، انتگرال مکرر دیگر را نوشت:

$$J_R = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\,dx.$$

از محاسبهٔ J_R نتیجه می‌شود که

$$J_R = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2}y - y^{3/2}\right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20},$$

درنتیجه، مجدداً داریم $I_R = J_R$.

محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف. حال طرز محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف را برحسب انتگرالهای مکرر نشان داده و در عین حال علت تساوی $I_R = J_R$ در دو مثال اخیر را توضیح می‌دهیم.

قضیهٔ ۲ (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده). *هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ به‌طور قائم سادهٔ R تعریف شده با نامساویهای $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (۷)$$

برهان . همانطور که در بالا نشان داده‌ایم ، انتگرال مضاعف

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA \tag{8}$$

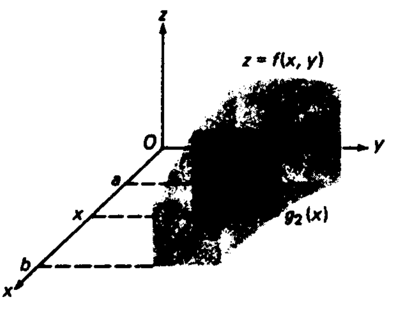
حجم V جسم شبه استوانه‌ای T است که بین سطح $z=f(x, y)$ و ناحیهٔ R قرار دارد (ر.ک . شکل ۱۲ ، که در آن f به خاطر سادگی نامنفی گرفته شده است) . انتگرال مکرر

$$I_R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{9}$$

را درنظر می‌گیریم . از شکل واضح است که اگر ثابت $= x$، انتگرال داخلی

$$i(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $g_1(x)$ تا $g_2(x)$ در صفحهٔ ثابت $= x$ است . اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T توسط صفحهٔ ثابت $= x$ عمود بر محور x است . به



شکل ۱۲

عبارت دیگر، $i(x)$ تابع مساحت مقطع عرضی پیوسته است که در بخش ۱۰۸ با $A(x)$ نموده شد . لذا ، طبق فرمول (۱) ، صفحهٔ ۶۹۷، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$V = \int_a^b i(x)\, dx = I_R, \tag{10}$$

و از مقایسهٔ فرمولهای (۸) و (۱۰) معلوم می‌شود که

$$\iint_R f(x, y)\, dA = I_R,$$

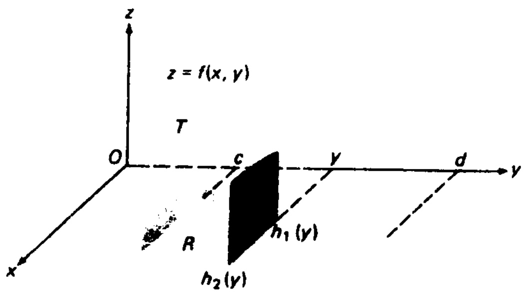
که با (۷) معادل می‌باشد.

همانطور که انتظار می‌رود، قضیهٔ مشابهی برای انتگرالهای مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور افقی ساده وجود دارد.

قضیهٔ ۲' (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ به‌طور افقی ساده). *هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ به‌طور افقی سادهٔ R با نامساویهای $h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d$ تعریف شده باشد، آنگاه*

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (۷')$$

برهان. برهان اساساً همان برهان قضیهٔ ۲ است. فرض کنیم T جسم شبه استوانهٔ بین سطح $z = f(x, y)$ و ناحیهٔ R باشد (ر.ک. شکل ۱۳). مجدداً، حجم T از انتگرال مضاعف



شکل ۱۳

(۸) بـه دست می‌آید. انتگرال مکرر

$$J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (۹')$$

را درنظر می‌گیریم. از شکل واضح است که اگر ثابت $= y$، انتگرال داخلی

$$j(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $h_1(y)$ تا $h_2(y)$ در صفحهٔ ثابت$= y$ است. اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T به وسیلهٔ صفحهٔ ثابت$= y$ عمود بر محور y است.

لذا ، طبق روش مقاطع عرضی ، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$V = \int_c^d j(y)\,dy = J_R, \tag{۱۰'}$$

واز مقایسهٔ فرمولهای (۸) و (۱۰') باهم معلوم می‌شود که

$$\iint_R f(x, y)\,dA = J_R,$$

که با (۷') معادل است .

از تلفیق قضایای ۲ و ۲' و این فرض که ناحیهٔ R در سمت چپ دو فرمول (۷) و (۷') یکی اند ، نتیجهٔ اساسی دیگری فوراً به دست می‌آید .

قضیهٔ ۳ (محاسبهٔ انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ ساده) . *فرض کنیم R ناحیهٔ ساده‌ای باشد که با نامساویهای $a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$ و با نامساویهای $c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$ تعریف شده است ، و $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد . در این صورت ،*

$$\iint_R f(x, y)\,dA = I_R = J_R, \tag{۱۱}$$

که در آن I_R و J_R انتگرالهای مکرر (۹) و (۹') f روی R اند . بخصوص ،

$$I_R = J_R,$$

درنتیجه ، دو انتگرال مکرر f روی R مساویند .

تبصره . در اثبات قضایای ۲ و ۲' ساده‌لوحانه فرض کرده‌ایم چیزی به نام "حجم" یک جسم وجود دارد ، که می‌توان آن را به طرق رضایتمندانه‌ای تعریف کرد که به عبارات مختلفی برای حجم منجر می‌شوند که می‌توان آنها را بدون تناقض باهم مساوی گرفت (همین فرض بارها در فصل ۸ شده‌است) .بررسی عمیقتر معنی مساحت و حجم ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته شده است ،نشان می‌دهد که این روش شهودی ما را گمراه نکرده است ، و فرمولهای (۷) ، (۷') ، و (۱۱) کاملاً" مناسب‌اند مشروط بر اینکه انتگرالده f و ناحیهٔ انتگرالگیری R از شرایط بیان شده تبعیت می‌کنند .

حال مسئلهٔ محاسبهٔ عملی انتگرالهای مضاعف کامل شده است . در انتگرال مضاعف

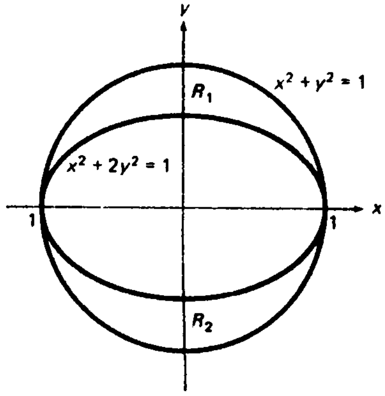
$\iint_R f(x, y)\,dA$ که R یک ناحیهٔ نرمال بوده و f بر R پیوسته است ، R را (درصورت‌لزوم) با رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به زیر ناحیه‌های به طور قائم یاافقی‌سادهٔ $R_1, \ldots, R_n$ افراز می‌کنیم .این کار طبق تعریف ناحیهٔ نرمال شدنی‌است . در این‌صورت، طبق قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۱۳۲۴،

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_{R_1} f(x, y)\,dA + \cdots + \iint_{R_n} f(x, y)\,dA.$$

اما هر یک از انتگرالهای سمت راست را می‌تــوان با انتگرال مکرری از نوع I_R یا J_R عوض کــرد، و محاسبهٔ یک انتگرال مکرر به دو انتگرالگیری متوالی از توابع یک متغیره تحویل می‌شود .

مثال ۵. انتگرال مضاعف $\iint_R x^2\,dA$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ بین دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ باشد .

حل . محور x ، R را به نواحی به طور قائم سادهٔ R_1 و R_2 مثل شکل ۱۴ تقسیم می‌کند .



شکل ۱۴

لذا ، طبق قاعدهٔ (چهار) و قضیهٔ ۲ ،

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_{R_1} x^2\,dA + \iint_{R_2} x^2\,dA$$
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{(1-x^2)/2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{(1-x^2)/2}} x^2\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)dx$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

که در آخرین مرحله از زوج‌بودن انتگرالده استفاده‌کرده‌ایم .برای محاسبهٔ آخرین‌انتگرال، جانشانی $x = \sin t$ را انجام می‌دهیم ؛ درنتیجه ، $dx = \cos t\,dt$ و

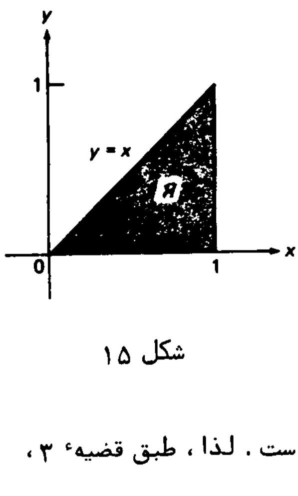
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\iint_R x^2\,dA = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{16} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{4} \approx 0.23.$$

این ، از نظر هندسی ، حجم زیر استوانهٔ سهموی $z = x^2$ و روی ناحیهٔ R می‌باشد .

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R e^{-x^2}\,dA$ روی ناحیهٔ R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ،وخط $y = x$ را حساب کنید (ر.ک. شکل ۱۵) .



شکل ۱۵

حل . ناحیهٔ مثلثی R ساده است . لذا ، طبق قضیهٔ ۳ ،

$$\iint_R e^{-x^2}\,dA = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx$$

(حدود انتگرالگیری را توضیح دهید) . اگر به محاسبهٔ انتگرال مکرر دوم بپردازیم ، از ابتدا به مانع برمی‌خوریم ، زیرا تابع e^{-x^2} پادمشتق مقدماتی ندارد (ر.ک. صفحهٔ ۵۹۱) . اما انتگرال مکرر اول را می‌توان به آسانی حساب کرد :

$$\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy = \int_0^1 e^{-x^2}\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{2e}.$$

لذا

$$\iint_R e^{-x^2}\,dA = \frac{e-1}{2e}.$$

محاسبهٔ مساحت و حجم . چون از قبل طرز محاسبهٔ مساحت یک ناحیهٔ به طور قائم یا به طور افقی ساده را به صورت مساحت بین دو منحنی می‌دانیم ، و نیز طرز محاسبهٔ احجام به روش مقاطع عرضی بر ما معلوم است ، استفاده از انتگرالهای مضاعف برای محاسبهٔ مساحات و احجام بیشتر به جهت راحتی است تا لزوم . ولی جنبهٔ راحتی آن عظیم است . نکته آن است که وقتی مساحت یا حجم به صورت انتگرال مضاعف بیان شد ، بقیهٔ محاسبات معمولاً ساده است . اگر ناحیهٔ انتگرالگیری به طور صریح داده شده باشد ، باید با کمی رسم آن را پیدا کنیم ، ولی یک تصویر خام که نکات اصلی مسئله را آشکار کند خواهد بود .

مثال ۷. مساحت A ی ناحیهٔ R در مثال ۵ را بیابید .

حل . بنابر فرمول (۵) ، A چیزی جز انتگرال مضاعف $\iint_R dA$ نیست . لذا ، از تعویض انتگرالده x^2 با 1 در محاسبات مثال ۵ ، به دست می‌آوریم

$$A = \iint_R dA = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

انتگرالده سمت راست یکچهارم مساحت محصور به دایرهٔ یکه ، یعنی π ، است . پس نتیجه

می‌شود که

$$A = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi.$$

به عنوان تمرین ، این جواب را با تفریق مساحت محصور به بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ (ر.ک . مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۴۸) از مساحت محصور به دایرهٔ یکه امتحان کنید .

مثال ۸ . حجم V زیر صفحهٔ $x + y - z = 0$ و روی R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ، و سهمی $y = x^2$ را بیابید .

حل . صفحه نمودار تابع $z = x + y$ است ؛ درنتیجه ،

$$V = \iint_R (x + y)\, dA.$$

بنابر قضیهٔ ۲ ، این انتگرال مضاعف مساوی انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + y)\, dy$$

است . اما ، همانطور که قبلا" در مثال ۴ نشان داده شد ، $I_R = \frac{7}{20}$ ؛ و لذا ، $V = \frac{7}{20}$.

بالاخره ، ملاحظه می‌کنیم که گاهی نوشتن انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ به صورت

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

شایسته است . این شکل دیگر از انتگرال مضاعف با اِنتگرال مکرر خلط نمی‌شود ،زیرا شامل علامت $\iint_R$ است که در آن دو علامت‌انتگرال حدود انتگرالگیری جداگانه‌ای حمل نمی‌کنند .

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید .

۱ . $\int_0^2 dx \int_0^1 (2x + y^2)\, dy$ ✓

۲ . $\int_1^5 dy \int_2^3 \frac{dx}{(x + y)^2}$ ✓

۳ . $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2}{x^2 + 1}\, dx$ ✓

۴ . $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{y^2}{x^2}\, dy$ ✓

۵. $\int_2^8 dx \int_0^{\ln x} e^y\, dy$

۶. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx$

۷. $\int_3^5 dy \int_y^{2y} \frac{x}{y}\, dx$

۸. $\int_{-1}^1 dx \int_{3-x}^2 (x+2y)\, dy$

۹. $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} (3x-y)\, dy$

۱۰. $\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} x^2 \sin y\, dx$

۱۱. $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx$

۱۲. $\int_0^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^1 y^3\, dy$

در انتگرال مکرر داده شده، پس از رسم ناحیهٔ انتگرالگیری R، ترتیب انتگرالگیری را عوض نمایید. (فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته باشد.)

۱۳. $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy$

۱۴. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy$

۱۵. $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx$

۱۶. $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y)\, dx$

۱۷. با تعویض ترتیب انتگرالگیری، مجموع

$$\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y)\, dy$$

را به صورت انتگرال مکرر بنویسید.

۱۸. چرا انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sin \pi x^2\, dx$$

را نمی‌توان به همین صورت حساب کرد؟ آن را با تعویض ترتیب انتگرالگیری حساب کنید.

اگر R ناحیهٔ محدود به شکل داده شده باشد، انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y)\, dA$ را برحسب انتگرالهای مکرر بیان نمایید.

۱۹. مثلث به رئوس $(1, 0), (2, 2), (0, 2)$

۲۰. ذوزنقه به رئوس $(1, 1), (5, 1), (4, 4), (2, 4)$

۲۱. متوازی‌الاضلاع به رئوس $(0, 0), (2, -2), (3, -1), (1, 1)$

۲۲. چندضلعی به رئوس $(0, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2)$

۲۳. فرض کنید R ناحیهٔ مستطیلی تعریف شده با نامساویهای $a \le x \le b,\ c \le y \le d$

باشد. انتگرال مضاعف $\iint_R xy\,dA$ را مستقیماً از تعریف (۴) حساب کنید.
راهنمایی. R را با خطوط افقی و قائم افراز کرده، و مجموع ریمان مبتنی بر نقاط در مراکز زیر مستطیلهای حاصل را تشکیل دهید.

۲۴. کدامیک از انتگرالهای مضاعف

$$\iint_R (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\,dA, \qquad \iint_R (4x^3y + 4xy^3)\,dA$$

بزرگتر است؟

انتگرال مضاعف داده شده را حساب کنید.

۲۵. $\iint_R \frac{x}{x^2+1}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=1$ است.

۲۶. $\iint_R xy^2e^{xy}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=2$ است.

۲۷. $\iint_R \sqrt{4x^2-y^2}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مثلثی محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=x$ است.

۲۸. $\iint_R y\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ کوچکتر محدود به دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ و خط واصل بین نقاط $(2,0)$ و $(0,2)$ است.

۲۹. $\iint_R \cos(x-y)\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ مثلثی محدود به خطوط $x=0$ ، $y=\pi$ ، و $y=x$ است.

۳۰. $\iint_R e^{y/x}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ ، و سهمی $y=x^2$ است.

۳۱. $\iint_R xy\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ است.

✓ ۳۲. $\iint\limits_R x \ln y \, dA$ ،که درآن R ناحیهٔ محدود به‌خطوط $x = 2$ ، $y = 1$ ،ومنحنی $xy = 1$ است .

با استفاده از انتگرال مضاعف ، مساحت A ی ناحیهٔ R محدود به منحنیهای داده شده را بیابید .

✓ ۳۳. $xy = 1$ ، $y = x$ ، و $x = e$

✓ ۳۴. $y = \ln x$ ، $y = x - 1$ ، و $y = -2$

✓ ۳۵. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ و $y = 2 - x$

✓ ۳۶. $x = y^2$ و $x = 4 - 3y^2$

✓ ۳۷. $x^2 + 2y^2 = 1$ و $2x^2 + y^2 = 1$

۳۸. $x^2 + y^2 = 4$ و $y^2 - 2x^2 = 1$ (R شامل مبداء است)

با استفاده از انتگرال مضاعف ، حجم V ناحیهٔ توپر داده شدهٔ T را بیابید .

✓ ۳۹. T به صفحات مختصات ، صفحهٔ $z = x + 2y + 1$ و صفحات $x = 1$ و $y = 2$ محدود است .

✓ ۴۰. T به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 3$ محدود است .

✓ ۴۱. T در یکهشت اول قرار داشته ، و به صفحات مختصات و صفحات $x + 2y = 2$ و $x + 4y + 2z = 8$ محدود است .

✓ ۴۲. T به‌پنج‌صفحهٔ $x = 0$ ، $z = 0$ ، $x + 3y = 6$ ، $2x + 3y = 12$ ،و $x + y + z = 6$ محدود است .

✓ ۴۳. T به سهمی‌گون بیضوی $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ، صفحات مختصات ، و صفحات $x = -2$ و $y = 3$ محدود است .

✓ ۴۴. T بـــه مخروط $z^2 = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 2$ محدود است .

✓ ۴۵. T به مخروط $z^2 = xy$ و صفحهٔ $x + y = 4$ محدود است .

✓ ۴۶. T به استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 1$ ، صفحهٔ $z = 0$ ، و صفحـــهٔ $2x + 2y + 3z = 6$ محدود است .

✓ ۴۷. T در یکهشـت اول قرار داشته ، و به استوانهٔ بیضوی $4x^2 + z^2 = 1$ ، صفحهٔ $y = x$ و صفحات $y = 0$ و $z = 0$ محدود است .

✓ ۴۸. T در یکهشت اول قرار داشته ، و به سهمی‌گون هذلولوی $2z = xy$ ،استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ و صفحهٔ $z = 0$ محدود است .

۴۹. فرض کنید R یک ناحیهٔ ساده باشد . با استفاده از قضیهٔ ۳ ، نشان دهید که هر دو

فرمول (۲) و (۲′) مقدار یکسانی برای مساحت R به ما می‌دهند.

۵۰. گوییم مجموعهٔ D **همبند** (قوسوار) است اگر هر جفت نقطهٔ P و Q در D را بتوان با منحنی پیوسته‌ای که کاملاً در D است به‌هم وصل کرد؛ یعنی، منحنیی به‌معادلات پارامتری $x = x(t),\ y = y(t)\ (0 \le t \le 1)$ که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای بوده، به ازای $0 \le t \le 1$، $(x(t), y(t)) \in D$، و $P = (x(0), y(0)), Q = (x(1), y(1))$. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ نرمال‌همبند R به‌مساحت A پیوسته‌باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند (a, b) در R وجود دارد به طوری که

$$\iint_R f(x, y)\,dA = Af(a, b).$$

این *قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای مضاعف* است.

راهنمایی. قضیهٔ مقدار میانی، صفحهٔ ۱۵۴، را بر تابع $F(t) = f(x(t), y(t))$ اعمال کنید.

۵۱. از قضیهٔ ۳ نتیجه بگیرید که

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy \qquad (a \le x \le b),$$

که در آن $f(x, y)$ و $\partial f(x, y)/\partial x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $\{(x, y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ پیوسته‌اند. این نتیجه در مسئلهٔ ۶۳، صفحهٔ ۱۲۶۴، پیش‌بینی شده بود.

۲.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه

نکات بخش پیش را می‌توان فوراً به *انتگرالهای سه‌گانه*، یعنی انتگرالها روی نواحی سه‌بعدی یا توپر، تعمیم داد. گام بلند قبلاً با رفتن از انتگرالهای سادهٔ معمولی به انتگرالهای مضاعف برداشته شده است، و انتقال از بعد دو به سه چیز اساساً جدیدی را شامل نیست.

فرض کنیم R_{xy} یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xy باشد. در این صورت، مجموعهٔ تمام نقاطی چون (x, y, z) با خاصیت

$$(x, y) \in R_{xy}, \qquad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), \tag{1}$$

که در آن توابع g_1 و g_2 بر R_{xy} پیوسته‌اند (و $\in$ عضویت مجموعه را نشان می‌دهد)، یک *ناحیهٔ z-ساده* در فضا نام دارد. به همین نحو، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) با خاصیت

$$(x, z) \in R_{xz}, \qquad h_1(x, z) \le y \le h_2(x, z), \tag{1'}$$

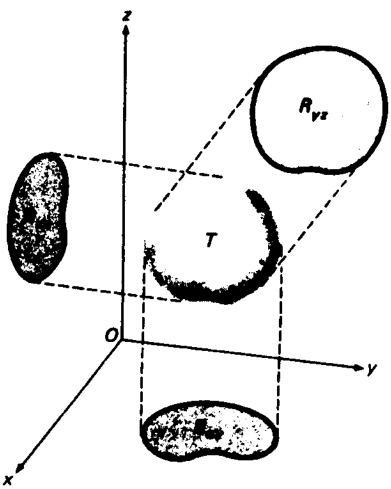
که درآن h_1 و h_2 بر ناحیهٔ نرمال R_{xz} در صفحهٔ xz پیوسته‌اند، یک *ناحیهٔ y-ساده* نامیده

می‌شود ، ولی مجموعهٔ تمام نقاط(x, y, z)با خاصیت

$$(y, z) \in R_{yz}, \qquad k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z), \tag{۱"}$$

که درآن k_1 و k_2 بر ناحیهٔ نرمال R_{yz} در صفحهٔ yz پیوسته‌اند ، یک *ناحیهٔ x-ساده* نام دارد . فرض کنیم با رسم صفحات مناسبی موازی صفحات مختصات بتوان ناحیهٔ توپر T را به تعدادی متناهی زیر ناحیه تجزیه کرد که هر یک نسبت به دست‌کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده باشد . در این صورت ، گوییم T *نرمال* است . طبیعی است که یک ناحیهٔ x-ساده ، y-ساده ، یا z-ساده را نرمال می‌گیریم .

مثال ۱ . ناحیهٔ توپر T شکل ۱۶ x-ساده ، y-ساده ، و z-ساده است . شکل همچنین نواحی R_{xy} ، R_{xz} ، و R_{yz} نظیر به T را ، که تصاویر T روی صفحات xy ، xz ، و yz اند ، نشان می‌دهند .



شکل ۱۶

این نواحی توپر همه حجم تعریف شده دارند . حجم ناحیهٔ z-سادهٔ تعریف شده با (۱) چیزی جز حجم بین سطح بالایی $z = g_2(x, y)$ و سطح پایینی $z = g_1(x, y)$ که روی ناحیهٔ R_{xy} در صفحهٔ xy تصویر می‌شود نیست ، و این حجم ، طبق استدلال صفحات ۱۳۲۴ تا ۱۳۲۵ ، مساوی انتگرال مضاعف

$$V = \iint_{R_{xy}} [g_2(x, y) - g_1(x, y)]\, dx\, dy$$

می‌باشد. به همین نحو، حجم نواحی y-ساده و x-سادهٔ تعریف شده با ('۱) و ("۱) از انتگرالهای مضاعف

$$V = \iint_{R_{xz}} [h_2(x, z) - h_1(x, z)]\, dx\, dz$$

و

$$V = \iint_{R_{yz}} [k_2(y, z) - k_2(y, z)]\, dy\, dz$$

به دست می‌آیند. اگر ناحیهٔ توپر T نرمال باشد، حجمش مجموع احجام زیرناحیه‌هایی تعریف می‌شود که هر یک نسبت به دست‌کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده است و T را می‌توان با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات به آنها تجزیه کرد. درست مثل نواحی مسطح نرمال، می‌توان نشان داد که اگر ناحیهٔ توپر نرمال T با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات افراز شده باشد، بخشی از T که در هر سلول افراز (یک جعبهٔ مکعب مستطیل) قرار دارد دارای حجم است.

تعریف انتگرال سه‌گانه. حال انتگرال سه‌گانهٔ تابع سه‌متغیرهٔ $f(x, y, z)$ را روی ناحیهٔ سه بعدی نرمال T تعریف می‌کنیم. فرض کنیم[1]

$$Q = \{(x, y, z) : a \le x \le b, c \le y \le d, A \le z \le B\}$$

جعبهٔ بسته‌ای (مکعب مستطیل) با وجوهی موازی صفحات مختصات باشد که شامل T است (ر.ک. شکل ۱۷)، و نقاط x_j $(j = 0, 1, \ldots, J)$ ، y_k $(k = 0, 1, \ldots, K)$ ، و z_l $(l = 0, 1, \ldots, L)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[c, d]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_x ، μ_y ، و μ_z باشند. این بدان معنی است که

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,$$
$$A = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{L-1} < z_L = B,$$

و

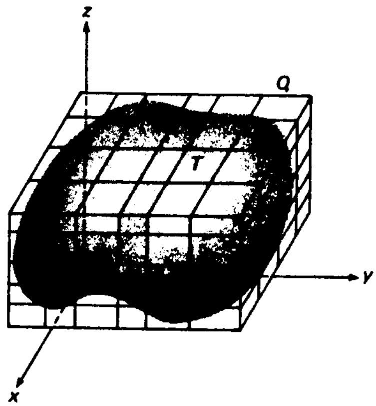
---

۱. بهتر بود به جای $f \le z \le e$ می‌نوشتیم $A \le x \le B$، ولی e پایهٔ لگاریتمهای طبیعی را القا کرده و f از قبل برای انتگرالده $f(x, y, z)$ رزرو شده است.

$$\mu_x = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_J - x_{J-1}\},$$
$$\mu_y = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, y_K - y_{K-1}\},$$
$$\mu_z = \max\{z_1 - z_0, z_2 - z_1, \ldots, z_L - z_{L-1}\}.$$

در این صورت ، سه مجموعه از صفحات

$$\begin{array}{lllll} x = a, & x = x_1, & x = x_2, \ldots, & x = x_{J-1}, & x = b, \\ y = c, & y = y_1, & y = y_2, \ldots, & y = y_{K-1}, & y = d, \\ z = A, & z = z_1, & z = z_2, \ldots, & z = z_{L-1}, & z = B, \end{array} \qquad (۲)$$



شکل ۱۷

موازی صفحات مختصات *افرازی* از جعبهٔ Q تشکیل می‌دهند؛ این صفحات Q را به JKL زیر جعبه و ناحیهٔ T را به n زیرناحیهٔ ناتهی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ که $n \le JKL$ مثل شکل تقسیم می‌کنند (معمولاً " $n < JKL$) . در حالت کلی ، بعضی از زیرناحیه‌ها غیرمستطیلی بوده و مرزهایشان از قسمتهایی از صفحات (۲) و قسمتهایی از مرز T تشکیل شده‌اند ، ولی چون T یک ناحیهٔ نرمال است ، هر زیرناحیهٔ T_i حجم تعریف شدهٔ ΔV_i دارد . به ازای هر تابع سه‌متغیرهٔ $f(x, y, z)$ ، فرض کنیم (p_i, q_i, r_i) نقطهٔ *دلخواهی* در T_i باشد ، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, r_i)\Delta V_i$$

را تشکیل می‌دهیم . فرض کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max\{\mu_x, \mu_y, \mu_z\},$$

معروف به *اندازهٔ* مش افراز به صفر نزدیک شود ، S صرف نظر از انتخاب اعداد x_j ، y_k ، z_l ، p_i ، q_i ، و r_i صادق در شرایط مقرر به حدی متناهی نزدیک گردد . در این صورت ،

این حد *انتگرال (سه‌گانهٔ) f* روی R نامیده و با

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV$$

نموده می‌شود، و گوییم تابع f بر T، یا روی T، *انتگرالپذیر* است. لذا،

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, r_i)\,\Delta V_i, \tag{۳}$$

که در آن f *انتگرالده* و T *ناحیهٔ انتگرالگیری* انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۲. هرگاه V حجم T باشد، آنگاه، به ازای هر افراز ناحیه با صفحات موازی صفحات مختصات،

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

لذا، با اختیار $f(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۳)، به دست می‌آوریم

$$\iiint_T 1\,dV = \iiint_T dV = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\mu \to 0} V = V.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$V = \iiint_T dV. \tag{۴}$$

همانطور که احتمالاً حدس زده‌اید، قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۱۳۲۳، به انتگرالهای سه‌گانه سرایت دارد.

قضیهٔ ۴ (پیوستگی انتگرالپذیری بر یک ناحیهٔ توپر را ایجاب می‌کند). *هرگاه تابع $f(x, y, z)$ بر ناحیهٔ توپر نرمال T پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y, z)$ بر T انتگرالپذیر است.*

انتگرالهای سه‌گانه از همان قواعد (یک) تا (چهار)، صفحات ۱۳۲۳ تا ۱۳۲۴ درمورد انتگرالهای مضاعف، با تغییرات مختصر مناسبی، پیروی می‌کنند.

(یک) هرگاه f بر T انتگرالپذیر بوده و c ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر T انتگرالپذیر است، و

$$\iiint_T cf(x, y, z)\,dV = c \iiint_T f(x, y, z)\,dV.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر T انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f+g$ نیز بر T انتگرالپذیر بوده، و

$$\iiint_T [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dV = \iiint_T f(x, y, z)\, dV + \iiint_T g(x, y, z)\, dV.$$

(سه) هرگاه f بر T انتگرالپذیر بوده و $c \le f(x, y, z) \le C$ ، که در آن c و C ثابت‌اند ، آنگاه

$$cV \le \iiint_T f(x, y, z)\, dV \le CV,$$

که در آن V حجم T است. بخصوص، هرگاه $f(x, y, z) \ge 0$ ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV \ge 0.$$

(چهار) هرگاه f بر T پیوسته بوده و T به دو زیرناحیهٔ نرمال T_1 و T_2 بدون نقطهٔ درونی مشترک تجزیه شده باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iiint_T f(x, y\, z)\, dV + \iiint_{T_2} f(x, y, z)\, dV.$$

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه. برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه، مشابه قضایای ۲ و ′۲ در بخش قبل مورد نیازند. آنها در رابطه با انتگرالهای مکرر هستند که انتگرالگیری اول بین حدود متغیر، که توابعی از یک متغیرند، و انتگرالگیری دوم بین حدود ثابت می‌باشد؛ در واقع، حدود ثابت نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ یا $[c, d]$ اند که از تصویر ناحیهٔ انتگرالگیری روی محور x یا محور y به دست می‌آیند. در قضایای مشابه برای انتگرالهای سه گانه، انتگرالگیری اول مجددا" بین حدود متغیر است، گه این بار توابعی از دو متغیر می‌باشند، و انتگرالگیری دوم محاسبهٔ یک انتگرال مضاعف روی ناحیهٔ حاصل از تصویر ناحیهٔ سه‌بعدی T روی یکی از صفحات مختصات می‌باشد.

قضیهٔ ۵ (محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ z ـ ساده). هرگاه $f(x, y, z)$ برناحیهٔ z ـ سادهٔ T تعریف شده با $(x, y) \in R_{xy}, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)$ پیوسته باشد، که در آن R_{xy} ناحیهٔ نرمالی در صفحهٔ xy است، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (۵)$$

قضیهٔ ۵' (محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ y ـ ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ برناحیهٔ y ـ سادهٔ T تعریف شده با $(x, z) \in R_{xz}, h_1(x, z) \le y \le h_2(x, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{xz} یک‌ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xz است ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xz}} dA \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy. \qquad (۵')$$

قضیهٔ ۵" (محاسبهٔ انتگرال‌سه‌گانه روی یک‌ناحیهٔ x ـ ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ برناحیهٔ x ـ سادهٔ T تعریف شده با $(y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{yz} یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ yz است ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx. \qquad (۵")$$

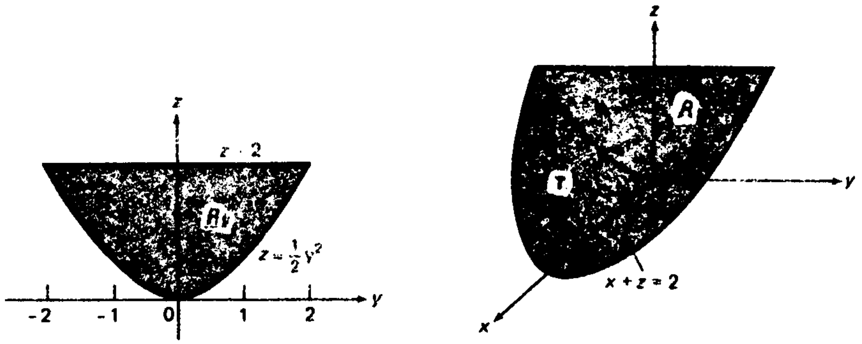
سعی کنید تفاوتها و تشابهات بین‌این‌قضایا را درک‌نمایید . ما برهان آنها را حذف کرده‌ایم .

فرض‌کنیم ناحیهٔ R_{xy} ساده باشد؛ یعنی ، به طور قائم و به‌طور افقی ساده باشد . در این صورت ، انتگرال مضاعف (۵) را می‌توان به دو راه مختلف محاسبه نمود (قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۳۳۲، را به یاد آورید) . همین امر در مورد انتگرال مضاعف (۵') یا ("۵) درست است اگر R_{xz} یا R_{yz} (نسبت به هر دو مختص در صفحهٔ آن) ساده باشد . گاهی انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_T f(x, y, z)\, dV$ را به شکل $\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ می‌نویسیم . چه چیز به شما می‌گوید که این عبارت یک انتگرال مکرر نیست؟

مثال ۳ . با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم ناحیهٔ توپر T محدود به استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ ، صفحهٔ $x = 0$ ، و صفحهٔ $x + z = 2$ را بیابید [ر.ک. شکل ۱۸ (آ)] .

حل . چون T ، x ـ ساده ، y ـ ساده ، و z ـ ساده است ، V را می‌توان با استفاده از هر یک‌از فرمولهای (۵) ، (۵') ، و ("۵) به دست آورد . از فرمول ("۵) استفاده می‌کنیم . تصویر T روی صفحهٔ yz ناحیهٔ R_{yz} است‌که در شکل ۱۸ (ب) نموده شده است و به سهمی $z = \frac{1}{2}y^2$

و خط $z = 2$ محدود می‌باشد . با بررسی شکل معلوم می‌شود که R_{yz} به طور قائم (و به‌طور افقی) ساده‌است ،ومساوی مجموعه‌ٔ نقاطی چون (y, z) است که $-2 \le y \le 2, \frac{1}{2}y^2 \le z \le 2$



(ب) (آ)

شکل ۱۸

لذا ، T مجموعه‌ٔ نقاطی چون (x, y, z) است به‌طوری‌که $(y, z) \in R_{yz}, 0 \le x \le 2 - z$ ، زیرا x از مقدار 0 ،روی وجه عقبی T (ناحیه‌ٔ R_{yz}) به مقدار $2 - z$ روی وجه جلوی T (بخشی از صفحه‌ٔ $x + z = 2$) تغییر می‌کند . لذا ، طبق فرمول (۴) و فرمول ("۵) بـه ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ، $k_1(y, z) \equiv 0$ ، و $k_2(y, z) = 2 - z$ معلوم می‌شود که

$$V = \iiint_T dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_0^{2-z} dx = \iint_{R_{yz}} (2 - z)\,dA$$

$$= \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2/2}^{2} (2 - z)\,dz = \int_{-2}^{2} \left[2z - \frac{1}{2}z^2\right]_{y^2/2}^{2} dy$$

$$= 2\int_0^2 \left(2 - y^2 + \frac{1}{8}y^4\right) dy,$$

که در آن از زوج‌بودن انتگرالده استفاده کرده‌ایم . لذا ، بالاخره داریم

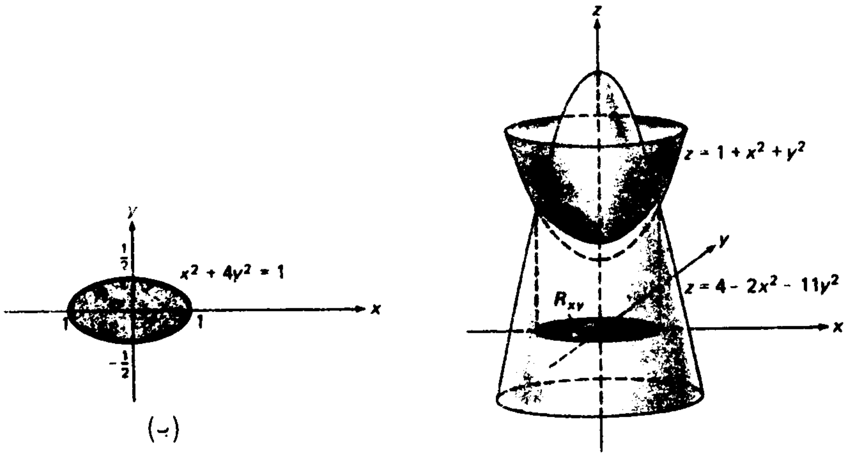
$$V = 2\left[2y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{40}y^5\right]_0^2 = 2\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{32}{40}\right) = \frac{64}{15}.$$

مثال ۴ . با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم V ناحیه‌ٔ توپر T محدود به سهمی‌گون دوار $z = 1 + x^2 + y^2$ و سهمی‌گون بیضوی $z = 4 - 2x^2 - 11y^2$ را بیابید [ر.ک. شکل ۱۹ (آ)] .

حل. مجدداً " T ، x -ساده، y -ساده، و z-ساده است؛ درنتیجه، V را می‌توان با هر یک از فرمولهای (۵)، (۵')، و (۵") یافت. این بار از فرمول (۵) استفاده می‌کنیم. باحل معادلات سهمی‌گونها باهم، داریم $1 + x^2 + y^2 = 4 - 2x^2 - 11y^2$ یا معادلاً "

$$x^2 + 4y^2 = 1. \qquad (۶)$$

نمودار معادلهٔ (۶) در فضا یک استوانهٔ بیضوی با خطوط جاری موازی محور z است. چون سهمی‌گونها در یک منحنی واقع براین استوانه متقاطعند، ناحیهٔ R_{xy}، یعنی تصویر T روی صفحهٔ xy، به بیضی با همان معادله، طبق شکل ۱۹ (ب)، محدود می‌باشد. بابررسی شکل معلوم می‌شود که R_{xy} به طور افقی (و قائم) ساده است، و مجموعهٔ نقاطی چون (x, y)



(آ)

شکل ۱۹

است به طوری که $-\sqrt{1 - 4y^2} \le x \le \sqrt{1 - 4y^2}$, $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$. لذا، T مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) است که $(x, y) \in R_{xy}$, $1 + x^2 + y^2 \le z \le 4 - 2x^2 - 11y^2$، زیرا z از مقدار $1 + x^2 + y^2$ (وابسته به x و y) بر سهمی‌گون پایینی به مقدار $4 - 2x^2 - 11y^2$ بر سهمی‌گون بالایی تغییر می‌کند. لذا، طبق فرمول (۵) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1$، $g_1(x, y) = 1 + x^2 + y^2$، و $g_2(x, y) = 4 - 2x^2 - 11y^2$، پس از جانشانی $y = \frac{1}{2}\sin t$،

$$V = \iiint_T dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2} dz = \iint_{R_{xy}} (3 - 3x^2 - 12y^2)\, dA$$

$$= 3\int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} (1 - x^2 - 4y^2)\, dx$$

$$= 3\int_{-1/2}^{1/2}\left[(1-4y^2)x-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} dy$$
$$= 4\int_{-1/2}^{1/2}(1-4y^2)^{3/2}\,dy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt,$$

لذا ، به کمک مسائل ۱۳ و ۱۴ ، صفحهٔ ۶۱۴ ، بالاخره خواهیم داشت

$$V = 4\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

مثال ۵ . هرگاه تابع $f(x, y, z)$ *حاصلضرب* سه تابع یک متغیره مانند $X(x)Y(y)Z(z)$ بوده و ناحیهٔ انتگرالگیری T یک جعبه باشد ، یعنی $T=\{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, A \le z \le B\}$ آنگاه انتگرال سه‌گانهٔ f روی T به حاصلضربی از سه انتگرال ساده تبدیل می‌شود . درواقع

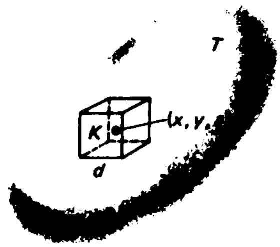
$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_A^B X(x)Y(y)Z(z)\,dz$$
$$= \left(\int_a^b X(x)\,dx\right)\left(\int_c^d Y(y)\,dy\right)\left(\int_A^B Z(z)\,dz\right).$$

شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم . صورت دوبعدی این فرمول چیست ؟

محاسبهٔ جرم از چگالی . حال ، با استفاده از انتگرالهای سه‌گانه ، جرم کل جسم توپر T را با دانستن *تابع چگالی* آن $\rho(x, y, z)$ تعیین می‌کنیم . فرض کنیم K مکعبی به طول یال d و به مرکز نقطهٔ (x, y, z) از T بوده (ر.ک. شکل ۲۰) ، و ΔV حجم و Δm جرم بخشی از T باشد که مشمول K است . در این صورت ، طبق تعریف ،

$$\rho(x, y, z) = \lim_{d\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{۷}$$

که درآن $\rho(x, y, z) \ge 0$ ، زیرا جرم و چگالی جرم ذاتا" نامنفی‌اند . در اینجا این امر که اجسام بزرگ از تعداد زیادی ذرات تشکیل شده‌اند و فضای خالی بین آنها وجود دارند را نادیده گرفته ، و ماده را " پیوسته " می‌گیریم . دلیل مجاز بودن این است که d می‌تواند در مقایسه با اجسام بزرگ خیلی کوچک و در مقایسه با اندازهٔ اتم و مولکول بسیار بزرگ باشد . همچنین ، از نظر فیزیکی واضح است که چگال (۷) را می‌توان در صورت تعویض مکعب K با ناحیهٔ کلیتری شامل (x, y, z) که قطرش (ماکزیمم فاصلهٔ بین نقاط K) به 0 نزدیک می‌شود نیز به دست آورد .



شکل ۲۰

حال، همانند تعریف انتگرال سه‌گانه روی T، فرض کنیم ناحیهٔ T (نرمال) با مجموعه‌ای از صفحات موازی محورهای مختصات به n زیرناحیهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم شده باشد. همچنین، ΔV_i و Δm_i حجم و جرم T_i بوده، و T تابع چگالی پیوستهٔ $\rho(x, y, z)$ باشد. مقدار تابع ρ در زیرناحیهٔ T_i، دست‌کم وقتی T_i به قدر کافی کوچک‌باشد، مختصر تغییری می‌کند. لذا، چون ρ نسبت حدی جرم به حجم است، ظاهراً "

$$\Delta m_i \approx \rho(p_i, q_i, r_i)\Delta V_i,$$

که در آن (p_i, q_i, r_i) نقطهٔ **دلخواهی** در T_i است، تقریب مناسبی می‌باشد. به‌علاوه، هرگاه M جرم کل T باشد، آنگاه

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i,$$

درنتیجه، M با

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i, r_i)\Delta V_i, \qquad (۸)$$

یعنی مجموع جرمهای تقریبی n زیرناحیه، تقریب می‌شود. پس معقول است که (۸)، یعنی مجموع ریمانی برای ρ بر T، را تقریب مناسبی به M بگیریم، که در آن وقتی اندازهٔ هر زیرناحیهٔ T_i کوچکتر شود، یعنی اندازهٔ مش μ افراز T به صفر نزدیک شود، تقریب بهتر خواهد شد. لذا، M را مساوی حد

$$M = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i, r_i)\Delta V_i$$

قرار می‌دهیم؛ یعنی،

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z)\,dV, \qquad (۹)$$

که در آن وجود انتگرال سه‌گانه از قضیهٔ ۴ و فرض پیوستگی ρ نتیجه می‌شود.

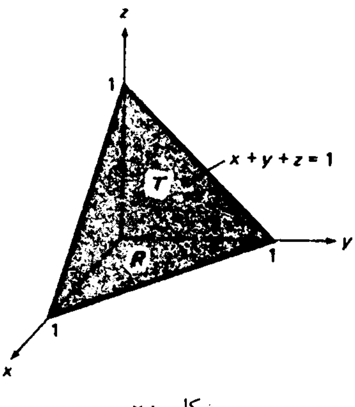
مثال ۶. جرم کل M چهاروجهی T در یکهشت اول محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات را درصورتی بیابید که تابع چگالی

$$\rho(x, y, z) = \frac{16}{(1 + x + y + z)^3}$$

باشد.

حل. تصویر T روی صفحهٔ xy مثلث R در ربع اول است که به خط $x + y = 1$ و محورهای مثبت مختصات محدود شده است (ر.ک. شکل ۲۱). لذا، طبق فرمول (۹) و قضیهٔ ۵،

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T \frac{16}{(1 + x + y + z)^3}\, dV = 16 \iint_R dA \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \\
&= 16 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1 + x + y + z)^2}\right]_{z=0}^{1-x-y} dy \\
&= 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1 + x + y)^2} - \frac{1}{4}\right] dy \\
&= 8 \int_0^1 \left[-\frac{1}{1 + x + y} - \frac{y}{4}\right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{x - 3}{4}\right) dx = 8\left[\ln (x + 1) + \frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{4} x\right]_0^1 \\
&= 8 \ln 2 - 5 \approx 0.545. \quad \square
\end{aligned}$$



شکل ۲۱

حالت دوبعدی. یک صفحهٔ نازک با ضخامت نامحسوس را **ورقه** می‌نامیم. با استفاده از انتگرال مضاعف می‌توان جرم کل یک ورقه را درصورت معلوم بودن چگالی جرم $\rho(x, y)$ آن به دست آورد. این یک چگالی *سطح* است که به جای چگالی *حجم*، که با واحدی چون گرم بر سانتیمتر مکعب سنجیده می‌شود، با واحدی مانند گرم بر سانتیمترمربع سنجیده خواهد شد. اساسا" همان استدلال برای به دست آوردن فرمول (۹) نشان می‌دهدکه‌جرم کل M ورقه عبارت است از

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA. \tag{۹'}$$

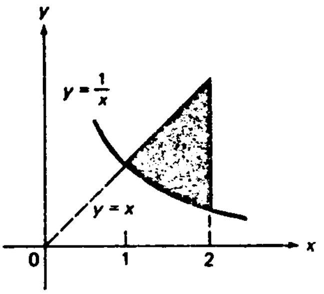
مثال ۷. یک ورقه به شکل ناحیهٔ R محدود به خطوط $x = 2$ ، $y = x$ ،و هذلولی $xy = 1$ است، و تابع چگالی‌اش عبارت است از

$$\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^2}.$$

جرم کل M ورقه را بیابید.

حل. ناحیهٔ R به طور قائم ساده است، و با نامساویهای $1 \le x \le 2, 1/x \le y \le x$ تعریف می‌شود (ر.ک. شکل ۲۲). لذا، طبق فرمول (۹')،

$$M = \iint_R \frac{x^2}{y^2}\, dA = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{y=1/x}^{x} dx$$
$$= \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$



شکل ۲۲

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

۱. $\int_0^3 \int_{-2}^0 \int_{-1}^1 dx\,dy\,dz$

۲. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + xz + yz)\,dx\,dy\,dz$

۳. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^z (x + y + z)\,dy$

۴. $\int_0^3 dy \int_0^y dx \int_1^e \frac{xy}{z}\,dz$

۵. $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y xyz\,dz$

۶. $\int_{-1}^1 dz \int_0^z dx \int_0^{x+z} x^2yz^2\,dy$

۷. $\int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x + y + z}}$

۸. $\int_0^\pi dz \int_0^{\pi/2} dy \int_1^2 x \cos y \sin z\,dx$

۹. $\int_1^2 dz \int_0^{\ln z} dy \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx$

۱۰. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را حساب کنید.

۱۱. $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ ، $y = 3$ ، $z = -1$ ، و $z = 1$ است

۱۲. $\iiint_T xyz\,dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = -1$ ، $y = 3$ ، $z = 1$ ، و $z = 5$ است

۱۳. $\iiint_T x\,dV$ ، که در آن T منشور واقع در یکهشت اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $y = 5$ و $x + z = 2$ است

۱۴. $\iiint_T y\,dV$ ، که در آن T چهاروجهی واقع در یکهشت اول و محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات است

۱۵. $\iiint_T z^2\,dV$ ، که درآن T ناحیهٔ توپر محدود به کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2+y^2+z^2 = 4z$ است

۱۶. $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}dV$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به مخروط بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، و $z = 1$ است

۱۷. $\iiint_T \cos y\, dV$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به سهمی‌گون هذلولوی $z = xy$ ، صفحهٔ $z = 0$ ، و صفحهٔ $x + y = \pi$ است

۱۸. $\iiint_T xe^{x+y+z}dV$ ، که در آن T جعبهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$ ، $y = \ln 2$ ، و $z = \ln 3$ است .

با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم V ناحیهٔ توپر ذکر شدهٔ T را بیابید .

۱۹. T به صفحهٔ $6x + 2y + 3z = 12$ و صفحات مختصات محدود است

۲۰. T به صفحهٔ $z = 10 - 2x - 5y$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 1$ ، $y = x$ ، و $z = 0$ محدود است

۲۱. T به سهمی‌گونهای دوار $z = x^2 + y^2$ و $2z = 1 - x^2 - y^2$ محدود است

۲۲. T به سهمی‌گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ محدود است

۲۳. T به استوانه‌های سهموی $z = 4 - x^2$ و $z = 2 + x^2$ و صفحات $y = -2$ و $y = 3$ محدود است

۲۴. T به سهمی‌گونهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2x^2 + y^2$ و صفحات $x = y$ ، $x = 3y$ ، و $y = 1$ محدود است .

جرم کل مکعب T محدود به صفحات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، و $z = \pm 1$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد .

۲۵. $\rho(x, y, z) = \cos(\pi x/2)\cos(\pi y/2)\cos(\pi z/2)$

۲۶. $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

مثل مثال ۶ ، فرض‌کنید T چهاروجهی واقع دریکهشت اول ومحدودبه‌صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات باشد . جرم کل T را درصورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد .

۲۷. $\rho(x, y, z) = x + y + z$

۲۸. $\rho(x, y, z) = xyz$.

۲۹. جرم کل یک ورقه به شکل ناحیهٔ بین سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y) = xy$ باشد .

۳۰. چگالی یک ورقهٔ مربع شکل به طول ضلع 1 ft در نقطهٔ متغیر P با مجذور فاصلهٔ P تا مرکز مربع (نقطهٔ برخورد اقطار) متناسب است. جرم کل ورقه را درصورتی بیابید که چگالی در گوشه‌های مربع 1 اونس بر اینچ مربع باشد.

۳۱. جسم T به شکل ناحیهٔ سه‌بعدی R دارای چگالی بار الکتریکی $\rho(x, y, z)$ است، برای Q، یعنی بار کل‌در T، فرمول‌بنویسید. Q را درصورتی‌بیابیدکه $\rho(x, y, z) = xy - 2yz$ و T جعبهٔ محدود به صفحات $x = 0$، $x = 2$، $y = 1$، $y = 4$، $z = -1$، $z = 2$ باشد. (توجه کنید که بار الکتریکی ،به‌خلاف جرم ، می‌تواند مقادیر منفی به‌خود بگیرد.)

۳۲. **مقدار میانگین** تابع $f(x, y, z)$ روی ناحیهٔ سه‌بعدی T به حجم V با

$$\frac{1}{V}\iiint_T f(x, y, z)\,dV$$

تعریف می‌شود (این تعمیم سه‌بعدی عبارت

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

برای‌مقدارمیانگین یک‌تابع یک‌متغیره‌است) . مقدار میانگین $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ روی چهاروجهی T محدود به صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات را بیابید. چگونه از قبل بدانیم که دست‌کم یک نقطه در T هست کـه f در آن مقدار میانگین خود را روی T می‌گیرد؟ این نقطه را پیدا نمایید.

۳.۱۴ مرکز جرم و مرکز گون

با تعمیم ایده‌های مکانیک نیوتنی به دستگاهی مرکب از n ذرهٔ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ در فضا آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$ بردار موضع P_i نسبت به نقطهٔ ثابت O بوده، و m_i جرم P_i باشد. همچنین، بر P_i نیروی خارجی $\mathbf{F}_i$، یعنی نیرویی خارج دستگاه n ذره‌ای، و نیروهایی از طرف $n - 1$ ذرهٔ دیگر اثر نمایند؛ مثلاً"، ذرات برهم نیروهای ثقلی وارد آورند. فرض کنیم $\mathbf{F}_{ij}$ $(j \neq i)$ نیروی وارد بر P_i از سوی ذرهٔ P_j باشد. دراین‌صورت، طبق قانون دوم نیوتن، حرکت P_i تحت تسلط معادلهٔ دیفرانسیل برداری

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

است، که در آن t زمان‌بوده و علامت $\sum_{j=1}^{n}{}'$، با پریم، یعنی مجموع روی تمام‌زیرنویسهای j جز خود i (ذرهٔ P_i نیرویی بر خودش وارد نمی‌کند). به ازای هر ذرهٔ P_i یک معادله به شکل (۱) وجود دارد، و برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ‌دیفرانسیل حاکم بر حرکت دستگاه

ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ رویهم ، معادلات (۱) به ازای $i = 1$ تا n را به‌هم می‌افزاییم . از این نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i,j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij}, \tag{۲}$$

که در آن علامت $\sum_{i,j=1}^{n}{}'$ ، با پریم ، یعنی مجموع روی تمام جفتهای i و j که $i \neq j$. لذا ، مثلا" ،

$$\sum_{i,j=1}^{3}{}' \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}. \tag{۳}$$

معادلهٔ (۲) ظاهر پیچیده‌ای دارد ، ولی آن را می‌توان با استفاده از **قانون سوم نیوتن** ، که می‌گوید " عمل مساوی عکس‌العمل است " ، بی‌درنگ ساده کرد . به طور مشخص، نیروی وارد بر ذرهٔ j م از سوی ذرهٔ i م مساوی و مخالف نیروی وارد بر ذرهٔ i م از سوی ذرهٔ j م است؛ یعنی ،

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

پس نتیجه می‌شود که مجموع $\sum_{i,j=1}^{n}{}' \mathbf{F}_{ij}$ مساوی $\mathbf{0}$ است ، زیرا جملات دو به دو حذف می‌شوند؛ مثلا" ، از تجدید آرایش جملات (۳) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{3}{}' \mathbf{F}_{ij} &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32}) \\ &= (\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{23}) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

لذا ، معادلهٔ (۲) به

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i,$$

یا معادلا"

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \ . \tag{۴}$$

تحویل می‌شود . بردار زیر را معرفی می‌کنیم :

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i}{M}, \tag{۵}$$

که در آن

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{۵'}$$

جرم کل دستگاه ، یعنی مجموع اجرام تمام ذرات است . در این صورت ، $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = M\bar{\mathbf{r}}$ ، و معادلهٔ (۴) را می‌توان به شکل فشردهٔ زیر نوشت :

$$M \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \mathbf{F}, \tag{۶}$$

که در آن

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

برآیند تمام نیروهای خارجی وارد بر تک تک ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ است . بنابر (۶) ، و صرف نظر از حرکت ذرات نسبت به هم ، دستگاه کلاً" مانند ذرهٔ واحدی به جرم M وبردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ که بر آن نیروی $\mathbf{F}$ وارد است حرکت می‌کند. نقطه با بردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ **مرکز جرم** دستگاه n ذره‌ای نام دارد.

اگر نیروی خارجی $\mathbf{F}$ صفر باشد ، می‌توان از معادلهٔ (۶) فوراً" انتگرال گرفت و ابتدا

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{c}_1$$

و سپس

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$$

را به دست آورد ، که در آن $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ بردارهای ثابت انتگرالگیری می‌باشند . هرگاه مرکز جرم سرعت اولیهٔ صفر داشته باشد ، آنگاه $\bar{\mathbf{v}}|_{t=0} = \mathbf{0}$ ؛ درنتیجه ، $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ و $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_2$ ، که دراین صورت مرکز جرم ثابت‌می‌ماند. حتی دراین حالت نیز مرکز جرم مهم است . مثلاً" ، می‌توان نشان داد که دستگاه مرکب از n ذرهٔ وصل شده به یک صفحهٔ نازک فلز با وزن نامحسوس روی میلهٔ تیزی که در مرکز جرم دستگاه قرار دارد به حال تعادل درمی‌آید ، ولی در هر نقطهٔ دیگر خواهد افتاد . در این وضع ، نقطهٔ تعادل یک ورقه به شکل ناحیهٔ مسطحی به چگالی جرم $\rho(x, y)$ نیز مرکز جرمش (به صورت تعریف شده در زیر) می‌باشد . در کاربردهای مهندسی ، نیروی وارد بر یک ساختار (مثلاً" ، پل یا ساختمان) اغلب نیروی ثقل است ، و در این وضع مرکز جرم را معمولاً" **مرکز ثقل** می‌نامند .

به آسانی می‌توان مختصات مرکز جرم یک دستگاه از ذرات را برحسب مختصات خود ذرات بیان کرد . دستگاه مختصات قائم x ، y ، و z با مبداء O را معرفی کرده ، فرض

می‌کنیم $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ و

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

در این صورت ، اگر از طرفین (۵) مؤلفه گرفته و از ('۵) استفاده کنیم ، فورا" درخواهیم یافت که

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{۷}$$

مثال ۱ . یک‌دستگاه ذرات از سه‌جرم $m_1 = 3$ ، $m_2 = 4$ ، و $m_3 = 2$ در نقاطی به‌بردارهای موضع $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{r}_2 = (5, 2, 4)$ ، و $\mathbf{r}_3 = (-2, 0, 1)$ تشکیل شده است . مرکز جرم آن را بیابید .

حل . در اینجا $x_1 = 2$ ، $x_2 = 5$ ، و $x_3 = -2$ ؛ لذا ، اولین فرمول (۷) نتیجه می‌دهد که

$$\bar{x} = \frac{3(2) + 4(5) + 2(-2)}{3 + 4 + 2} = \frac{22}{9}.$$

به همین نحو ،

$$\bar{y} = \frac{3(-1) + 4(2) + 2(0)}{3 + 4 + 2} = \frac{5}{9}$$

و

$$\bar{z} = \frac{3(3) + 4(4) + 2(1)}{3 + 4 + 2} = \frac{27}{9} = 3.$$

گشتاورهای یک دستگاه از ذرات . صورتهای عبارت (۷) برای مختصات $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، و $\bar{z}$ مرکز جرم *گشتاورهای* دستگاه S مرکب از ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ نامیده می‌شوند . به‌طور مشخص، چون اعداد x_i ، y_i ، و z_i صرف نظر از علامتشان فواصل بین P_i و صفحات yz ، xz ، و xy اند ، $\sum m_i x_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ yz ، $\sum m_i y_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ xz ، و $\sum m_i z_i$ را *گشتاور* S نسبت به صفحهٔ xy می‌نامیم .(برای اختصار ، حدود جمعبندی حذف شده‌اند) . هرگاه ذرات همه در یک صفحه باشند (آن را صفحهٔ xy می‌گیریم) ، آنگاه x_i و y_i ، صرف‌نظر از علامت، فواصل بین P_i و محورهای y و x اند ، و $\sum m_i x_i$ را *گشتاور* S نسبت

به محور y و $\sum m_i y_i$ را گشتاور S نسبت به محور x می‌نامیم. با تقسیم این گشتاورها برجرم کل $\sum m_i$ دستگاه S، می‌توان به مختصات مرکز جرم ($\bar{y}$ ، $\bar{x}$ در صفحه، $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ در فضا) بازگشت. گشتاورهای $\sum m_i x_i$ ، $\sum m_i y_i$ ، و $\sum m_i z_i$ را **گشتاورهای اول** نیز می‌نامند تا با **گشتاورهای دوم** یا **گشتاورهای ماند** که در بخش ۱۴.۵ معرفی شده‌اند خلط نشود.

یک جسم جامد را می‌توان ناحیه‌ای سه‌بعدی مانند T گرفت که بر آن چگالی جرم پیوستهٔ $\rho(x, y, z)$ تعریف شده است، که اگر جسم همگن باشد، ثابت $\rho(x, y, z) \equiv$. برای یافتن مرکز جرم T، آن را با رسم سه مجموعه از صفحات موازی صفحات مختصات، مثل صفحهٔ ۱۳۴۳ در تعریف انتگرال سه‌گانه، به تعداد زیادی زیر ناحیه مانند $T_1, T_2, \ldots, T_n$ به حجمهای $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنیم (x_i, y_i, z_i) نقطهٔ دلخواهی در T_i باشد. پس T_i را می‌توان ذره‌ای به جرم $\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ واقع در (x_i, y_i, z_i) گرفت. لذا، مرکز جرم T با تقریبی مناسب همان مرکز جرم دستگاه n ذره‌ای $T_1, T_2, \ldots, T_n$ می‌باشد. فرض کنیم μ اندازهٔ مش افراز T باشد. در این صورت، مرکز جرم T موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات، وقتی $\mu \to 0$، تعریف می‌شود. لذا، به کمک (۷)، معلوم می‌شود که مختصات مرکز جرم T از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{x} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{y} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{z} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}{\lim\limits_{\mu\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i}.$$

اما هر مجموع شامل ρ یک مجموع ریمان است و، وقتی $\mu \to 0$ ، به یک انتگرال‌سه‌گانه روی T نزدیک می‌شود (ناحیهٔ T نرمال فرض می‌شود) . در واقع ،

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\, dV,$$

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_T x\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \rho(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i = \iiint_T y\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} z_i \rho(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i = \iiint_T z\rho(x, y, z)\, dV.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\bar{x} = \frac{\iiint_T x\rho\, dV}{\iiint_T \rho\, dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_T y\rho\, dV}{\iiint_T \rho\, dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_T z\rho\, dV}{\iiint_T \rho\, dV}, \qquad (۸)$$

که در آن شناسه‌های تابع چگالی ρ به‌خاطر اختصار حذف شده‌اند. البته، انتگرال $\iiint_T \rho\, dV$ در هر سه مخرج همان جرم M جسم است (صفحهٔ ۱۳۵۰ را به یاد آورید). لذا، می‌توان فرمولهای (۸) را به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_T x\rho\, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_T y\rho\, dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_T z\rho\, dV. \qquad (۹)$$

اگر جسم همگن باشد، چگالی ρ مقدار ثابتی دارد. در این صورت، اولیـــن فرمول (۸) به

$$\bar{x} = \frac{\rho \iiint_T x\, dV}{\rho \iiint_T dV} = \frac{\iiint_T x\, dV}{\iiint_T dV}$$

تحویل می‌شود، و به همین نحو داریم

$$\bar{y} = \frac{\iiint_T y\, dV}{\iiint_T dV}, \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_T z\, dV}{\iiint_T dV}$$

اما $\iiint_T dV = V$ ، که در آن V حجم T است؛ و لذا ،

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_T x\,dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_T y\,dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV \qquad (9')$$

(چگالی ثابت) .

در این حالت ، مرکز جرم **مرکز گون** ناحیهٔ توپر T نام دارد ، و صرفاً یک مفهوم هندسی بوده و از ایدهٔ فیزیکی جرم کاملاً مستقل است .

حالت دوبعدی . در یک‌صفحهٔ نازک یا ورقه ، به‌جای ناحیهٔ توپر T و تابع چگالی سدبعدی $\rho(x, y, z)$ یک ناحیهٔ مسطح R و تابع چگالی دوبعدی $\rho(x, y)$ داریم . پس همان استدلالها نشان می‌دهند که مرکز جرم ورقه به مختصات زیر است :

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R x\rho\,dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R y\rho\,dA, \qquad (10)$$

که در آنها $M = \iint_R \rho\,dA$ جرم کل ورقه‌است .هرگاه ورقه همگن باشد ،آنگاه‌ثابت $\equiv \rho(x, y)$ و این فرمولها به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_R x\,dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_A y\,dA \qquad (10')$$

(چگالی ثابت)

که در آن A مساحت R می‌باشد .دراین حالت مجدداً مرکز جرم را **مرکز گون** ناحیهٔ‌مسطح R می‌نامند ، و این یک مفهوم کاملاً هندسی می‌باشد .

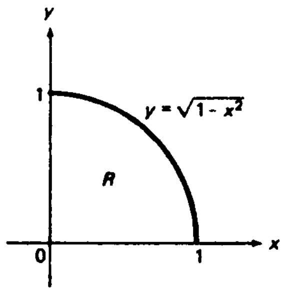
گشتاورهای یک توزیع جرم پیوسته . در جسم T یا ورقهٔ R ، مثل یک دستگاه از ذرات ، کمیات مختلفی به نام **گشتاور** داریم ، ولی به جای مجموع به صورت انتگرال می‌باشند . به طور مشخص ، $M_{yz} = \iiint_T x\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ yz ، $M_{xz} = \iiint_T y\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ xz ، و $M_{xy} = \iiint_T z\rho\,dV$ گشتاور T نسبت به صفحهٔ xy است .همچنین ، $M_y = \iint_R x\rho\,dA$ گشتاور R نسبت به محور y و $M_x = \iint_R y\rho\,dA$ گشتاور R نسبت به محور x می‌باشد . فرمولهای (۹) و (۱۰) برحسب گشتاورها خواهند شد

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

و

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

مثال ۲ . یک ورقه به شکل قطاع مستدیر R در ربع اول به محورهای مختصات و قوسی از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ محدود است (ر.ک. شکل ۲۳) . مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y})$ ورقه‌را درصورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2y$ باشد .



شکل ۲۳

حل . جرم کل ورقه عبارت است از

$$M = \iint_R \rho\, dA = \iint_R x^2y\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

گشتاور نسبت به محور x مساوی است با

$$M_x = \iint_R y\rho\, dA = \iint_R x^2y^2\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^2y^3\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1 - x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{16}t - \frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{48}\sin^3 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{96},$$

و این با جانشانی $x = \sin t$ و مثال۳ ، صفحهٔ ۶۱۷ ، به دست می‌آید . گشتاوردیگر ، نسبت به محور y ، مساوی است با

$$M_y = \iint_R x\rho\, dA = \iint_R x^3 y\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^3 y\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^3 y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

درنتیجه ،

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{15}} = \frac{5}{8} = 0.625, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{96}\pi}{\frac{1}{15}} = \frac{5\pi}{32} \approx 0.491,$$

لـــــذا ، $(\frac{5}{8}, \frac{5}{32}\pi)$ مرکز جرم ورقه بوده ، و ورقه روی یک میلهٔ قائم در این نقطه به صورت تعادل درمی‌آید . توجه کنید که ، حتی اگر ناحیهٔ R نسبت به خط $y = x$ متقارن باشـد ، $\bar{x} > \bar{y}$. این به خاطر آن است که جرم نزدیک محور x تا محور y بیشتر می‌باشد (چرا ؟) .

مثال ۳ . فرض‌کنید R همان ناحیهٔ مثال ۲ باشد . مرکز گون R را پیدا نمایید .

حل . چون تابع چگالی ثابت است ، تقارن R نسبت به خط $y = x$ تضمین می‌کندکه $\bar{x} = \bar{y}$ (ر.ک . مسئلهٔ ۴) . بنابر فرمول اول (۱۰′) ،

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_R x\, dA = \frac{4}{\pi}\iint_R x\, dA,$$

زیرا A ،یعنی مساحت‌ناحیهٔ R ، یکچهارم مساحت π محصور به‌دایرهٔ یکه‌است .بامحاسبهٔ انتگرال مضاعف ، خواهیم داشت

$$\iint_R x\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, x\, dx = \left[-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

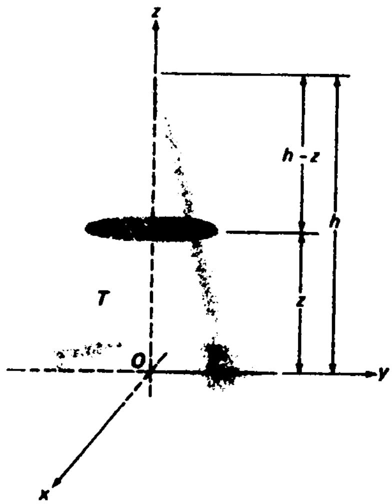
بنابراین ،

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.424,$$

و مرکز گون عبارت خواهد بود از $(4/3\pi, 4/3\pi)$.

مثال ۴ . مرکز جرم مخروط مستدیر قائم توپر T به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ a را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه از T با فاصلهٔ آن تا قاعدهٔ T متناسب باشد .

حل. با اختیار محور z در امتداد محور T و قاعدهٔ T در صفحهٔ xy ، مثل شکل ۲۴ ،داریم $\rho(x, y, z) = cz$ ، که درآن c یک‌ثابت مثبت است . چون مرکز جرم هر مقطع عرضی‌مخروط



شکل ۲۴

T با صفحه‌ای موازی صفحهٔ xy روی محور z است ،همین امر در مورد خود T صادق می‌باشد (بیشتر توضیح دهید) . بنابراین ، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ، و فقط باید

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_T z\rho\, dV}{\iiint\limits_T \rho\, dV} = \frac{c\iiint\limits_T z^2\, dV}{c\iiint\limits_T z\, dV} = \frac{\iiint\limits_T z^2\, dV}{\iiint\limits_T z\, dV} \tag{11}$$

را حساب کنیم (چون ثابت c حذف می‌شود ، مقدارش اثری بر جواب ندارد) .ساده‌ترین راه برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه استفاده از روش مقاطع عرضی است . به‌طور مشخص، فرض کنیم $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z باشد؛ یعنی ، مساحت قرص مستدیر به‌شعاع $r = r(z)$ که مقطع صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, z)$ و موازی با صفحهٔ xy با T است . بنابر تشابه‌مثلثها ،

$$\frac{r}{a} = \frac{h - z}{h},$$

درنتیجه ،

$$A(z) = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{h^2}(h - z)^2. \tag{12}$$

در این صورت ، همانطور که روش مقاطع عرضی می‌گوید که حجم مخروط T مساوی است با

$$V = \iiint_T dV = \int_0^h A(z)\,dz$$

(تحقیق کنید که از این $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ نتیجه می‌شود) ، همان روش به ما می‌گویدکه‌انتگرال تابع $f(z)$ روی T که فقط به z وابسته است مساوی است با

$$\iiint_T f(z)\,dV = \int_0^h f(z)A(z)\,dz. \qquad (۱۳)$$

برای اثبات صوریتر این ، ملاحظه می‌کنیم که T یک ناحیهٔ x-ساده‌است؛ و درواقع ،

$$T = \{(x, y, z): (y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z)\},$$

که در آن $R_{yz} = \{(y, z): 0 \le z \le h, g_1(z) \le y \le g_2(z)\}$؛توابع g_1 و g_2 بر $[0, h]$ پیوسته‌اند ، ولی k_1 و k_2 بر R_{yz} پیوسته می‌باشند (لازم نیست این توابع را مشخص کنیم ، ولی‌به‌خاطر تقارن داریم $g_1 = -g_2$ و $k_1 = -k_2$) . بنابراین ، طبق قضیهٔ ″۵ ، صفحهٔ ۱۳۲۶،

$$\begin{aligned}\iiint_T f(z)\,dV &= \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(z)\,dx \\ &= \int_0^h f(z)\left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)]\,dy\right)dz.\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

اما

$$\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)]\,dy = A(z),$$

که در آن $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z است؛ و درنتیجه ، همانطور که پیش‌بینی شد ، (۱۴) به (۱۳) تحویل می‌شود .

حال ، به محاسبهٔ $\bar{z}$ بازگشته ، از (۱۲) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\iiint_T z\,dV = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h z(h - z)^2\,dz = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3)\,dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{1}{2}h^2z^2 - \frac{2}{3}hz^3 + \frac{1}{4}z^4\right]_0^h = \frac{1}{12}\pi a^2 h^2,$$

$$\iiint_T z^2\,dV = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h z^2(h - z)^2\,dz = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h (h^2z^2 - 2hz^3 + z^4)\,dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}h^2z^3 - \frac{1}{2}hz^4 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^h = \frac{1}{30}\pi a^2 h^3,$$

و در این صورت از (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{30}\pi a^2 h^3}{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2} = \frac{2}{5}h.$$

لذا، $(0, 0, \frac{2}{5}h)$ مرکز جرم مخروط T می‌باشد.

مثال ۵. فرض کنیم T همان مخروط توپر مثال ۴ ولی با چگالی ثابت باشد. مرکز گون T را پیدا نمایید.

حل. مثل قبل بنابر تقارن داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$، ولی، طبق فرمول سوم (۹′)،

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV.$$

حجم T مساوی است با $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ و، همانطور که اینک نشان دادیم،

$$\iiint_T z\,dV = \frac{1}{12}\pi a^2 h^2,$$

بنابراین،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{1}{4}h,$$

و مرکز گون مساوی $(0, 0, \frac{1}{4}h)$ می‌باشد. چرا مرکز گون از مرکز جرم به دست آمده در مثال ۴ پایین‌تر است؟

مسائل

۱. دستگاهی از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 6$، $m_2 = 1$، $m_3 = 2$، و $m_4 = 5$ با بردارهای موضع $\mathbf{r}_1 = (0, 3, 4)$، $\mathbf{r}_2 = (-1, 0, 6)$، $\mathbf{r}_3 = (2, -1, 1)$، و $\mathbf{r}_4 = (5, 8, 0)$ تشکیل شده‌است. گشتاورهای M_{xy}، M_{xz}، و M_{yz} دستگاه را نسبت به صفحات مختصات و نیز مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ آن را بیابید.

۲. فرض کنید $\bar{\mathbf{r}}_1$ و $\bar{\mathbf{r}}_2$ بردارهای موضع مراکز جرم دو دستگاه از ذرات S_1 و S_2 باشند. نشان دهید که بردار موضع دستگاه S حاصل از تلفیق S_1 و S_2 عبارت است از

$\bar{\mathbf{r}} = (M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2)/M$ ، که در آن M_1، M_2، و M جرمهای کل دستگاههای S_1 ، S_2، و S می‌باشند.

۳. کودکی به وزن 50 lb از انتهای یک تختهٔ صاف به‌طول 12 ft و وزن 25 lb واقع روی یک حوض یخ‌زده به طرف دیگر می‌رود. برای تخته چه رخ می‌دهد؟ یخ لیز است، ولی بین کفشهای کودک و تخته کشش وجود دارد.

۴. نشان دهید هرگاه ناحیهٔ توپر T نسبت به صفحهٔ Π متقارن باشد، آنگاه مرکز گون T بر Π واقع است. نشان دهید هرگاه ناحیهٔ مسطح R نسبت به خط L متقارن باشد، آنگاه مرکز گون R بر L واقع می‌باشد.

۵. فرض کنید ناحیهٔ مسطح R به مساحت A به دو زیر ناحیهٔ R_1 و R_2 به مساحت A_1 و A_2 بدون نقطهٔ درونی مشترک مثل شکل ۸، صفحهٔ ۱۳۲۴، تجزیه شده باشد. نشان دهید هرگاه مرکز گونهای R ، R_1 ، و R_2 مساوی $(\bar{x}, \bar{y})$ ، $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ، و $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ باشند، آنگاه

$$\bar{x} = \frac{1}{A}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2), \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2).$$

نشان دهید که اگر R ورقه‌ای به چگالی متغیر باشد، مختصات مرکز جرم ورقه از همین فرمولها به وسیلهٔ تعویض A ، A_1 ، و A_2 با M ، M_1 ، و M_2 ، یعنی جرمهای R ، R_1 ، و R_2 به دست می‌آیند.

۶. مشابه مسئلهٔ ۵ را برای یک ناحیهٔ توپر و برای یک جسم توپر با چگالی متغیر بیان و اثبات نمایید.

۷. فرض کنید R ناحیهٔ مسطح محدود به خطوط $x = a$ و $x = b$ ، محور x ، و منحنی $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ باشد، که f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که مرکز گون R نقطه‌ای است به مختصات

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2\,dx, \qquad \text{(یک)}$$

که در آنها $A = \int_a^b f(x)$ مساحت R می‌باشد.

۸. مثال ۲ را درصورتی حل کنید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد.

مرکزگون ناحیهٔ مسطح R محدود به منحنیهای زیر را بیابید.

۹. سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$

۱۰. منحنی $y = 1 - x^3$ و محورهای مختصات

۱۱. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ و محورهای مثبت مختصات

۱۲. بخشی از منحنی $y = \cos x$ از $x = -\pi/2$ تا $x = \pi/2$ و محور x

۱۳. دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

۱۴. منحنی $y = \sin x$ و خط $y = 2x/\pi$

۱۵. منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای مختصات

۱۶. منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ و محورهای مثبت مختصات

۱۷. مرکز گون ناحیهٔ بی‌کران R زیر منحنی $y = e^x$ در ربع دوم را با یک انتگرال مجازی پیدا کنید.

۱۸. گشتاور اول یک قرص مستدیر به شعاع a را نسبت به یکی از خطوط مماسش بیابید.

۱۹. یک جعبهٔ مکعب شکل به طول یال $2\ \mathrm{ft}$ سر ندارد. مرکز گون آن کجاست؟

۲۰. نشان دهید که نیروی F وارد بر یک صفحهٔ قائم شناور R عبارت است از $F = \delta A h$، که در آن δ چگالی وزن مایع، A مساحت R، و h عمق مرکز گون R زیر سطح مایع می‌باشد.

راهنمایی. بحث مربوطه در بخش ۷.۸ را به یاد آورید.

مرکز جرم جسم محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$، $y = 2$، و $y + z = 4$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد.

۲۱. $\rho(x, y, z) \equiv 16$

۲۲. $\rho(x, y, z) = x$

۲۳. $\rho(x, y, z) = xy$

۲۴. $\rho(x, y, z) = xyz$

مرکز گون ناحیهٔ توپر T محدود به سطوح زیر را بیابید.

۲۵. استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$، صفحهٔ $x = 0$، و صفحهٔ $x + z = 2$ (ر.ک. مثال ۳، صفحهٔ ۱۳۴۶)

۲۶. صفحهٔ $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات

۲۷. کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵، صفحهٔ ۱۳۵۳)

۲۸. سهمی گون دوار $x^2 + y^2 = 2z$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (ر.ک. مسئلهٔ ۲۲، صفحهٔ ۱۳۵۴)

۲۹. بیضی گون $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ و صفحات مختصات در یکهشت اول.

۳۰. سهمی گون هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در یکهشت اول.

۳۱. مرکز جرم جسم T در مسئلهٔ ۲۷ اگر تابع چگالی $\rho(x, y, z) = z$ باشد.

۳۲. بشکه‌ای به شکل ناحیهٔ توپر T و یا حجم V از مایعی به چگالی ρ پر شده‌است. نشان دهید کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه مساوی کار لازم برای بالا بردن یک " ذرهٔ معادل " به جرم ρV از مرکز گون T به بالاترین نقطهٔ T است.

راهنمایی. مثال ۲، صفحهٔ ۷۶۰، را به یاد آورید.

۴.۱۴ مطالب دیگر در باب مرکز گون؛ قضایای پاپوس

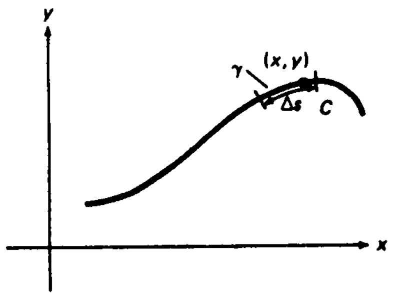
در بخش پیش طرز یافتن مرکز جرم یک جسم سه‌بعدی یا یک ورقهٔ مسطح را نشان دادیم. یک مسئلهٔ مربوط یافتن مرکز جرم سیمی به چگالی متغیر است. فرض کنیم سیم به شکل منحنی مسطح C به معادلات پارامتری زیر باشد:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

که در آن C بیش از تعدادی متناهی خودقطعی نداشته باشد. همچنین، C *هموار* باشد، بدین معنی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ مشتقات پیوستهٔ $x'(t)$ و $y'(t)$ صادق در شرط $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ داشته باشند. در این صورت، C با طول متناهی بوده و طولش مساوی

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

است (ر.ک. صفحهٔ ۷۴۱)، و هر قوس C نیز با طول متناهی می‌باشد. فرض‌کنیم γ قوسی از C شامل نقطهٔ (x, y) از C بوده (ر.ک. شکل ۲۵)، و Δs را طول و Δm را جرم γ می‌گیریم.



شکل ۲۵

در این صورت، طبق تعریف،

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$$

تابع چگالی C در (x, y) است‌که با واحدهایی چون گرم برسانتیمتر سنجیده می‌شود. هدف آن است که به‌کمک تابع $\rho(x, y)$، که پیوسته فرض شده، جرم کل سیم C و مرکز جرم آن‌را تعیین کنیم.

برای این کار، فرض‌کنیم نقاط $t_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ افرازی از بازهٔ $[a, b]$ به‌اندازهٔ مش μ باشد؛ درنتیجه، $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ و $\mu = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\}$، که در آن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیربازهٔ i م $[t_{i-1}, t_i]$ است. در این صورت،

نقاط نظیر

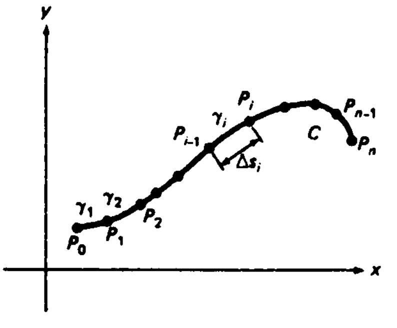
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

سیم C را به n قوس

$$\gamma_i = \widehat{P_{i-1}P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

تقسیم می‌کنند (ر.ک. شکل ۲۶) ، که در آن γ_i طول

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$



شکل ۲۶

می‌باشد. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها (قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۳۹۱) ، نقطه‌ای مانند τ_i در $[t_{i-1}, t_i]$ وجود دارد به طوری که

$$\Delta s_i = \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i.$$

فرض کنیم

$$Q_i = (x_i, y_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

نقطهٔ نظیر به مقدار پارامتر τ_i باشد. در این صورت ، قوس γ_i را می‌توان ذره‌ای به جرم

$$\Delta m_i \approx \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\, \Delta s_i = \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i$$

گرفت که در نقطهٔ Q_i قرار دارد. لذا ، مرکز جرم C ، با تقریبی مناسب ، مرکز جرم دستگاه ذرات $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ می‌باشد. بنابراین ، مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y})$ از C را موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات ، وقتی $\mu \to 0$ ، تعریف می‌کنیم ؛ یعنی ،

$$\bar{x} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, \Delta m_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x(\tau_i)\rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i}{\lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i},$$

$$\bar{y}=\frac{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,\Delta m_i}{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i}=\frac{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} y(\tau_i)\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i}{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i}.$$

هر یک از مجموعهای شامل ρ یک مجموع ریمان است که ، وقتی $\mu\to 0$ ، بـه انتگرال معینی نزدیک می‌شود . در واقع ،

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i$$
$$=\int_a^b \rho(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,$$
$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\tau_i)\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i$$
$$=\int_a^b x(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,$$
$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}y(\tau_i)\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i$$
$$=\int_a^b y(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

این سه انتگرال را به صورت خلاصهٔ

$$\int_C \rho(x,y)\,ds,\qquad \int_C x\rho(x,y)\,ds,\qquad \int_C y\rho(x,y)\,ds$$

نشان داده ، و معمولا " *انتگرالهای خط* ، یا به‌طور دقیقتر ، انتگرالهای خـط در امتـداد منحنی C نسبت به *طول قوس* s می‌نامند[1] . برای درک نمادگذاری ، به یاد آورید که

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

دیفرانسیل تابع طول قوس

$$s=s(t)=\int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2+[y'(u)]^2}\,du$$

است ، که طول قوس C با نقطهٔ شروع ثابت $P(a)=(x(a),y(a))$ و نقطـهٔ پـایان متغیر

---

۱ . نام بهتر " *انتگرالهای منحنی‌الخط* " است ؛ یعنی ، *انتگرالها در امتداد منحنیها* . نوع دیگری انتگرال خط وجود دارد ، نسبت به مختصات x و y ، که در بخش ۱۵ ۱۰ معرفی خواهد شد .

$P(t) = (x(t), y(t))$ را به ما می‌دهد. عبارات مربوط به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز جرم سیم خمیدهٔ C با تابع چگالی $\rho = \rho(x, y)$ برحسب انتگرالهای خط به شکل فشردهٔ زیر درمی‌آیند:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho\, ds}{\int_C \rho\, ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_C y\rho\, ds}{\int_C \rho\, ds}. \tag{۱}$$

البته، انتگرال $\int_C \rho\, ds$ در هر دو مخرج جرم کل M سیم است. لذا، می‌توان فرمولهای (۱) را به‌طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\rho\, ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\rho\, ds.$$

اگر سیم همگن باشد، چگالی ρ ثابت است. در این صورت، فرمولهای (۱) فوراً به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\, ds}{\int_C ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_C y\, ds}{\int_C ds}.$$

اما $\int_C ds = L$، که در آن L طول C است؛ و لذا،

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_C x\, ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y\, ds \qquad (\text{چگالی ثابت}) \tag{۲}$$

در این حالت مرکز جرم **مرکزگون** نام دارد، و صرفاً یک مفهوم هندسی است. لذا، از مرکزگون منحنی C صحبت می‌کنیم، که لازم نیست سیم جرمدار تصور شود.

مثال ۱. فرض کنید C منحنی زیر باشد:

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi/2),$$

یعنی، قوسی از دایرهٔ یکه که در ربع اول قرار دارد. مرکز جرم یک سیم به شکل C را در صورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x$ باشد.

حل. در اینجا داریم

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = dt,$$

و درنتیجه، بنابر (۱)،

$$\bar{x} = \frac{\int_C x^2\,ds}{\int_C x\,ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_C yx\,ds}{\int_C x\,ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt}.$$

با محاسبهٔ انتگرالها، معلوم می‌شود که

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

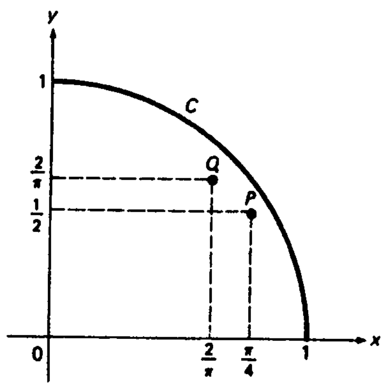
$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

و لذا،

$$\bar{x} = \frac{\pi}{4}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، مرکز جرم سیم نقطهٔ $P = (\pi/4, 1/2)$ نموده شده در شکل ۲۷ است. توجه کنید که مرکز جرم روی‌سیم واقع نیست (بندرت واقع است). برای $\bar{y} < \bar{x}$ دلیل فیزیکی بیاورید.



شکل ۲۷

مثال ۲. فرض کنید C همان قوس مستدیر مثال قبل باشد. مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. قوس به طول $\pi/2$ است؛ و لذا، طبق (۲)،

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_C x\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\sin t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt = -\frac{2}{\pi}\cos t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

پس مرکز گون قوس نقطهٔ $Q = (2/\pi, 2/\pi)$ شکل ۲۷ می‌باشد. چرا انتظار $\bar{y} = \bar{x}$ می‌رود؟

اگر C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

باشد، فرمولهای (۱) و (۲) را می‌توان با $\rho = \rho(x, y, z)$ و

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

به کار برد، ولی در اینجا (به آسانی می‌توان ثابت کرد) فرمول اضافی

$$\bar{z} = \frac{\int_C z\rho\,ds}{\int_C \rho\,ds} = \frac{1}{M}\int_C z\rho\,ds$$

برای مختص z مرکز جرم وجود دارد، که در صورت ثابت بودن ρ به شکل

$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_C z\,ds$$

درمی‌آید.

مثال ۳. فرض کنید C منحنی

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

باشد؛ یعنی، نیمدور یک مارپیچ مستدیر به شعاع یک و پای 2π (ر.ک. مثال ۲، صفحهٔ ۱۱۷۵). مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. چون

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{2}\,dt,$$

منحنی C به طول $L = \int_0^\pi \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\pi$ می‌باشد. لذا، مختصات مرکز گون عبارتند از

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^\pi x\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\sin t\Big|_0^\pi = 0,$$

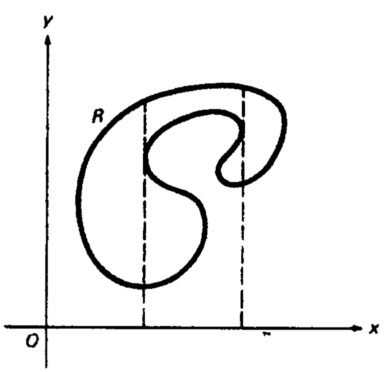
$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} y\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos t\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi},$$
$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} z\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}t^2\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{z}$ را می‌توان از تقارن C ، بدون محاسبه ، حدس زد (بیشترتوضیح دهید) .

قضایای پاپوس. بررسی مرکز گونها را ادامه داده ، یک جفت قضیهٔ مرتبط ثابت می‌کنیم که صورتهای جدید نتایجی هستند که از قدیم معلوم بوده‌اند . در واقع ، آنها را می‌توان در کتاب هفتم ریاضیدان بزرگ یونان ،پاپوس اسکندری ، که حوالی 320 بعداز میلاد نوشته‌شده است یافت .

قضیهٔ ۶ (قضیهٔ پاپوس برای یک جسم دوار) . *فرض کنیم T جسم حاصل از دوران ناحیهٔ مسطح R به مساحت A حول محوری در صفحهٔ آن بوده ، و محور از هیچ نقطهٔ درونی R نگذشته باشد . دراین صورت ، V ، یعنی حجم T ، مساوی‌است با حاصلضرب A در مسافت پیموده شده توسط مرکز گون C .*

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود ، می‌توان فرض کرد R در نیمهٔ بالایی صفحهٔ xy واقع بوده و محور x محور دوران آن باشد . همچنین ، فرض کنیم (برای تمام نواحی آمده در مسائل عملی برقرار است) ناحیهٔ R به‌طور قائم ساده باشد یا آنکه بتوان آن‌را با رسم خطوطی موازی محور y ، مثل شکل ۲۸ ، به تعدادی متناهی ناحیهٔ به‌طور قائم ساده افراز کرد .فرض‌کنیم R به‌طور قائم ساده‌باشد ؛ درنتیجه ، $R=\{(x, y): a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$



شکل ۲۸

که در آن توابع f و g بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی‌اند . در این صورت ، طبق فرمول (۲) ، صفحهٔ ۷۱۲ ، جسم T حاصل از دوران R حول محور x به حجم

$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx \tag{۳}$$

خواهد بود . ولی مختص y مرکزگون R عبارت است از

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_R y\, dA = \frac{1}{A} \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} y\, dy$$

$$= \frac{1}{A} \int_a^b \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{g(x)}^{f(x)} dx = \frac{1}{2A} \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

(فرمول(۱۵′) ، صفحهٔ۱۳۶۱، را به یاد آورید) یا معادلا "

$$\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx = 2A\bar{y}. \tag{۴}$$

حال با گذاردن (۴) در (۳) نتیجه می‌شود

$$V = A(2\pi\bar{y}), \tag{۵}$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ مسافت پیموده شده توسط مرکز گون R در یک دوران حول محور x است . این قضیه را برای حالتی که R به‌طور ساده قائم است ثابت می‌کند .

اگر R به‌طور قائم ساده نباشد ،آن را با رسم خطوطی موازی محور y به زیرناحیه‌های به‌طور قائم سادهٔ $R_1, \ldots, R_n$ افرازمی‌کنیم که مرکز گونهایشان دارای مختصات y ی‌مساوی $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ باشند . فرض‌کنیم A_i مساحت R_i بوده ، و V_i حجم جسم حاصل از دوران R_i حول محور x باشد . در این صورت ، طبق فرمول (۵) ، که بر هر زیر ناحیهٔ R_i اعمال‌شود،

$$V = V_1 + \cdots + V_n = A_1(2\pi\bar{y}_1) + \cdots + A_n(2\pi\bar{y}_n).$$

ولی

$$\bar{y}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{R_i} y\, dA \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

و لذا ، به کمک قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ۱۳۲۳،

$$V = V_1 + \cdots + V_n = 2\pi \iint_{R_1} y\, dA + \cdots + 2\pi \iint_{R_n} y\, dA$$

$$= 2\pi \iint_R y\, dA = 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \iint_R y\, dA = A(2\pi\bar{y}),$$

درنتیجه، فرمول (۵) برای تمام ناحیهٔ R برقرار است.

قضیهٔ ۷ (قضیهٔ پاپوس برای سطح دوار). فرض‌کنیم S سطح *حاصل از دوران* منحنی مسطح *سادهٔ* C به *طول* L حول محوری *در صفحه‌اش* بوده، و C *از* محور نگذرد. *در این* صورت، A، *یعنی مساحت* S، مساوی *حاصل ضرب* L در مسافت پیموده شده به وسیلهٔ مرکز گون C *می‌باشد*.

برهان. مجدداً، فرض قرار داشتن C در نیمهٔ بالایی صفحهٔ xy و گرفتن محور x به‌عنوان محور دوران خللی به کلیت وارد نمی‌سازد. فرض کنیم C به معادلات پارامتری‌زیر باشد:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیرند. در این صورت، طبق فرمول (۱) صفحهٔ ۷۵۰،

$$A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

که آن را می‌توان به طور فشرده‌تر

$$A = 2\pi \int_C y\, ds \tag{۶}$$

و برحسب انتگرال خط نسبت به طول قوس s نوشت. اما، طبق ۲، مختص y مرکز گون C مساوی است با

$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y\, ds,$$

یا معادلاً

$$\int_C y\, ds = L\bar{y}. \tag{۷}$$

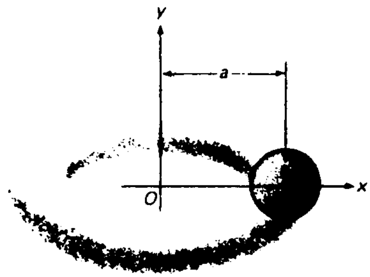
حال با گذاردن (۷) در (۶) نتیجه می‌شود

$$A = L(2\pi\bar{y}),$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ فاصلهٔ پیموده شده توسط مرکز گون C است. (در اینجا C هموارفرض شده است، ولی اگر C "قطعه قطعه هموار"، به صورت تعریف شده در صفحهٔ ۱۴۳۹، هم باشد، قضیه برقرار خواهد ماند).

مثالهای زیر موارد استعمال قضایای پاپوس را توضیح می‌دهند .

مثال ۴ . حجم V چنبره‌ٔ حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحه‌ٔ آن که با قرص متقاطع نیست را بیابید (ر.ک. شکل ۲۹) .



شکل ۲۹

حل . فرض کنیم r شعاع قرص بوده ، و a فاصله‌ٔ عمودی مرکز قرص تا محور باشد . واضح‌است که مرکز گون قرص به‌خاطر تقارن مرکز آن بوده ، و مساحت قرص πr^2 است . لذا ، طبق قضیه‌ٔ ۶ ،

$$V = \pi r^2(2\pi a) = 2\pi^2 r^2 a.$$

ما قبلاً ، با استفاده از روش واشرها ، همین جواب را در مثال ۴ ، صفحه‌ٔ ۷۱۴ ، به دست آورده‌ایم .

مثال ۵ . مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیه‌ٔ نیمه مستدیر $x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0$ به شعاع r را بیابید .

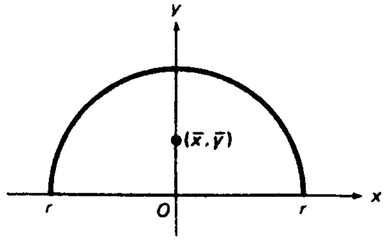
حل . بنابر تقارن ، $\bar{x} = 0$. برای یافتن $\bar{y}$ ، ملاحظه می‌کنیم که ناحیه به مساحت $\frac{1}{2}\pi r^2$ است ، و از دوران آن حول محور x کره‌ٔ توپری به حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ تولید می‌شود . پس از قضیه‌ٔ ۶ معلوم می‌شود که

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2(2\pi\bar{y}),$$

که ایجاب می‌کند که

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.42r.$$

در شکل ۳۰ ، جای مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ نموده شده است .



شکل ۳۰

مثال ۶. مساحت A ی چنبرهٔ مثال ۴ را بیابید.

حل. بنابر تقارن، مرکز گون دایرهٔ مولد سطح در مرکزش قرار دارد، و طول (محیط) دایره $2\pi r$ است. لذا، طبق قضیهٔ ۷،

$$A = 2\pi r(2\pi a) = 4\pi^2 ra,$$

که در آن a فاصلهٔ عمودی مرکز دایره تا محور دوران می‌باشد. همین جواب در مثال ۲، صفحهٔ ۷۵۳، با محاسبهٔ مستقیم به دست آمد.

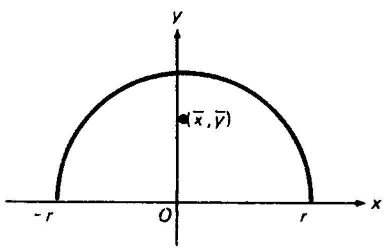
مثال ۷. مرکز گون قوس نیمه مستدیر $x^2 + y^2 = r^2,\ y \geq 0$ به شعاع r را بیابید.

حل. مثل مثال ۵، طبق تقارن داریم $\bar{x} = 0$، ولی در اینجا سروکارمان با منحنی است تا ناحیه. برای یافتن $\bar{y}$، ملاحظه می‌کنیم که از دوران نیمدایره به طول πr حول محور x کره‌ای به مساحت $A = 4\pi r^2$ تولید می‌شود. پس از قضیهٔ ۷ نتیجه می‌شود که

$$A = 4\pi r^2 = \pi r(2\pi \bar{y}),$$

ایجابگر آنکه

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} \approx 0.64\ r.$$



شکل ۳۱

در شکل ۳۱ ، جای مرکز گون نشان داده شده است . چرا مرکز گون این قوس از مرکز گون ناحیهٔ شکل ۳۰ با قوسی که قسمتی از مرزش است بالاتر است .

مسائل

۱. مرکز گون منحنی

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \theta \le 2\pi)$$

را ، که قوس مستدیری به شعاع یک و زاویهٔ مرکزی θ است ، بیابید .

۲. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$y = \ln x \qquad (\tfrac{1}{2} \le x \le 2)$$

را درصورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2$ باشد .

۳. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi/2)$$

(یک قوس بیضوی) را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y) = y$ باشد .

۴. مرکز گون منحنی

$$y = \cosh x \qquad (0 \le x \le \ln 2)$$

را پیدا کنید .

جرم کل M و مرکز جرم $\bar{x}$ توزیع جرم روی محور x نامنفی با تابع چگالی داده شده را بیابید .

۵. $\rho(x) = 1/(x^2 + 1)$ ۶. $\rho(x) = e^{-x}$

۷. $\rho(x) = e^{-x^2}$ ۸. $\rho(x) = xe^{-x}$

راهنمایی . کمیات M و $\bar{x}$ به طور طبیعی با انتگرالهای مجازی

$$M = \int_0^{\infty} \rho(x)\,dx, \qquad \bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^{\infty} x\rho(x)\,dx$$

تعریف شده‌اند .

۹. به کمک مثال ۵ ، صفحهٔ ۷۴۵ ، مرکز گون قوس ستاره‌گون $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ در ربع اول را پیدا کنید .

۱۰. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad z = 4t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

(یک دور از مارپیچ مستدیر) را درصورتی بیابید که تابع چگالی مساوی $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ باشد .

۱۱. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = t, \qquad y = \tfrac{1}{2}t^2, \qquad z = \tfrac{1}{3}t^3 \qquad (0 \le t \le 1)$$

(یک مکعبی پیچ خورده) را درصورتی بیابید که تابع چگالی‌اش $\rho(x, y, z)=\sqrt{2y}$ باشد.

۱۲. با استفاده از انتگرالهای مجازی، مرکز گون منحنی

$$x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t, \quad z = e^{-t} \quad (0 \le t < \infty)$$

را پیدا کنید.

با استفاده از قضیهٔ ۶، حجم جسم حاصل از دوران هر یک از نواحی زیر را حول محور x پیدا نمایید.

۱۳. ناحیهٔ مسئلهٔ ۹، صفحهٔ ۱۳۶۷.

۱۴ تا ۱۶. نواحی مسائل ۱۴ تا ۱۶، صفحهٔ ۱۳۶۸.

۱۷. حجم جسم حاصل از دوران یک ناحیهٔ مستطیلی به طول 4 و عرض 3 را حول محوری در صفحه‌اش که از رأس P ناحیه گذشته و بر قطر با نقطهٔ انتهایی P عمود است پیدا نمایید.

۱۸. یک مربع حول محوری در صفحه‌اش که آن را فقط در یکی از رئوس قطع می‌کند دوران یافته است. مساحت سطح دوار حاصل به ازای چه موضعی از محور ماکزیمم است؟

۱۹. در مسئلهٔ ۱، صفحهٔ ۷۵۷، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$x = t^3, \qquad y = \tfrac{3}{2}t^2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

حول محور x مساوی است با $A = \frac{6}{5}(\sqrt{2} + 1)\pi$. با استفاده از این و قضیهٔ ۷، $\bar{y}$، یعنی عرض مرکز گون منحنی، را بیابید.

۲۰. در مسئلهٔ ۱۵، صفحهٔ ۷۵۷، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$y = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^{-1} \qquad (1 \le x \le \sqrt{2})$$

حول محور x برابر است با $A = \frac{47}{72}\pi$. با استفاده از این و قضیهٔ ۷، $\bar{y}$، یعنی عرض مرکز گون منحنی، را بیابید.

۲۱. با دو بار استفاده‌از قضیهٔ ۶، مرکز گون ناحیهٔ مثلثی R محدود به‌محورهای‌مختصات و خط

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a > 0, b > 0)$$

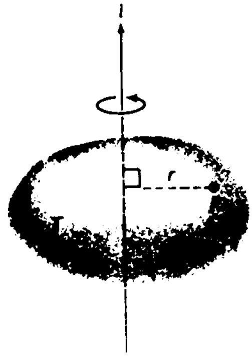
را بیابید.

۲۲. ستاره‌گون $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ حول‌محوری ماربر نقاط $(a, 0)$ و $(0, a)$ دوران‌می‌کند.

با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V ناحیهٔ سه‌بعدی حاصل و مساحت A ی سطحش را بیابید.

۵.۱۴ گشتاورهای ماند

فرض کنیم جسم جامد T با تندی زاویه‌ای ω حول محور l، و طبق شکل ۳۲، دوران کند.



شکل ۳۲

در این صورت، نقطهٔ P در T با تندی انتقالی $v = r\omega$ حرکت می‌کند، که در آن r فاصلهٔ P تا l است (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۰۸). لذا، اگر P را ذره‌ای به جرم m بگیریم، انرژی جنبشی P مساوی است با

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2$$

(ر.ک. صفحهٔ ۴۲۹). به‌طورکلی، فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ دستگاهی مرکب از n ذره در T به جرمهای $m_1, m_2, \ldots, m_n$ باشد. در این صورت، انرژی جنبشی کل K ی دستگاه، ناشی از دوران حول l، مساوی است با

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2,$$

که در آن r_i فاصلهٔ P_i تا l می‌باشد. بنابراین،

$$K = \frac{1}{2} I_l \omega^2,$$

برحسب کمیت

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \qquad (1)$$

گشتاور ماند دستگاه **حـــول** l نام دارد. این کمیت در بررسی مسائل دینامیک مربوط به دوران اهمیتی اساسی دارد. اگر جرم به کیلوگرم (kg) و فاصله به متر (m) باشد، واحد فیزیکی گشتاورهای ماند $kg\text{-}m^2$ میباشد. مثلاً، گشتاور ماند زمین نسبت به محور قطبی خود تقریباً $8 \times 10^{37}\ kg\text{-}m^2$ است.

حال باید بتوانید طرز تعریف گشتاور ماند تمام جسم T، به عنوان یک ناحیهٔ سه بعدی (نرمال) که بر آن چگالی جرم پیوستهٔ $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ تعریف شده است، را نسبت به l تعریف‌کنید. فرض‌کنیم T طبق معمول (با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات) به n زیر ناحیهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ افراز شده باشد، μ را اندازهٔ مش افراز گرفته، و P_i را نقطهٔ دلخواهی در T_i می‌گیریم. دراین‌صورت، T_i را می‌توان ذره‌ای به‌جرم $\Delta m \approx \rho(P_i)\, \Delta V_i$ گرفت که در P_i قرار دارد، و اگر μ کوچک باشد، گشتاور ماند T، با تقریبی مناسب، همان گشتاور ماند دستگاه مرکب از n ذرهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ میباشد. لذا، گشتاور ماند I_l از T حـــول l را حد گشتاور ماند این دستگاه از ذرات نسبت به l، وقتی $\mu \to 0$، تعـــریف می‌کنیم؛ یعنی، به کمک (۱)، قرار می‌دهیم

$$I_l = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} r^2(P_i)\, \Delta m_i = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} r^2(P_i) \rho(P_i)\, \Delta V_i,$$

که در آن $r = r(P) = r(x, y, z)$ فاصلهٔ نقطهٔ P تا محور دوران l میباشد. چـــون مجموع سمت راست یک مجموع ریمان تابع $r^2(P)\rho(P)$ بر T است، نتیجه می‌شود که

$$I_l = \iiint_T r^2(P) \rho(P)\, dV,$$

یا به‌طور فشرده‌تر،

$$I_l = \iiint_T r^2 \rho\, dV. \qquad (۲)$$

در ورقهٔ R درصفحهٔ xy به‌چگالی $\rho = \rho(x, y)$، البته تعریف مناسب I_l عبارت‌است از

$$I_l = \iint_R r^2 \rho\, dA, \qquad (۲')$$

که در آن انتگرال سه‌گانه در (۲) باانتگرال مضاعف عوض شده است. در اینجا $r = r(x, y)$ فاصلهٔ نقطهٔ متغیر (x, y) از R تا محور l است.

با انتخابهای متفاوتی‌از l گشتاورهای ماند مختلفی به‌دست می‌آیند. در مورد جسم

T ، داریم $r=\sqrt{y^2+z^2}$ اگر l محور x باشد ، $r=\sqrt{x^2+z^2}$ اگر l محور y باشـد ، و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ اگر l محور z باشد؛ درنتیجه ،

$$I_x=\iiint_T (y^2+z^2)\rho\, dV,$$

$$I_y=\iiint_T (x^2+z^2)\rho\, dV, \qquad (۳)$$

$$I_z=\iiint_T (x^2+y^2)\rho\, dV.$$

در مورد ورقهٔ R ، داریم $r=|y|$ اگر l محور x باشد ، $r=|x|$ اگـر l محـور y بـاشد ، و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ اگر l محور z باشد؛ درنتیجه ،

$$I_x=\iint_R y^2\rho\, dA,$$

$$I_y=\iint_R x^2\rho\, dA, \qquad (۴)$$

$$I_z=\iint_R (x^2+y^2)\rho\, dA.$$

چون $\sqrt{x^2+y^2}$ فاصلهٔ P تا مبداء ، و نیز فاصلهٔ P تا محور z است ، I_z را اغلب بـا I_O نشان داده و آن را **گشتاور ماند قطبی** می‌نامند (این اصطلاح فقط در مورد ورقه‌ها به کار می‌رود) . توجه کنید که $I_O \doteq I_z = I_x + I_y$.

شعاع چرخش. طبق معمول ،

$$M=\iint_R \rho(x,y)\, dA$$

جرم کل ورقهٔ R بوده ، و

$$M=\iiint_T \rho(x,y,z)\, dV$$

جرم کل جسم T می‌باشد . می‌توان برحسب M نوشت

$$I_x=Mk_x^2,$$

که در آن

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}.$$

لذا، گشتاورماند I_x از R یا T نسبت‌به‌محور x همان‌گشتاورماند "ذرهٔ‌معادل "به‌جرم M است که فاصله‌اش تا محور x مساوی k_x می‌باشد. کمیت k_x **شعاع چرخش** R یا T نسبت‌به‌محور x نام دارد. به همین نحو، شعاعهای چرخش یک ورقه یا جسم جامد نسبت به محورهای y و z عبارتند از

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}, \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}.$$

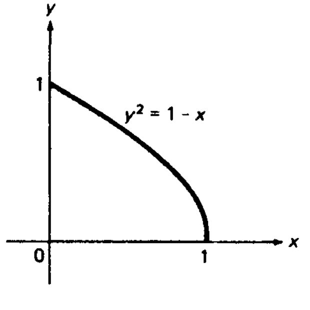
در مورد ورقه، فرمول اخیر صورت دیگر زیر را نیز دارد:

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}},$$

که در آن $k_O = k_z$ **شعاع چرخش قطبی** نامیده می‌شود.

همچنین، می‌توان از گشتاور ماند یا شعاع چرخش یک صفحه یا **ناحیهٔ** جامد، به‌جای یک ورقهٔ مسطح یا جسمی جامد سخن گفت. منظور ما از این یعنی گشتاور ماند یا شعاع چرخش با تابع چگالی $\rho(x, y)$ یا $\rho(x, y, z)$ که متحد 1 بوده و واحد سنجش آن جرم بر واحد مساحت یا حجم می‌باشد.

مثال ۱. گشتاورهای ماند و شعاع چرخش یک صفحه به چگالی $\rho(x, y) = y$ به شکل ناحیهٔ R محدود به محورهای مثبت مختصات و سهمی $y^2 = 1 - x$ (ر.ک. شکل ۳۳) را حول محورهای x و y پیدا نمایید.



شکل ۳۳

حل . بنابر دو فرمول اول (۴) ،

$$I_x = \iint\limits_R y^2\rho\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y^3\, dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$I_y = \iint\limits_R x^2\rho\, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} x^2 y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

چون جرم صفحه مساوی است با

$$M = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

مثال ۲ . گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش ناحیهٔ R به مساحت πab محصور بـه بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را حول محورهای x و y بیابید . همچنین ، گشتاور مانـد قطبـی و شعاع چرخش قطبی R را پیدا نمایید .

حل . در اینجا $\rho(x, y) \equiv 1$ ، و با استفاده از تقارن R ، داریم

$$I_x = \iint\limits_R y^2\, dA = 4\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} y^2\, dy = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx,$$

$$I_y = \iint\limits_R x^2\, dA = 4\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} x^2\, dy = \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

با جانشانی $x = a\cos t$ ، به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، صفحهٔ ۶۱۴ ، به دست می‌آوریم

$$I_x = \frac{4ab^3}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, dt = \frac{4ab^3}{3}\,\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi ab^3}{4},$$

و

$$I_y = 4a^3b\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = 4a^3b\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

(این انتگرال در حل مثال ۵، صفحهٔ ۱۳۳۳، محاسبه شد) . چون جرم ناحیه برابر است با $M = \pi ab$ ، شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{b}{2}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{2}.$$

برای به دست آوردن گشتاور ماند قطبی I_O ، ملاحظه می‌کنیم که

$$I_O = I_z = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2).$$

لذا، شعاع چرخش قطبی مساوی است با

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

اگر $a = b$ ، بیضی به دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحویل یافته، و این فرمولها به

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \qquad I_O = \frac{\pi a^4}{2}$$

و

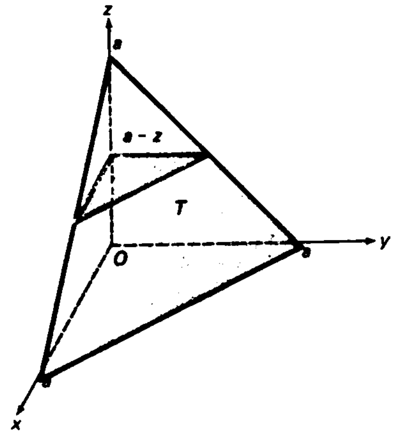
$$k_x = k_y = \frac{a}{2}, \qquad k_O = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ساده می‌شوند.

مثال ۳. گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش چهاروجهی T در یکهشت اول و محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = a$ که $a > 0$ (ر.ک. شکل ۳۴) را حول‌محورهای مختصات پیدا نمایید.

حل. با فرض $\rho(x, y, z) \equiv 1$ در (۳) ، معلوم می‌شود که گشتاورهای ماند عبارتنداز

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,dV, \qquad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,dV, \qquad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,dV,$$



شکل ۳۴

که در آن ، به دلیل تقارن T ،

$$\iiint_T x^2\,dV = \iiint_T y^2\,dV = \iiint_T z^2\,dV.$$

مقطع عرضی T در z ، یعنی فصل مشترک صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, z)$ و موازی صفحهٔ xy با T ، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول ساق $a - z$ و مساحت $A(z) = \frac{1}{2}(a - z)^2$ است . لذا ، طبق روش مقاطع عرضی ،

$$\iiint_T z^2\,dV = \int_0^a z^2 A(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^a z^2(a - z)^2\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}a^2z^3 - \frac{1}{2}az^4 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^a = \frac{1}{60}a^5.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}a^5.$$

جرم چهاروجهی عبارت است از

$$M = \frac{1}{2}\int_0^a (a - z)^2\,dz = \frac{1}{2}\left[a^2z - az^2 + \frac{1}{3}z^3\right]_0^a = \frac{1}{6}a^3,$$

و درنتیجه ، شعاعهای چرخش نظیر عبارتنداز

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

به جای شعاع چرخش می‌توان گشتاور ماند را به صورت عبارتی نوشت که در آن جرم کل ورقه یا جسم جامد عاملی از آن باشد. مثلاً، گشتاور ماند قطبی بیضی مثال ۲ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$I_O = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2).$$

به همین نحو، در مثال ۳ می‌توان گشتاورهای ماند را به صورت زیر نوشت:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{5} Ma^2.$$

مسائل

۱. یک دستگاه از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 4$، $m_2 = 3$، $m_3 = 1$، و $m_4 = 6$ در نقاط $P_1 = (-3, 2, 0)$، $P_2 = (1, 5, -2)$، $P_3 = (0, 4, -1)$، و $P_4 = (3, 0, 1)$ تشکیل شده است. گشتاورهای ماند I_x, I_y, I_z و شعاعهای چرخش k_x, k_y, k_z دستگاه را بیابید.

۲. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیهٔ مثلثی R در ربع اول و محدود به‌محورهای مختصات و خط $3x + 2y = 6$ را بیابید.

۳. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیهٔ مثلثی R به رئوس $(1, 1)$، $(2, 1)$، و $(3, 3)$ را بیابید.

۴. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور x و منحنی

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

باشد، که در آن f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که گشتاورهای ماند R حول محورهای x و y از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b [f(x)]^3\, dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 f(x)\, dx. \qquad \text{(یک)}$$

۵. گشتاورهای ماند I_x و I_y ورقهٔ مستطیلی R محدود به محورهای مختصات و خطوط $x = 1$ و $y = 2$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد.

فرض کنید R یک ورقهٔ مستطیلی به طول a و عرض b باشد. گشتاور ماند R را حول محوری عمود بر R و مار بر

۶. مرکز R

۷. رأس R

پیدا کنید.

۸ . گشتاور ماند ناحیهٔ نیم‌مستدیر $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ را حول قطرش بیابید .

۹ تا ۱۲ . گشتاورهای ماند I_x و I_y هر یک از نواحی مسائل ۹ تا ۱۲ صفحه ۳۶۷۴ را پیدا کنید.

۱۳ . فرض کنید l خط مار بر مبداء با میل ϕ بوده ، و I_l گشتاور ماند ناحیهٔ مسطح R حول l باشد . نشان دهید که ، برحسب گشتاورهای ماند I_x, I_y و کمیت $J = \iint_R xy\, dA$ به نام *حاصل ضرب ماند* ،

$$I_l = I_x \cos^2 \phi - 2J \sin \phi \cos \phi + I_y \sin^2 \phi$$

۱۴ . نشان دهید که مجموع گشتاورهای ماند ناحیهٔ R حول دو محور عمود برهم درصفحهٔ R و مار بر نقطهٔ ثابت O به ازای هر جهت از محورها یکسان است .

راهنمایی . از مسئلهٔ قبل استفاده کنید .

۱۵ . **قضیهٔ محور موازی** را ثابت کنید ، که می‌گوید هرگاه c محوری مار بر مرکز جرم یک جسم یا ورقه به جرم M بوده و l یک محور موازی c باشد ، آنگاه $I_l = I_c + Md^2$ که در آن d فاصلهٔ بین محورها می‌باشد .

۱۶ . گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a و چگالی واحد را حول یک خط مماس آن بیابید .

راهنمایی . از قضیهٔ محور موازی استفاده کنید .

گشتاورهای ماند I_x ، I_y ، و I_z مکعب مستطیل T محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = a$ ، $y = b$ ، و $z = c$ (a, b, c مثبت اند) را درصورتی بیابید که تابع چگالی به‌صورت‌زیر باشد .

۱۷ . $\rho(x, y, z) \equiv 1$ ۱۸ . $\rho(x, y, z) = x$

۱۹ . $\rho(x, y, z) = xy$ ۲۰ . $\rho(x, y, z) = xyz$

هر جواب را به شکلی بنویسید که در آن جرم کل M به صورت عامل ظاهر شود .

۲۱ . گشتاور ماند ناحیهٔ جامد T محدود به هذلولی گون دوار $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 1$ را حول محور z پیدا کنید .

۲۲ . گشتاورهای ماند I_x ، I_y ، و I_z جسمی با چگالی واحد و محدود به‌سهمی‌گون‌هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در یکهشت اول را یافته ،و هر یک را به‌صورت مضربی از M ، یعنی جرم کل T ، بیان دارید .

فرض کنید T یک مخروط مستدیر قائم توپر با چگالی واحد ، ارتفاع h ، و شعاع قاعدهٔ a باشد . گشتاور ماند مخروط T را

۲۳ . حول محورش

۲۴ . حول یکی از اقطار قاعده‌اش

بیابید .

۶.۱۴ انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی

از بخش ۱.۱۴ به یاد آورید که انتگرال مضاعف

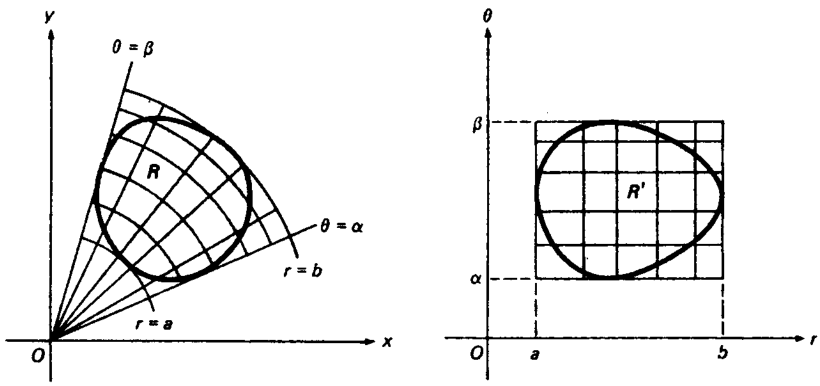
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (1)$$

که در آن R ناحیه‌ای نرمال و f بر R پیوسته است ، برحسب دستگاه مختصات قائم زمینهٔ x و y تعریف شد . اما ممکن‌است این مختصات بهترین مختصات در محاسبهٔ (۱) نباشند . مثلاً ، با انتخاب مبداء و محور x مثبت صفحهٔ xy به عنوان قطب و محور قطبی ، مختصات قطبی r و θ را نیز معرفی می‌کنیم . در این صورت ، توصیف R در مختصات قطبی آسانتراز مختصات قائم است ، نکته‌ای که پس‌از " تبدیل " (۱) به مختصات قطبی می‌تواند مورد بهره‌برداری قرار گیرد . این کار به صورت زیر انجام می‌شود .

فرض‌کنیم دستگاه مختصات قائم دیگری ، در صفحهٔ دیگر ، با طول r و عرض θ داشته باشیم . همانطور که شکل ۳۵ نشان می‌دهد ، R نقش تبدیل مختصات

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (2)$$

ناحیهٔ R' در صفحهٔ $r\theta$ است ، بدین معنی که هر نقطهٔ (x, y) در R با فرمولهای (۲) به‌نقطهٔ (r, θ) در R' مربوط است . فرض‌کنیم R' در نیمصفحهٔ راست $r \geq 0$ و نوار افقی $0 \leq \theta \leq 2\pi$ واقع باشد . در این صورت ، تناظر بین R' و R داده شده با (۲) جز احتمالاً بر مرز R' یک به یک است (نقاط $(r, 0)$ و $(r, 2\pi)$ صفحهٔ $r\theta$ هر دو به نقطهٔ $(r, 0)$ صفحهٔ xy و خط $r = 0$ کلاً به مبداء xy نگاشته می‌شود) . فرض‌کنیم هر دو ناحیهٔ R و R' نرمال باشند ، کـه R'



شکل ۳۵

مشمول مستطیل $a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta$ در صفحهٔ $r\theta$ است . در این صورت ، R مشمول "قطاع طوقی "یا "مستطیل قطبی "واقع در صفحهٔ xy است که با همان نامساویهای $a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta$ تعریف می‌شود (ر.ک. شکل) . حال قضیهٔ زیر را داریم که انتگرالهای مضاعف روی R را به انتگرالهای مضاعف روی R' ارتباط می‌دهد .

قضیهٔ ۸ (انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی) . هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \qquad (۳)$$

برهان ناقص[۱] . فرض کنیم بازه‌های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ توسط نقاط $r_j (j = 0, 1, \ldots, J)$ و $\theta_k (k = 0, 1, \ldots, K)$ با اندازه‌های مش μ_r و μ_θ افراز شده باشند. این بدان معنی است که $a = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{J-1} < r_J = b$ ، $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{K-1} < \theta_K = \beta$ ، و

$$\mu_r = \max\{r_1 - r_0, r_2 - r_1, \ldots, r_J - r_{J-1}\},$$
$$\mu_\theta = \max\{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_K - \theta_{K-1}\}.$$

در این صورت ، خطوط

$$r = r_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, J)$$

و

$$\theta = \theta_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, K),$$

که موازی محورهای مختصات صفحهٔ $r\theta$ اند ، R' را به n زیرناحیهٔ بستهٔ $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$ که اغلب مستطیلی بوده و $n \le JK$ تقسیم می‌کنند (معمولاً " $n < JK$) . دوایر و شعاعهای واقع در صفحهٔ xy و با همان معادلات $r = r_j$ و $\theta = \theta_k$ ، R را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب قطاعهایی طوقی بوده و R_i نقش R'_i تحت تبدیل (۲) است که مختصات قطبی را به مختصات قائم می‌برد . فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_r, \mu_\theta\},$$

---

۱ . چند نکتهٔ ظریف را ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ظاهر می‌شوند، کاملاً " توضیح نداده‌ایم . مثلاً " ، قضیه در صورت یک به یک نبودن تبدیل (۲) برمرز R ، که اغلب چنین است ، نیز برقرار می‌باشد .

و ΔA_i و $\Delta A'_i$ مساحات R_i و R'_i باشند (وجود و ناصفر بودن ΔA_i و $\Delta A'_i$ فرض می‌باشد) . همچنین ، فرض کنیم $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از R_i باشد (هیچ رابطه‌ای بین r'_i, θ'_i و نقاط تقسیم r_j و θ_k وجود ندارد) ، و فرض کنیم $P_i = (p_i, q_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۲) باشد . در این صورت ،

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\,\Delta A_i \tag{۴}$$

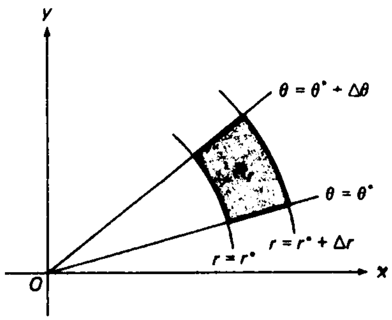
$$= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r'_i \cos\theta'_i, r'_i \sin\theta'_i)\,\frac{\Delta A_i}{\Delta A'_i}\,\Delta A'_i.$$

حال فرض کنیم R'_i ناحیهٔ مستطیلی

$$r^* \le r \le r^* + \Delta r, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta$$

به مساحت $\Delta A'_i = \Delta r\,\Delta\theta$ باشد . در این صورت ، R_i قطاع طوقی شکل ۳۶ به مساحت

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}\left[(r^* + \Delta r)^2 - r^{*2}\right]\Delta\theta = \frac{1}{2}\left[2r^*\,\Delta r + (\Delta r)^2\right]\Delta\theta = \left(r^* + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\,\Delta\theta$$



یک قطاع طوقی یا مستطیل قطبی

شکل ۳۶

است ، زیرا ΔA_i تفاضل بین مساحات دو قطاع مستدیر با زاویهٔ مرکزی $\Delta\theta$ و شعاعهای متفاوت r^* و $r^* + \Delta r$ است . لذا ،

$$\Delta A_i = r_i^*\,\Delta A'_i, \tag{۵}$$

که در آن $r_i^* = r^* + \frac{1}{2}\Delta r$ متوسط شعاعهای r^* و $r^* + \Delta r$ می‌باشد (زیرنویس r_i^* نشان می‌دهد که در ارتباط با ناحیهٔ R_i است) . واضح است که نقاطی در R'_i به طول r_i^* وجود دارند ، و چون $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از R'_i است ، می‌توان فرض کرد $r'_i = r_i^*$. دراین

صورت ، (۵) شکل $\Delta A_i = r_i' \Delta A_i'$ یا معادلا "

$$\frac{\Delta A_i}{\Delta A_i'} = r_i' \qquad (۶)$$

را به خود می‌گیرد .اگر تمام نواحی R_i' مستطیلی‌باشند ،نواحی نظیر R_i قطاعهایی‌طوقی‌اند، و می‌توان با گذاردن (۶) در (۴) به دست آورد

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i' \cos \theta_i', r_i' \sin \theta_i') r_i' \Delta A_i'. \qquad (۷)$$

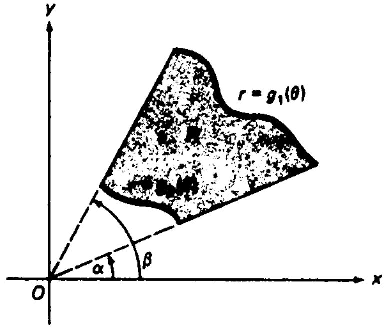
اما مجموع سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$ بـرناحیهٔ R' از صفحهٔ $r\theta$ است ، که در آن r و θ مختصات قائم می‌باشند . لذا ، طبق قضیهٔ۱،صفحه ۱۳۲۳، وقتی $\mu \to 0$ ، این مجموع به انتگرال مضاعف $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r\, dA$ نـزدیـک می‌شود ، که به صورت $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r\, dr\, d\theta$ نیز نوشته شده و فرمول (۳) ثابت می‌گردد . این امر که بعضی‌از نواحی R_i' در حالت‌کلی غیرمستطیلی‌اند اهمیتی ندارد ،زیرا می‌توان نشان داد که اگر جملات نظیر به نواحی غیرمستطیلی را حذف کنیم ، مجموع (۷) به همان حد نزدیک خواهدشد .

چگونه فرمول (۳) را به یاد آوریم . اصل مطلب در برهان قضیهٔ ۸ این است‌که ناحیهٔ R_i شکل ۳۶ ، در صورت کوچک بودن هر دوی Δr و $\Delta\theta$ ،تقریبا "مستطیلی‌بوده واضلاع‌مستقیمش به طول Δr و اضلاع خمیده‌اش به طول تقریبی $r\,\Delta\theta$ است، که در آن r مختص شعاعی یـک نقطه در R_i است . لذا ، مساحت R_i تقریبا " مسـاوی است با $r\,\Delta r\,\Delta\theta$. این توضیح خامی است از اینکه چرا وقتی $\mu \to 0$ ، $r\, dr\, d\theta$ در طرف راست‌فرمول (۳) ظاهر می‌شود . این راه خوبی برای به یاد آوردن فرمول نیز هست .

برای محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

طبعا " به انتگرالهای مکرر به طور معمول توسل می‌جوییم . مثلا " ، هرگاه R ناحیهٔ "به‌طور شعاعی سادهٔ " شکل ۳۷ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha, \theta = \beta$ و نمودارهـای دو تـابع $r = g_1(\theta), r = g_2(\theta)$ محدود شده باشد ، که در آنها $g_1(\theta)$ و $g_2(\theta)$ بر $[\alpha, \beta]$ پیوسته بوده‌و $g_2(\theta) \geq g_1(\theta) \geq 0$ ، آنگاه R' یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده است و

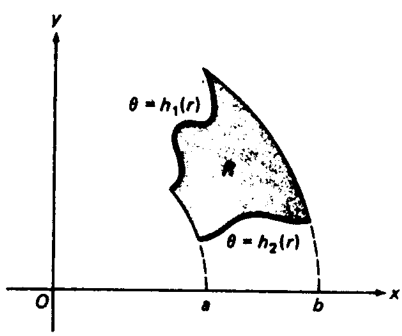


یک ناحیهٔ به‌طور شعاعی ساده

شکل ۳۷

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr.$$

به همین نحو ، هرگاه R ناحیهٔ " به‌طور زاویه‌ای سادهٔ" شکل ۳۸ باشد که به دو دایرهٔ $r = a, r = b$ و نمودارهای دو تابع $\theta = h_1(r), \theta = h_2(r)$ محدود است ، که درآنها $h_1(r)$



یک ناحیهٔ به‌طور زاویه‌ای ساده

شکل ۳۸

و $h_2(r)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $h_2(r) \geq h_1(r) \geq 0$ ، آنگاه R' یک ناحیهٔ به طور افقی ساده است و

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_a^b dr \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta.$$

با انتخاب $f \equiv 1$ در فرمول (۳)، معلوم می‌شود که مساحت A ی ناحیهٔ به طور شعاعی ساده در شکل ۳۷ مساوی است با

$$A = \iint_{R'} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{[g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2\}\,d\theta.$$

این با فرمول مربوط به A که در بخش ۱۰.۱ به دست آمد سازگاری کامل دارد (ر.ک. فرمول (۳)، صفحهٔ ۱۰۲۵، که در آن f و g به جای g_2 و g_1 به کار رفته‌اند). به عنوان تمرین، نشان دهید که مساحت ناحیهٔ به‌طور زاویه‌ای ساده در شکل ۳۸ مساوی است با

$$A = \int_a^b [h_2(r) - h_1(r)]\,r\,dr.$$

مثال ۱. با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال

$$I = \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

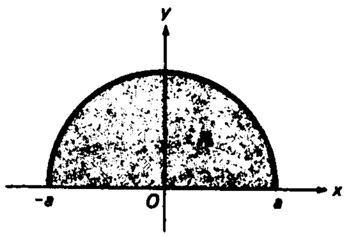
را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ نیم‌مستدیر $x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0$ به شعاع a باشد (ر.ک. شکل ۳۹).

حل. بنابر قضیهٔ ۸،

$$I = \iint_{R'} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\; r\,dr\,d\theta = \iint_{R'} r^2\,dr\,d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi$ در صفحهٔ $r\theta$ است. بنابراین،

$$I = \int_0^\pi \int_0^a r^2\,dr\,d\theta = \left(\int_0^\pi d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\,dr\right) = \frac{\pi a^3}{3}.$$

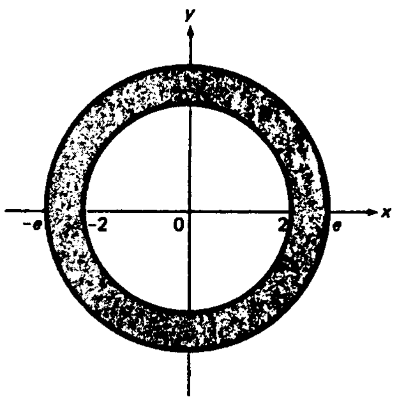


شکل ۳۹

مثال ۲. انتگرال

$$I = \iint_R \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

را درصورتی‌حساب‌کنیدکه R ناحیهٔ طوقی محدود به‌دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = e^2$ باشد (ر.ک. شکل ۴۰).



شکل ۴۰

حل. بنابر قضیهٔ ۸،

$$I = \iint_{R'} \ln(r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = \iint_{R'} (\ln r^2)\, r\, dr\, d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $2 \leq r \leq e, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ در صفحهٔ $r\theta$ است. بنابراین، باانتگرالگیری جزء به جزء داریم

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^e (\ln r^2) r\, dr\, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(2 \int_2^e \ln r\, d(\tfrac{1}{2}r^2)\right)$$
$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}r^2 \ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_2^e = \pi(e^2 + 4 - 8 \ln 2),$$

مثال ۳. انتگرال مجازی

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

را ، که همگرایی‌اش در مثال ۹ ، صفحهٔ ۶۸۳ ، نشان داده شد ، محاسبه نمایید .

حل . ترفند زیر ، که مستلزم انتگرال **مضاعف** در مختصات قطبی است ، به‌ما اجازهٔ محاسبهٔ این انتگرال ظاهرا " خودسر را می‌دهد . ابتدا می‌بینیم که ، طبق تعریف ، $I = \lim\limits_{a \to \infty} I_a$ ، که در آن $I_a = \int_0^a e^{-x^2}\, dx$. چون هر حرف می‌تواند متغیر ظاهری انتگرالگیری باشد ، خواهیم داشت

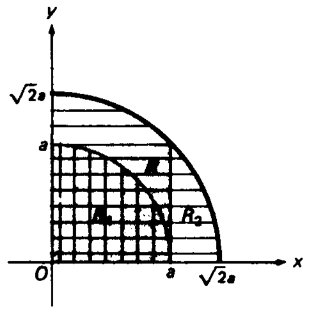
$$I_a^2 = \left(\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right)$$
$$= \left(\int_0^a e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2}\, dy\right) = \iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

که در آن R ناحیهٔ مربعی واقع در ربع اول است که با نامساویهای $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a$ تعریف می‌شود . اما انتگرالده $e^{-(x^2+y^2)}$ مثبت بوده و ناحیهٔ R شامل یکچهارم قرص R_1 است که با نامساویهای $0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$ در مختصات قطبی تعریف شده است ،واین خود مشمول یکچهارم قرص R_2 تعریف شده با نامساویهای $0 \leq r \leq \sqrt{2}a,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۴۱) . بنابراین ،

$$\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = I_a^2 \leq \iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

که در آن نامساویها اکید می‌باشند . با تبدیل به مختصات قطبی که درآن $x^2 + y^2 + r^2$ در می‌یابیم که

$$\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r\, dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$



شکل ۴۱

(در اینجا مستقیما" به انتگرال مکرر می‌رویم) ، و به همین نحو ،

$$\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}),$$

درنتیجه ،

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \le I_a^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

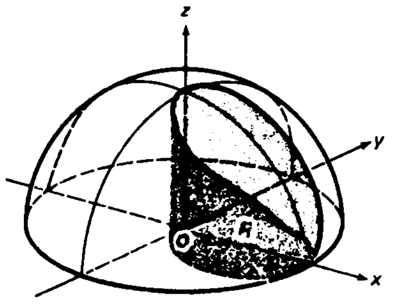
لذا ، I_a^2 بین دو عبارت قرار دارد که با رفتن $a \to \infty$ به حد مشترک $\pi/4$ نزدیک می‌شوند. چون وقتی $a \to \infty$ ، $I_a^2 \to I^2$ ، از قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۱۳۷ (قضیهٔ ساندویچ) معلوم می‌شود که $I^2 = \pi/4$. لذا ، بالاخره ،

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

از مثالهای فوق معلوم می‌شود که اگر انتگرالده یک انتگرال مضاعف شامل عبارت x^2+y^2 یا توانهای آن باشد ، تبدیل به مختصات قطبی معمولا" سودمند است. ذیلا" مثال دیگری از این نوع را می‌آوریم .

مثال ۴ . حجم V ناحیهٔ جامد T جدا شده از کرهٔ جامد $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ به وسیلهٔ استوانهٔ مستدیر $(a>0)$ $x^2+y^2=ax$ را بیابید .

حل . استوانهٔ $x^2+y^2=ax$ صفحهٔ xy را در دایرهٔ $(x-\frac{1}{2}a)^2+y^2=\frac{1}{4}a^2$ به شعاع $\frac{1}{2}a$ و مرکز $(\frac{1}{2}a, 0)$ قطع می‌کند. همانند شکل ۴۲ ، فرض کنیم R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر واقع در ربع



شکل ۴۲

اول صفحهٔ xy باشد که به این دایره و محور x مثبت محدود شده است. در این صورت، بنابرتقارن، V چهاربرابر حجم بین ناحیهٔ به‌طور شعاعی سادهٔ R ونمودار $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (سطح بالایی کره) است؛ یعنی،

$$V=4\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

قسمت نیمه‌مستدیر مرز R به معادلهٔ قطبی $r=a\cos\theta$ $(0\le\theta\le\pi/2)$ است. لذا، باتبدیل به مختصات قطبی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}V&=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right)\\&=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\right)=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),\end{aligned}$$

که در آن بار دیگر مستقیماً" به انتگرال مکرر رفته، مرحلهٔ

$$\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint_{R'}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

مستلزم ناحیهٔ به‌طورقائم سادهٔ $R'=\{(r,\theta): 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le r\le a\cos\theta\}$ را حذف می‌کنیم.

حجم V را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال مستقیم $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ درمختصات قائم به‌دست‌آورد، ولی محاسبات خیلی‌مفصل است. این سادگی معادلهٔ‌قطبی $r=a\cos\theta$

برای قسمت نیمه‌مستدیر مرز R ، در مقایسه با معادلهٔ دکارتی $y=\sqrt{ax-x^2}$ ، است که محاسبهٔ V را در مختصات قطبی آسان می‌سازد .

مسائل

انتگرال مضاعف داده شده را با تبدیل مختصات قائم به قطبی حساب کنید .

۱. $\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ، که در آن R قرص $x^2+y^2\le 9$ است

۲. $\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ ، که در آن R قرص $x^2+y^2\le 4x$ است

۳. $\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2+y^2\le 1, y\ge 0$ است

۴. $\iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ ، که در آن R قرص $x^2+y^2\le \ln 2$ است

۵. $\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $1\le x^2+y^2\le 4$ است

۶. $\iint\limits_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2/16\le x^2+y^2\le \pi^2/9$ است

۷. $\iint\limits_R \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$ است

۸. $\iint\limits_R (1-3x+2y)\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2+y^2\le 1, y\le 0$ است

۹. $\iint\limits_R \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$ ، که در آن R قرص $x^2+y^2\le e^2-1$ است

۱۰. $\iint\limits_R \arctan(y/x)\,dx\,dy$ ، که در آن R قطاع طوقی $1\le x^2+y^2\le 4, x/\sqrt{3}\le y\le \sqrt{3}x$ است .

انتگرال مکرر داده شده را از مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل کنید . (فرض کنید $f(x,y)$ پیوسته باشد .)

۱۱. $\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx$

۱۲. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{3}x} f(x^2+y^2)\,dy$

۱۳. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ ۱۴. $\int_1^4 dy \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx$

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی، مساحات زیر را بیابید.

۱۵. داخل دلگون $r = a(1-\cos\theta)$ و خارج دایرهٔ $r = a$ ✓

۱۶. بین دلگون $r = a(1+\cos\theta)$ و دایرهٔ $r = a\cos\theta$ ✓

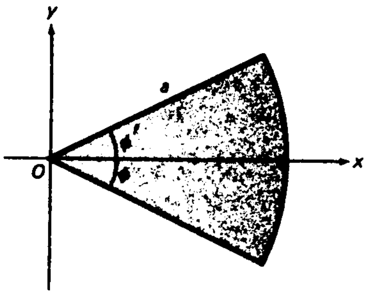
۱۷. محدود به دایرهٔ $r = \frac{1}{2}$ و منحنیهای $\theta = \sin r$ و $\theta = \cos r$ ✓

۱۸. محدود به دایرهٔ $x^2+y^2 = x$، دایرهٔ $x^2+y^2 = 2x$، محور x، و خط $y = x$ ✓

۱۹. محدود به دایرهٔ $r = 2\sin\theta$ و شعاع $\theta = \phi$، داخل گوهٔ $0 \le \theta \le \phi \le 2\pi$ ✓

۲۰. بین مارپیچهای ارشمیدسی $r = \theta$ و $r = 2\theta$ به ازای $0 \le \theta \le 4\pi$ ✓

۲۱. یک قطاع مستدیر به شعاع a و زاویهٔ مرکزی 2ϕ به وسیلهٔ محور x نصف شده‌است (ر. ک. شکل ۴۳). مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ آن را بیابید. ✓



شکل ۴۳

۲۲. چگالی نقطهٔ متغیر P یک واشر به شعاع داخلی 1cm و شعاع خارجی 3cm با فاصلهٔ P تا مرکز واشر نسبت عکس دارد. جرم کل واشر را درصورتی بیابید که چگالی در لبهٔ خارجی آن $2\ g/cm^2$ باشد. ✓

۲۳. مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیهٔ محصور به دلگون $r = a(1+\cos\theta)$ را بیابید. ✓

۲۴. مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیهٔ محصور به پر رز $r = \sin 2\theta$ در ربع اول را بیابید (ر. ک. شکل ۶۴، صفحهٔ ۱۰۰۳). ✓

۲۵. گشتاور ماند قطبی ناحیهٔ محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2\cos 2\theta$ را بیابید. (ر. ک. شکل ۸۲، صفحهٔ ۱۰۲۷). ✓

۲۶. گشتاورهای ماند ناحیهٔ R محصور به دلگون $r = a(1+\cos\theta)$ را حول محورهای x و y بیابید. همچنین، گشتاور ماند قطبی R را پیدا نمایید. ✓

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی، حجم V ناحیهٔ جامد داده شدهٔ T را بیابید.

۲۷. T فصل مشترک یک کرهٔ جامد به شعاع R با استوانهٔ مستدیری به شعاع $a < R$ بوده و محور استوانه از مرکز کره گذشته است.

۲۸. T به سهمی گون $az = x^2 + y^2$ و صفحهٔ $z = a > 0$ محدود است.

۲۹. T به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی گون $x^2 + y^2 = 4(1 - z)$ محدود است.

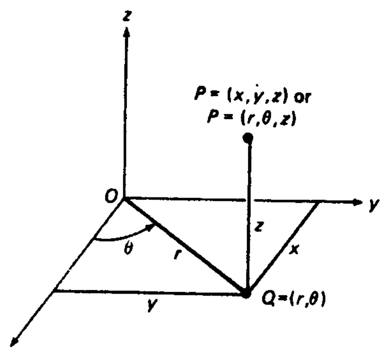
۳۰. T به صفحهٔ xy، استوانهٔ $x^2 + y^2 = x$، و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود است.

۳۱. T به سهمی گونهای $x^2 + y^2 - z = 0$ و $x^2 + y^2 + 2z = 1$ محدود است.

۳۲. T به مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ محدود بوده و خارج مخروط (دو پارچه) قرار دارد.

۷.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

حال دستگاه مختصاتی در فضا معرفی می‌کنیم که تعمیم طبیعی دستگاه مختصات قطبی در صفحه باشد. فرض‌کنیم نقطهٔ P در فضا به مختصات‌قائم x، y، و z باشد. دراین‌صورت P نیز دارای *مختصات استوانه‌ای* r، θ، و z است که با نگهداشتن z و تعویض x و y با مختصات قطبی r و θ ی نقطهٔ Q که تصویر P روی صفحهٔ xy است به دست می‌آیند (ر.ک. شکل ۴۴)، اگر نقطه‌ای علاوه‌بر مختصات قائم x، y، و z دارای مختصات استوانه‌ای r



شکل ۴۴

θ، و z باشد، علاوه‌بر $P = (x, y, z)$ می‌نویسیم $P = (r, \theta, z)$. مثل بخش قبلی، شرایط $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ را اعمال می‌کنیم، ولی z آزاد است هر مقدار در بازهٔ $(-\infty, \infty)$

را بگیرد . از شکل واضح است که نقطه به مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z به‌مختصات‌قائم

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{۱}$$

بوده ، و این فرمولها خود ایجاب می‌کنند که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \qquad z = z. \tag{۲}$$

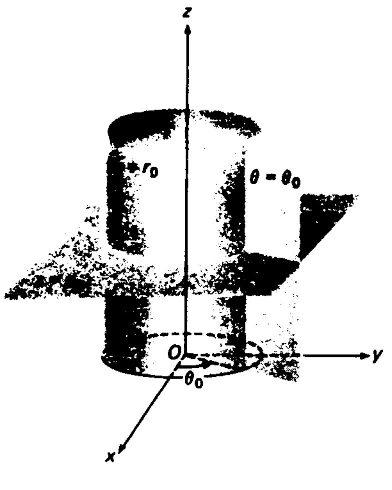
مثال ۱ . بنابر (۱) نقطه به مختصات استوانه‌ای $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4, z = -1$ به مختصات قائم زیر است :

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1, \qquad y = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1, \qquad z = -1,$$

ولی ، طبق (۲) ، نقطه به مختصات قائم $x = \sqrt{3}, y = 1, z = 2$ به مختصات‌استوانه‌ای‌زیر می‌باشد :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2, \qquad \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad z = 2.$$

در مختصات استوانه‌ای ، نمودار معادلهٔ $r = r_0 > 0$ یک استوانهٔ مستدیر به‌شعاع r_0 بوده و محور z محور تقارن آن است ، و نمودار $r = 0$ چیزی جز خود محور z نمی‌باشد .به همین نحو ، نمودار $\theta = \theta_0$ نیمصفحه‌ای است که محور z لبهٔ آن بوده و با صفحهٔ xz زاویهٔ θ_0 می‌سازد ، و نمودار $z = z_0$ صفحهٔ موازی صفحهٔ xy است که از نقطهٔ $(0, 0, z_0)$ در مختصات دکارتی می‌گذرد . توجه کنید که سه سطح $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ ، و $z = z_0$ به ازای هر $r_0 \neq 0$ ، θ_0 ، و z_0 دو به دو برهم عمودند ، و این امر در شکل ۴۵ مجسم شده است .

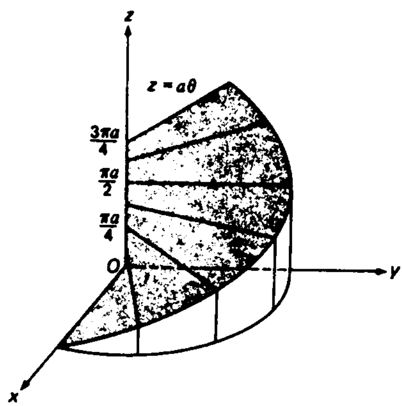


مثال ۲. نمودار معادلهٔ

$$z = a\theta \qquad (a > 0) \tag{۳}$$

را در مختصات استوانه‌ای رسم کنید.

حل. با افزایش θ ، z زیاد می‌شود، ولی مقدار r مشخص نشده است. لذا، r آزاد است تمام مقادیر نامنفی را به ازای هر جفت θ و z بگیرد. از اینرو، نمودار (۳) سطح بی‌کرانی است، به نام *مارپیچگون* ، که بخشی از آن در شکل ۴۶ نموده شده است. سطح بـه شکل



شکل ۴۶

سربالایی مارپیچ است، و توسط شعاعی که یک سرش به محور z وصل شده تولید می‌شود. در واقع، وقتی انتهای شعاع به‌بالای‌محور z حرکت‌کند، خود شعاع حول محور z چرخیده مارپیچگون را جارو خواهد کرد.

اغلب برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

روی یک ناحیهٔ سه‌بعدی قائم T بهتر است انتگرال را به مختصات استوانه‌ای تبدیل کنیم. این در حالاتی که ناحیهٔ T *تقارن استوانه‌ای* دارد، یعنی تقارن حول محوری که می‌توان آن را محور z گرفت، مناسب است. فرض کنیم، علاوه‌بر فضای xyz معمولی که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، و z و مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z دارد، "فضای $r\theta z$ "

دیگری تعریف کنیم که در آن مختصات r ، θ ، و z مختصات قائم می‌باشند. فرض‌کنیم T'' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است. در این صورت، مشابه قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۹۲، را داریم که اساساً " به همان ترتیب ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۹ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz. \tag{۴}$$

برهان ناقص . فرض کنیم T' در جعبهٔ $a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta, A \le z \le B$ در فضای $r\theta z$ باشد. همچنین، نقاط $r_j\ (j = 0, 1, \dots, J)$ و $\theta_k\ (k = 0, 1, \dots, K)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ با اندازه‌های مش μ_r و μ_θ بوده، و $z_l\ (l = 0, 1, \dots, L)$ افرازی از $[A, B]$ با اندازهٔ مش μ_z باشد. در این صورت، صفحات $r = r_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $z = z_l$ ، که موازی صفحات مختصات فضای $r\theta z$ اند، T' را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \le JKL$ (معمولاً " $n < JKL$) . استوانه‌ها، نیمصفحه‌ها، و صفحات در فضای xyz باهمین معادلات $r = r_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $z = z_l$ ، T را به n زیرناحیهٔ بستهٔ $T_1, T_2, \dots, T_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب " گوه‌های استوانه‌ای " از نوعی‌هستند که عنقریب توصیف می‌شوند و T_i نقش T'_i تحت‌تبدیل‌مختصات (۱) است که مختصات‌استوانه‌ای را به مختصات قائم می‌برد. فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_r, \mu_\theta, \mu_z\},$$

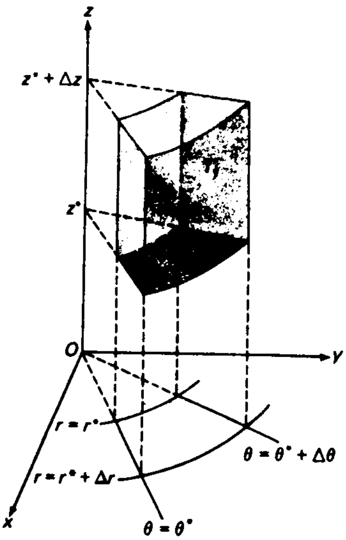
و ΔV_i و $\Delta V'_i$ حجمهای T_i و T'_i باشند. همچنین، $P'_i = (r'_i, \theta'_i, z'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i بوده، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۱) باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, s_i)\, \Delta V_i \\ &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r'_i\cos\theta'_i, r'_i\sin\theta'_i, z'_i)\, \frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i}\, \Delta V'_i. \end{aligned} \tag{۵}$$

حال فرض کنیم T'_i جعبه یا مکعب مستطیل

$$r^* \le r \le r^* + \Delta r, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta, \qquad z^* \le z \le z^* + \Delta z$$

به حجم $\Delta V'_i = \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta z$ باشد. در این صورت، T_i " گوهٔ استوانه‌ای " شکل ۴۷ است. در واقع، T_i یک استوانهٔ قائم به ارتفاع Δz و قطاع طوقی به مساحت $r_i^* \Delta r\, \Delta\theta$ به عنوان



یک گوهٔ استوانه‌ای

شکل ۴۷

قاعده است، که همانند برهان قضیهٔ ۸ $r_i^* = r^* + \frac{1}{2}\Delta r$. لذا، حجم T_i مساوی است با

$$\Delta V_i = r_i^* \Delta r \Delta\theta \Delta z = r_i^* \Delta V_i' \tag{۶}$$

(مثال ۱، صفحهٔ ۶۹۹، را به یاد آورید) . واضح است که نقاطی در T_i' با r_i^* به عنوان مختص r وجود دارند، و چون $P_i' = (r_i', \theta_i', z_i')$ نقطهٔ دلخواهی از T_i' است، می‌توان فرض کرد $r_i' = r_i^*$. در این صورت، (۶) به شکل $\Delta V_i = r_i' \Delta V_i'$ ، یا معادلاً

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = r_i' \tag{۷}$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، درنتیجه نواحی نظیر T_i گوه‌هایی استوانه‌ای‌اند، می‌توان (۷) را در (۵) گذارده به دست آورد

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i' \cos\theta_i', r_i' \sin\theta_i', r_i') r_i' \Delta V_i'$$

$$= \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. به‌طورکلی، بعضی از نواحی T_i' غیرمستطیلی‌اند، ولی می‌توان

نشان داد که این اثری بر اعتبار (۴) ندارد.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. با نگاهی دیگر به شکل ۴۷ معلوم می‌شود که اگر Δr و $\Delta\theta$ هر دو کوچک باشند، ناحیهٔ T_i تقریباً " مکعب مستطیل بوده و چهار ضلع مستقیمش به طول Δr و چهار تا به طول Δz، و چهار ضلع خمیده‌اش به طول تقریبی $r\Delta\theta$ اند، که در آن r مختص شعاعی نقطهٔ دلخواهی در T_i است. لذا، حجم T_i تقریباً " مساوی $r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z$ می‌باشد. این امر ظاهرشدن $r\,dr\,d\theta\,dz$ در سمت راست فرمول (۴) پس از گرفتن حد وقتی $\mu \to 0$ را توضیح داده، و نیز راهی برای یادآوردن فرمول را به ما نشان می‌دهد.

برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

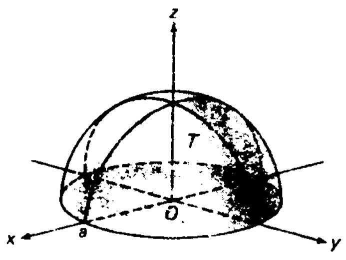
$$\iiint\limits_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

به انتگرالهای مکرر به‌شیوه‌ای آشنا متوسل می‌شویم؛ این امر در مثالهای زیر شرح داده‌شده است.

مثال ۳. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکرهٔ توپر T به شعاع a را بیابید.

حل. فرض کنیم T از بالا به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحهٔ $z = 0$، مثل شکل ۴۸، کراندار باشد. در این صورت، طبق تقارن، $\bar{x} = \bar{y} = 0$، و

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{T} z\, dx\, dy\, dz,$$



شکل ۴۸

که در آن $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ حجم نیمکره می‌باشد. با استفاده از قضیهٔ ۹ برای تبدیل به‌مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T'} zr\,dr\,d\theta\,dz,$$

که در آن T' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ است که به صفحات $r = 0,\ \theta = 0,\ \theta = 2\pi,\ z = 0$ و استوانهٔ $r^2 + z^2 = a^2$ محدود شده است (به یاد آورید که در هر دو مختصات قطبی و استوانه‌ای، $x^2 + y^2 = r^2$). با رفتن به انتگرال مکرر، داریم

$$\iiint_{T'} zr\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rz\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dr$$

$$= \pi \int_0^a r(a^2 - r^2)\,dr = \pi\left[\frac{1}{2}a^2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^a = \frac{1}{4}\pi a^4,$$

و لذا،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a.$$

لذا، مرکز گون T عبارت است از $(0, 0, \frac{3}{8}a)$.

مثال ۴. فرض کنید T یک استوانهٔ مستدیر توپر همگن به شعاع a و ارتفاع h باشد. گشتاور ماند T را حول محورش بیابید.

حل. فرض کنیم T به سطح استوانه‌ای $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحات $z = 0$ و $z = h$، مثل شکل ۴۹، محدود شده باشد، و ρ چگالی ثابت T باشد. در این صورت، با رفتن به انتگرال مکرر، معلوم می‌شود که گشتاور ماند استوانهٔ T حول محورش (محور z) مساوی است با

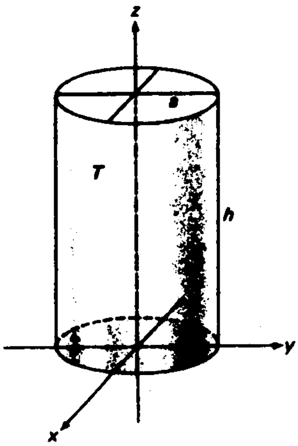
$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho\,dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (\rho r^2) r\,dr$$

$$= \rho\left(\int_0^h dz\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right) = 2\pi\rho h\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a = \frac{1}{2}\rho\pi a^4 h.$$

چون جرم کل T مساوی است با $M = \rho\pi a^2 h$، I_z را می‌توان به شکل فشردهٔ

$$I_z = \frac{1}{2}Ma^2$$

نوشت .



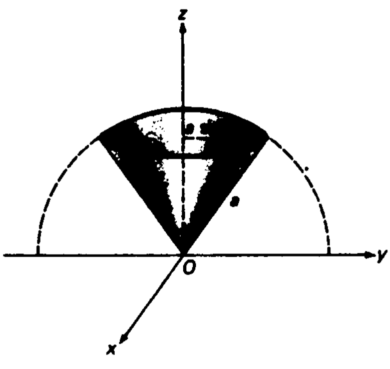
شکل ۴۹

مثال ۵ . حجم V ناحیهٔ توپر T را که از بالا به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a و از پایین به مخروط

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \phi \qquad (0 < \phi < \pi),$$

که مولدهایش با محور z زاویهٔ ϕ می‌سازند ، پیدا نمایید .

حل . ناحیهٔ T به ازای مقادیر کوچک زاویهٔ ϕ به شکل مخروط بستنی پر ، مثل شکل ۵۰، است . در مختصات استوانه‌ای ، کره و مخروط به معادلات $r^2 + z^2 = a^2$ و $z = r \cot \phi$ بوده ، و از شکل واضح است که دو سطح به ازای $r = a \sin \phi$ همدیگر را قطع می‌کنند . بنا



شکل ۵۰

بر این، به کمک قضیهٔ ۹،

$$V = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a \sin \phi} dr \int_{r \cot \phi}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r\, dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a \sin \phi} (\sqrt{a^2 - r^2} - r \cot \phi) r\, dr$$
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{3} r^3 \cot \phi \right]_0^{a \sin \phi}$$
$$= \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos^3 \phi - \sin^3 \phi \cot \phi)$$
$$= \frac{2}{3} \pi a^3 [1 - \cos^3 \phi - (1 - \cos^2 \phi) \cos \phi].$$

لذا، مآلاً داریم

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos \phi). \tag{۸}$$

بخصوص، از (۸) نتیجه می‌شود که اگر $\phi = \pi/2$ ، $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ ، و این چیزی است که انتظار آن می‌رفت (چرا؟).

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

۱. $r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = 0$ ۲. $r = 1, \theta = 1, z = 1$

۳. $r = 10, \theta = \pi, z = 2\pi$ ۴. $r = 0, \theta = 9\pi/10, z = -5$

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید.

۵. $x = -4, y = 4, z = -2$ ۶. $x = 3, y = \sqrt{3}, z = 13$

۷. $x = 1, y = -\sqrt{3}, z = -6$ ۸. $x = -5, y = -12, z = 0$

معادلهٔ داده شده را از مختصات قائم به استوانه‌ای تبدیل کنید.

۹. $x^2 - y^2 = z^2$ ۱۰. $x + y + z = 8$

۱۱. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ۱۲. $z = 2xy$

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را با تبدیل مختصات قائم به استوانه‌ای حساب کنید.

۱۳. $\iiint_T (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$

و صفحات $z=0$ و $z=2$ است .

۱۴ . $\iiint_T xz\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر واقع در یکهشت اول و محدود به‌سهمی گون $z=x^2+y^2$ و صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=4$ است .

۱۵ . $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz$ ،که درآن T ناحیهٔ‌توپر محدودبه‌استوانهٔ $x^2+y^2=3$ و صفحات$z=\pm 1$است .

۱۶ . $\iiint_T x^2y^2\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به مخروط$z=\sqrt{x^2+y^2}$وصفحهٔ $z=a>0$ است .

۱۷ . $\iiint_T y^2z\,dx\,dy\,dz$ ،که‌درآن T ناحیهٔ توپری است که از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود است .

۱۸ . $\iiint_T (x^3+y^3)\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=y$ سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ ، و صفحهٔ xy است .

حجم V ناحیهٔ توپر T داده شده را با استفاده از مختصات استوانه‌ای پیدا نمایید .

۱۹ . T به صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ به شعاع a ، و اولین دور مارپیچ گون $z=a\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ محدود است .

۲۰ . T به صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2+y^2=4$ ، و صفحهٔ $x+y+z=6$ محدود است .

۲۱ . T به استوانهٔ مستدیر $x^2+y^2=2x$ و استوانهٔ سهموی $z^2=4x$ محدود است .

۲۲ . T به هذلولی گون دوار یک پارچهٔ $x^2+y^2-z^2=1$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ محدود بوده و شامل مبداء است .

۲۳ . مرکز گون ناحیهٔ توپر T مثال ۴ ،صفحهٔ۱۳۹۹، را به کمک مختصات استوانه‌ای‌بیابید.

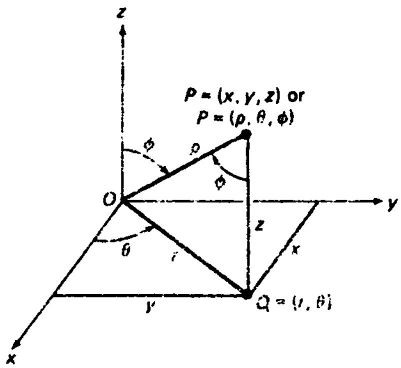
۲۴ . با استفاده از مختصات استوانه‌ای ، جوابهای دیگر مثالهای ۴ و ۵ ، صفحات ۱۳۶۳ و ۱۳۶۶، را به دست آورید .

۲۵ . گشتاور ماند یک‌استوانهٔ مستدیر توپر همگن به‌جرم M ، شعاع a ،و ارتفاع h را حول یکی از اقطار قاعده‌اش بیابید . با استفاده از قضیهٔ محور موازی (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵ ، صفحهٔ۱۳۹۰) ، گشتاور ماند استوانه را حول محوری مار بر مرکز جرم آن و عمود بر محور تقارنش پیدا نمایید .

۲۶. گشتاور ماند یک استوانهٔ مستدیر توخالی همگن به جرم M، شعاع داخلی a_1، و شعاع خارجی a_2 را حول محور تقارنش پیدا نمایید. همچنین، گشتاور ماند یک لولهٔ مستدیر با جدارهٔ نازک به جرم M و شعاع a را حول محور تقارنش پیدا نمایید.

۸.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی

همانطور که مختصات استوانه‌ای در مسائلی که اجسام تقارن استوانه‌ای دارند مفید است، مختصاتی که اینک معرفی می‌شوند معمولاً" بهترین مختصات در رابطه با اشیایی مانند گویها و غشاءهای کروی، که **تقارن کروی** دارند، یعنی تقارن نسبت به یک نقطه در فضا که می‌توان آن را مبداء گرفت دارند، می‌باشند. فرض کنیم P به مختصات قائم x ، y ، و z بوده، $\rho = |OP|$ فاصلهٔ بین مبداء O و P باشد، و زاویهٔ ϕ از محور z مثبت به OP (روبه‌پایین) سنجیده شود (ر.ک. شکل ۵۱). همچنین، فرض کنیم θ همان زاویه در مختصات استوانه‌ای باشد؛ یعنی، زاویه از محور x مثبت به OQ باشد، که در آن Q تصویر P روی صفحهٔ xy است (θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت توسط ناظری روی صفحهٔ xy که از طرف مثبت z به پایین نگاه می‌کند سنجیده می‌شود). در این صورت، گوییم نقطهٔ P به **مختصات کروی** ρ ، θ ، و ϕ است و، علاوه‌بر $P = (x, y, z)$ ، می‌نویسیم $P = (\rho, \theta, \phi)$. مختصات شعاعی ρ را می‌توان هر مقدار در بازهٔ $[0, \infty)$ گرفت، ولی ما شرطهای $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le \phi \le \pi$ را بر مختصات زاویه‌ای θ و ϕ می‌گذاریم. با پیروی از معانی جغرافیایی آنها، θ را **طول جغرافیایی** و ϕ را **متمم عرض جغرافیایی** می‌نامیم. چون مختص شعاعی با ρ نموده شده‌است،



شکل ۵۱

در مسائل مربوط به توزیعهای متقارن کروی جرم باید از علامت دیگری برای تابع چگالی، مثلاً" δ ، استفاده نمود.

با بررسی شکل معلوم می‌شود که نقطه به مختصات کروی ρ ، θ ، و ϕ دارای مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z است ، که

$$r = \rho \sin \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi,$$

و درنتیجه ، مختصات قائم زیر را دارد :

$$(۱) \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta, \qquad z = \rho \cos \phi.$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که ، بنابر (۱) ،

$$(۲) \quad \begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0), \\ &\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0). \end{aligned}$$

مثال ۱ . بنابر (۱) ، نقطه به مختصات کروی $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/3, \phi = \pi/4$ دارای مختصات قائم

$$x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

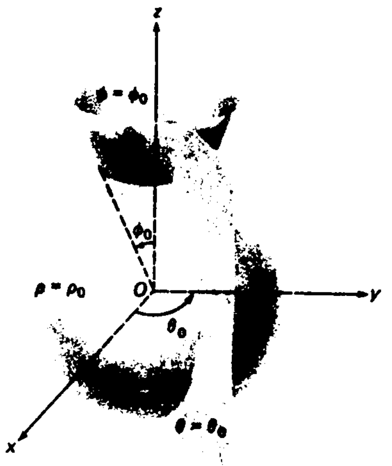
است ولی ، طبق (۲) ، نقطه به مختصات قائم $x = 1, y = -1, z = \sqrt{2}$ دارای مختصات کروی

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad \theta = \arctan(-1) + 2\pi = \frac{7\pi}{4},$$

$$\phi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

می‌باشد (چرا در فرمول دوم 2π اضافه می‌کنیم ؟)

نمودار معادلهٔ $\rho = \rho_0 > 0$ در مختصات کروی کره‌ای به شعاع ρ_0 و مرکز مبـداء ، و نمودار $\rho = 0$ فقط خود مبداء می‌باشد . به همین نحو ، نمودار $\theta = \theta_0$ نیمصفحه‌ای است که محور z به عنوان لبه‌اش زاویهٔ θ_0 با صفحهٔ xz می‌سازد ، و نمودار $\phi = \phi_0$ یک پارچه از یک مخروط مستدیر قائم به رأس مبداء و مولدهایی است که با محور z مثبت زاویهٔ ϕ_0 می‌سازد (ر.ک. شکل ۵۲) . توجه کنید که نمودار $\phi = \phi_0$ به محور z مثبت تحویل می‌شـود اگـر



شکل ۵۲

$\phi_0 = 0$ ، به صفحهٔ xy تحویل می‌شود اگر $\phi_0 = \pi/2$ ، و به محور z منفی بدل می‌شود اگر $\phi_0 = \pi$.

مثال ۲. معادلهٔ کرهٔ S به معادلهٔ دکارتی

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \qquad (a > 0) \tag{۳}$$

را در مختصات کروی بنویسید.

حل. چون (۳) معادل $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ است، S کره‌ای به شعاع a وبه‌مرکزنقطهٔ $(0, 0, a)$ از محور z است. با جانشانی از (۱) معلوم می‌شود که (۳) به $\rho^2 = 2a\rho \cos\phi$ یا معادلا"

$$\rho = 2a \cos\phi$$

تبدیل می‌شود (تقسیم بر ρ را توجیه کنید).

در محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

روی ناحیهٔ سه‌بعدی‌نرمال T، درحالاتی که T تقارن کروی دارد، معمولا " تبدیل‌به‌مختصات

کروی سودمند است . فرض کنیم علاوه‌بر فضای معمولی xyz ، که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، و z و مختصات‌کروی r ، θ ، و ϕ دارد ، " فضای $\rho\theta\phi$ " را نیزمعرفی می‌کنیم، که در آن مختصات ρ ، θ ، و ϕ مختصات قائم می‌باشند . فرض کنیم T' ناحیه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است . در این صورت ، قضیهٔ زیر را داریم که به قضیهٔ ۹ ، صفحهٔ ۱۴۰۶، برای مختصات استوانه‌ای شبیه است .

قضیهٔ ۱۰ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{T'} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi. \tag{۴}$$

برهان ناقص . فرض کنیم T' در جعبهٔ $a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta,\ A \le \phi \le B$ درفضای $\rho\theta\phi$ باشد . همچنین ، نقاط ρ_j $(j = 0, 1, \ldots, J)$ ، θ_k $(k = 0, 1, \ldots, K)$ ، و ϕ_l $(l = 0,1, \ldots, L)$ افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[\alpha, \beta]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_ρ ، μ_θ ، μ_ϕ باشند . در این‌صورت ،صفحات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $\phi = \phi_l$ ،موازی صفحات مختصات فضای $\rho\theta\phi$ ، T' را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \le JKL$ (معمولا " $n < JKL$) . کرات ، نیمصفحه‌ها ، و مخروطها در فضای xyz با همان معادلات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، و $\phi = \phi_l$ ، T را به n زیر ناحیهٔ بستهٔ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ تقسیم می‌کنند که T_i نقش T'_i تحت تبدیل (۱) است . فرض کنیم

$$\mu = \max\{\mu_\rho, \mu_\theta, \mu_\phi\},$$

و ΔV_i و $\Delta V'_i$ حجمهای T_i و T'_i باشند . همچنین ، فرض کنیم $P'_i = (\rho'_i, \theta'_i, \phi'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i بوده ، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت (۱) باشد . در این صورت ،

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

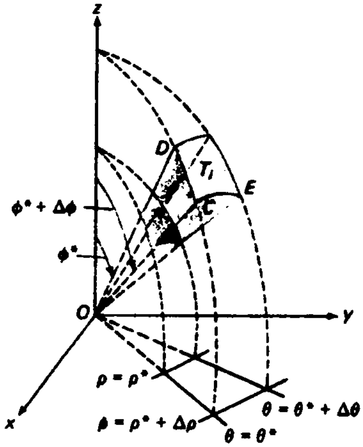
$$= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i, s_i)\,\Delta V_i \tag{۵}$$

$$= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho'_i \sin\phi'_i \cos\theta'_i, \rho'_i \sin\phi'_i \sin\theta'_i, \rho'_i \cos\phi'_i)\frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i}\,\Delta V'_i.$$

حال فرض کنیم T'_i جعبهٔ

$$\rho^* \le \rho \le \rho^* + \Delta\rho, \qquad \theta^* \le \theta \le \theta^* + \Delta\theta, \qquad \phi^* \le \phi \le \phi^* + \Delta\phi$$

به حجم $\Delta V'_i = \Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$ باشد. در این صورت، T_i " گوهٔ کروی " شکل ۵۳ است که به دو کرهٔ $\rho = \rho^*$ و $\rho = \rho^* + \Delta\rho$ ، دو نیمصفحهٔ $\theta = \theta^*$ و $\theta = \theta^* + \Delta\theta$ ، و دو مخروط



یک گوهٔ کروی

شکل ۵۳

$\phi = \phi^*$ و $\phi = \phi^* + \Delta\phi$ محدود است. لذا، به کمک مثال ۵، صفحهٔ ۱۴۱۰، درمی‌یابیم که

$$\Delta V_i = \frac{2\pi}{3}\frac{\Delta\theta}{2\pi}\left[(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}\right]\left[1 - \cos(\phi^* + \Delta\phi) - (1 - \cos\phi^*)\right]$$
$$= -\frac{\Delta\theta}{3}\left[(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}\right]\left[\cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos\phi^*\right]. \qquad (۶)$$

اما، با دو بار استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین،

$$(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3} = 3\rho_i^{*2}\Delta\rho, \qquad \cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos\phi^* = -\sin\phi_i^*\Delta\phi, \qquad (۷)$$

که در آن $\rho^* < \rho_i^* < \rho^* + \Delta\rho$ و $\phi^* < \phi_i^* < \phi^* + \Delta\phi$ (زیرنویس کمیات ρ_i^* و ϕ_i^* نشان می‌دهند که با ناحیهٔ T_i در ارتباطند) . با گذاردن (۷) در (۶) ، به‌دست‌می‌آوریم

$$\Delta V_i = \rho_i^{*2}\sin\phi_i^*\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi = \rho_i^{*2}\sin\phi_i^*\,\Delta V'_i. \qquad (۸)$$

واضح‌است‌که‌نقاطی در T'_i به ρ-مختص ρ_i^* و ϕ-مختص ϕ_i^* وجود دارند ،و چون $P'_i = (\rho'_i, \theta'_i, \phi'_i)$ نقطهٔ دلخواهی از T'_i است، می‌توان فرض کرد $\rho'_i = \rho_i^*$ و $\phi'_i = \phi_i^*$. در این صورت، (۸)

به شکل $\Delta V_i = \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i'$ یا معادلا"

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = \rho_i'^2 \sin \phi_i' \qquad (۹)$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، می‌توان (۹) را در (۵) گذارده به‌دست آورد

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i' \sin \phi_i' \cos \theta_i', \rho_i' \sin \phi_i' \sin \theta_i', \rho_i' \cos \phi_i')\, \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i'$$

$$= \iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \sin \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi,$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. در حالت کلی، بعضی از نواحی T_i غیرمستطیلی‌اند، ولی می‌توان نشان داد که این خدشه‌ای به اعتبار (۴) وارد نخواهد ساخت.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. بررسی شکل ۵۳ نشان می‌دهد که ناحیهٔ T_i درصورت کوچک بودن $\Delta\rho$، $\Delta\theta$، و $\Delta\phi$ تقریبا" مکعب مستطیلی است که چهار ضلع مستقیم‌آن به‌طول $\Delta\rho$، چهار ضلع خمیده‌اش مانند CD به طول تقریبی $\rho\Delta\phi$، و چهار ضلع خمیده‌اش مانند CE به طول تقریبی $\rho \sin \phi \Delta\theta$ اند، که در آن ρ و ϕ مختصات شعاعی و متمم عرض جغرافیایی نقطهٔ دلخواهی در T_i می‌باشند. لذا، حجم T_i تقریبا" مساوی است با $\rho^2 \sin \phi \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$ این وجود عبارت $\rho^2 \sin \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ در انتگرال سه‌گانه روی T' را توضیح داده، و به یاد آوردن فرمول (۴) را آسان می‌سازد.

حاجت به گفتن نیست که انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \sin \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

به کمک انتگرالهای مکرر حساب می‌شود؛ این امر در مثالهای زیر توضیح داده شده است.

مثال ۳. با استفاده از مختصات کروی مرکزگون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکرهٔ توپر T به شعاع a را پیدا کنید.

حل. این مسئله قبلا" در مثال ۳، صفحهٔ ۱۴۰۸، به کمک مختصات استوانه‌ای حل شده

است ، ولی حل آن در مختصات کروی آسانتر است . فرض کنیم T از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از پایین به صفحهٔ $z=0$ محدود باشد . مجددا" ، طبق تقارن ، $\bar{x}=\bar{y}=0$ ، و

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz,$$

که در آن $V=\frac{2}{3}\pi a^3$ حجم نیمکره است . با استفاده از قضیهٔ ۱۰ در تبدیل به مختصات کروی ، داریم

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz=\iiint_{T'}(\rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi,$$

که در آن T' جعبه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ است که به صفحات $\rho=0, \rho=a, \theta=0$ و $\theta=2\pi$ ، $\phi=0$ ، $\phi=\pi/2$ محدود است . با رفتن به انتگرال مکرر به دست می‌آوریم

$$\iiint_{T'}\rho^3\cos\phi\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^a\rho^3\cos\phi\sin\phi\,d\rho$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^a\rho^3\,d\rho\right)$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi a^4,$$

و درنتیجه ، مثل قبل ،

$$\bar{z}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{3}{8}a.$$

لذا ، مرکز گون T نقطهٔ $(0,0,\frac{3}{8}a)$ می‌باشد .

مثال ۴ . با استفاده از مختصات کروی ، گشتاور ماند I_l کرهٔ توپر همگن T به شعاع a حول محور l مار بر مرکزش‌را بیابید .

حل . با انتخاب مبداٴ دستگاه مختصات قائم x ، y ، و z ، که l محور x آن است ، به عنوان مرکز T خللی به کلیت وارد نمی‌شود . چون کرهٔ T همگن است ، چگالی δ ی آن ثابت می‌باشد . بنابراین ،

$$I_l=I_x=\delta\iiint_T(y^2+z^2)\,dV$$

$$= 2\delta \iiint_T z^2\, dV = \frac{2\delta}{3} \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\, dV,$$

که در آن از

$$\iiint_T x^2\, dV = \iiint_T y^2\, dV = \iiint_T z^2\, dV,$$

به خاطر تقارن، استفاده شده است. با تبدیل به مختصات کروی (بدون معرفی صریح ناحیهٔ T')، داریم

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{2\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{a} (\rho^2)\rho^2 \sin\phi\, d\rho \\ &= \frac{2\delta}{3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{a} \rho^4\, d\rho\right) \\ &= \frac{4\pi\delta}{3} \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{a} = \frac{8\pi\delta}{15} a^5. \end{aligned}$$

فرض کنیم M جرم کل T باشد. در این صورت،

$$M = \frac{4\pi\delta}{3} a^3,$$

درنتیجه، می‌توان I_l را به شکل فشردهٔ زیر نوشت:

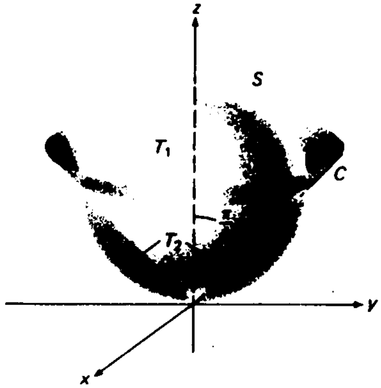
$$I_l = \frac{2}{5} Ma^2.$$

مثال ۵. فرض کنیم S کره‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$ باشد؛ یعنی، کره‌ای به شعاع a ومرکز $(0, 0, a)$. نشان‌دهید که مخروط C به‌معادلهٔ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ از محور z درون S را به دو قسمت تقسیم می‌کند که یکی سه برابر دیگری می‌باشد.

حل. در مثال ۲ دیدیم که S در مختصات قطبی به معادلهٔ

$$\rho = 2a\cos\phi$$

است. همانطور که شکل ۵۴ در مقطع عرضی نشان می‌دهد، پارچهٔ بالایی C درون S را به دو قسمت T_1 و T_2 تقسیم می‌کند، و مولدهای C با محور z زاویهٔ $\pi/4$ می‌سازند. لذا، حجم



شکل ۵۴

T_1 مساوی است با

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2a\cos\phi} \sin\phi \, d\phi$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi\right) = \frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right] = \pi a^3,$$

ولی حجم T_2 برابر است با

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 - V_1 = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

بنابراین ، $V_1 = 3V_2$ ؛ درنتیجه ، حجم T_1 سه برابر حجم T_2 می‌باشد .

در بخشهای ۶.۱۴ تا ۸.۱۴ طرز محاسبهٔ بعضی از انتگرالهای مضاعف و سه گانه را با رفتن از مختصات قائم به قطبی ، استوانه‌ای ، و کروی نشان دادیم . خواهیم دید که قضایای ۸ تا ۱۰ همه نتایجی هستند از یک بحث کلی تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه که در آخر بخش ۴.۱۵ مطرح شده است .

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید.

۱. $\rho = 1, \theta = \pi, \phi = \pi/2$ ✓

۲. $\rho = \sqrt{6}, \theta = 3\pi/4, \phi = \pi/3$ ✓

۳. $\rho = 4, \theta = 5\pi/6, \phi = \pi/6$ ✓

۴. $\rho = 2, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$ ✓

مختصات کروی نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید.

۵. $x = -1, y = 1, z = 1$ ✓ ۶. $x = 0, y = 1, z = -\sqrt{3}$ ✓

۷. $x = 4, y = -12, z = 3$ ✓ ۸. $x = 6, y = 2, z = 9$ ✓

معادلهٔ داده شده را از مختصات قائم به کروی تبدیل کنید.

۹. $x^2 + y^2 = 4$ ✓ ۱۰. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ✓

۱۱. $x^2 + y^2 = z^2$ ✓ ۱۲. $x^2 - y^2 = z^2$ ✓

انتگرال سه‌گانهٔ داده شده را با تبدیل مختصات قائم به کروی حساب کنید.

۱۳. ✓ $\iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T گوی $(a > 0)$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ است.

۱۴. ✓ $\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T ناحیهٔ توپر است که از بالا به کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و از پایین به مخروط $z = -\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ محدود است.

۱۵. ✓ $\iiint\limits_T yz\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T بخشی از غشاء کروی $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ است که در یکهشت‌اول قرار دارد.

۱۶. ✓ $\iiint\limits_T \frac{dx\, dy\, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن T ناحیهٔ توپرمحدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و پارچه‌های مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است.

۱۷. $\iiint\limits_T \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$ ، که در آن T گوی یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ است.

۱۸. $\iiint\limits_T \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ، که در آن T غشای کروی $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le e$ است.

۱۹. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \le z$ است.

۲۰. $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن T گوی $x^2+y^2+z^2 \le 3^{2/3}$ است.

با استفاده از مختصات کروی، حجم V ناحیهٔ توپر داده شدهٔ T را بیابید.

۲۱. T فصل مشترک کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4z-3$ با مخروط $z^2=4(x^2+y^2)$ است و درداخل مخروط قرار دارد.

۲۲. T داخل پارچه‌های مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ و بین کرات $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=16$ قرار دارد.

۲۳. T محصور به سطح $(x^2+y^2+z^2)^2=8z$ است.

۲۴. T محصور به سطح $(x^2+y^2+z^2)^3=xyz$ است.

۲۵. چگالی یک غشاء کروی به شعاع داخلی $10\,\text{cm}$ و شعاع خارجی $12\,\text{cm}$ در نقطهٔ متغیر P با فاصلهٔ P تا مرکز غشاء نسبت عکس دارد. جرم کل غشاء را در صورتی بیابید که چگالی در سطح داخلی‌اش $3\,\text{g/cm}^3$ باشد.

۲۶. مرکز گون بخش T از کرهٔ توپر $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $(a>0)$ را بیابید که در یکهشت اول قرار دارد.

۲۷. مرکز گون ناحیهٔ توپر T را بیابید که از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ محدود باشد.

۲۸. گشتاور ماند گوی توخالی همگنی به جرم M ، شعاع داخلی a_1 ، و شعاع خارجی a_2 را حول محور l مار بر مرکز آن بیابید. همچنین، گشتاور ماند یک غشاء کروی با جدارهٔ نازک به جرم M و شعاع a را حول چنین محور پیدا کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ مسطح

مساحت یک ناحیه و حجم زیر یک سطح به عنوان انتگرالهای مضاعف

انتگرالهای مکرر و موارد استعمال آنها در محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف

انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیهٔ توپر

حجم یک ناحیهٔ توپر به عنوان انتگرال سه‌گانه

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه برحسب انتگرالهای مکرر

محاسبهٔ جرم یک ناحیهٔ مسطح یا توپر به‌وسیلهٔ چگالی‌اش

مرکز جرم و گشتاورهای یک دستگاه از ذرات

مرکز جرم و گشتاورهای یک ورقه یا جسم جامد

مرکز گون یک ناحیهٔ مسطح یا توپر
مرکز جرم یک سیم با چگالی متغیر، مرکز گون یک منحنی
قضیهٔ پاپوس برای جسم دوار
قضیهٔ پاپوس برای سطح دوار
گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش
انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی
انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی

مسائل تکمیلی

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

۱. $\int_0^3 dy \int_0^1 xy\,dx$

۲. $\int_0^1 dx \int_{-1}^0 2^{x+y}\,dy$

۳. $\int_1^e dx \int_{1/x}^x \ln x\,dy$

۴. $\int_0^{\pi/2} dy \int_0^y \sin(x+y)\,dx$

۵. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx$

۶. $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr$

۷. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$$

را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ محدود به خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ باشد.

۸. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به محور x و منحنی

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi, a > 0)$$

(یک قوس کامل چرخزاد) باشد. نشان دهید که $\iint_R y\,dA = \frac{5}{2}\pi a^3$. مرکز گون R را پیدا نمایید.

۹. حجم ناحیهٔ توپر محدود به استوانهٔ بیضوی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$، صفحهٔ xy، و $z = \alpha x + \beta y + h$ را که بالای اثر استوانه در صفحهٔ xy قرار دارد بیابید.

۱۰. حجم ناحیهٔ توپر محدود به سهمی گون دوار $z = x^2 + y^2$، استوانه سهموی $y = x^2$ صفحهٔ xy، و صفحهٔ $y = 1$ را بیابید.

۱۱. حجم ناحیهٔ توپر جدا شده از استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ به وسیلهٔ سهمی گون

دوار $y^2 + z^2 = 4x$ را پیدا کنید.

۱۲. با استفاده از انتگرال مضاعف، نشان دهید هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته‌باشند، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \qquad \text{(یک)}$$

این **نامساوی کشی ـ شوارتز** برای انتگرالهاست (قس. نامساوی کشی ـ شوارتز برای مجموعها، که در مسئلهٔ ۴۷، صفحهٔ ۱۰۷۱، داده شده است).

راهنمایی. انتگرال مضاعف

$$\iint_R [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\,dx\,dy$$

را درنظر بگیرید، که در آن R مربع محدود به خطوط $x = a$، $x = b$، $y = a$، و $y = b$ است.

۱۳. نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ مثبت و پیوسته باشد، آنگاه

$$\sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \ge b - a. \qquad \text{(دو)}$$

۱۴. نامساوی (یک) را به ازای توابع $f(x) = e^x$ و $g(x) = x$ بر بازهٔ $[0, 1]$ تحقیق نمایید. نامساوی (دو) را به ازای تابع $f(x) = x$ بر بازهٔ $[1, 2]$ تحقیق نمایید.

۱۵. $\iiint_T \sin x \cos y \tan z\,dV$ را درصورتی حساب کنید که T جعبهٔ محدود بـه صفحات $x = 0$، $x = \pi/2$، $y = 0$، $y = \pi/6$، $z = 0$، و $z = \pi/3$ باشد.

۱۶. همانطور که در صفحهٔ ۷۰۹ نشان دادیم، حجم V جسم T حاصل از دوران نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ حول محور x از فرمول $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ به دست می‌آید. این فرمول را با استفاده از انتگرال سه‌گانه به دست آورید.

۱۷. چگالی یک ورقهٔ مربعی به ضلع 6 cm در نقطهٔ متغیر P با مجذور فاصلهٔ P تا یکی از رئوس مربع متناسب است. جرم کل ورقه را درصورتی بیابید که چگالی در مرکز مربع 3 g/cm^2 باشد.

۱۸. جرم کل جعبهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$، $y = 3$، و $z = 5$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = x + y + z$ باشد.

۱۹. جرم کل جسم واقع در یکهشت اول و محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$، صفحات مختصات، و صفحهٔ $3x + 2y = 6$ را درصورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = 12z$ باشد.

۲۰. نشان دهید که مرکز جرم یک‌دستگاه‌از سه‌ذره‌ٔ غیرهمصفحه‌ٔ A ، B ، و C به‌جرمهای مساوی در نقطهٔ تقاطع میانه‌های مثلث ABC قرار دارد.

۲۱. مرکز گون ناحیهٔ R محدود به سهمیهای $y^2 = 4 + 2x$ و $y^2 = 4 - 4x$ را بیابید.

۲۲. مرکز گون ناحیهٔ R محدود به منحنی $y = \cos x$ و خطوط $x = \pi/2$ و $y = 1$ را بیابید.

۲۳. مرکز گون ناحیهٔ R محصور به نمودار معادلهٔ $y^2 = x^2(1 - x^2)$ $(x \geq 0)$ رابیابید.

۲۴. مرکز جرم چهاروجهی T محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 1$ را در صورتی بیابید که چگالی T در نقطهٔ‌متغیر P با فاصلهٔ P تا صفحهٔ xz متناسب‌باشد.

۲۵. مرکزگون ناحیهٔ‌توپر T محدودبه‌صفحات $x = 1$ ، $x = 3$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و $y + 2z = 2$ را بیابید.

۲۶. مرکز گون‌ناحیهٔ توپر T محدود به سهمی گون بیضوی $z = 2x^2 + y^2$ و صفحهٔ $z = 4$ را پیدا کنید.

۲۷. مختصات قائم مرکز گون منحنی مسطح $r = 2(1 - \cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ را ،که‌نیمهٔ‌بالایی دلگون شکل ۶۵، صفحهٔ‌۱۰۰۴، است بیابید.

۲۸. مرکز گون منحنی مسئلهٔ ۸ (یک قوس‌کامل چرخزاد) را بیابید.

۲۹. با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V و مساحت A ناحیهٔ سه‌بعدی حاصل از دوران یک ناحیهٔ نیمه مستدیر به شعاع r را حول خط مماس موازی قطرش بیابید.

۳۰. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ حول خط $y = 3b$ دوران می‌کند. حجم V جسم دوار حاصل چقدر است؟

۳۱. گشتاور ماند I_l ناحیهٔ محدود به سهمی $x = y^2$ و خط $x = 1$ را حول خط l به‌معادلهٔ $y = 1$ بیابید.

۳۲. گشتاور ماند قطبی I_O ناحیهٔ محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای‌مختصات را بیابید.

گشتاور ماند I_z ناحیهٔ توپر محدود به سطوح زیر حول محور z رابیابید.

۳۳. کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر.ک. مسئلهٔ ۱۵ ، صفحهٔ‌۱۳۵۳)

۳۴. سهمی گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (ر.ک. مسئلهٔ‌۲۲ ، ۱۳۵۴)

۳۵. با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال

$$\iint_R \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

را که درآن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \leq 1$ است حساب کنید.

۳۶. با استفاده از مختصات قطبی، مثال ۶، صفحهٔ‌۱۳۳۴، را به صورتی دیگر حل کنید.

انتگرال مکرر داده شده را با تبدیل آن به مختصات قطبی حساب کنید.

۳۷. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\, dy$

۳۸. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx$

۳۹. با استفاده از مختصات قطبی، مساحت A ی ناحیهٔ R محصور به منحنی $(x^2+y^2)^2 = 2x^3$ را بیابید.

۴۰. مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y})$ ناحیهٔ R مسئلهٔ قبل را بیابید.

۴۱. گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a را حول محور l که در نقطه‌ای از محیط قرص بر آن عمود است بیابید.

۴۲. انتگرال مکرر

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$$

را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حساب کنید.

۴۳. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، حجم ناحیهٔ توپر بین سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید.

۴۴. نشان دهید که طول منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

در مختصات قطبی مساوی است با

$$L = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2}\, dt,$$

که درآن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. پس از نوشتن معادلات پارامتری مارپیچ مستدیر $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ در مختصات استوانه‌ای، از فرمول فوق استفاده کرده طول یک دور مارپیچ را پیدا نمایید (قس. مثال ۳، صفحهٔ ۱۱۷۶).

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید.

۴۵. $\rho = 2, \theta = \pi/3, \phi = \pi/2$

۴۶. $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi, \phi = 3\pi/4$

۴۷. $\rho = \sqrt{3}, \theta = \pi/4, \phi = \pi/3$

مختصات کروی نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

۴۸. $r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = -1$

۴۹. $r = 2, \theta = \pi/6, z = 2$

۵۰. $r = 3, \theta = \sqrt{\pi}, z = 4$

۵۱. انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$$

را با تبدیل به مختصات کروی حساب کنید.

۵۲. چگالی نیمکرهٔ توپر $x^2+y^2+z^2 \leq 2ay, z \geq 0$ به شعاع a در نقطهٔ متغیر P مساوی فاصلهٔ P تا مبداء است. جرم کل نیمکره را پیدا نمایید.

۵۳. گشتاور ماند یک کرهٔ توپر به جرم M و شعاع a را حول یک خط مماس آن بیابید.

۵۴. مقدار میانگین تابع $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را روی گوی $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ به شعاع a بیابید (ر.ک. مسئلهٔ ۳۲، صفحهٔ ۱۳۵۵). این عدد را می‌توان " فاصلهٔ متوسط " بین نقاط گوی و مرکزش درنظر گرفت.