مدل سازی و ارزیابی سیستم های کامپیوتری

امتحان پایان ترم ۷۰٪
ارایه مقاله ۱۵٪
گزارش پژوهشی ۱۵٪

مراجع درس:

1-“Introduction to computer system performance Evaluation”, k.kant, Mcgraw-Hill/1992.

(كتاب اصلي درس است).

2-“Performance modeling of communication Networks and computerArchitecture”, Peter G. Harison and Naresh M. pattle, Addison- wesley pub 1td/1993.

3-“Computer systems performance evaluation”, O. ferrari, 1978/prentice- Hall Inc.

4-“Computer systems performance Modeling”, C.H. sauer and K.M. chandy, prentice- Hall/1981.

5-“Reversibility and stochastic Networks”, F.P Kelly, John-willey/1979.

6. "Performance by Design: Computer capacity planning by example." Prentice Hall, 2004 (NEW

7. " Capacity Planning for web Services: metrics, models, and methods," Prentice Hall. 2002 (translated into Russian and Portuguese).

8. "Scaling for E-Business: technologies, models, performance, and capacity planning." Prentice Hall, 2000 (translated into Korean)

10. " Capacity Planning and performance Modeling: form mainframes to client-server System", Prentice- Hall, 1998.

9. " Capacity Planning for Web Performance: metrics, models, and methods", Prentice Hall, 1998.

ضرورت بررسی احتمالی

- **ضرورت بررسی احتمالی**
  - عدم قطعیت فرایند ها (سیستم های چند پردازنده ای و چند برنامه ای)
  - برای انتخاب یک مدل احتمالی مناسب می توان پدیده مورد نظر را نمونه برداری نموده و با توزیع مناسب پرامترهای سیستم را تخمین نمود.
- **فضای نمونه**
  - دسترسی اطلاعات توسط CPU
  - طاس
- **پیشامد**
- **احتمال**

متغیر تصادفی گسسته

- به X یک متغیر تصادفی گسسته گفته می‌شود اگر تعداد مقادیر امکان‌پذیر X متناهی (finite) یا قابل شمارش (شمارا) (countably finite) باشد.

- برای مثال کارهای وارده به یک کارگاه را در نظر بگیرید:
  - تعداد کارهای وارده در یک هفته را با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم.
  - فضای برد (range space) مقادیر امکان‌پذیر X را با R_X نشان می‌دهیم: $R_X=\{0, 1, 2, \ldots\}$
  - احتمال اینکه مقدار متغیر برابر با x_i باشد را با p(x) نشان می‌دهیم: $p(x_i) = P(X = x_i)$

- $p(x_i)$ برای $i = 1, 2, \ldots$ باید در شرایط زیر صدق کند:

1. $p(x_i) \geq 0, \text{ for all } i$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

- به مجموعه زوجهای مرتب $[x_i, p(x_i)]$، $i=1, 2, \ldots$ توزیع احتمالی (probability distribution) و به $p(x_i)$ تابع جرم احتمالی (pmf: probability mass function) متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

متغیر تصادفی گسسته

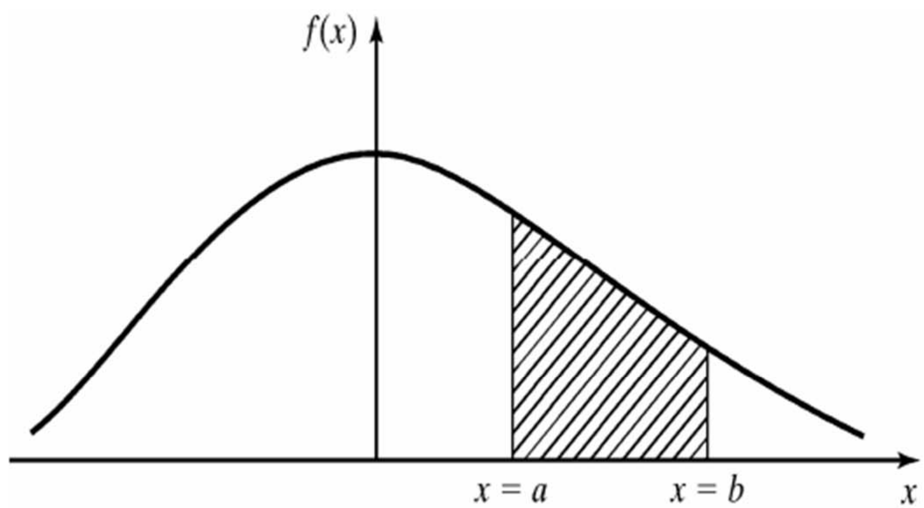
- **مثال**
- **یک مجموعه ای ۱۰۰ تایی از برنامه های کامپیوتری مورد بررسی قرار گرفت و ۲۰ برنامه خطای syntax ، ۱۰ برنامه خطایی I/O ، ۵ برنامه other، ۶ برنامه Syntax && I/O، ۳ برنامه syntax && other، ۲ برنامه شامل I/O && other و یک برنامه شامل هر نوع خطا می باشد.**
- **احتمال اینکه برنامه شامل خطای syntax یا I/O و یا هر دو خطا شود؟**
- **احتمال اینکه برنامه خطا داشته باشد؟**
- **احتمال اینکه برنامه خطا نداشته باشد؟**

متغیر تصادفی پیوسته

- به X یک متغیر تصادفی پیوسته گفته می‌شود اگر فضای برد (R_x) آن یک بازه (پیوسته) یا مجموعه‌ای از بازه‌ها باشد.

- احتمال اینکه X در بازه [a, b] قرار گرفته باشد به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



- به $f(x)$ تابع چگالی احتمالی (pdf: probability density function) گفته می‌شود.

متغیر تصادفی پیوسته

- $f(x)$ باید در شرایط ذیل صدق نماید:

$$1.\ \ f(x) \geq 0\ ,\ \ \text{for all } x \text{ in } R_X$$

$$2.\ \ \int_{R_X} f(x)\,dx = 1$$

$$3.\ \ f(x) = 0,\ \ \text{if } x \text{ is not in } R_X$$

- خصوصیتها:

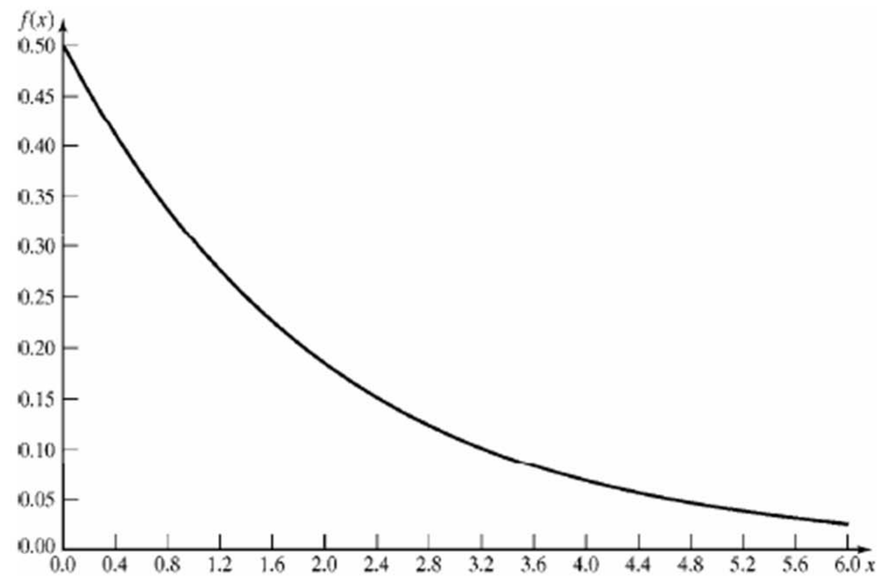
$$1.\ \ P(X = x_0) = 0,\ \text{because} \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

$$2.\ \ P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

متغیر تصادفی پیوسته

- مثال: فرض کنید که X یک متغیر تصادفی پیوسته که نماینده طول عمر یک دستگاه بوده و دارای **pdf** زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2}, & \mathrm{x}\geq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$



  - بعداً خواهیم دید که X دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ سال است.

- احتمال اینکه طول عمر دستگاه بین ۲ تا ۳ سال باشد برابر خواهد بود با:

$$P(2\leq x\leq 3)=\frac{1}{2}\int_{2}^{3}e^{-x/2}dx=0.14$$

تابع توزیع تجمعی

- تابع توزیع تجمعی (cumulative distribution function (cdf)) یک متغیر تصادفی X با F(X) یا F_x نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - $F(x) = F_x = P(X <= x)$
  - اگر X گسسته باشد: $$F(x) = \sum_{\substack{\text{all} \\ x_i \le x}} p(x_i)$$
  - اگر X پیوسته باشد: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
- خصوصیت‌ها:

1. F is nondecreasing function : If $a < b$, then $F(a) \le F(b)$
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

- همه پرسشهای احتمالی در باره X بر حسب cdf قابل پاسخگویی است. برای مثال:

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a), \text{ for all } a < b$$

تابع توزیع تجمعی

- برای مثال در مورد توزیع احتمالی دستگاه مورد بحث خواهیم داشت:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2} dt = 1 - e^{-x/2}$$

- احتمال اینکه این دستگاه کمتر از دو سال عمر کند چقدر است؟

$$P(0 \le X \le 2) = F(2) - F(0) = F(2) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

- احتمال اینکه این دستگاه دو الی سه سال عمر کند چقدر است؟

$$P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = (1 - e^{-(3/2)}) - (1 - e^{-1}) = 0.145$$

فرایند تصادفی

- **اعداد تصادفی (random numbers):** اعداد حقیقی مستقلی هستند که به‌صورت یکنواخت در بازه $[0, 1)$ توزیع شده‌اند:
  - **این اعداد حاصل الگوریتم‌های تولید اعداد تصادفی (R.N. Generator) یا اعداد شبه‌تصادفی (Pseudo R.N.G.) هستند.**
  - **در قالب جدولهایی از اعداد تصادفی نیز در دسترس هستند.**

- **متغیر تصادفی (random variable):** یک تابع ریاضی است که برآمدهای (outcome) یک آزمایش تصادفی را به اعداد نگاشت می‌کند. برای مثال یک متغیر تصادفی می‌تواند برای توصیف فرآیند پرتاب یک تاس و برآمدهای احتمالی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ استفاده شود.

فرایند تصادفی

- **تعریف ریاضی متغیر تصادفی:** تابعی به‌صورت زیر است:

$$X : \Omega \;\rightarrow\; R_X$$

که در آن X یک متغیر تصادفی، Ω یک فضای احتمالی (probability space) و R_X یک فضای برد (range space) است.

- **اگر R_X گسسته باشد:**
  - $p(x_i)$ = probability X is $x_i = P(X = x_i)$ is called **pmf** (تابع جرم احتمالی)
  - $[x_i, p(x_i)]$ is called discrete probability distribution
- **اگر R_X پیوسته باشد:**
  - $p(x) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$ is called **pdf** (تابع چگالی احتمالی)

فرایند تصادفی

- فرآیند تصادفی **(stochastic or random process)**: اگر به هرکدام از مقادیر متغیر تصادفی X یک اندیس زمان منسوب کنیم، X یک فرآیند تصادفی خواهد بود، که به‌صورت $\{X(t),\ t\in T\}$ یا $\{X_t,\ t\in T\}$ نشان داده می‌شود.
  - **اگر X یک فرآیند تصادفی باشد، X(t) یک متغیر تصادفی است.**
  - **در نتیجه فرآیند تصادفی X عناصر فضای دو بعدی $\boldsymbol{\Omega \times T}$ را به عناصر $\boldsymbol{R_X}$ نگاشت می‌کند:**

$$X:\ \Omega \times T \rightarrow R_X$$

  - **به t پارامتر زمان (time parameter) گفته می‌شود که می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد:**
    - **در حالت گسسته (discrete-parameter):** $T = N_0 = \{0, 1, \ldots\}$
    - **در حالت پیوسته (continious-parameter):** $T = (0, \infty)$ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت)
  - **به مجموعه مقادیر X(t)،** فضای حالت **فرایند تصادفی گفته می‌شود (state space) که با $\boldsymbol{S}$ نشان داده می‌شود و می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد:**

$$S = \{y: X(t) = y, \text{ for some } t \in T\}.$$

  - **در حالتی که فضای حالت گسسته باشد، به فرآیند، زنجیره (chain) گفته می‌شود.**

امید ریاضی

متغیر تصادفی

گسسته (تعداد خطوط آزاد) تابع توزیع

پیوسته (زمان عمر دیسک) تابع چگالی

امید ریاضی

متغیر گسسته

$$E[X] = \sum_{x=i} xi * p[xi]$$

متغیر پیوسته

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx$$

واریانس

واریانس

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (\mathrm{x}) = \sum_{xi} \big(xi - E(x)\big)^2 P(xi)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(xi - E(x)\big)^2 f(x) dx$$

به جذر واریانس انحراف معیار(standard deviation (SD)
گفته می شود

مقدمه ای بر احتمالات

مثال اگر ۳ ترمینال داشته باشیم متغیر تصادفی گسسته x را تعداد سرکشی برای یافتن ترمینال آزاد تعریف کنیم و تابع احتمال بصورت زیر تعریف کنیم

P(1)= .6, p(2)= .3, p(3)=.1

احتمال سرکشی ۲ بار و کمتر ؟

امید ریاضی؟

انحراف معیار؟

مقدمه ای بر احتمالات

احتمال شرطی

$$P[A|B]=\begin{cases}\frac{P(A\cap B)}{P(B)} & p(B)>0\\ 0 & p(B)=0\end{cases}$$

مثال

احتمال دریافت پیام از خطوط ۱ تا ۵ به ترتیب ۲۰، ۳۰، ۱۰، ۱۵، ۲۵ درصد باشد و احتمال اینکه پیام دریافتی بیشتر از ۱۰۰ کاراکتر باشد برابر است با ۴۰، ۶۰، ۲۰، ۸۰، ۹۰ باشد

احتمال دریافت یک پیام بیش از ۱۰۰ کراکتری ؟

A **پیشامدی که پیغام انتخاب شده بیش از ۱۰۰ کراکتر باشد**

A_i **پیشامدی که پیغام در خط i دریافت شده باشد**

P(A)=P(A1)*P(A|A1)+ P(A2)*P(A|A2)+……

مقدمه ای بر احتمالات

- شمارش

- N1*N2
- P(n,k)=$\frac{n!}{(n-k)!}$
- c(n,k)=$\frac{n!}{(n-k)!*k!}$

مقدمه ای بر احتمالات

مثال

فرض می کنیم 5 ترمینال توسط یک خط ارتباطی به سیستم کامپیوتری متصل شده اند

$S=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

فضای نمونه؟

احتمال آمادگی 3 از 5 ترمینال؟

توزیع برنولی

توزیع برنولی ؟ احتمال p پیروزی و 1-p شکست

توزیع دو جمله ای ؟ هر گاه در n بار آزمایش k بار موفقیت داشته باشیم

$$p\ (x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

مثال

یک کمپانی تجاری دارای ۲۰ خط ارتباطی مستقل می باشد احتمال مشغول بودن هر خط ۰.۶ باشد، احتمال حداقل ۱۰ خط مشغول باشد؟

توزیع هندسی

توزیع هندسی – اگر آزمایش بر نولی راتا اولین موفقیت انجام دهیم و x تعداد آزمایش های لازم برای بدست آوردن اولین موفقیت باشد xرا متغییر تصادفی هندسی می نامند

$$P_x\ (k) = pq^{k-1} \text{ k=1,2,3,4,...}$$

میانگین و واریانس این نوع متغیر تصادفی برابر است با

$$E(x) = \frac{q}{p}, Var(x) = \frac{q}{p^2}$$

توزیع پواسن

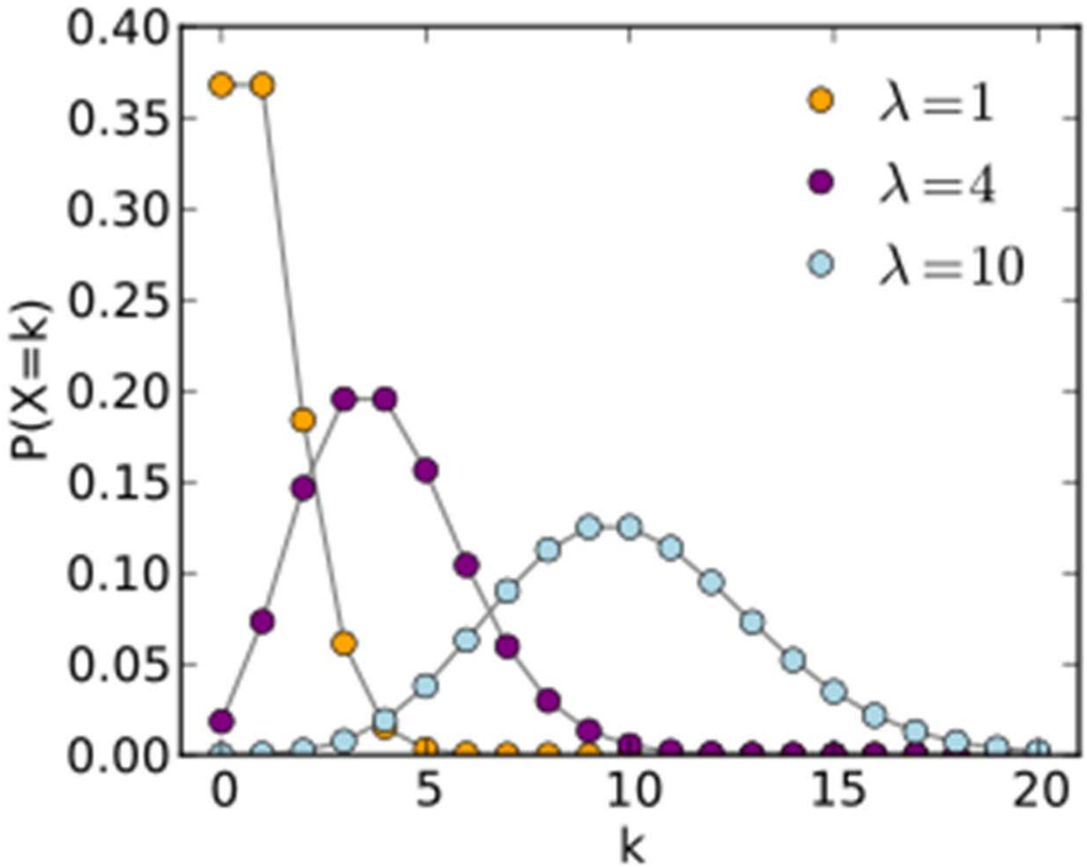
احتمال اینکه یک حادثه به تعداد مشخصی در فاصله زمانی یا مکانی ثابتی رخ دهد را شرح می دهد، به شرط اینکه این حوادث با نرخ میانگین مشخصی و مستقل از زمان آخرین حادثه رخ دهند.
مثلا برای شمارش ایمیل های دریافتی در یک روز

اگر امید ریاضی ظهورها در این بازه λ باشد، احتمال اینکه دقیقاً k ظهور داشته باشیم

$$p(x = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

میانگین و واریانس متغیر تصادفی که دارای توزیع پواسن باشد عبارتست از λ

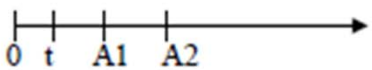
توزیع پواسن



توزیع پواسن

- اگر فاصله زمانی [0, t] را در نظر بگیریم، احتمال اینکه در این فاصله رخدادی اتفاق نیافتد:

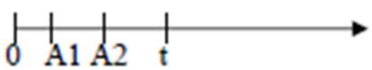
$$P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0! = e^{-\lambda t}$$



- A1 اولین رخداد، A2 دومین رخداد، ...
- فرمول فوق در واقع یعنی:

$$P\{A1>t\} = P\{N(t)=0\}$$

- حال می‌توانیم احتمال رخداد A1 را قبل از t بدست آوریم:



- در این صورت حداقل A1 قبل از t رخ داده است، پس:

$$P\{A1\leq t\} = 1 - P\{A1 > t\} = 1\text{-}P\{N(t)=0\} = 1\text{-}\ e^{-\lambda t}$$

که CDF توزیع نمایی است و نشان می‌دهد که احتمال رخداد A1، طبق توزیع نمایی با نرخ λ است.

- همین طور می‌توان نشان داد که توزیع رخدادهای بعدی، A2، A3، ... An، نیز نمایی با نرخ λ است.
- از اینرو نتیجه‌گیری می‌کنیم که توزیع زمانهای بین ورود در فرآیند پواسان دارای توزیع نمایی است.

توزیع پواسن

- خاصیت ۱: انشعاب تصادفی (random splitting):
  - فرآیند پواسان $\{N(t), t\geq 0\}$ را با نرخ λ در نظر بگیرید.
  - همچنین، فرض کنید که این فرآیند شامل دو نوع رخداد است: نوع ۱ و نوع ۲.
  - این دو نوع رخداد مستقل از هم اتفاق می‌افتند و احتمال اولی **p** و احتمال دومی **1-p** است.
  - حال فرض کنید که $N1(t)$ و $N2(t)$ به‌ترتیب معرف تعداد رخدادهای نوع ۱ و ۲ باشند که در $[0, t]$ اتفاق می‌افتند.
  - در این‌صورت خواهیم داشت: $N(t) = N1(t) + N2(t)$

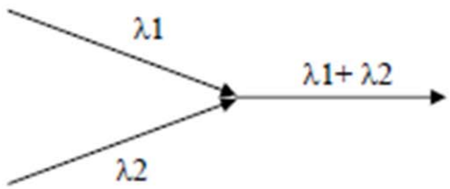
  - در این صورت می‌توان نشان داد که $N1(t)$ و $N2(t)$ هم فرآیندهای پواسان با نرخ‌های λp و $\lambda(1-p)$ هستند.
  - انشعاب به بیش از دو نیز امکان‌پذیر است. ولی در هر حال باید $\Sigma p_i = 1$.

توزیع پواسن

- **خاصیت ۲: فرآیند ادغامی (pooled process):**
  - حالت عکس انشعاب هم وجود دارد. یعنی دو فرآیند پواسان مستقل با هم ادغام شوند.
  - یعنی اگر دو فرآیند پواسان $N1(t)$ و $N2(t)$ با نرخ‌های $\lambda 1$ و $\lambda 2$ با هم ترکیب شوند، آنگاه حاصل:

$$N(t) = N1(t) + N2(t)$$

نیز یک فرآیند پواسان با نرخ $\lambda = \lambda 1 + \lambda 2$ خواهد بود.



  - حالت بیش از دو نیز امکان‌پذیر است. یعنی بیش از دو فرآیند پواسان مستقل با هم ادغام شوند. در این صورت باید $\lambda = \sum \lambda_i$.

توزیع نمایی

توزیع نمایی بیشتر در تخمین زدن مدت زمان لازم برای رخداد یک پیشامد خاص استفاده می‌شود.(اگر برای n پیشامد تعریف شود از توزیع گاما استفاده می شود)

برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم‌اکنون) تا رخداد یک زمین‌لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفنی اشتباه، و ... متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند.

توزیع نمایی به عنوان توصیف کننده زمان بین دو رویداد در فرایند پواسن به طور طبیعی ظاهر می‌شود.

خاصیت بی حافظگی

توزیع نمایی

تابع چگالی

$$f(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

توزیع نمایی

مثال

اگر زمان استفاده هر کلاینت از سرور با توزیع نمایی با مقدار میانگین ۳۶ دقیقه باشد

احتمال اینکه یک کلاینت کمتر از ۳۰ دقیقه ترمینال را اشغال کند؟

احتمال اینکه یک کلاین بیش از یک ساعت ترمینال را اشغال کند؟

احتمال اینکه اگر یک کلاینت یک سرور را قبلا ۳۰ دقیقه اشغال نموده و احتمال اینکه بیش از یک ساعت دیگر اشغال نماید؟

توزیع نمایی

- تعریف: یک متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ که λ>0 است، اگر تابع چگالی احتمالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

- یا اگر **CDF** آن به‌صورت زیر باشد:

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}, x\geq 0$$

- و امیدریاضی آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

- و واریانس آن:

$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2$

$$\boxed{E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}}$$

توزیع نمایی

- خواص توزیع نمایی: یک متغیر تصادفی X را بدون حافظه (بی‌حافظه) (memoryless) گویند اگر برای تمام مقادیر $s \geq 0$ و $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$P\{X>s+t|X>s\} = P\{X>t\}$$

- مثال:
  - اگر ما X را متغیر تصادفی متناظر با عمر یک دستگاه تصور کنیم، آنوقت این رابطه می‌گوید که احتمال اینکه دستگاه حداقل s+t ساعت عمر کند، وقتی بدانیم برای s ساعت کارکرده است، درست برابر است با همان احتمال اولیه‌ای که دستگاه از ابتدا حداقل t ساعت عمر کند.
  - به عبارت دیگر اگر دستگاه در زمان s هنوز قابل استفاده باشد، آنوقت توزیع زمان باقیمانده عمر آن همان توزیع عمر اولیه آن است.
  - یعنی، دستگاه به‌خاطر نمی‌آورد که قبلاً برای مدتی به‌طول s مورد استفاده قرار گرفته است.

توزیع نمایی

- رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\underline{X > t+s}$$

$$P[X > t+s | X > s] = \frac{P[X > t+s, X > s]}{P[X > s]}$$

$$= \frac{P[X > t+s]}{P[X > s]}$$

$$= \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)}$$

- با جاگذاری در مورد توزیع نمایی:

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$= P[X > t]$$

توزیع نمایی

- مثال: فرض کنید مدت زمانی که یک مشتری در بانک صرف می‌کند، دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه باشد:

  ۱. احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۱۵ دقیقه وقت در بانک صرف کند چقدر است؟
  ۲. احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۱۵ دقیقه در بانک صرف کند، وقتی بدانیم که بعد از ۱۰ دقیقه هنوز در بانک است چقدر است؟

- حل:

  ۱. اگر X نماینده مدت زمانی باشد که مشتری در بانک صرف می‌کند، خواهیم داشت:

$$\lambda=1/10 \quad => P\{X>15\} = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} = e^{-1.5} \approx 0.220$$

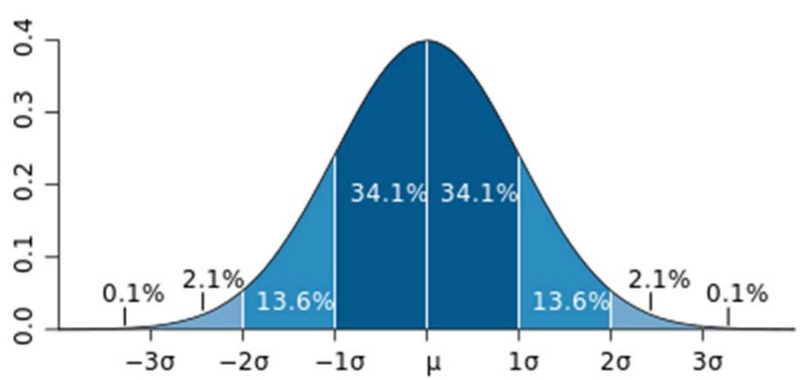
  ۲. احتمال اینکه "یک مشتری که ۱۰ دقیقه در بانک بوده ، حداقل ۵ دقیقه دیگر در بانک بماند" را می‌خواهیم بدست بیاوریم.

چون توزیع نمایی "به‌خاطر نمی‌آورد" که مشتری ۱۰ دقیقه در بانک بوده، پس این احتمال برابر است با احتمال اینکه یک مشتری تازه وارد حداقل ۱۵ دقیقه در بانک بماند:

$$P\{X>15|X>10\} = P\{X>5\} = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0.664$$

توزیع نرمال (طبیعی)

یکی از مهمترین توزیع‌های احتمالی پیوسته در نظریه احتمالات است. علت نام‌گذاری و همچنین اهمیت این توزیع، هم‌خوانی بسیاری از مقادیر حاصل شده، هنگام نوسان‌های طبیعی و فیزیکی پیرامون یک مقدار ثابت با مقادیر حاصل از این توزیع است. بعنوان مثال، با اینکه متغیرهای زیادی بر میزان خطای اندازه‌گیریِ یک کمیت اثر می گذارند، (مانند خطای دید، خطای وسیله اندازه‌گیری، شرایط محیط ، مثال دیگری از این نوسان‌های طبیعی، طول قد، وزن یا بهره هوشی افراد است).



توزیع نرمال (طبیعی)

فرض کنید تعداد پیغام های بافر شده در یک سیستم کامپیوتری که با متغییر تصادفی توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و با انحراف معیار ۱۰ باشد احتمال تعداد بافرهای استفاده شده در شرایط زیر

۱- بیشتر از ۱۲۰ بافر نباشد

۲- بیشتر از ۱۳۰ بافر باشد

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

فصل سوم مارکف

مقدمه

- نظریه فرآیندهای مارکوف منتسب به ریاضیدان روسی به نام A. A. Markov (۱۸۵۶-۱۹۲۲) است که از افراد پیشتاز در تحقیقات سیستماتیک توصیف ریاضی فرآیندهای تصادفی است.
- فرآیند مارکوف (Markov process) ابزاری بسیار منعطف، قوی و کارآ برای توصیف و تحلیل خصوصیت‌های سیستمهای پویای کامپیوتری و غیرکامپیوتری هستند.
- از مزایای این مدلها در مورد سیستمهای کامپیوتری، محاسبه و استخراج آسان معیارهای کارآیی و اتکاءپذیری از آنها است.

تقسیم بندی فرایندهای تصادفی بر اساس زمان

- اگر تعداد نقاط زمانی یک فرآیند تصادفی (یعنی |T|) متناهی یا قابل شمارش (شمارا) (countable) باشد، آنگاه به آن فرآیند تصادفی گسسته-زمان (discrete-time random process) گفته می‌شود.
- اما اگر تعداد نقاط زمانی یک فرآیند تصادفی (یعنی |T|) غیر قابل شمارش (uncountable) باشد، آنگاه به آن فرآیند تصادفی پیوسته-زمان (continuous-time random process) گفته می‌شود.
- برای مثال:
  - اگر X(t) تعداد خطاها اتفاق افتاده در یک سیستم تا زمان t باشد، چون $t \in R$، X(t) یک فرآیند تصادفی پیوسته-زمان خواهد بود.
  - اما اگر X(t) تعداد خطاها اتفاق افتاده در یک سیستم در روزهای مختلف سال باشد، چون $t \in \{1..365\}$، X(t) یک فرآیند تصادفی گسسته-زمان خواهد بود.

تقسیم بندی فرایندهای تصادفی بر اساس فضای حالت

- فرض کنید که X یک فرآیند تصادفی باشد. فضای حالت (state space) فرآیند تصادفی که با S نشان داده می‌شود، مجموعه همه مقادیر ممکنی است که X می‌تواند داشته باشد. یعنی:

$$S = \{y: X(t) = y, \text{ for some } t \in T\}$$

- اگر فضای حالت S یک فرآیند تصادفی X متناهی و قابل شمارش باشد (یعنی {... ,3 ,2 ,1}=S) آنگاه گفته می‌شود که X یک فرآیند تصادفی گسسته-فضا (discrete-space R.P.) است.
  - برای مثال اگر X یک فرآیند تصادفی باشد که تعداد بسته‌های خراب دریافت شده را نمایش می‌دهد، آنگاه X یک فرآیند تصادفی گسسته-فضا خواهد بود.
- اگر فضای حالت S یک فرآیند تصادفی X نامتناهی و غیر قابل شمارش باشد (مثلاً $S=R$) آنگاه گفته می‌شود که X یک فرآیند تصادفی پیوسته-فضا (continuous-space R.P.) است.
  - برای مثال اگر X یک فرآیند تصادفی باشد که ولتاژ خط تلفن را نشان می‌دهد، آنگاه X یک فرآیند تصادفی پیوسته-فضا خواهد بود.

فرایند مارکوف

- یک نوع خاص از فرآیندهای تصادفی که مورد بررسی دقیق‌تر قرار می‌دهیم، فرآیند مارکوف (Markov process) نامیده می‌شود.
- یک فرآیند مارکوف به‌طور غیرصوری به‌شکل زیر تعریف می‌شود:
  - با داشتن حالت (state) یا مقدار (value) یک فرآیند مارکوف X در زمان t (یعنی X(t))، رفتار آینده X به‌طور کامل بر حسب X(t) قابل توصیف خواهد بود.
- فرآیند مارکوف دارای این خاصیت سودمند است که رفتار آینده آن مستقل از مقادیر گذشته آن است. یعنی بی‌حافظه است.
- به بیان دقیق‌تر، فرآیند مارکوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - فرآیند {X(t)} دارای خاصیت مارکوفی یا بی حافظگی است اگر با داشتن مقدار X(t) در زمان $t \in T$ مسیر آینده X(s) برای $s > t$ به دانستن اینکه سابقه گذشته X(u) برای $u < t$ چه بوده است بستگی نداشته باشد. یعنی برای $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ داشته باشیم:

$$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, \ldots, X(t_1) = x_1] = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n]$$

زنجیره مارکوف

- یک زنجیره مارکوف (Markov chain)، یک فرآیند مارکوف دارای فضای حالت گسسته است.
- ما همیشه فرض می‌کنیم که یک زنجیره مارکوف دارای فضای حالتی در مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots\}$ است و نیز زمان - همگن (time-homogeneous) است.
- همگن‌بودن زمان زنجیره مارکوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - رفتار سیستم به اینکه چه موقع سیستم مشاهده شده است وابسته نباشد.
  - به عبارت دقیق تر، نرخهای گذر (transition rates) بین حالتها مستقل از زمانی که گذر در آن اتفاق می افتد باشد. بنا بر این برای همه tها و sها داشته باشیم:

$$\mathrm{P}[X(t + k) = x_{\mathrm{k}} \mid X(t) = x_{\mathrm{j}}] = \mathrm{P}[X(s + k) = x_{\mathrm{k}} \mid X(s) = x_{\mathrm{j}}].$$

- زنجیره مارکوف در دو حالت گسسته زمان و پیوسته زمان بررسی خواهد شد

زنجیره مارکوف گسسته زمان

- یک زنجیره مارکوف گسسته-زمان (DTMC: discrete-time M.C.) است اگر:

$$P\left[X(t+k)=j \middle| X(t)=i, X(t-1)=n_{t-1}, X(t-2)=n_{t-2}, \ldots, X(O)=n_O\right]$$
$$= P\left[X(t+k)=j \middle| X(t)=i\right] \quad (1)$$
$$= P_{ij}^{(k)} \quad (2)$$

- توجه کنید که به ازای **i** و **j** داده شده، $P_{ij}^{(k)}$ یک عدد است.
- $P_{ij}^{(k)}$ می‌تواند به‌عنوان احتمال اینکه اگر **X** دارای مقدار **i** است بعد از **k** *گام زمانی* **(time-step)** دارای مقدار **j** بشود، توصیف شود.
- اغلب از P_{ij} به‌جای $P_{ij}^{(1)}$ استفاده می‌شود: *احتمال یک گامی* **(one-step probability)**.

بردار احتمال اشغال حالت

- حال بردار احتمال اشغال حالت (state occupancy probability vector) را تعریف می‌کنیم:
  - فرض کنید که π یک بردار ردیفی (row vector) باشد. عنصر i–ام این بردار را با π_i نشان می‌دهیم: $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_{|S|}]$
  - اگر π یک بردار اشغال حالت باشد، آنگاه $\pi_i(k)$ احتمال آن خواهد بود که DTMC بعد از k گام زمانی دارای مقدار i بشود (یا در حالت i باشد).
  - فرض کنید که یک DTMC که با X نشان می‌دهیم دارای فضای حالت به اندازه n است (یعنی $S = \{1, 2, \ldots, n\}$). به‌طور صوری می‌گوییم که:

$$\pi_i(k) = P[X(k) = i]$$

  - توجه کنید که برای همه زمانهای k داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(k) = 1$$

محاسبه بردار احتمال اشغال حالت

- بنابر این با توجه به آنچه که دیدیم داریم:

$$\pi_j(1) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(0) P_{ij}$$

  که برای همه مقادیر **j** صادق است.

- محاسبه فوق مشابه ضرب بردار در ماتریس است.
- در حقیقت اگر ماتریس $\mathbf{P = \{p_{ij}\}}$ را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

  - که به آن ماتریس احتمال گذر **(transition probability matrix)** می‌گوییم.
- آنگاه $\mathbf{p_{ij} = P_{ij}}$ و $\mathbf{\pi(1) = \pi(0)\ P}$، که در آن $\mathbf{\pi(0)}$ و $\mathbf{\pi(1)}$ بردارهای ردیفی هستند و $\mathbf{\pi(0)\ P}$ یک ضرب بردار در ماتریس است.
- نتیجه مهمی که حاصل می‌شود این است که ما می‌توانیم به آسانی یک **DTMC** را بر حسب یک بردار احتمال اشغال حالت (π) و یک ماتریس احتمال گذر $(\mathbf{P})$ مشخص کنیم.

رفتار حالت گذرای زنجیره مارکوف- گسسته زمانی

- با داشتن $\pi(0)$ و P، چطور می‌توان $\pi(k)$ را محاسبه نمود؟
- حالت عمومی رابطه قبلی به‌صورت زیر است:

$$\pi(k) = \pi(k-1)P.$$

- همچنین، چون $\pi(k-1) = \pi(k-2)P$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\pi(k) = (\pi(k-2)P)P = \pi(k-2)P^2$$

- به‌طور مشابه، چون $\pi(k-2) = \pi(k-3)P$ خواهیم داشت:

$$\pi(k) = [(\pi(k-3)P]P^2 = \pi(k-3)P^3$$

- با تکرار عمل فوق به‌آسانی می‌توان دید که داریم:

$$\pi(k) = \pi(0)P^k$$

فصل سوم مارکف

- در فرایند مارکف احتمال اینکه در حالت i بوده احتمال انتقال به حالت J را با رابطه زیر بدست می آموریم
- $P_{ij} = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$
- احتمالات انتقال یک مرحله ای P_{ij} به صورت ماتریس بیان می شود که جمع سطر ها برابر یک می باشد
- معادلات چپمن-کولموگرف
- اگر احتمال انتقال چند مرحله ای $P^n{}_{ij}$ که عبارتست از احتمال اینکه
- در وضعیت i بوده و پس از n انتقال به وضعیت j برسد را بصورت زیر می توان نوشت:
- $P^n{}_{ij} = \sum_{r=0}^{\infty} P^{(r)}{}_{ik}\, \mathrm{P}^{(\mathrm{n}-\mathrm{r})}{}_{\mathrm{kj}}$

فصل سوم مارکف

- **مثال**
- **در یک شبکه انتقال پیغام چندین مرحله جهت انتقال بسته داریم. احتمال اینکه آنکه این بسته صحیح به مرحله بعدی انتقال یابد 75% می باشد احتمال اینکه یک بسته بعد از چهار مرحله صحیح دریافت گردد چقدر است؟**

مثال

- فرض کنید که هوای یک شهر به‌صورت زیر مدل شده است:
  - اگر امروز هوا آفتابی است، با احتمال ۶۰٪ فردا نیز آفتابی خواهد بود، با احتمال ۳۰٪ ابری و با احتمال ۱۰٪ بارانی خواهد بود.
  - اگر امروز هوا ابری است، با احتمال ۴۰٪ فردا آفتابی، با احتمال ۴۵٪ فردا ابری و با احتمال ۱۵٪ فردا بارانی خواهد بود.
  - اگر امروز بارانی است، با احتمال ۱۵٪ فردا آفتابی، با احتمال ۶۰٪ فردا ابری و با احتمال ۲۵٪ فردا بارانی خواهد بود.
- حال اگر جمعه بارانی باشد، پیش‌بینی هوا برای دوشنبه چه خواهد بود؟
- مدل وضع هوا چه نوع زنجیره مارکوفی است؟ چرا؟

مثال

-
  - به‌طور واضح مدل وضع هوا یک **DTMC** است. چون:
    - رفتار آینده تنها به حالت جاری بستگی دارد.
    - زمان (روزهای هفته) و حالت (آفتابی، ابری و بارانی) هر دو گسسته هستند.
    - همچنین زمان نیز همگن است.
  - **DTMC** وضع هوا دارای سه حالت است. اجازه دهید که ۱ را به آفتابی، ۲ را به ابری و ۳ را به بارانی منتسب کنیم. همچنین فرض کنید که زمان در جمعه صفر است. آنگاه:

$$\pi(0) = (0,0,1)$$

$$P = \begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .4 & .45 & .15 \\ .15 & .6 & .25 \end{pmatrix}$$

مثال

- به‌طور واضح مدل وضع هوا یک **DTMC** است. چون:
  - رفتار آینده تنها به حالت جاری بستگی دارد.
  - زمان (روزهای هفته) و حالت (آفتابی، ابری و بارانی) هر دو گسسته هستند.
  - همچنین زمان نیز همگن است.
- **DTMC** وضع هوا دارای سه حالت است. اجازه دهید که ۱ را به آفتابی، ۲ را به ابری و ۳ را به بارانی منتسب کنیم. همچنین فرض کنید که زمان در جمعه صفر است. آنگاه:

$$\pi(0) = (0,0,1)$$

$$P = \begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .4 & .45 & .15 \\ .15 & .6 & .25 \end{pmatrix}$$

مثال

- وضع هوا در شنبه که با $\pi(1)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\pi(1)=\pi(0)P=(0,0,1)\begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .4 & .45 & .15 \\ .15 & .6 & .25 \end{pmatrix}=(.15,.6,.25),$$

که در نتیجه با احتمال ۱۵٪ آفتابی، با احتمال ۶۰٪ ابری و با احتمال ۲۵٪ بارانی خواهد بود.

- وضع هوا در یکشنبه که با $\pi(2)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\pi(2)=\pi(1)P=(.15,.6,.25)\begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .4 & .45 & .15 \\ .15 & .6 & .25 \end{pmatrix}=(.3675,.465,.1675).$$

- وضع هوا در دوشنبه که با $\pi(3)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\pi(3)=\pi(2)P=(.4316,\ .42,\ .1484),$$

که در نتیجه با احتمال ۴۳٪ آفتابی، با احتمال ۴۲٪ ابری و با احتمال ۱۵٪ بارانی خواهد بود.

مثال

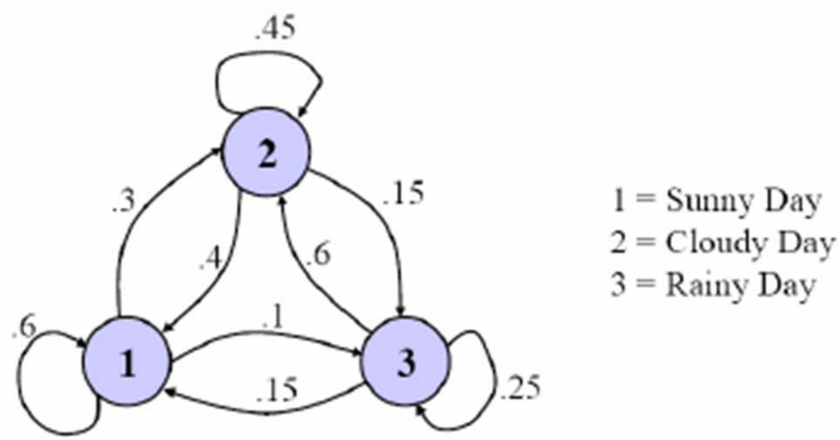
- راه حل دیگر این است که P^3 را محاسبه کنیم. زیرا داریم:

$$\pi(3) = \pi(0)\, P^3$$

- حل دستی، دشوار و در معرض خطا است. مخصوصاً اگر مدل بزرگتر از مثال فوق باشد و دارای تعداد زیادی حالت باشد.
- از اینرو از بسته‌های نرم‌افزاری به‌طور گسترده برای این‌گونه تحلیل‌ها استفاده می‌شود (نظیر Maple یا MathLab).
- این بسته‌های نرم‌افزاری $\pi(k)$ را بوسیله $(\ldots((\pi(0)P)P)P\ldots)P$ حساب می‌کنند، به‌جای آنکه P^k را حساب کنند. چرا؟
  - محاسبه مستقیم P^k نیاز به حافظه بیشتری (به اندازه حداقل یک ماتریس) خواهد داشت. در حالی که حاصل $\pi(0)P$ یک بردار ردیفی خواهد شد و $(\ldots((\pi(0)P)P)P\ldots)P$ نیز تماماً به یک بردار حافظه نیاز خواهد داشت.

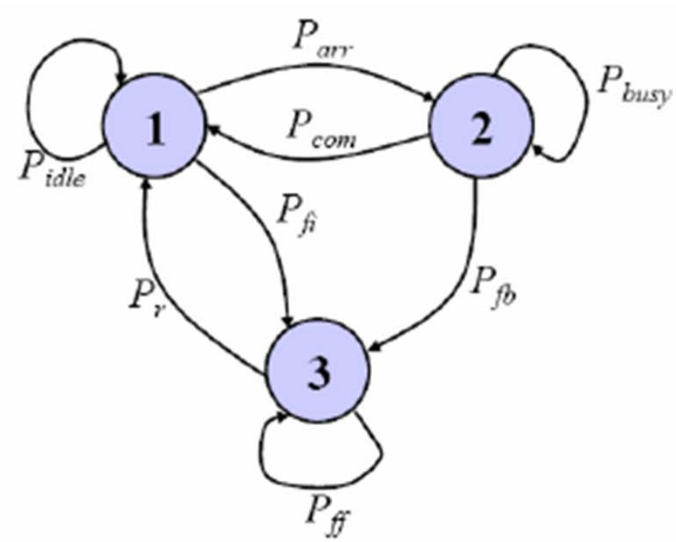
نمایش گرافی زنجیره های مارکوف

- اغلب در مورد زنجیره‌های مارکوف کوچک، مناسب است که DTMCها را با یک گراف جهت‌دار (directed graph) یا یک نمودار حالت-گذر (state transition diagram) نشان دهیم:
  - گره‌ها متناظر با حالت هستند.
  - لبه‌ها توسط احتمالات برچسب‌گذاری شده‌اند.
- برای مثال در مورد مدل پیش‌بینی وضع هوا داریم:



نمایش گرافی زنجیره های مارکوف

- مثال دیگر: "حالتهای مختلف کارکرد یک کامپیوتر ساده"
  - مثال: یک کامپیوتر یا بیکار (**idle**)، یا در حال کار (**working**) یا خراب (**failed**) است. وقتی که کامپیوتر بیکار است، کارها (**jobs**) با احتمال $\mathbf{P_{arr}}$ وارد می‌شوند. در کامپیوتر در حال کار ، کارها با احتمال $\mathbf{P_{com}}$ کامل می‌شوند. وقتی که کامپیوتر درحال کار است با احتمال $\mathbf{P_{fb}}$ و وقتی بیکار است با احتمال $\mathbf{P_{fi}}$ خراب می‌شود. وقتی که کامپیوتر خراب احتمال $\mathbf{P_r}$ تعمیر می‌شود.



$X = 1$	computer idle
$X = 2$	computer working
$X = 3$	computer failed

$$P = \begin{bmatrix} P_{idle} & P_{arr} & P_{fi} \\ P_{com} & P_{busy} & P_{fb} \\ P_r & 0 & P_{ff} \end{bmatrix}$$

رفتار حالت پایدار در زنجیره مارکوف گسسته- زمان

- با توجه به اینکه در مدلسازی مجبور هستیم که یک حالت اولیه را در نظر بگیریم. برای اینکه تاثیر حالت اولیه را در رفتار سیستم مورد ارزیابی خنثی کنم رفتار سیستم را در بازه زمانی طولانی بررسی می کنیم.
- به عبارتی دیگر حالت پایدار سیستم زمانی است که تاثیر حالت اولیه خنثی شده است.
- معمولا ما به دنبال محاسبه $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \lim_{n\to\infty} \pi(0)\ P^n$ هستیم
- که برای محاسبه n های خیلی بزرگ بطور تقریبی می تواناز معادله زیر برای تقریب زدن حالت پایدار $\pi(n)$ استفاده کرد
- $\pi(n) \cong \pi(n+1)$

معادلات جریان

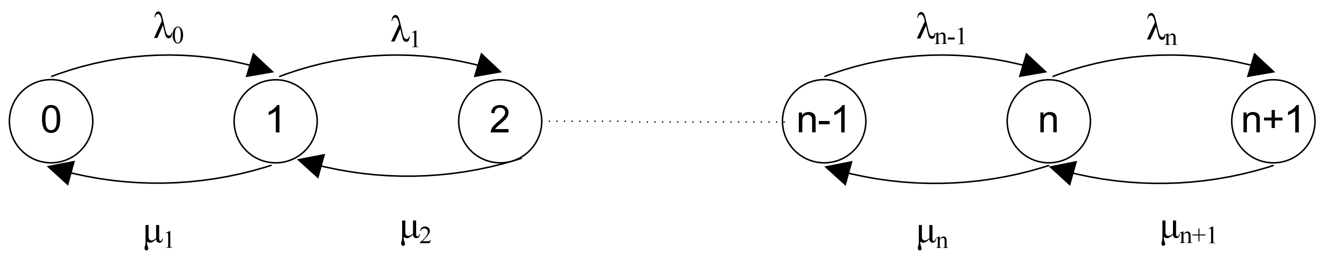
برای حل این معادله $\pi = \pi P$ از معادلات جریان استفاده می کنیم

1. **جریان ورودی به حالت i برابر است با جریان خروجی از حالت i**
2. $\sum \pi_i = 1$

فصل سوم مارکف

- فرایند تصادفی
- به فرایندی اطلاق می گردد که قابل پیش بینی نبوده و در طول زمان تغییر می کند(تعداد برنامه های منتظر دریافت سرویس CPU)
- فرایند تولید و مرگ در یک سیستم پایدار (نرخ ورود = نرخ خروج)
- ۱) اگر وضعیت سیستم N(t)=n باشد، مدت زمان باقی مانده برای آنکه ورود بعدی اتفاق بیافتد دارای توزیع نمایی با پرامتر های n=0,1,2,... λ_n می باشد
- ۲) اگر وضعیت سیستم N(t)=n باشد، مدت زمان باقی مانده برای آنکه خروج بعدی اتفاق بیافتد دارای توزیع نمایی با پرامتر های n=1,2,... μ_n می باشد
- ۳) در هر زمان یک ورود و یا یک خروج می تواند رخ دهد

فصل سوم مارکف



- میانگین نرخ ورود به وضعیت صفر ؟
- میانگین نرخ ورود به وضعیت یک ؟
- میانگین نرخ خروج از وضعیت یک؟

فصل سوم مارکف

- همانطور که ملاحظه می شود تمامی احتمال ها را با استفاده از احتمال حالت P_0 بدست آورد
- $P_1 = \frac{\lambda 0}{\mu 1} P_0$
- $P_{n+1} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \ldots \mu_1} P_0$
- $R_n = \frac{\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_n \ldots \mu_1}$
- $P_n = RnP_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

فصل سوم مارکف

- همانطور که ملاحظه می شود تمامی احتمال ها را با استفاده از احتمال حالت P_0 بدست آورد

- $P_1 = \frac{\lambda 1}{\mu 2} P_0$
- $P_{n+1} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \ldots \mu_1} P_0$
- $R_n = \frac{\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_n \ldots \mu_1}$
- $P_n = RnP_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$=1

زنجیره های مارکوف پیوسته- زمان

- در زنجیره‌های مارکوف گسسته-زمان، گذر از هر حالت به حالتی دیگر دارای زمان برابر است.
- اما در اغلب سیستم‌های مورد نظر، رخدادها در هر نقطه از زمان اتفاق می‌افتند. یعنی زمان گذر از هر حالت به حالتی دیگر طبق یک متغیر تصادفی پیوسته است.
- این امر باعث می‌شود که ما به مطالعه CTMCs بپردازیم.
- CTMC به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&P\left[X(t+\tau)=j \middle| X(t)=i, X(t-t_1)=k_1, X(t-t_2)=k_2, \ldots, X(t-t_n)=k_n\right] \\
&\quad = P\left[X(t+\tau)=j \middle| X(t)=i\right], \\
&\quad = P_{ij}(\tau) \\
&\text{for all } \tau>0,\ 0<t_1<t_2<\ldots<t_n
\end{aligned}
$$

- مفهوم time-homogeneous بودن در مورد CTMC هم وجود دارد:

$$P[X(t+\tau)=x_k \mid X(t)=x_j] = P[X(s+\tau)=x_k \mid X(s)=x_j].$$

زنجیره های مارکوف پیوسته- زمان

- تعریف CTMC تا زمانی که خصوصیت‌های آنرا ندانیم خیلی مفید نخواهد بود.
- در ابتدا توجه کنید که $p_{ij}(\tau)$ مستقل از آن است که قبلاً چه مدت CTMC در حالت i بوده است. به این صورت که:

$$
\begin{aligned}
&P\big[X(t+\tau)=j \big| X(u)=i \ \text{ for } \ u\in[0,t]\big] \\
&\quad = P\big[X(t+\tau)=j \big| X(t)=i\big] \\
&\quad = p_{ij}(\tau)
\end{aligned}
$$

- تعریف فوق برای CTMC همان تعریف بی‌حافظه بودن (memoryless) است.
- تنها یک متغیر تصادفی پیوسته است که دارای خاصیت فوق است و آن متغیر تصادفی نمایی است.
- از اینجا مشخص می‌شود که CTMC با توزیع نمایی دارای رابطه است:
  - نرخ زمان گذر از حالتی به حالتی دیگر دارای توزیع نمایی است.

ماتریس نرخ گذر- حالت

- یک CTMC با استفاده از یک توزیع اولیه $\pi(0)$ و یک ماتریس نرخ-گذر-حالت (state-transition-rate matrix) که به آن ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک (infinitesimal generator matrix) نیز گفته می‌شود به‌طور کامل قابل توصیف است.

- ماتریس نرخ-گذر-حالت $Q = [q_{ij}]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

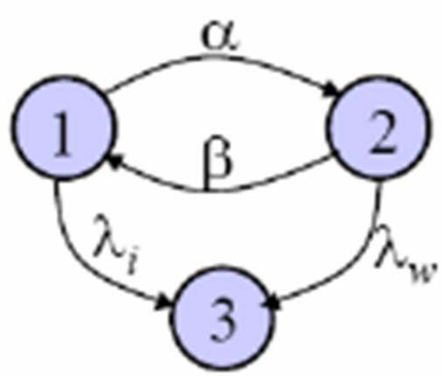
$$q_{ij} = \begin{cases} \text{rate of going from state } i \text{ to state } j & i \neq j, \\ -\sum_{k \neq i} q_{ik} & i = j. \end{cases}$$

مثال

- یک کامپیوتر یا بیکار (**idle**)، یا در حال کار (**working**) یا خراب (**failed**) است. وقتی که کامپیوتر بیکار است، کارها (**jobs**) طبق یک توزیع نمایی با نرخ α وارد می‌شوند و طبق یک توزیع نمایی با نرخ β کامل می‌شوند. وقتی که کامپیوتر درحال کار است طبق توزیع نمایی با نرخ λ_w و وقتی بیکار است طبق توزیع نمایی با نرخ λ_i خراب می‌شود.

مثال

- حالتهای CTMC:
  - X=1 نشان‌دهنده حالت بیکار،
  - X=2 نشان‌دهنده حالت در حال کار و
  - X=3 نشان‌دهنده حالت خرابی.



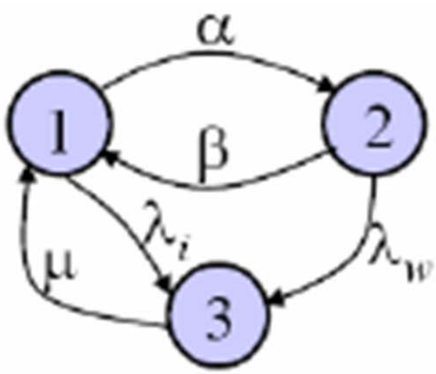
- و ماتریس Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -(\alpha+\lambda_i) & \alpha & \lambda_i \\ \beta & -(\beta+\lambda_w) & \lambda_w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال

- حال یک تغییر کوچک در مثال فوق می‌دهیم: اگر زمان تعمیر کامپیوتر فوق دارای توزیع نمایی با نرخ μ باشد.

- CTMC جدید به‌صورت زیر خواهد بود:



$$Q = \begin{bmatrix} -(\alpha + \lambda_i) & \alpha & \lambda_i \\ \beta & -(\beta + \lambda_w) & \lambda_w \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

مثال

- سئوالات زیر در مورد مدل کامپیوتر ساده با استفاده از مدل فوق قابل پاسخ دادن است:
  - قابلیت دسترسی **(availability) کامپیوتر ساده در زمان t** (*قابلیت دسترسی لحظه‌ای*) **چقدر است؟**
  - میانگین زمان تا خرابی **(MTTF) کامپیوتر ساده چقدر است؟**
  - میانگین تعداد کارهایی که به خاطر خرابی **در [0, t] از دست می‌روند (lost) چقدر است؟**
  - میانگین تعداد کارهایی که قبل از خرابی **در [0, t] سرویس‌داده می‌شوند چقدر است؟**
  - توان عملیاتی **(throughput) سیستم (تعداد کارهای پردازش‌شده در واحد زمان) با به‌حساب آوردن خرابیها و تعمیرات چقدر است؟**
  - **و غیره.**

مثال

- سئوالاتی که وابسته به زمان هستند جزء معیارهای اتکاءپذیری بوده و با حل گذرای CTMC (transient solution) پاسخ داده می‌شوند.
  - نظیر: *قابلیت دسترسی لحظه‌ای*
- اما سئوالاتی که مربوط به حالت پایدار هستند جزء معیارهای کارآیی بوده و با حل حالت پایدار CTMC (steady-state solution) پاسخ داده می‌شوند.
  - نظیر: *توان عملیاتی*

- ما در این درس به حل گذرای CTMC نمی‌پردازیم و هدف حل حالت پایدار است که در مورد ارزیابی کارایی مورد نیاز است.
- مدل‌های کارآیی اغلب به حالت پایدار می‌رسند.

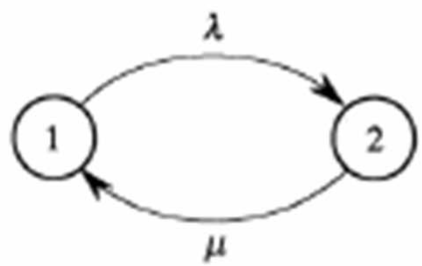
حل حالت پایدار زنجیره های ماکوف پیوسته- زمان از طریق معادلات جریان

- در حالت پایدار داریم $\pi^* Q = 0$ که برای رسیدن به این حالت باید جریان های ورودی به حالت i برابر با جریان داده های خارج شونده با آن در نظر گرفت.
- همچنین داریم $\sum_{i=1}^{n} \pi_i^* = 1$

با توجه به فرضیات فوق می توان دستگاه معادله خطی را تشکیل داده حل نمود

مثال زنجیره های ماکوف پیوسته- زمان

- هر کدام از دو پردازنده با توزیع نمایی دارای نرخ λ درخواست دسترسی به حافظه مشترک صادر می‌کنند و زمان دسترسی به حافظه مشترک دارای توزیع نمایی با نرخ μ است:



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

- **حالت ۱:** هیچکدام از دو پردازنده به حافظه مشترک دسترسی ندارند.

- **حالت ۲:** یکی از دو پردازنده به حافظه مشترک دسترسی دارد.

مثال زنجیره های ماکوف پیوسته- زمان

- حال دستگاه معادلات جریان را نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda\pi 1 + \mu\pi 2 \\ 0 = \lambda\pi 1 - \mu\pi 2 \\ 1 = \pi 1 + \pi 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \pi 1 = \mu/(\lambda+\mu) \qquad \pi 2 = \lambda/(\lambda+\mu)$$

$$\Rightarrow \pi^* = [\mu/(\lambda+\mu),\ \lambda/(\lambda+\mu)]$$

- معنی آن این خواهد بود که در حالت پایدار هر کدام از پردازنده‌ها با احتمال $\mu/(\lambda+\mu)$ در حال استفاده از حافظه داخلی خود هستند.

مثال زنجیره های ماکوف پیوسته- زمان

- در حالت پایدار داریم $\pi^* Q = 0$ که برای رسیدن به این حالت باید جریان های ورودی به حالت i برابر با جریان داده های خارج شونده با آن در نظر گرفت.
- همچنین داریم $\sum_{i=1}^{n} \pi_i^* = 1$

با توجه به فرضیات فوق می توان دستگاه معادله خطی را تشکیل داده حل نمود

فصل سوم مارکف

- مثال
- در یک سیستم کامپیوتری وضعیت سیستم به صورت دو وضعیت مشغول و آزاد که فرایند ورود برنامه با توزیع پواسن λ و مدت دریافت سرویس μ می باشد. احتمال قرار گرفتن در وضعیت آزاد و مشغول را بدست آورید.