

کتاب پردازش تصویر دیجیتال گونزالس
[برای دانلود کتاب کامل اینجا کلیک کنید](#)

قادر به ساخت ماتریس های تبدیل فوریه ، هارتلی ، سینوس ، کسینوس ، والش هادامارد ، Haar و Slant می باشد.

بتوانید با استفاده از عملیات ماتریس ابتدایی ، تبدیل سنتی تصویر ، مانند تبدیل فوریه و Haar را محاسبه کنید. صفحه فرکانس زمان و ارتباط آن با تبدیل موجک را درک کنید. قادر به تبدیل موجک سریع ۱ بعدی و ۲ بعدی (FWT) با استفاده از بانک های فیلتر باشید. درک بازنمایی بسته های موجک با استفاده از تبدیلهای متعامد گسسته در پردازش تصویر آشنا باشید.

۷.۱ مقدماتی

در جبر خطی و تجزیه و تحلیل عملکردی ، یک فضای بردار (یا به طور رسمی یک فضای بردار انتزاعی) مجموعه ای از اشیاء یا موجودات ریاضی است که بردار نامیده می شوند و می توانند با هم جمع شده و در مقیاس ها ضرب شوند. یک فضای محصول داخلی یک فضای بردار انتزاعی بر روی یک رشته اعداد است ، همراه با یک تابع محصول داخلی که دو بردار از فضای بردار را به یک مقیاس از حوزه اعداد ترسیم می کند به طوری که

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^* \\ \text{(b)} \quad & \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \text{(c)} \quad & \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \\ \text{(d)} \quad & \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ and } \langle v, v \rangle = 0 \text{ if and only if } v = 0 \end{aligned}$$

برای آموزش مختصر در مورد بردارها و ماتریس ها ، به بخش آموزش وب سایت کتاب مراجعه کنید. در فصل ۲ ، محصول داخلی دو بردار ستون ، u و v ، نشان داده شده است [نگاه کنید به معادل (۲-۵۰)]. در این فصل ، u ، v برای نشان دادن محصولات داخلی در هر فضای محصول داخلی که شرایط (a) - (d) را برآورده می کند ، از جمله فضای محصول داخلی اقلیدسی و بردارهای ستون با ارزش فصل ۲ استفاده می شود.

جایی که u ، v و w بردار هستند ، a مقیاس پذیر است و p نشان دهنده تابع محصول داخلی است. یک مثال ساده از یک فضای بردار مجموعه ای از قطعات خط هدایت شده در دو بعد است ، که در آن قسمت های خط از نظر ریاضی به عنوان بردارهای ستون $۲ * ۱$ نشان داده می شوند و افزودن بردارها معادل حسابی ترکیب بخشهای خط در یک است. سر به دم نمونه ای از فضای محصول داخلی مجموعه ای از اعداد حقیقی R است که با تابع داخلی محصول $\langle u, v \rangle = uv$ ترکیب شده است ، جایی که "بردارها" اعداد حقیقی هستند ، تابع محصول داخلی ضرب است و اصول (الف) تا (د) موارد فوق به ترتیب با ویژگیهای تبدیل پذیر ، توزیعی ، تداعی کننده و "مثبت بودن قدرتهای زوج" ضرب مطابقت دارد.

سه فضای داخلی محصول در این فصل مورد توجه ویژه ای است:

۱. R^N فضای اقلیدسی بر روی میدان عدد حقیقی R با محصول داخلی نقطه یا مقیاس

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_{N-1} v_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i \quad (7-1)$$

جایی که \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای ستون $N \times 1$ هستند.

۲. فضای واحد C^N بر فراز رشته مختلط C با تابع محصول داخلی

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^* v_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^* \quad (7-2)$$

یک فضای بردار مختلط با یک محصول داخلی، یک فضای محصول مختلط داخلی یا واحد نامیده می شود جایی که $*$ نشان دهنده عملیات ترکیبی مختلط است و \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای ستون $N-1$ با مقدار مختلط هستند. ۳. فضای محصول داخلی $C([a, b])$ ، جایی که بردارها توابع پیوسته در فاصله $a \leq x \leq b$ هستند و تابع محصول داخلی جدایی ناپذیر است

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx \quad (7-3)$$

علامت $[a, b]$ نیز در ادبیات استفاده می شود.

در هر سه فضای محصول داخلی، نرم یا طول بردار Z ، که با Z نشان داده می شود، است

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} \quad (7-4)$$

معادلات (۷-۴) تا (۷-۱۵) برای همه فضاهای محصول داخلی، از جمله مواردی که توسط معادله (۷-۱) تا (۷-۳) تعیین شده است، معتبر است.

و زاویه بین دو بردار غیر صفر Z و W است

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\langle z, w \rangle}{\|z\| \|w\|} \quad (7-5)$$

در حالی که شما همیشه باید زمینه را در نظر بگیرید، ما به طور کلی از کلمه "بردار" برای بردارها به معنای انتزاعی استفاده می کنیم. بردار می تواند یک ماتریس $N \times 1$ (یعنی بردار ستون) یا یک تابع پیوسته باشد اگر نرم 1 باشد، گفته می شود که Z نرمال شده است. اگر $\langle z, w \rangle = 0$ در معادله (۷-۵)، $\theta = 90^\circ$ و Z و W گفته می شود که متعامد هستند. یک پیامد طبیعی این تعاریف این است که مجموعه ای از بردارهای غیر صفر w_0, w_1, w_2, \dots به صورت متقابل یا زوج متعامد هستند اگر و فقط اگر

$$\langle w_k, w_l \rangle = 0 \quad \text{for } k \neq l \quad (7-6)$$

آنها یک پایه متعامد از فضای داخلی محصول هستند که گفته می شود که آنها را در بر می گیرد. اگر بردارهای پایه عادی شوند، یک پایه متعامد هستند و

$$\langle w_k, w_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq l \\ 1 & \text{for } k = l \end{cases} \quad (7-7)$$

به طور مشابه، مجموعه ای از بردارهای w, W, w, \dots و مجموعه ای مکمل از بردارهای دوگانه $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots$ گفته می شود که دوضلعی هستند و اساس دوضلعی فضای بردار را در بر می گیرند.

$$\langle \tilde{w}_k, w_l \rangle = 0 \text{ for } k \neq l \quad (7-8)$$

اگر و فقط در صورت وجود آنها، یک پایه غیر عادی هستند

$$\langle \tilde{w}_k, w_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq l \\ 1 & \text{for } k = l \end{cases} \quad (7-9)$$

به عنوان مکانیزمی برای توصیف مختصر مجموعه ای نامتناهی از بردارها، اساس فضای محصول داخلی یکی از مفیدترین مفاهیم در جبر خطی است. مشتق زیر که متکی بر متعامد بودن بردارهای اصلی است، یافت می شود متناسب با تبدیلات مبتنی بر ماتریس بخش بعدی. اجازه دهید $W = \{w_0, w_1, w_2, \dots\}$ یک پایه متعامد از فضای محصول داخلی V باشد، و اجازه دهید $z \in V$ باشد. بردار Z می تواند باشد. به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه بیان می شود

از جبر خطی به یاد بیاورید که اساس یک فضای بردار مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی است که برای آنها می توان هر بردار در فضا را بصورت یکتا به صورت ترکیبی خطی از مبنا نوشت. بردارها ترکیبات خطی دهانه بردارهای پایه هستند. اگر هیچ بردار در مجموعه نتواند به صورت ترکیبی خطی از بقیه نوشته شود، مجموعه ای از بردارها مستقل از نظر خطی هستند.

$$z = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots \quad (7-10)$$

محصول داخلی آن با بردار پایه w_i است

$$\begin{aligned} \langle w_i, z \rangle &= \langle w_i, \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots \rangle \\ &= \alpha_0 \langle w_i, w_0 \rangle + \alpha_1 \langle w_i, w_1 \rangle + \dots + \alpha_i \langle w_i, w_i \rangle + \dots \end{aligned} \quad (7-11)$$

از آنجا که w_i متقابل متعامد هستند، محصولات داخلی در سمت راست معادله (7-11) است مگر اینکه زیرنویس های بردارها که محصولات داخلی آنها وجود دارد، باشند. مطابقت محاسبه شده [معادله (7-7) را ببینید]. بنابراین، تنها عبارت غیر صفر $\alpha_i \langle w_i, w_i \rangle$ است

به حذف صفر شرایط و تقسیم هر دو طرف معادله به $\langle w_i, w_i \rangle$

$$\alpha_i = \frac{\langle w_i, z \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \quad (7-12)$$

$$\alpha_i = \langle w_i, z \rangle \quad (7-13)$$

در حالی که شما همیشه باید زمینه را در نظر بگیرید، ما اغلب از عبارت "پایه متعامد" یا "تبدیل متعامد" برای اشاره به هر مبنا یا دگرگونی استفاده می کنیم که متعامد، متعامد، دو قلو یا دو عادی است.

اگر نرمی بردارهای پایه ۱ باشند، مشتق مشابهی که به عنوان تمرین برای خواننده باقی می ماند، نتیجه می دهد.

$$\alpha_i = \frac{\langle \tilde{w}_i, z \rangle}{\langle \tilde{w}_i, w_i \rangle} \quad (7-14)$$

$$\alpha_i = \langle \tilde{w}_i, z \rangle \quad (7-15)$$

به ترتیب برای بردارهای پایه دو وجهی و طبیعی. توجه داشته باشید که وقتی یک پایه و دوگانه آن یکسان هستند، دو همسانی به متعامد کاهش می یابد.

مثال ۷.۱: نرم و زوایای بردار.

نرم بردار $f(x) = \cos x$ فضای محصول داخلی $C([0, 2\pi])$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \Big|_0^{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

زاویه بین بردارهای $z = [1 \ 0]^T$ و $w = [1 \ 1]^T$ فضای محصول داخلی اقلیدسی \mathbb{R}^2 برابر است

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle z, w \rangle}{\|z\| \|w\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 45^\circ$$

این نتایج از معادلات $(1-7)$ ، $(3-7)$ ، $(4-7)$ و $(5-7)$ حاصل می شود.

۷.۲ تبدیلات ماتریسی

تبدیل فوریه $D-1$ گسسته فصل ۴ یکی از کلاسهای اشکال مهم است که می تواند بر اساس رابطه کلی بیان شود.

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)r(x,u) \quad (7-16)$$

در ریاضیات، کلمه تبدیل برای نشان دادن تبدیل شکل بدون تبدیل در ارزش استفاده می شود.

جایی که x یک متغیر فضایی است، $T(u)$ تبدیل $f(x), r(x,u)$ یک هسته تبدیل پیش رو است و عدد صحیح u

یک متغیر تبدیل با مقادیر در محدوده $0, 1, \dots, N-1$ است. $p, N-1$ به طور مشابه، تبدیل معکوس $T(u)$ است

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)s(x,u) \quad (7-17)$$

که در آن $S(x, u)$ یک هسته تبدیل معکوس است و x مقادیری در محدوده $0, 1, \dots, N-1$ می گیرد. هسته

های تبدیل $r(x, u)$ و $s(x, u)$ در معادله $(7-16)$ و $(7-17)$ ، که فقط به شاخص های x و u بستگی دارد و نه

به مقادیر $f(x)$ و $T(u)$ ، ماهیت و مفید بودن جفت تبدیل را که آنها تعیین می کنند، تعیین می کند. به معادله

$(7-17)$ به صورت گرافیکی در شکل ۷.۱ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که $f(x)$ مجموع وزنی N توابع

هسته معکوس (یعنی $S(x, u)$ برای $u=0, 1, \dots, N-1$) و $T(u)$ برای $u=0, 1, \dots, N-1$ است وزن ها هستند. همه

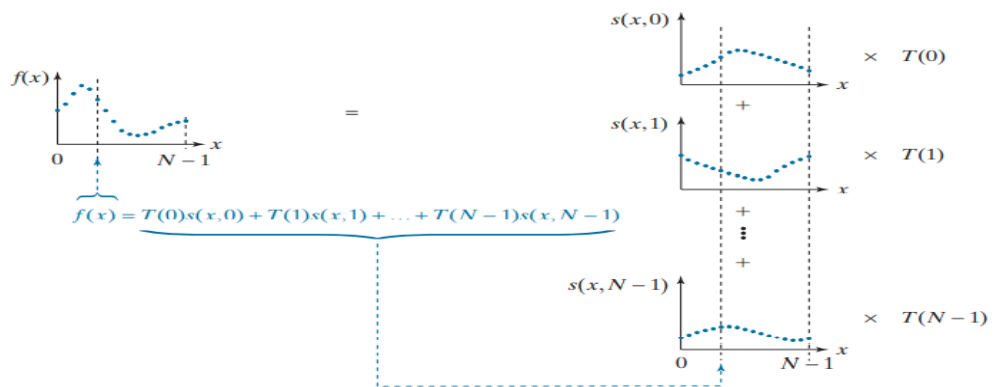
N ها (u, x) در هر x به مقدار $f(x)$ کمک می کنند. اگر سمت راست معادله (۷-۱۷) را گسترش دهیم. برای به دست آوردن

$$f(x) = T(0)s(x,0) + T(1)s(x,1) + \dots + T(N-1)s(x,N-1) \quad (7-18)$$

بلافاصله آشکار می شود که محاسبه نشان داده شده در شکل ۷.۱ یک گسترش خطی مانند معادله (۷-۱۰) است. با (x, u) و $T(u)$ در معادله (۷-۱۸) جای w_i (یعنی بردارهای پایه) و a_i در معادله (۷-۱۰). اگر (x, u) را در معادله (۷-۱۸) فرض کنیم. بردارهای پایه متعامد یک فضای محصول داخلی هستند، معادله (۷-۱۳) به ما می گوید که

$$T(u) = \langle s(x,u), f(x) \rangle \quad (7-19)$$

و تبدیل $T(u)$ برای $u=0,1,\dots,N-1$ را می توان از طریق محصولات داخلی محاسبه کرد.



شکل ۷.۱ تصویر گرافیکی از معادل (۷-۱۸).

ما اکنون آماده بیان معادلات (۷-۱۶) و (۷-۱۷) هستیم. به شکل ماتریس. ما با تعریف توابع $f(x)$ ، $T(u)$ و $s(x, u)$ به عنوان بردارهای ستون شروع می کنیم.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (7-20)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} T(0) \\ T(1) \\ \vdots \\ T(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{N-1} \end{bmatrix} \quad (7-21)$$

$$\mathbf{s}_u = \begin{bmatrix} s(0,u) \\ s(1,u) \\ \vdots \\ s(N-1,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{u,0} \\ s_{u,1} \\ \vdots \\ s_{u,N-1} \end{bmatrix} \quad \text{for } u = 0,1,\dots,N-1 \quad (7-22)$$

ما اغلب از زیرنویس برای نشان دادن عناصر یک ماتریس یا بردار استفاده می کنیم. بنابراین ، f_0 نشان می دهد که اولین عنصر بردار ستون f ، که f (۰) است و s_3 نشان دهنده اولین عنصر بردار ستون s است که s (۰) ، (۳) است.

و استفاده از آنها برای بازنویسی معادله (۷-۱۹) به عنوان

$$T(u) = \langle \mathbf{s}_u, \mathbf{f} \rangle \quad \text{for } u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7-23)$$

ترکیب بردارهای پایه N تبدیل در ماتریس تبدیل $N * N$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^T \\ \mathbf{s}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1}^T \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_0 \quad \mathbf{s}_1 \quad \dots \quad \mathbf{s}_{N-1}]^T \quad (7-24)$$

سپس می توانیم معادله (۷-۲۳) را جایگزین کنیم به معادله (۷-۲۱) و از معادله (۷-۱) استفاده کنید. برای بدست آوردن

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{f} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{s}_{N-1}, \mathbf{f} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{0,0}f_0 + s_{1,0}f_1 + \dots + s_{N-1,0}f_{N-1} \\ s_{0,1}f_0 + s_{1,1}f_1 + \dots + s_{N-1,1}f_{N-1} \\ \vdots \\ s_{0,N-1}f_0 + s_{1,N-1}f_1 + \dots + s_{N-1,N-1}f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (7-25)$$

$$= \begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{1,0} & \dots & s_{N-1,0} \\ s_{0,1} & s_{1,1} & & \\ \vdots & & \ddots & s_{N-1,N-2} \\ s_{0,N-1} & s_{N-2,N-1} & s_{N-1,N-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

با بکارگیری معادله (۷-۱) ، ما شایع ترین مورد بردارهای با ارزش حقیقی را فرض می کنیم. معادله (۷-۲) باید برای یک فضای محصول مختلط داخلی استفاده شود.

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (7-26)$$

معکوس این معادله از مشاهده این نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^T \\ \mathbf{s}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 & \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_{N-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0 & \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_{N-1} \\ \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_0 & \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{s}_{N-1}^T \mathbf{s}_0 & \dots & & \mathbf{s}_{N-1}^T \mathbf{s}_{N-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle & \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_{N-1} \rangle \\ \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_0 \rangle & \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \langle \mathbf{s}_{N-1}, \mathbf{s}_0 \rangle & \dots & & \langle \mathbf{s}_{N-1}, \mathbf{s}_{N-1} \rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{7-27}$$

جایی که دو مرحله آخر پیامد معادله (۷-۱) و (۷-۷) به ترتیب است. از آنجا که $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ ، معادله پیش از ضرب (۷-۲۶) توسط \mathbf{A}^T و ساده کردن آن $\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{t}$ را نشان می دهد. بنابراین، معادلات (۷-۱۶) و (۷-۱۷) به جفت تبدیل مبتنی بر ماتریس تبدیل می شوند

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{f} \tag{7-28}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{t} \tag{7-29}$$

مهم است که به یاد داشته باشید که در مشتق از معادله (۷-۲۸) و (۷-۲۹)، ما بردارهای پایه تبدیل N (یعنی $u = 0, 1, \dots, N-1$) برای S_u ماتریس تبدیل \mathbf{A} حقیقی و متعامد را فرض کردیم. مطابق با معادله (۷-۷)،

$$\langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l \rangle = \mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \tag{7-30}$$

متعامد فرض شده اجازه می دهد تا تبدیلات پیش رو بدون اشاره صریح به یک هسته تبدیل شکل محاسبه شود - یعنی $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ که در آن \mathbf{A} تابعی از تبدیل شکل معکوس $S(x, u)$ است. این کار به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی می ماند (به مسئله ۷.۳ مراجعه کنید) تا نشان دهد که برای بردارهای حقیقی متعامد، $r(x, u) = s(x, u)$. از آنجا که بردارهای اصلی \mathbf{A} حقیقی و متعامد هستند، تبدیل در معادله (۷-۲۸) تعریف شده است. تبدیل عمودی نامیده می شود. این محصولات داخلی را حفظ می کند - یعنی $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{f}_1, \mathbf{A}\mathbf{f}_2 \rangle$ ، و بنابراین فاصله و زاویه بین بردارها معادلات (۷-۳۱) و قبل و بعد از تبدیل هر دو سطر و ستون \mathbf{A} پایه های معمولی و $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ، $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ ، هستند. نتیجه این است که معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹) یک جفت تبدیل برگشت پذیر هستند. جایگزینی معادله (۷-۲۹) به (۷-۲۸) $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{t} = \mathbf{t}$ ، در حالی که جایگزینی معادله (۷-۲۸) به (۷-۲۹) $\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{t} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{f}$ می دهد.

برای آرایه ها یا تصاویر مربع دو بعدی، معادله (۷-۱۶) و (۷-۱۷) می شوند

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v) \quad (7-31)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) s(x, y, u, v) \quad (7-32)$$

معادلات (۷-۳۱) و (۷-۳۲) نسخه های ساده شده معادلات (۲-۵۵) و (۲-۵۶) با $M = N$ هستند.

جایی که $r(x, y, u, v)$ و $s(x, y, u, v)$ به ترتیب کرنهای تبدیل شکل رو به جلو و معکوس هستند. تبدیل $T(u, v)$ و هسته تبدیل معکوس $s(x, y, u, v)$ را دوباره می توان به عنوان ضرایب وزنی و بردارهای پایه به ترتیب با معادله (۷-۳۲) در نظر گرفت. تعریف انبساط خطی $f(x, y)$ همانطور که در فصل ۲ ذکر شد، هسته تبدیل شکل $r(x, y, u, v)$ قابل تفکیک است اگر

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u) r_2(y, v) \quad (7-33)$$

و متقارن است اگر r_1 از لحاظ عملکردی برابر r_2 باشد

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u) r_1(y, v) \quad (7-34)$$

اگر هسته های تبدیل حقیقی و متعامد باشند، و r و s هر دو جدا و متقارن باشند، معادل ماتریس معادلات (۷-۳۱) و (۷-۳۲) هستند

$$\mathbf{T} = \mathbf{AFA}^T \quad (7-35)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{TA} \quad (7-36)$$

جایی که F یک ماتریس $N * N$ است که شامل عناصر $f(x, y)$ است، T تبدیل $N * N$ آن است و A همانطور که قبلاً در معادله (۷-۲۴) تعریف شده است. ضرب های قبل و بعد از F بر A و AT در معادله (۷-۳۵) ستون و ردیف تبدیل F را به ترتیب محاسبه می کند. در واقع، تبدیل دو بعدی را به دو تبدیل یک بعدی تبدیل می کند و فرایند توصیف شده در بخش ۴.۱۱ برای DFT دو بعدی را نشان می دهد.

جایگزین s برای r in معادلات (۷-۳۳) و (۷-۳۴) به ترتیب برای قطعات معکوس قابل تفکیک متقارن.

مثال ۷.۲: یک تبدیل ساده متعامد.

بردارهای پایه ۲ عنصری را در نظر بگیرید

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

و توجه داشته باشید که آنها مطابق معادله متعامد هستند. (۷-۳۰):

$$\langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1 \rangle = \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0$$

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_0 \rangle = \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_0 = \frac{1}{2} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0$$

$$\langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle = \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0 = \frac{1}{2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle = \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

جایگزینی \mathbf{s}_0 و \mathbf{s}_1 به معادله (۷-۲۴) با \mathbf{N} -۲ ماتریس تبدیل را به دست می آورد

$$\mathbf{A} = [\mathbf{s}_0 \quad \mathbf{s}_1]^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

و تبدیل ماتریس $2 * 2$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 20 & 63 \\ 21 & 128 \end{bmatrix}$$

برگرفته از معادله (۷-۳۵):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 63 \\ 21 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 41 & 191 \\ -1 & -65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 232 & -150 \\ -66 & 64 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 116 & -75 \\ -33 & 32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مطابق با معادله (۷-۳۶)، معکوس تبدیل \mathbf{T} است

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 116 & -75 \\ -33 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 83 & -43 \\ 149 & -107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 63 \\ 21 & 128 \end{bmatrix}$$

در نهایت، ما توجه داریم که \mathbf{A} یک ماتریس تبدیل متعامد است که برای آن است

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

و $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. توجه به معادله نیز جالب است. (۷-۳۷) ماتریس تبدیل فوریه، هارتلی، کوزین، سین، والش-هادامارد، Slant و Haar به ترتیب برای ورودی های ۱ و ۲ بعدی با اندازه $2 * 2$ و $2 * 2$ است. این تبدیلات در بخشهای ۷.۶ تا ۷.۹ به تفصیل مورد بحث قرار گرفته است. اگرچه برای پایه های حقیقی متعامد و آرایه های مربعی فرموله شده است، معادله (۷-۳۵) و (۷-۳۶) را می توان برای دادن موقعیت های مختلف، از جمله آرایه های مستطیلی، بردارهای با ارزش مختلط و پایه های طبیعی غیر طبیعی، تغییر داد.

آرایه های مستطیلی

وقتی آرایه هایی که تبدیل می شوند مستطیل شکل هستند ، در مقابل مربع ، معادله (۷-۳۵) و (۷-۳۶) می شوند

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_M \mathbf{F} \mathbf{A}_N^T \quad (7-38)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_M^T \mathbf{T} \mathbf{A}_N \quad (7-39)$$

جایی که \mathbf{F} ، \mathbf{A}_M و \mathbf{A}_N به ترتیب دارای اندازه $M * N$ ، $M * M$ و $N * N$ هستند. هر دو \mathbf{A}_M و \mathbf{A}_N مطابق با معادله (۷-۲۴) تعریف می شوند.

مثال ۷.۳: محاسبه تبدیل یک آرایه مستطیلی.

یک دگرگونی ساده که در آن M و N به ترتیب ۲ و ۳ هستند ، است

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{A}_2 \mathbf{F} \mathbf{A}_3^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 100 & 44 \\ 6 & 103 & 40 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.366 & -1.366 \\ 1 & -1.366 & 0.366 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 11 & 203 & 84 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.366 & -1.366 \\ 1 & -1.366 & 0.366 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121.6580 & -12.0201 & -96.1657 \\ 0 & -3.0873 & 1.8624 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

جایی که ماتریس های \mathbf{F} ، \mathbf{A}_2 و \mathbf{A}_3 در اولین مرحله محاسبه تعریف شده اند. همانطور که انتظار می رفت ، تبدیل خروجی $2 * 3$ به اندازه \mathbf{F} است. این کار به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی می ماند (به مسئله ۷.۵ مراجعه کنید) تا نشان دهد که \mathbf{A}_3 یک ماتریس تبدیل متعامد است و این تبدیل با استفاده از معادله برگشت پذیر است به (۷-۳۹). متعامد بودن \mathbf{A}_2 در مثال ۷.۲ ایجاد شد.

بردارهای پایه ی متعامد یکه مختلط

بردارهای پایه ارزش مختلط اگر و فقط اگر هستند ، متعامد هستند

$$\langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l \rangle = \langle \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_k \rangle^* = \mathbf{s}_k^{*T} \mathbf{s}_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad (7-40)$$

جایی که $*$ تابع مختلط مزدوج را نشان می دهد. هنگامی که بردارهای پایه مختلط هستند ، برعکس معادله های (۷-۳۵) و (۷-۳۶) ارزش حقیقی می شوند

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{A}^T \quad (7-41)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{T} \mathbf{A}^* \quad (7-42)$$

به ترتیب. سپس ماتریس تبدیل \mathbf{A} را ماتریس واحد و معادله (۷-۴۱) و (۷-۴۲) می نامند. یک جفت تبدیل واحد هستند. یک ویژگی مهم و مفید \mathbf{A} این است که $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*T}$ ، so $\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{*T} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}^* = \mathbf{I}$ ، همتایان \mathbf{A} بعدی معادله (۷-۴۱) و (۷-۴۲) عبارتند از:

دگرگونی های متعامد یک مورد خاص از دگرگونی های واحد است که در آنها توابع انبساط با ارزش حقیقی ارزش گذاری می شوند. هر دو تبدیل محصولات داخلی را حفظ می کنند.

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (7-43)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{*T}\mathbf{t} \quad (7-44)$$

مثال ۷.۴: تبدیل با بردارهای پایه مختلط

برخلاف ماتریس های تبدیل شکل متعامد ، که معکوس ماتریس تبدیل ترانسپوز عکس ماتریس تبدیل واحد آن است ،

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix} \quad (7-45)$$

تبدیل مزدوج آن است. بدین ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{*T}\mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix}^T \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

جایی که \mathbf{z} و ماتریس \mathbf{A} یک ماتریس واحد است که می تواند در معادلات (۷-۴۱) تا (۷-۴۴) استفاده شود. آسان است

برای نشان دادن (به مسئله ۷.۴ مراجعه کنید) که وقتی $\mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ ، بردارهای پایه در \mathbf{A} معادله (۷-۴۰) را برآورده می کنند. و بنابراین متعامد هستند.

بردارهای پایه دو متعامد

توابع بسط s_0, s_1, p, s_{N-1} در معادله (۷-۲۴) اگر وجود داشته باشد ، طبیعی هستند

مجموعه ای از توابع توسعه دوگانه s_0, s_1, p, s_{N-1} به طوری که

$$\langle \tilde{s}_k, s_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad (7-46)$$

نه توابع انبساط و نه دوگانه آنها نیازی به خود عادی ندارند. با توجه به مجموعه ای از توابع انبساط دو متعامد ، معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) می شوند

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (7-47)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} \quad (7-48)$$

تبدیل ماتریس \mathbf{A} همانطور که در معادله (۷-۲۴) تعریف شده باقی می ماند. تبدیل دوگانه ماتریس $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{s}_0 \ \tilde{s}_1 \ \dots \ \tilde{s}_{N-1}]^T$ یک ماتریس $N \times N$ است که سطرهای آن دوگانه جابجا می شوند

توابع گسترش وقتی توابع توسعه و دوگانه آنها یکسان باشند. یعنی، وقتی $\tilde{s}_n = s_n$ معادل (۷-۴۷) و (۷-۴۸) است. به معادله (۷-۳۵) و (۷-۳۶)، به ترتیب کاهش می یابد. به طور فشرده همتایان یک بعدی D معادلات (۷-۴۷) و (۷-۴۸) عبارتند از:

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{f} \quad (7-49)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{t} \quad (7-50)$$

مثال ۷.۵: یک تبدیل دو متعامد

ماتریس های تبدیل شکل طبیعی را در نظر بگیرید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -0.5303 & 0.5303 & -0.1768 & 0.1768 \\ -0.1768 & 0.1768 & -0.5303 & 0.5303 \end{bmatrix} \text{ and } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -1.0607 & 1.0607 & 0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -1.0607 & 1.0607 \end{bmatrix}$$

این کار به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی می ماند (به مسئله ۷.۱۶ مراجعه کنید) تا نشان دهد که A و 'طبیعی هستند. این تبدیل بردار ستون $\mathbf{f} = [30 \ 11 \ 210 \ 6]^T$ است

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -1.0607 & 1.0607 & 0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -1.0607 & 1.0607 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \\ 210 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128.5 \\ 43.75 \\ 51.9723 \\ -209.6572 \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{f}^T \mathbf{f} = [30 \ 11 \ 210 \ 6] \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \\ 210 \\ 6 \end{bmatrix} = 45,157$$

و $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \mathbf{t}^T \mathbf{t} = 65,084$ ، که برابر \mathbf{f}, \mathbf{f} نیست، تبدیل محصولات داخلی را حفظ نمی کند. اما قابل برگشت است:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -0.5303 & 0.5303 & -0.1768 & 0.1768 \\ -0.1768 & 0.1768 & -0.5303 & 0.5303 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 128.5 \\ 43.75 \\ 51.9723 \\ -209.6572 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \\ 210 \\ 6 \end{bmatrix}$$

در اینجا، تبدیلات رو به جلو و معکوس با استفاده از معادلات (۷-۴۹) و (۷-۵۰) به ترتیب محاسبه شده است. در نهایت، ما توجه داریم که بخش عمده ای از مفاهیم ارائه شده در این بخش را می توان به گسترش مداوم فرم تعمیم داد.

$$f(x) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha_u s_u(x) \quad (7-51)$$

جایی که au و $s_u(x)$ for $u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به ترتیب ضرایب انبساط و بردارهای اصلی فضای محصول داخلی $C([a, b])$ را نشان می دهند. برای یک $f(x)$ و پایه $s_u(x)$ برای $u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ضرایب انبساط مناسب را می توان از تعریف محصول داخلی انتگرالی $C([a, b])$ محاسبه کرد. - یعنی ، معادله (۷-۳) و خصوصیات کلی همه فضاهای محصول داخلی-یعنی معادلات (۷-۱۰) تا (۷-۱۵). بنابراین ، برای مثال ، اگر $s_u(x)$ برای $u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ پایه متعامد $C([a, b])$ باشند ،

$$\alpha_u = \langle s_u(x), f(x) \rangle \quad (7-52)$$

در اینجا ، ما به سادگی a, z و w را در معادله (۷-۱۳) جایگزین کرده ایم. با $u, f(x)$ و $s_u(x)$ در مثال بعدی ، معادله (۷-۵۲) در مشتق از سری فوریه پیوسته استفاده خواهد شد.

مثال ۷.۶: سری فوریه و تبدیل فوریه گسسته .

بازنمایی یک تابع دوره ای پیوسته دوره T را به عنوان گسترش خطی بردارهای پایه متعامد شکل در نظر بگیرید.

$$s_u(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T} \quad \text{for } u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7-53)$$

مطابق با معادله (۷-۵۱) و (۷-۵۲) ،

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha_u \left[\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha_u e^{j2\pi ux/T} \end{aligned} \quad (7-54)$$

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \langle s_u(x), f(x) \rangle \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T} \right]^* f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi ux/T} dx \end{aligned} \quad (7-55)$$

به استثنای نام متغیرها و عادی سازی (یعنی استفاده از T در دو معادله بالا در مقابل T در تنها یکی از آنها) ، معادلات (۷-۵۴) و (۷-۵۵) سری معادله فوریه (۴-۸) و (۴-۹) در فصل ۴ هستند. یک مشتق تقریباً یکسان ، که به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی مانده است (به مسئله ۷.۲۲ مراجعه کنید) ، معادلهای گسسته زیر از معادلات (۷-۵۳) تا (۷-۵۵) را به دست می آورد:

$$s(x, u) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi ux/N} \quad \text{for } u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7-56)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} T(u) e^{j2\pi ux/N} \quad (7-57)$$

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N} \quad (7-58)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{1}} e^{j2\pi(1)x/1} \right]^* \sin(2\pi x) dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi x} \sin(2\pi x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos(2\pi x) - j \sin(2\pi x)] \sin(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \sin^2(2\pi x) - j \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8\pi} \sin(4\pi x) \right] \Big|_{-1/2}^{1/2} = -j0.5 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب ، $\alpha_{-1} = j0.5$ از آنجایی که همه ضرایب دیگر صفر هستند ، سری فوریه حاصل می شود

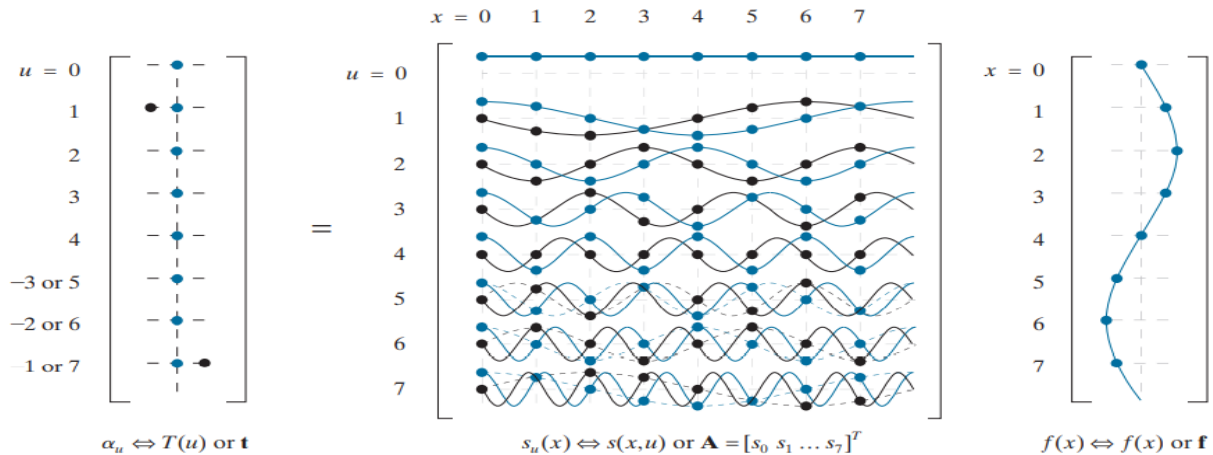
$$f(x) = j0.5e^{-j2\pi x} - j0.5e^{j2\pi x} \quad (7-59)$$

معادله (۷-۵۸) با $N = 8$ و $f(x) = \sin(2\pi x)$ (۲ پیکسل) برای $x = 0, 1, \dots, 7$ از طرف دیگر ، بازدهی دارد

$$T(u) = \begin{cases} -j1.414 & u = 1 \\ +j1.414 & u = 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7-60)$$

شکل ۷.۲ هر دو محاسبات را به عنوان "ضرب ماتریس" نشان می دهد که در آن بردارهای پایه پیوسته یا گسسته (ردیف های ماتریس A) با یک تابع پیوسته یا گسسته (بردار ستون f) ضرب شده و یکپارچه یا جمع می شوند تا مجموعه ای از انبساط یا تبدیل گسسته را تولید کنند.

ضرایب (بردار ستون t). برای سری فوریه ، ضرایب انبساط محصولات داخلی جدایی ناپذیر سینوس (۲ پیکسل) و یکی از مجموعه های بالقوه نامحدود بردارهای پایه پیوسته هستند. برای DFT ، هر ضریب تبدیل یک محصول داخلی گسسته از f و یکی از هشت بردار پایه گسسته با استفاده از معادله (۷-۲) است. توجه داشته باشید از آنجا که DFT بر اساس بردارهای مختلط متعامد متعامد است ، تبدیل را می توان به عنوان ضرب ماتریسی [مطابق با معادله] محاسبه کرد. (۷-۴۳). بنابراین ، محصولات داخلی که عناصر تبدیل t را تولید می کنند ، در ضرب Af ماتریس تعبیه شده اند. به این معنا که هر عنصر t با ضرب یک ردیف A - یعنی یک تابع انبساط گسسته - عنصر در f و جمع محصولات بدست آمده تشکیل می شود.



شکل ۷.۲ نشان دادن سری پیوسته فوریه و Λ DFT نقطه ای $f(x) = \sin(x)$ (۲ پیکسل) به عنوان "ضرب ماتریس". قسمتهای حقیقی و موهومی همه مقادیر مختلط به ترتیب به رنگ آبی و سیاه نشان داده شده است. توابع پیوسته و گسسته به ترتیب با استفاده از خطوط و نقاط نشان داده می شوند. خطوط تیره برای نشان دادن آن گنجانده شده است، $s_5 = s_3^*$, $s_6 = s_2^*$, and $s_7 = s_1^*$ ، حد اکثر فرکانس DFT را به نصف کاهش می دهد. شاخص های منفی به سمت چپ t فقط برای محاسبه سری فوریه است.

۷.۳ همبستگی

مثال ۷.۶ نقش محصولات داخلی را در محاسبه ضرایب تبدیل متعامد برجسته می کند. در این بخش، ما توجه خود را به رابطه بین ضرایب و همبستگی معطوف می کنیم. با توجه به دو تابع پیوسته $f(x)$ و $g(x)$ ، همبستگی f و g ، نشان داده شده است $f \star g(\Delta x)$ ، به عنوان تعریف شده است

$$f \star g(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x + \Delta x)dx \quad (7-61)$$

$$= \langle f(x), g(x + \Delta x) \rangle$$

به طور دقیق، ما باید از عبارت همبستگی متقابل هنگام $f(x) \neq g(x)$ و همبستگی خودکار هنگام $f(x) = g(x)$ استفاده کنیم. معادله (۶-۶۱) برای هر دو مورد معتبر است

$$f \star g(0) = \langle f(x), g(x) \rangle \quad (7-62)$$

که در آن مرحله نهایی از معادله (۷-۳) دنبال می شود. با $a = -\infty$ و $b = \infty$ این رابطه که گاهی محصول داخلی کشویی f و g نامیده می شود، شباهت $f(x)$ و $g(x)$ را به عنوان تابعی از جابجایی نسبی Δx آنها اندازه گیری می کند. اگر $\Delta x = 0$ ،

$$f \star g(0) = \langle f(x), g(x) \rangle \quad (7-62)$$

و معادله (۷-۵۲)، که ضرایب گسترش مداوم متعامد را در معادله (۷-۵۱)، تعریف می کند. می تواند به صورت متناوب به صورت نوشته شود

$$\alpha_u = \langle f, s_u \rangle = f \star s_u(0) \quad (7-63)$$

بنابراین، ضرایب انبساط همبستگی های تک نقطه ای هستند که در آنها جابجایی Δx صفر است. هر au شباهت $f(x)$ و یک $su(x)$ را اندازه گیری می کند. معادله گسسته معادله (۷-۶۱) تا (۷-۶۳) هستند

$$\mathbf{f} \star \mathbf{g}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* g_{n+m} \quad (7-64)$$

$$\mathbf{f} \star \mathbf{g}(0) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \quad (7-65)$$

$$T(u) = \langle \mathbf{s}_u, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{s}_u \star \mathbf{f}(0) \quad (7-66)$$

همانطور که از نام محصول کشویی داخلی نشان می دهد ، لغزش یک تابع را بر تابع دیگر تجسم کنید ، آنها را با هم ضرب کرده و ناحیه را محاسبه کنید. با افزایش سطح ، توابع تبدیل می شوند شباهت فزاینده معادله همبستگی دو بعدی در جدول ۴.۳ آورده شده است. در معادله (۶۴-۷) ، n و m اعداد صحیح هستند ، f_n نشان دهنده عنصر n از \mathbf{f} است و g_{n+m} نشان دهنده عنصر $(n+m)$ th از \mathbf{g} است. معادله (۶۶-۷) به شرح زیر است. از معادله (۶۵-۷) و (۲۳-۷).

معادله همبستگی دو بعدی در جدول ۴.۳ آورده شده است. در معادله (۶۴-۷) ، n و m اعداد صحیح هستند ، f_n نشان دهنده عنصر n از \mathbf{f} است و g_{n+m} نشان دهنده عنصر $(n+m)$ th از \mathbf{g} است. معادله (۶۶-۷) به شرح زیر است از معادله (۶۵-۷) و (۲۳-۷).

مثال ۷.۷: همبستگی در DFT مثال ۷.۶.

مجدداً DFT نقطه ای را در مثال ۷.۶ در نظر بگیرید و مطابق معادله (۵۶-۷) ، توجه داشته باشید. رویکردهای اصلی نماهای مختلط ای از فرکانس های زاویه دار مرتبط با هم هستند: $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ (الایزینگ سه فرکانس آخر را از $10, 12, 14$ کاهش می دهد ، و به ترتیب 14). از آنجا که ورودی گسسته $f(x) = \sin(2\pi x)$ یک سینوسی فرکانس منفرد با فرکانس زاویه ای 2 است ، \mathbf{f} باید با بردارهای پایه s_1 و s_7 ارتباط زیادی داشته باشد. همانطور که در شکل ۷.۲ مشاهده می شود ، تبدیل t در واقع به حداکثر خود در $u = 1$ و 7 می رسد. تنها در این دو فرکانس غیر صفر است.

۷.۴ تابع های اساسی در برنامه های فرکانس زمان

از آنجا که تبدیل ها میزان شباهت یک تابع به مجموعه بردارهای پایه را اندازه گیری می کند ، اکنون توجه خود را به خود بردارهای پایه معطوف می کنیم. در مباحث بعدی ، اصطلاحات بردار پایه و تابع پایه متعامد هستند. همانطور که در شکل ۷.۳ مشاهده می شود ، جایی که بردارهای اساسی برخی از تبدیلات معمولاً توصیف شده به تصویر کشیده شده است ، بیشتر پایه های متعامد مجموعه های سینوسی ، موج های مربعی ، رمپ ها و سایر امواج کوچک به نام موجک هستند که از نظر ریاضی مرتبط هستند. اگر $h(t)$

یک بردار پایه است و $g(t)$ تابع در حال تبدیل است، ضریب تبدیل $g \star h(0)$ ، همانطور که در قسمت قبل اشاره شد، اندازه ای از شباهت g و h است. مقادیر بزرگ $g \star h(0)$ نشان می دهد که g و h دارای ویژگی های مهمی در زمان و فرکانس هستند (به عنوان مثال، شکل و پهنای باند).

بنابراین، اگر h در تابع $u = 1$ در شکل ۷.۳ (d) عملکرد شیب دار شکل باشد، ضریب تبدیل $g \star h(0)$ می تواند برای تشخیص شیب روشنائی خطی در ردیف تصویر استفاده شود. اگر h یک تابع سینوسی مانند شکل ۷.۳ (a) باشد، از طرف دیگر، $g \star h(0)$ می تواند برای تشخیص الگوهای تداخل سینوسی استفاده شود. نمودارهایی مانند شکل ۷.۳، همراه با اندازه شباهت مانند $g \star h(0)$ ، می توانند اطلاعات زیادی در مورد ویژگی های زمان و فرکانس تابع در حال تبدیل نشان دهند.

توصیف کننده کاملاً عینی h ، و بنابراین g برای مقادیر بزرگ $g \star h(0)$ ، محل h در صفحه فرکانس زمان شکل ۷.۴ (a) است. بگذارید $p_h(t) = |h(t)|^2 / \|h(t)\|^2$ یک تابع چگالی احتمال با میانگین باشد

$$\mu_t = \frac{1}{\|h(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt \quad (7-67)$$

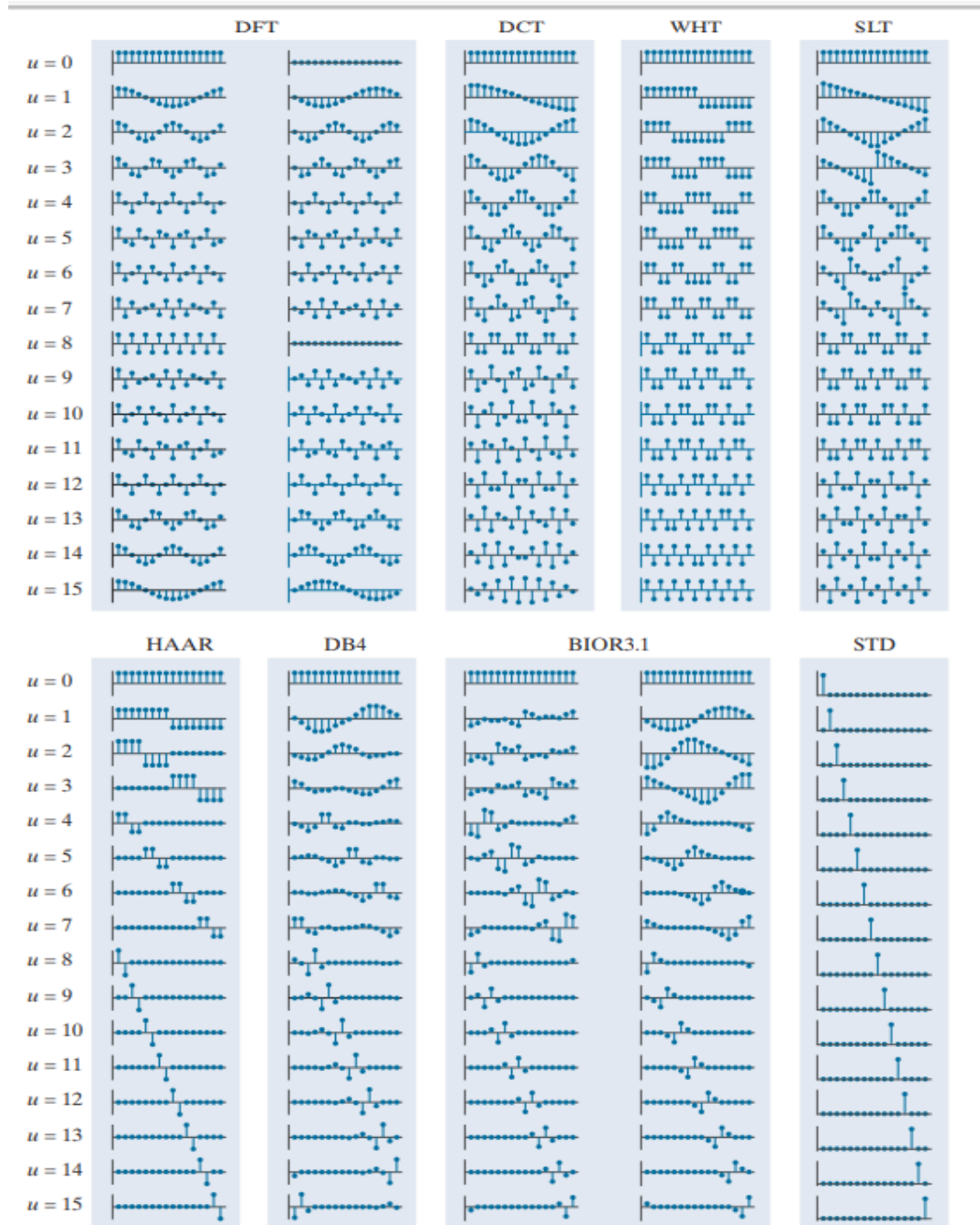
$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|h(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_t)^2 |h(t)|^2 dt \quad (7-68)$$

و اجازه دهید $p_H(f) = |H(f)|^2 / \|H(f)\|^2$ یک تابع چگالی احتمال با میانگین است

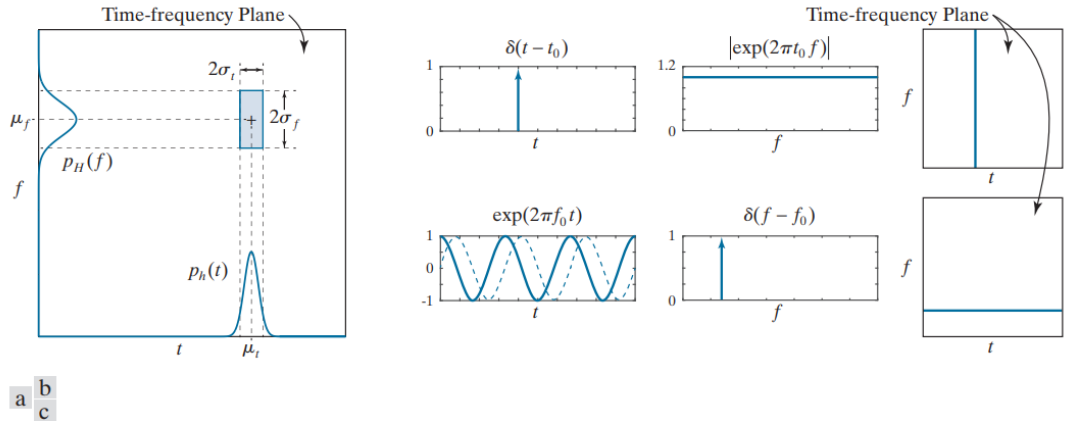
$$\mu_f = \frac{1}{\|H(f)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} f |H(f)|^2 df \quad (7-69)$$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|H(f)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu_f)^2 |H(f)|^2 df \quad (7-70)$$

در مقدمه ما بر صفحه فرکانس زمان، از متغیرهای مستقل t و f ، به جای متغیرهای فضایی x و u ، استفاده شده است. توابع پیوسته $g(t)$ و $h(f)$ در بخشهای قبلی جای $f(x)$ و $su(x)$ را می گیرند. اگرچه مفاهیم با استفاده از تابع ها و متغیرهای پیوسته ارائه شده اند، اما به همان اندازه قابل اجرا هستند. توابع و متغیرهای گسسته در معادله (۷-۶۷)، هر مقدار t با $ph(t)$ وزن می شود تا میانگین وزنی با توجه به هماهنگی t محاسبه شود.



شکل ۷.۳ بردارهای پایه (برای $N = 16$) برخی از تبدیلات متداول: الف) اساس فوریه (بخشهای حقیقی و موهومی)، ب) اساس کسینوس گسسته، ج) اساس والش-هامارد، د) اساس شیب دار، ه) اساس Haar، و) اساس Daubechies (g) دو خطی B- spline و دوگانه آن، و ح) پایه استاندارد، که فقط برای ارجاع درج شده است (یعنی به عنوان پایه تبدیل استفاده نمی شود).



شکل ۷.۴ (الف) بومی سازی تابع پایه در صفحه فرکانس زمان. (ب) یک تابع پایه استاندارد، طیف و موقعیت آن در صفحه فرکانس زمان. (ج) یک تابع پایه سینوسی مختلط (با قسمتهای حقیقی و موهومی آن به ترتیب به صورت خطوط جامد و خط کشی نشان داده می شود)، طیف و موقعیت آن در صفحه فرکانس زمان. جایی که f فرکانس را نشان می دهد و $H(f)$ تبدیل فوریه $h(t)$ است. سپس انرژی تابع تابع پایه h ، همانطور که در شکل ۷.۴ (a) نشان داده شده است، در (mf, mt) در صفحه فرکانس زمان متمرکز می شود. اکثریت انرژی در منطقه ای مستطیل شکل به نام جعبه یا سلول هایزنبرگ قرار می گیرد، در ناحیه $4\sigma_t\sigma_f$ به گونه ای که

$$\sigma_t^2\sigma_f^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (7-71)$$

از آنجا که پشتیبانی از یک تابع را می توان مجموعه ای از نقاط تعریف کرد که در آن تابع اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به ما می گوید که غیرممکن است که یک تابع دارای پشتیبانی محدود در زمان و فرکانس باشد. معادله (۷-۷۱)، که نابرابری هایزنبرگ-گابور نامیده می شود، محدوده پایینی را در ناحیه سلول هایزنبرگ در شکل ۷.۴ (a) قرار می دهد و نشان می دهد که st و sf نمی توانند هر دو دلخواه کوچک باشند^{۲۹}. بنابراین، در حالی که تابع پایه $\delta(t-t_0)$ در شکل ۷.۴ (b) کاملاً در زمان واقع شده است [یعنی $\sigma_t = 0$] از آنجا که عرض $\delta(t-t_0)$ صفر است، طیف آن در صفر غیر صفر است کل محور f یعنی از $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \exp(-j2\pi ft_0)$ و $|\exp(-j2\pi ft_0)| = 1$ برای همه $f, \sigma_f = \infty$

نتیجه یک سلول بی نهایت باریک و بی نهایت بالا در آن زمان است- صفحه فرکانس تابع پایه $\exp(2\pi f_0 t)$ شکل ۷.۴ (c)، از طرف دیگر، در کل محور زمانی اساساً صفر نیست، اما از نظر فرکانس کاملاً محلی است. زیرا $\mathcal{F}\{\exp(2\pi f_0 t)\} = \delta(f-f_0)$ طیف $|\delta(f-f_0)|$ در همه فرکانس های دیگر به جز صفر است. $f = f_0$. سلول هایزنبرگ حاصله بی نهایت پهن ($\sigma_t = \infty$) و بی نهایت کوچک در ارتفاع ($\sigma_f = 0$) است. همانطور که در شکل ۷.۴ (b) و (c) نشان می دهد، محلی سازی کامل در زمان با از دست دادن محلی سازی در فرکانس و بالعکس همراه است. با

^{۲۹} انرژی تابع پیوسته $h(t)$ است

بازگشت مجدد به شکل ۷.۳، پایه DFT را در شکل ۷.۳ (الف) و پایه استاندارد در شکل ۷.۳ (ج) مثالهای گسسته (برای $N = 16$) از ضربه و مختلط است.

ثابت در سمت راست معادله (۷-۷۱) $\frac{1}{4}$ است اگر بر حسب فرکانس زاویه ای بیان شود. برابری ممکن است، اما فقط با یک تابع پایه گاوسی، که تبدیل آن نیز یک تابع گاوسی است.

توابع نمایشی در شکل ۷.۴ (ج) و (ب) به ترتیب. هر پایه دیگری در نیمه بالای شکل ۷.۳ فرکانس بر اساس شاخص u و عرض یا پشتیبانی ۱۶ است. برای u مشخص شده، مکان آنها در صفحه فرکانس زمان مشابه است. این امر به ویژه هنگامی آشکار می شود که u ۸ است و تابع های اصلی یکسان هستند- همانطور که سلولهای هایزنبرگ آنها مشخص است. برای سایر پارامترهای سلول های u ، هایزنبرگ μ_f ، σ_f ، μ_f و S_f از نظر ارزش نزدیک هستند، با تفاوت های کوچک که شکل های متمایز کسینوس، سطح شیب دار و موج مربع را تشکیل می دهند. به طور مشابه، توابع پایه در نیمه پایینی شکل ۷.۳، به استثنای استاندارد استاندارد است که قبلاً مورد بحث قرار گرفته است، برای u مشخص شده نیز مشابه هستند. این توابع پایه، مقیاس بندی شده و امواج کوچکی را که موج اجازه نامیده می شوند، تبدیل شکل می دهند

$$\psi_{s,\tau}(t) = 2^{s/2} \psi(2^s t - \tau) \quad (7-72)$$

به نظر می رسد تابع های پایه DFT به دلیل نام مستعار فرکانسی مرتب نشده اند. به مثال ۷.۶ مراجعه کنید. جایی که s و t اعداد صحیح هستند و موجک مادر $\psi(t)$ یک کارکرد حقیقی و یکپارچه با مربع با طیف شبیه باند است. پارامتر t موقعیت $\psi_{s,\tau}(t)$ در محور t را تعیین می کند، s عرض آن را تعیین می کند-یعنی عرض یا باریک بودن آن در طول محور t ، و $2^{s/2}$ دامنه آن را کنترل می کند.

در رابطه با یک موجک مادر به درستی طراحی شده، معادله (۷-۷۲) پایه ای ایجاد می کند که توسط سلول هایزنبرگ در سمت راست شکل ۷.۵ مشخص می شود. اجازه دهید- تبدیل فوریه $\psi(t)$ تبدیل موجک با مقیاس زمانی است $\psi(2^s t)$ است

$$\mathfrak{S}\{\psi(2^s t)\} = \frac{1}{|2^s|} \Psi\left(\frac{f}{2^s}\right) \quad (7-73)$$

همانطور که در بخش ۷.۱۰ مشاهده می شود، تابع های مربوط به $u = 0$ در شکل ۷.۳ دارای طیف های پایین گذر هستند و به آنها توابع مقیاس بندی می گویند. ثبات معادله (۷-۷۳) به عنوان تمرین برای باقی می ماند. خواننده (به مسئله ۷.۲۴ مراجعه کنید) ..

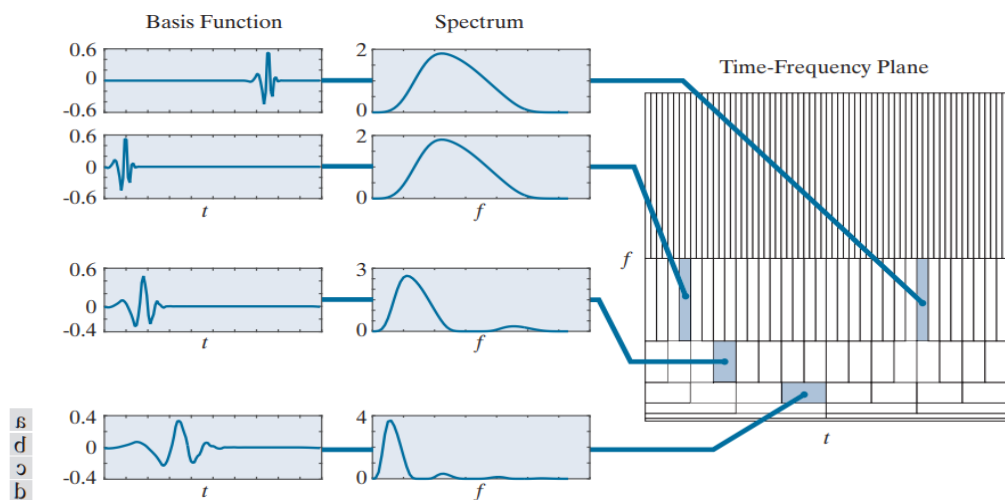
و برای مقادیر مثبت s ، طیف کشیده می شود - هر جزء فرکانس را با ضریب ۲ ثانیه بالاتر می برد. همانطور که در مورد پالس مستطیلی در مثال ۴.۱ صادق بود، زمان فشرده سازی طیف را گسترش می دهد. این به صورت گرافیکی در شکل نشان داده شده است. ۷.۵ (ب) - (د) عرض تابع پایه در شکل ۷.۵ (ج) نصف آن در (د) است،

در حالی که عرض طیف آن دو برابر (d) است. در فرکانس دو برابر بیشتر تبدیل می کند. همان را می توان در مورد تابع و طیف در شکل ۷.۵ (b) در مقایسه با (c) گفت. این نصف پشتیبانی در زمان و دو برابر شدن پشتیبانی در فرکانس، سلولهای هایزنبرگ را با عرض و ارتفاع متفاوت، اما مساحت مساوی تولید می کند. علاوه بر این، هر ردیف سلول در سمت راست شکل ۷.۵ مقیاس و دامنه فرکانسهای منحصر به فردی را نشان می دهد. سلولهای داخل یک ردیف به موقع نسبت به یکدیگر جابجا می شوند. مطابق با معادله (۴-۷۱) و جدول ۴.۴ فصل ۴، اگر $\psi(t)$ در زمان با t تبدیل داده شود،

$$\mathcal{F}\{\psi(t - \tau)\} = e^{-j2\pi\tau f} \Psi(f) \quad (7-74)$$

بنابراین، $|\mathcal{F}\{\psi(t - \tau)\}| = |\Psi(f)|$ و طیف موجک های تبدیل زمان یکسان هستند. این با توابع پایه در شکل ۷.۵ (الف) و (ب) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که سلولهای هایزنبرگ آنها از نظر اندازه یکسان هستند و فقط از نظر موقعیت متفاوت هستند.

پیامد اصلی نظرات قبلی این است که هر تابع پایه موجک با طیف و مکان منحصر به فرد در زمان مشخص می شود. بنابراین، ضرایب تبدیل یک تبدیل مبتنی بر موجک، به عنوان اندازه گیری محصولات داخلی



شکل ۷.۵ مکان یابی زمان و فرکانس ۱۲۸ نقطه توابع پایه Daubechies.

شبهات تابع در حال تبدیل و توابع پایه موجک، اطلاعات فرکانسی و زمانی را ارائه می دهد. آنها معادل یک موسیقی برای تابع در حال تبدیل ارائه می دهند، و نه تنها نت هایی را که باید پخش کنند، بلکه زمان پخش آنها را نیز نشان می دهند. این امر در مورد تمام پایه های موجک نشان داده شده در نیمه پایینی شکل ۷.۳ صادق است. پایه های نیمه بالای تصویر فقط یادداشت ها را ارائه می دهند. اطلاعات زمانی در فرآیند دگرگونی از بین می رود یا به سختی می توان از ضریب تغییرات استخراج کرد (مثلاً از جزء فاز تبدیل فوریه).

۷.۵ تصاویر پایه

از آنجا که هسته تبدیل شکل معکوس $S(x, y, u, v)$ در معادله (۷-۳۲) بخش ۷.۲ فقط به شاخص های x, y, u, v بستگی دارد و نه به مقادیر $f(x, y)$ یا $T(u, v)$ ، معادله (۷-۳۲) را می توان به طور متناوب به عنوان جمع ماتریس نوشت

$$\mathbf{F} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) \mathbf{S}_{u,v} \quad (7-75)$$

جایی که \mathbf{F} یک ماتریس $N * N$ است که شامل عناصر $f(x, y)$ و است

$$\mathbf{S}_{u,v} = \begin{bmatrix} s(0,0,u,v) & s(0,1,u,v) & \dots & s(0,N-1,u,v) \\ s(1,0,u,v) & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s(N-1,0,u,v) & s(N-1,1,u,v) & \dots & s(N-1,N-1,u,v) \end{bmatrix} \quad (7-76)$$

برای $u, v = 0, 1, \dots, N-1$ سپس \mathbf{F} به صراحت به عنوان یک ترکیب خطی از ماتریس های $N * N$ با اندازه $N * N$ — یعنی $\mathbf{S}_{u,v}$ برای $v = 0, 1, \dots, N-1$ اگر $s(x, y, u, v)$ دارای ارزش حقیقی، تفکیک پذیر و متقارن باشد،

$$\mathbf{S}_{u,v} = \mathbf{s}_u \mathbf{s}_v^T \quad (7-77)$$

جایی که $\mathbf{S}_{u,v}$ و $\mathbf{S}_{v,u}$ طبق معادله (۷-۲۲) قبلی تعریف شده است. در زمینه پردازش تصویر دیجیتال، \mathbf{F} یک تصویر دو بعدی است و $\mathbf{S}_{u,v}$ تصاویر پایه نامیده می شوند. آنها را می توان در یک آرایه $N * N$ مرتب کرد، همانطور که در شکل ۷.۶ (الف) نشان داده شده است، تا نمای بصری مختصری از توابع پایه ۲ بعدی که نشان می دهند، ارائه شود.

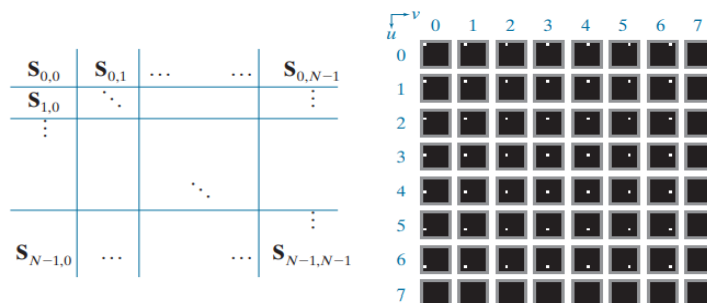
مثال ۷.۸: پایه های استاندارد تصاویر پایه

اساس شکل ۷.۳ (h) یک نمونه خاص (برای $N = ۱۶$) از پایه استاندارد $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$ است، جایی که \mathbf{e}_n یک بردار ستون $N * ۱$ است که عنصر نهم آن ۱ و همه عناصر دیگر ۰. از آنجا که حقیقی و متعامد است، ماتریس تبدیل متعامد مربوطه [به معادله (۷-۲۴) مراجعه کنید]. $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ است، در حالی که تبدیل ۲ بعدی مربوطه [معادله (۷-۳۵) را ببینید]. $\mathbf{T} = \mathbf{AFA}^T = \mathbf{IFI}^T = \mathbf{F}$. یعنی تبدیل \mathbf{F} نسبت به پایه استاندارد \mathbf{F} است-این تصدیق این واقعیت است که وقتی یک تابع گسسته به صورت بردار نوشته می شود، نشان داده می شود به طور ضمنی با توجه به پایه استاندارد شکل ۷.۶ (ب) تصاویر پایه یک استاندارد دو بعدی را با اندازه $۸ * ۸$ نشان می دهد. مانند بردارهای پایه ۱ بعدی در شکل ۷.۳ (h)، که فقط در یک لحظه (یا مقدار x) غیر صفر هستند، تصاویر اصلی در شکل ۷.۶ (b) فقط در یک نقطه در صفحه xy غیر صفر هستند. این از معادله (۷-۷۷) بر می آید. از آنجا که جایی که $\mathbf{S}_{u,v} = \mathbf{e}_u \mathbf{e}_v^T = \mathbf{E}_{u,v}$ ، جایی که یک ماتریس $N * N$ از صفر با ۱ در ردیف u th و ستون v th است. به همین ترتیب، تصاویر پایه DFT در شکل ۷.۷ از معادله (۷-۷۷)، دنبال می شود. معادله (۷-۲۲)، و معادله تعیین کننده

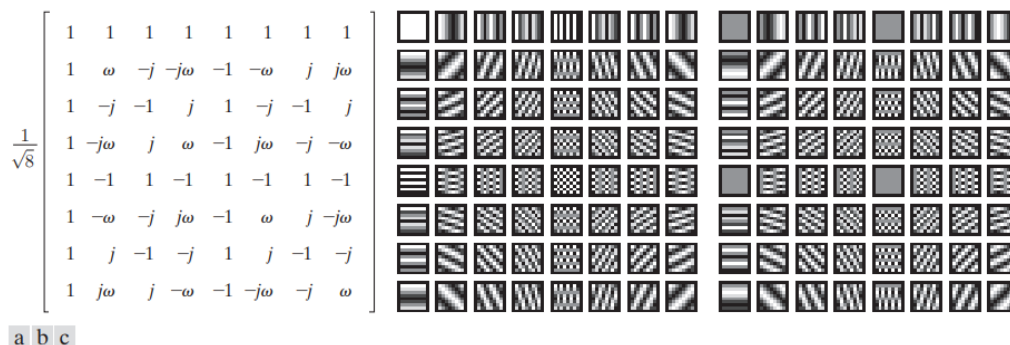
توابع توسعه ۱-D DFT [یعنی معادله (۷-۵۶)]. توجه داشته باشید که تصویر پایه DFT از حداکثر فرکانس زمانی رخ می دهد که u و v باشند ، درست همانطور که تابع پایه ۱-D DFT حداکثر فرکانس در $u = v$ در شکل ۷.۲ رخ داده است.

۷.۶ تبدیلات فوریه

همانطور که در فصل ۴ ذکر شد ، تبدیل فوریه یک تابع حقیقی دارای ارزش مختلط است. در این بخش ، ما سه تبدیل مربوط به فوریه را بررسی می کنیم که بیشتر حقیقی هستند



شکل ۷.۶ (الف) سازمان تصویر پایه و (ب) پایه استاندارد اندازه $8 * 8$. برای وضوح ، دور هر تصویر پایه حاشیه خاکستری اضافه شده است. منشأ هر کدام تصویر پایه (یعنی $x = y = 0$) در بالا سمت چپ آن است.



شکل ۷.۷ (الف) AF ماتریس تبدیل شکل تبدیل فوریه گسسته برای $N = 8$ ، جایی که $\omega = e^{-j2\pi/8}$ or $(1 - j)/\sqrt{2}$. (ب) و (ج) قسمتهای حقیقی و تخیلی تصاویر پایه DFT با اندازه $8 * 8$. برای وضوح ، دور هر تصویر اصلی حاشیه سیاه اضافه شده است. برای تبدیل های ۱ بعدی ، AF ماتریسی در رابطه با معادلات (۷-۴۳) و (۷-۴۴) استفاده می شود. ؛ برای تبدیل های دو بعدی ، با معادلات (۷-۴۱) و (۷-۴۲) استفاده می شود.. نسبت به ارزش مختلط -تبدیل گسسته هارتلی ، تبدیل کسینوس گسسته و تبدیل سینوسی گسسته. هر سه تبدیل از پیچیدگی محاسباتی اعداد مختلط اجتناب می کنند و می توانند از طریق الگوریتم های سریع شبیه FFT پیاده سازی شوند.

تبدیل هارتلی گسسته

ماتریس تبدیل گسسته هارتلی (DHT) با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست می آید

$$s(x, u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \quad (7-78)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \right]$$

همتای جداگانه ۲ بعدی آن است

$$s(x, y, u, v) = \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi vy}{N}\right) \right] \quad (7-79)$$

به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴). از آنجا که ماتریس تبدیل DHT - نشان داده شده است AHY در شکل ۷.۸-حقیقی ، متعامد و متقارن است $\mathbf{A}_{HY} = \mathbf{A}_{HY}^T = \mathbf{A}_{HY}^{-1}$ برای محاسبه تبدیلهای رو به جلو و معکوس استفاده شود. برای ترانس ۱ بعدی اشکال ، AHY همراه با معادلات استفاده می شود. (۷-۲۸) و (۷-۲۹) بخش ۷.۲ ؛ برای تبدیل ۲ بعدی ، معادله (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود. از آنجا که AHY متقارن است ، تبدیلات رو به جلو و معکوس یکسان هستند.

تابع $\operatorname{cas}(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$ ، مخفف تابع کسینوس و سینوس ، به عنوان تعریف می شود. ما شکل غیر قابل تفکیک را در نظر نخواهیم گرفت

$$s(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{N}\right).$$

به شباهت توابع پایه DHT مرتبط در شکل ۷.۸ (الف) و قسمت حقیقی توابع پایه DFT در شکل ۷.۲ توجه کنید. نشان دادن آن آسان است

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{HY} &= \operatorname{Real}\{\mathbf{A}_F\} - \operatorname{Imag}\{\mathbf{A}_F\} \\ &= \operatorname{Real}\{(1 + j)\mathbf{A}_F\} \end{aligned} \quad (7-80)$$

جایی که AF ماتریس تبدیل واحد DFT را نشان می دهد. علاوه بر این ، از آنجا که بخش حقیقی هسته DFT [معادله (۷-۵۶) را ببینید] است

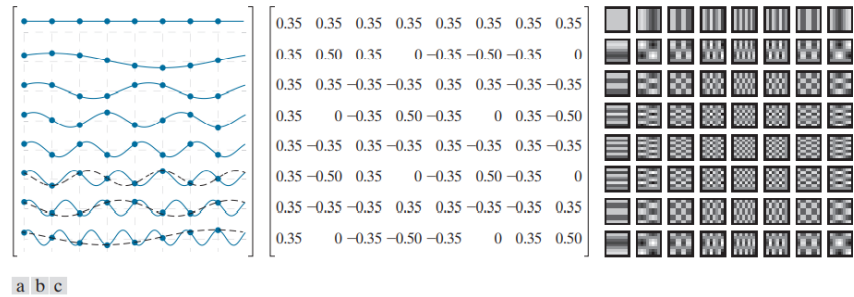
$$\operatorname{Re}\{s_F(x, u)\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi ux/N} \right\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \quad (7-81)$$

و یکه مثلثاتی $\operatorname{cas}(\theta) = \sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)$ را می توان برای بازنویسی گسسته بکار برد کرت هسته هارتلی [به معادله (۷-۷۸) مراجعه کنید.] به عنوان

$$s_H(x, u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi ux}{N} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (7-82)$$

تابع های اصلی تبدیل فوریه و هارتلی مقیاس بندی شده و نسخه های دیگری از یکدیگر تبدیل می کنند - یعنی ، با ۲ تبدیل می کنند و با $\pi/4$ تبدیل می کنند. این تبدیل هنگام مقایسه شکلها ۷.۲ و ۷.۸ (الف) به وضوح مشهود است. علاوه بر این ، برای مقدار معینی از N و نمونه گیری ΔT داخلی ، فوریه و هارتلی تبدیل می شوند دارای وضوح فرکانس یکسان $(N\Delta T) - 1$ ، Δu ، محدوده فرکانس های یکسان $0.5R = 0.5(1/\Delta T) = 1/(2\Delta T)$

هستند و هر دو در $n > N/2$ نمونه برداری نشده اند. شکلها را مقایسه کنید. ۷.۲ و ۷.۸ (a) برای $u = 7, 6, 5$ ، در نهایت، ما توجه داریم که تصاویر $8 * 8$ از دو تبدیل نیز مشابه هستند. همانطور که در شکلها مشاهده می شود. ۷.۸ (ج) و ۷.۷ (ب)، به عنوان مثال، تصاویر اصلی با حداکثر فرکانس زمانی رخ می دهند که u و $7N/2$ یا ۴ باشند.



شکل ۷.۸ ماتریس تبدیل و تصاویر اصلی گسسته هارتلی برای $N = 8$: (الف) نمایش گرافیکی ماتریس تبدیل متعامد AHY، (ب) AHY به دو رقم اعشار گرد شده و (ج) تصاویر پایه دو بعدی. برای تبدیل های $D-1$ ، ماتریس AHY در رابطه با معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹) استفاده می شود.؛ برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود.

در معادلات (۷-۸۱) و (۷-۸۲)، زیرنویس های F و HY برای نشان دادن استفاده می شود مغزهای هارتلی و فوریه به ترتیب. الیزینگ محدوده فرکانس را به $R + 0.5$ کاهش می دهد، جایی که R به عنوان معادله (۴.۵۱) تعریف شده است.

مثال ۷.۹: بازسازی DFT و DHT.

تابع گسسته $\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ و تبدیل فوریه گسسته آن را در نظر بگیرید
 $\mathbf{t}_F = [0.71 \ 0.6 - j0.25 \ 0.35 - j0.35 \ 0.1 - j0.25 \ 0 \ 0.1 + j0.25 \ 0.35 + j0.35 \ 0.6 + j0.25]^T$
 جایی که $\mathbf{t}_F = \mathbf{A}_F \mathbf{f}$ and $\mathbf{A}_F = \mathbf{A}_{Fr} + j\mathbf{A}_{Fj}$ ماتریس تبدیل واحد $8 * 8$ شکل ۷.۷ (a) است. قسمت های حقیقی و تخیلی \mathbf{t}_F ، که با \mathbf{t}_{Fr} و \mathbf{t}_{Fj} مشخص شده است، هستند

$$\mathbf{t}_{Fr} = [0.71 \ 0.60 \ 0.35 \ 0.10 \ 0 \ 0.10 \ 0.35 \ 0.60]^T$$

$$\mathbf{t}_{Fj} = [0 \ -0.25 \ -0.35 \ -0.25 \ 0 \ 0.25 \ 0.35 \ 0.25]^T$$

$$\mathbf{t}_{HY} = \mathbf{A}_{HY} \mathbf{f} = (\mathbf{A}_{Fr} - \mathbf{A}_{Fj}) \mathbf{f} = \mathbf{A}_{Fr} \mathbf{f} - \mathbf{A}_{Fj} \mathbf{f} = \mathbf{t}_{Fr} - \mathbf{t}_{Fj}$$

و تبدیل گسسته هارتلی

$$\mathbf{t}_{HY} = [0.71 \ 0.85 \ 0.71 \ 0.35 \ 0 \ -0.15 \ 0 \ 0.35]^T$$

مطابق با معادله (۷-۱۷)، \mathbf{f} را می توان به صورت نوشت

$$f(x) = \sum_{u=0}^7 T_{HY}(u) s_{HY}(x, u) \quad \text{for } x = 0, 1, \dots, 7$$

بنابراین f را می توان دوباره تنظیم کرد

$$\mathbf{f} = [f(0) \quad f(1) \quad \dots \quad f(7)]^T \quad \text{and} \quad \mathbf{t}_{HY} = [T_{HY}(0) \quad T_{HY}(1) \quad \dots \quad T_{HY}(7)]^T$$

به عنوان مجموعه ای از محصولات شامل ضرایب تبدیل محاسبه شده و وارد کردن توابع پایه در شکل ۶.۹ (a)، چنین بازسازی به تدریج انجام می شود، با مقدار متوسط یا DC f (برای $u = 0$) در بالای تصویر شروع شده و به f (برای $u = 0, 1, \dots, 7$) در پایین تصویر. از آنجا که توابع پایه فرکانس بالاتر در مجموع گنجانده می شوند، تابع بازسازی شده تقریبی بهتر از f می شود، با بازسازی کامل هنگامی که هر هشت پایه وزن دار بدست می آید توابع جمع آوری می شوند تا معادل تبدیل هارتلی گسسته معکوس $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{A}}_{HY}^T \mathbf{t}_{HY}$ را تولید کنند. پیشرفت مشابهی در شکل ۷.۹ (b) برای DFT نشان داده شده است.

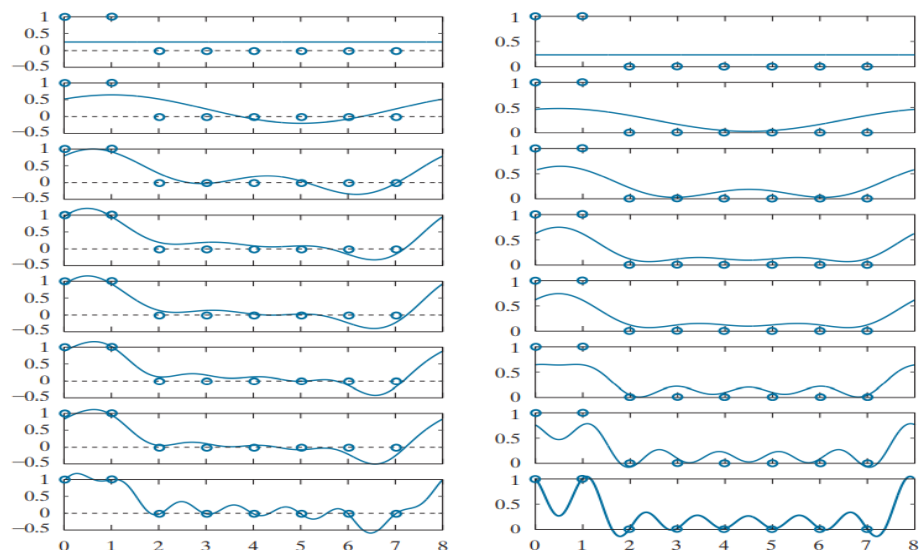
تبدیل کسینوس گسسته

ماتریس تبدیل رایج ترین شکل تبدیل کسینوس گسسته (DCT) با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست می آید

$$s(x, u) = \alpha(u) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \quad (7-83)$$

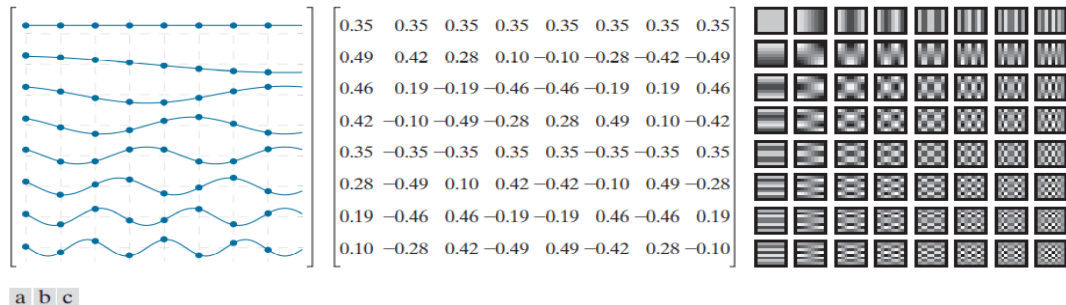
$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{for } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{for } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (7-84)$$

هشت نوع استاندارد DCT وجود دارد و آنها شرایط متقارن متفاوتی را فرض می کنند. برای مثال، می توان فرض کرد که ورودی حتی در حدود یک نمونه یا حدود یک نقطه در نیمه راه است. دو نمونه



شکل ۷.۹ بازسازی یک تابع گسسته با افزودن اجزای فرکانس به تدریج بالاتر: (الف) DHT و (ب) DFT. به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴). ماتریس تبدیل حاصل، نشان داده شده به عنوان AC در شکل ۷.۱۰، حقیقی و متعامد است، اما متقارن نیست. کارکردهای اساسی، کسینوس های هماهنگ با فرکانس ۰ تا $R = [(N-1)/N][1/(2\Delta T)]$ هستند. فاصله بین فرکانس های مجاور (یعنی وضوح فرکانس) $\Delta u = 1/(2N\Delta T)$ است. مقایسه شکل ۷.۱۰ (a) با هر یک از شکلها. ۷.۸ (a) یا ۷.۲ نشان می دهد که طیف تبدیل کسینوس گسسته تقریباً فرکانس یکسانی دارد. محدوده تبدیل شکل فوریه و هارتلی، اما دو برابر فرکانس نوع اگر برای مثال $N = 4$ و $\Delta T = 1$ باشد، ضرایب DCT حاصل در فرکانس $\{0, 0.5, 1, 1.5\}$ در حالی که اجزای طیفی DFT با فرکانس $\{0, 1, 2, 3\}$ ها مطابقت دارد. شکل های ۷.۱۰ (ج) و ۷.۸ (ج) بیشتر این نکته را نشان می دهد. توجه داشته باشید که تصویر DCT از حداکثر فرکانس زمانی رخ می دهد که u و v باشند، در مقابل ۴ برای DFT. از آنجا که DCT های ۲ بعدی بر اساس هسته تبدیل شکل معکوس قابل تفکیک هستند

$$s(x, y, u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right) \quad (7-85)$$



شکل ۷.۱۰ ماتریس تبدیل و تصاویر پایه تبدیل کسینوس گسسته برای $N = 8$. (الف) نمایش گرافیکی ماتریس تبدیل متعامد AC، (ب) AC به دو رقم اعشار گرد شده و (ج) تصاویر پایه. برای تبدیل های $D-1$ ، ماتریس AC در رابطه با معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹) استفاده می شود. برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود.

جایی که $a(u)$ و $a(v)$ مطابق با معادله (۷-۸۴)، تعریف شده است. ماتریس تبدیل AC می تواند در محاسبه هر دو تبدیل ۱ و ۲- استفاده شود (برای معادلات تبدیل مناسب به شرح شکل ۷.۱۰ مراجعه کنید).

در حالی که چندین ویژگی تبدیل گسسته فوریه را به اشتراک می گذاریم، تبدیل کسینوس گسسته مجموعه کاملاً متفاوتی از فرضیات را بر روی توابع در حال پردازش تحمیل می کند. به جای تناوب نقطه N ، فرض اساسی DFT، تبدیل کسینوس گسسته دوره ای بودن نقطه $N/2$ و حتی تقارن را فرض می کند. همانطور که در شکل ۷.۱۱ مشاهده می شود، در حالی که تناوب نقطه N می تواند باعث ناپیوستگی های مرزی شود که اجزای فرکانس بالا "هنری" را به صورت تبدیل وارد می کند، دوره تناوبی نقطه $N/2$ و حتی تقارن، ناپیوستگی و همچنین شدت بالا را به حداقل می رساند. مصنوع فرکانس همانطور که در فصل ۸ مشاهده می شود، این یک مزیت مهم

DCT در فشرده سازی تصویر است. با توجه به نظرات فوق ، نباید تعجب کرد که DCT تابع نقطه $f(x)$ را می توان از DFT یک نسخه $N/2$ نقطه متقارن $f(x)$ بدست آورد:

۱. به طور متقارن تابع گسسته نقطه $f(x)$ را برای بدست آوردن گسترش دهید

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } 0 \leq x < N \\ f(2N-x-1) & \text{for } N \leq x < 2N \end{cases} \quad (7-86)$$

$$\mathbf{f} = [f(0) \ f(1) \ \dots \ f(N-1)]^T \text{ and } \mathbf{g} = [g(0) \ g(1) \ \dots \ g(2N-1)]^T.$$

۲- تبدیل فوریه گسسته $N/2$ نقطه ای \mathbf{g} را محاسبه کنید:

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{A}_F \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (7-87)$$

جایی که \mathbf{A}_F ماتریس تبدیل DFT و تبدیل $F/2$ عنصر \mathbf{t}_F است. به دو بردار ستون عنصر N طول ، \mathbf{t}_1 و \mathbf{t}_2 تقسیم می شود.

۳. اجازه دهید بردار ستون عنصر $\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \dots \ h(N-1)]^T$ در آنجا

$$h(u) = e^{-j\pi u/2N} \text{ for } u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7-88)$$

$$\mathbf{s} = [1/\sqrt{2} \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T.$$

۴- تبدیل کسینوس گسسته \mathbf{f} در آن صورت است

$$\mathbf{t}_C = \text{Re}\{\mathbf{s} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{t}_1\} \quad (7-89)$$

جایی که \circ نشان دهنده محصول هادامارد است ، ضرب ماتریسی که در آن عناصر مربوط به دو بردار یا ماتریس با هم ضرب می شوند - برای به عنوان مثال ، $[3 \ -0.5] \circ [2 \ 6] = [6 \ -3]$

مثال ۷.۱۰: محاسبه \mathcal{E} DCT نقطه ای از \mathcal{A} DFT نقطه ای.

در این مثال ، ما از معادلات (۷-۸۶) تا (۷-۸۹) استفاده می کنیم. برای محاسبه تبدیل کسینوس گسسته تابع ۱

$$\text{بعدی } f(x) = x^2 \text{ برای } x = 0, 1, 2, 3$$

۱. اجازه دهید $\mathbf{f} = [0 \ 1 \ 4 \ 9]^T$ و از معادله (۷-۸۶) استفاده کنید. برای ایجاد یک پسوند \mathcal{A} نقطه ای از \mathbf{f} با تقارن

یکنواخت. تابع توسعه یافته $\mathbf{g} = [0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 9 \ 4 \ 1 \ 0]^T$ یک دوره از یک تابع متقارن یکنواخت است مانند

شکل ۷.۱۱ (ب).

۲. جایگزینی ماتریس تبدیل $\mathcal{A} * \mathcal{A}$ از شکل ۷.۷ (a) به معادله (۷-۸۷) ، تبدیل گسسته فوریه از \mathbf{g} است

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{A}_F \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -9.9 \\ -6.18 - j2.56 \\ 1.41 + j1.41 \\ -0.18 - j0.44 \\ 0 \\ -0.18 + j0.44 \\ 1.41 - j1.41 \\ -6.18 + j2.56 \end{bmatrix} \text{ so } \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} -9.9 \\ -6.18 - j2.56 \\ 1.41 + j1.41 \\ -0.18 - j0.44 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.18 + j0.44 \\ 1.41 - j1.41 \\ -6.18 + j2.56 \end{bmatrix}$$

۳. مطابق با معادله (۷-۸۸) ،

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\pi/4} \\ e^{-j\pi/2} \\ e^{-j3\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.92 - j0.38 \\ 0.71 - j0.71 \\ 0.38 - j0.92 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = [1/\sqrt{2} \ 1 \ 1 \ 1]^T = [0.71 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

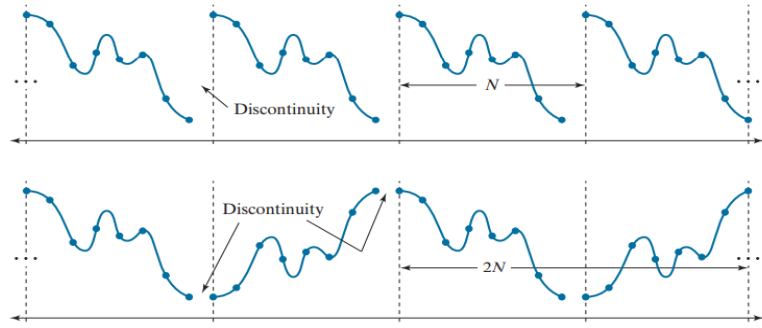
۴- تبدیل کسینوس گسسته \mathbf{f} در آن صورت است

$$\mathbf{t}_C = \text{Re}\{\mathbf{s} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{t}_1\} = \text{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0.92 - j0.38 \\ 0.71 - j0.71 \\ 0.38 - j0.92 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -9.9 \\ -6.18 - j2.56 \\ 1.41 + j1.41 \\ -0.18 - j0.44 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6.69 \\ 2 \\ -0.48 \end{bmatrix}$$

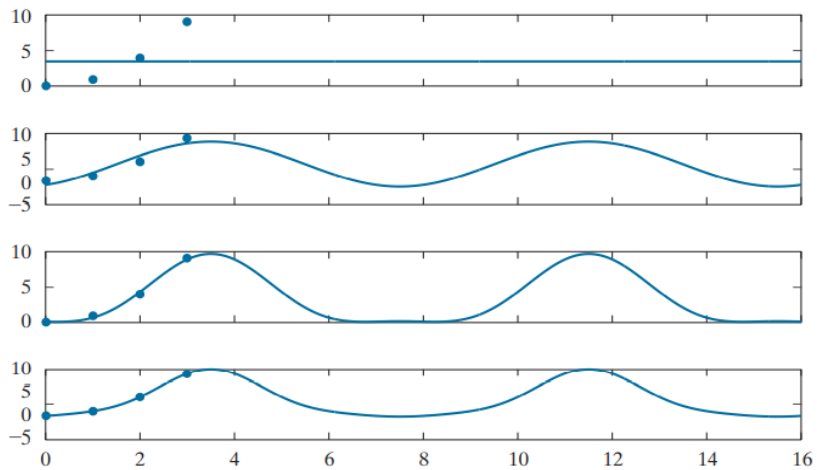
برای تأیید نتیجه ، معادله (۷-۸۳) را جایگزین می کنیم. به معادله (۷-۲۲) و (۲۴-۲۷) با $\mathbf{N} = 4$ و از ماتریس تبدیل $4 * 4$ DCT در معادله (۷-۲۸) استفاده کنید. برای به دست آوردن

$$\mathbf{t}_C = \mathbf{A}_C \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6.69 \\ 2 \\ -0.48 \end{bmatrix}$$

شکل ۷.۱۲ بازسازی \mathbf{f} را با تبدیل کسینوس معکوس نشان می دهد. مانند بازسازی های شکل ۷.۹ ، مولفه DC در بالای تصویر [یعنی شکل ۷.۱۲ (الف)] میانگین مقدار تابع گسسته است- در این مورد ، $(0 + 1 + 4 + 9) / 4 = 3.5$ این تقریبی اولیه اما خام از \mathbf{f} است. از آنجا که سه کسینوس اضافی با افزایش فرکانس در قسمت های (b) ، (c) و (d) تصویر اضافه می شوند ، دقت تقریب افزایش می یابد تا زمانی که بازسازی کامل در (d) حاصل شود. توجه داشته باشید که محور X گسترش یافته است تا نشان دهد که انبساط DCT حاصله در واقع دوره ای با دوره $N/2$ (در این مورد ۸) است و تقارن یکنواختی را که برای همه تبدیل های کسینوس گسسته لازم است نشان می دهد.



شکل ۷.۱۱ تناوب ضمنی در D-۱ (الف) DFT و (ب) DCT



شکل ۷.۱۲ بازسازی DCT یک تابع گسسته با افزودن فرکانس به تدریج بالاتر اجزاء. به تناوب نقطه $N/2$ و حتی تقارن تحمیل شده توسط DCT توجه کنید.

تبدیل سینوسی گسسته

ماتریس تبدیل سینوسی گسسته (DST) با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست می آید

$$s(x, u) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{(x+1)(u+1)\pi}{N+1}\right) \quad (7-90)$$

مانند DCT، هشت نوع وجود دارد و آنها شرایط متقارن متفاوتی را فرض می کنند-به عنوان مثال، آیا ورودی در مورد یک نمونه عجیب است یا در نیمه راه بین دو نمونه؟

همتای جداگانه ۲ بعدی آن است

$$s(x, y, u, v) = \frac{2}{N+1} \sin\left(\frac{(x+1)(u+1)\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{(y+1)(v+1)\pi}{N+1}\right) \quad (7-91)$$

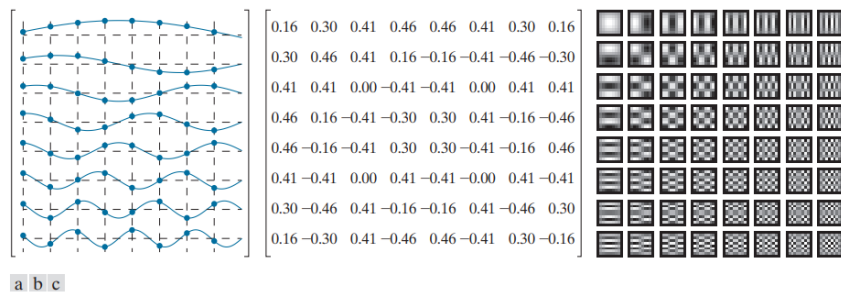
به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴). ماتریس تبدیل حاصل، که در شکل ۷.۱۳ به عنوان AS نشان داده شده است، حقیقی، متعامد و متقارن است. همانطور که در بخش (الف) شکل مشاهده می شود، توابع پایه زیر سینوسی از فرکانس هستند که به طور هماهنگ مرتبط هستند

$1/[2(N+2)\Delta T]$ to $N/[2(N+2)\Delta T]$; وضوح فرکانس یا فاصله بین فرکانس های مجاور $\Delta u = 1/|2(N+2)\Delta T|$ است. مانند DCT، DST تقریباً دارای محدوده فرکانسی مشابه DFT است، اما دو برابر وضوح فرکانس است. اگر برای مثال $N = 4$ و $\Delta T = 1$ باشد، ضرایب DST حاصل در فرکانس ها است $\{0.4, 0.8, 1.2, 1.6\}$ توجه داشته باشید برخلاف DCT و DFT، DST فاقد DC است (در $u = 0$) جزء. این نتیجه از یک فرض اساسی است که تابع در حال تبدیل $2(N+1)$ نقطه متناوب و فرد متقارن است، و مقدار متوسط آن را صفر می کند. برخلاف DCT، که در آن تابع زوج فرض می شود، تقارن فرد که توسط DST اعمال می شود، ناپیوستگی مرزی را کاهش نمی دهد. این در شکل ۶.۱۴ روشن است، جایی که نتیجه محاسبه DCT جلو و معکوس $f(x) = x^2$ for $x = 0, 1, 2, 3$ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که پیوسته زیرین است بازسازی، که با همان فرایندی انجام شد که منجر به شکل ۶.۱۲ (d) شد، دوره تناوبی فوق الذکر، تقارن فرد و ناپیوستگی مرزی را نشان می دهد. تبدیل سینوسی گسسته یک تابع نقطه $F(x)$ را می توان از DFT یک نسخه $2(N+1)$ نقطه ای متقارن $f(x)$ با تقارن فرد بدست آورد:

۱. به صورت متقارن تابع نقطه $N(x)$ را برای بدست آوردن گسترش دهید

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ f(x-1) & \text{for } 1 \leq x \leq N \\ 0 & \text{for } x = N+1 \\ -f(2N-x+1) & \text{for } N+2 \leq x \leq 2N+2 \end{cases} \quad (7-92)$$

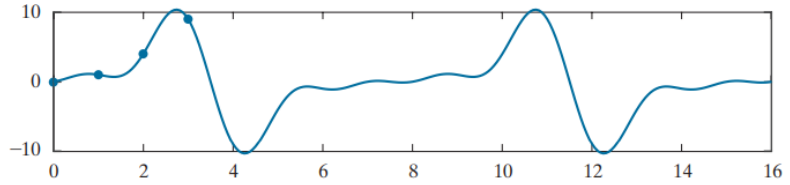
$$\mathbf{f} = [f(0) \ f(1) \ \dots \ f(N-1)]^T \text{ and } \mathbf{g} = [g(0) \ g(1) \ \dots \ g(2N+2)]^T.$$



شکل ۷.۱۳ ماتریس تبدیل و تصاویر پایه تبدیل سینوسی گسسته برای $N = 8$. (الف) نمای گرافیکی ماتریس تبدیل متعامد AS، (ب) AS به دو رقم اعشار گرد شده و (ج) تصاویر پایه. برای تبدیل های $D-1$ ، ماتریس AS در رابطه با معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹)؛ استفاده می شود. برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود.

۲. تبدیل $2(N+1)$ نقطه فوریه گسسته \mathbf{g} را محاسبه کنید:

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{A}_F \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t}_1 \\ 0 \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (7-93)$$



شکل ۷.۱۴ بازسازی DST تابع تعریف شده در مثال ۶.۱۰.

جایی که AF ماتریس تبدیل DFT است و تبدیل عنصر $2^{(N+1)}$ به دو بردار صفر تک عنصر ، $[0] = 0$ و دو بردار ستون N -عنصر t_1 و t_2 تقسیم می شود.

۳. تبدیل سینوسی گسسته f با t_s نشان داده شده است

$$t_s = -\text{Imag}\{t_1\} \quad (7-94)$$

مثال ۷.۱۱: محاسبه \mathcal{E} DST نقطه ای از 10 DFT نقطه ای.

در این مثال ، ما از معادلات (۷-۹۲) تا (۷-۹۴) استفاده می کنیم. برای یافتن $f = [0 \ 1 \ 4 \ 9]^T$ DST از مثال ۷.۱۰:

۱. یک نسخه $2(N+1)$ نقطه f با تقارن فرد ایجاد کنید. مطابق با معادله (۷-۹۲) ،

$$g = [0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 0 \ -9 \ -4 \ -1 \ 0]^T$$

۲. تبدیل گسسته فوریه g را با استفاده از معادله (۷-۹۳) محاسبه کنید. ماتریس AF یک ماتریس تبدیل DFT

واحد با اندازه $10 * 10$ است و تبدیل حاصل از آن

$$t_F = A_F g = [0 \ -j6.35 \ j6.53 \ -j3.56 \ j1.54 \ 0 \ j6.35 \ -j6.53 \ j3.56 \ -j1.54]^T$$

به قسمت حقیقی t_F توجه کنید صفر و بلوک t_1 است از t_F است

۳. مطابق با معادله (۷-۹۴) ، DST از f است

$$t_s = -\text{Imag}\{t_1\} = [6.35 \ -6.53 \ 3.56 \ -1.54]^T$$

متناوباً ، DST را می توان مستقیماً به عنوان محاسبه کرد

$$t_s = A_s f = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.60 & 0.60 & 0.37 \\ 0.60 & 0.37 & -0.37 & -0.60 \\ 0.60 & -0.37 & -0.37 & 0.60 \\ 0.37 & -0.60 & 0.60 & -0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.35 \\ -6.53 \\ 3.56 \\ -1.54 \end{bmatrix}$$

جایی که AS با جایگزینی معادله (۷-۹۰) بدست می آید. به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴) با $N = 4$.

مثال ۷.۱۲: فیلترینگ ایده آل پایین گذر با تبدیلات مربوط به فوریه.

شکل ۷.۱۵ نتایج اعمال یک فیلتر پایین گذر ایده آل را برای تصویر آزمایشی که در مثال ۴.۱۶ با تمام تبدیلات

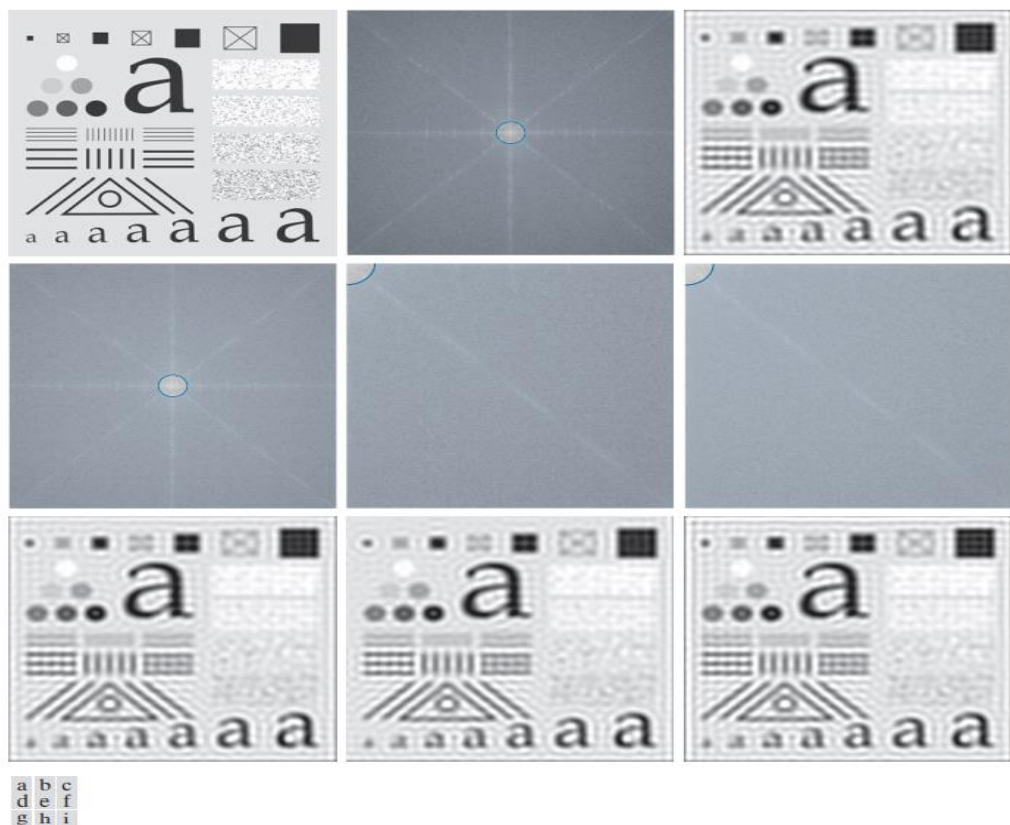
مربوط به فوریه که در این فصل توضیح داده شده است ، نشان می دهد. همانطور که در مثال فصل ۴ ، تصویر

آزمایشی نشان داده شده در شکل ۷.۱۵ (a) دارای اندازه $688 * 688$ است و قبل از محاسبه هرگونه تبدیل ،

در $1376 * 1376$ بارگذاری شده است. برای مرجع، تبدیل فوریه تصویر آزمایش در شکل ۷.۱۵ (b) نشان داده شده است، جایی که یک پوشش آبی برای نشان دادن تابع فیلتر پایین گذر روی هم چیده شده است. فقط فرکانس هایی که سایه آبی ندارند توسط فیلتر عبور می کنند.

از آنجا که ما مجدداً از یک فرکانس قطع با شعاع ۶۰ استفاده می کنیم، نتیجه فیلتر شده در شکل ۷.۱۵ (c) شبیه به شکل ۴.۴۱ (d) است، با هرگونه تفاوت به دلیل استفاده از پد صفر به جای آینه. به یکبار دیگر به تیرگی و زنگ زدن که در مثال ۴.۱۶ بحث شده است توجه کنید.

شکل ۷.۱۵ (d)-(i) نتایج قابل مقایسه ای را با استفاده از سه تبدیل مربوط به فوریه ارائه شده در این فصل ارائه می دهد. همانطور که برای تبدیل فوریه در شکل ۶.۱۵ (b) انجام شد، شکلها. ۶.۱۵ (f) - (d) نشان می دهد



شکل ۷.۱۵ (الف) تصویر اصلی الگوی آزمایشی $688 * 688$ از شکل ۴.۴۱ (الف). (ب) تبدیل فوریه گسسته (DFT) الگوی آزمایش در (الف) پس از پر شدن به اندازه $1376 * 1376$. روکش آبی یک فیلتر کم ارتفاع ایده آل (ILPF) با شعاع ۶۰ است. (ج) نتیجه فیلتر فوریه. (د) - (و) تبدیل گسسته هارتلی، تبدیل کسینوس گسسته (DCT)، و تبدیل سینوسی گسسته (DST) الگوی آزمون در (الف) پس از پر کردن. پوشش آبی همان ILPF در (b) است، اما در (e) و (f) به دلیل وضوح فرکانس بالاتر DCT و DST بزرگتر به نظر می رسد. (g) - (i) نتایج فیلترینگ برای تبدیل هارتلی، کسینوس و سینوس به ترتیب.

تبدیلات گسسته هارتلی، کسینوس و سینوس از تصویر آزمایش در شکل ۷.۱۵ (a) پس از پر کردن صفر به ترتیب به اندازه $۱۳۷۶ * ۱۳۷۶$. اگرچه تابع فیلتر برای تبدیل کسینوس و سینوس، که دوباره با رنگ آبی روی هم قرار گرفته اند، دو برابر شعاع فیلترهای مورد استفاده در تبدیل فوریه و هارتلی را دارد، اما محدوده فرکانس یکسانی توسط همه فیلترها منتقل می شود.

افزایش ظاهری اندازه به دلیل وضوح فرکانس بیشتر تبدیل سینوس و کسینوس است که قبلاً مورد بحث قرار گرفته است. توجه داشته باشید طیف این تبدیلات برای تفسیر آسان نیازی به مرکز نویسی ندارد، مانند طیف های فوریه و هارتلی. در نهایت، ما برای همه اهداف عملی به تصاویر فیلتر شده در شکل ۷.۱۵ (i) - (g) توجه می کنیم. معادل نتیجه فیلتر شده فوریه در شکل ۷.۱۵ (c) است.

برای به پایان رساندن مثال، توجه می کنیم در حالی که تبدیل های مربوط به فوریه را می توان در الگوریتم های مشابه FFT پیاده سازی کرد یا از خود FFT محاسبه کرد، ما از پیاده سازی های ماتریسی که در این بخش ارائه شده است برای محاسبه تبدیلات پیش رو و معکوس استفاده کردیم. با استفاده از $\text{MATLAB}^{\circledR}$ ، Windows- ۱۰ و یک کامپیوتر نوت بوک با پردازنده $\text{Intel}^{\circledR} \text{ iV-} \epsilon 600 \text{U}$ در ۲.۱ گیگاهرتز، مجموع زمانهای مورد نیاز برای محاسبه تبدیلات مربوط به فوریه در این مثال ۲ تا ۵ برابر بیشتر از FFT مربوطه بود. محاسبات با این حال، همه محاسبات کمتر از یک ثانیه طول کشید.

۷.۷ تبدیل والش - هادامارد

تبدیل های والش-هادامارد (WHTs) تبدیلهای غیر سینوسی هستند که یک تابع را به ترکیبی خطی از توابع پایه مستطیلی، به نام توابع والش، با ارزش ۱ و ۱ تجزیه می کنند. ترتیب توابع پایه در یک ماتریس تبدیل والش-هادامارد، نوع تبدیل را که در حال محاسبه است تعیین می کند. برای سفارش هادامارد (که به آن نظم طبیعی نیز گفته می شود)، ماتریس تبدیل با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست می آید

$$s(x, u) = \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (7-95)$$

به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴)، جایی که جمع در ضریب معادله (۷-۹۵) در حساب $\text{modulo } 2$ ، $N = 2^n$ انجام می شود و $b_k(z)$ بیت بازگشت در نمایندگی دودویی z است. به عنوان مثال، اگر $n = 3$ و $z = 6$ (۱۱۰) به صورت دودویی، $b_0(z) = 0$ ، $b_1(z) = 1$ ، و $b_2(z) = 1$. If $N = 2$ ، حادمرد به ترتیب تبدیل ماتریس است

$$\mathbf{A}_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-96)$$

جایی که ماتریس سمت راست (بدون ضرب مقیاس) هادامارد نامیده می شود. ماتریس سفارش ۲. اجازه دهید HN ماتریس Hadamard از نظم N را نشان دهد ، یک رابطه بازگشتی ساده برای ایجاد ماتریس های تبدیل هادامارد به ترتیب

$$\mathbf{A}_W = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{H}_N \quad (7-97)$$

$$\mathbf{H}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad (7-98)$$

AW برای نشان دادن ماتریس تبدیل هادامارد یا WHT به ترتیب طبیعی استفاده می شود. اگرچه در اینجا اندازه ۲ * ۲ است ، اما عموماً دارای اندازه N * N است ، جایی که N بعد تابع گسسته در حال تبدیل است.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-99)$$

بنابراین ، معادله (۷-۹۶) از معادلات آمده است. (۷-۹۷) و (۷-۹۹). به همین ترتیب ،

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-100)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_8 &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_4 & \mathbf{H}_4 \\ \mathbf{H}_4 & -\mathbf{H}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-101)$$

ماتریس های مربوط به تبدیل هادامارد با جایگزینی H_4 و H_8 به معادله (۷-۹۷) بدست می آیند. تعداد تبدیلات علامت در طول یک ردیف از ماتریس هادامارد به ترتیب توالی ردیف معروف است. توالی مانند فرکانس ، میزان تبدیل یک تابع را اندازه گیری می کند و مانند توابع پایه سینوسی تبدیل فوریه ، هر تابع والش دارای توالی منحصر به فردی است. از آنجا که عناصر یک ماتریس Hadamard از مقادیر معکوس هسته ای مشتق شده اند ، مفهوم توالی برای توابع پایه $S(x, u)$ برای $u = 0, 1, \dots, N-1$ نیز اعمال می شود. به عنوان مثال ، توالی راههای اصلی H_4 در معادله (۷-۱۰۰) ۰ ، ۳ ، ۱ ، ۲ است ؛ توالی بردارهای پایه H_8 در معادله (۷-۱۰۱) ۰ ، ۷ ، ۳ ، ۴ ، ۱ ، ۶ ، ۲ ، ۵ هستند. این ترتیب توالی ها ، مشخصه تبدیل شکل والش-هادامارد به دستور هادامارد است.

ترتیب بردارهای اصلی ماتریس هادامارد به این ترتیب که توالی به عنوان تابعی از u افزایش می یابد ، در برنامه های پردازش سیگنال و تصویر مطلوب و رایج است. ماتریس تبدیل حاصل از تبدیل والش - هادامارد به ترتیب ، با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست می آید

$$s(x, u) = \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)} \quad (7-102)$$

$$\begin{aligned} p_0(u) &= b_{n-1}(u) \\ p_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ p_2(u) &= b_{n-2}(u) + b_{n-3}(u) \\ &\vdots \\ p_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned} \quad (7-103)$$

به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴). مانند گذشته ، جمع بندی ها در معادلات. (۷-۱۰۲) و (۷-۱۰۳) در حساب $\bmod 2$ انجام می شود. بنابراین ، برای مثال ،

$$\mathbf{H}'_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-104)$$

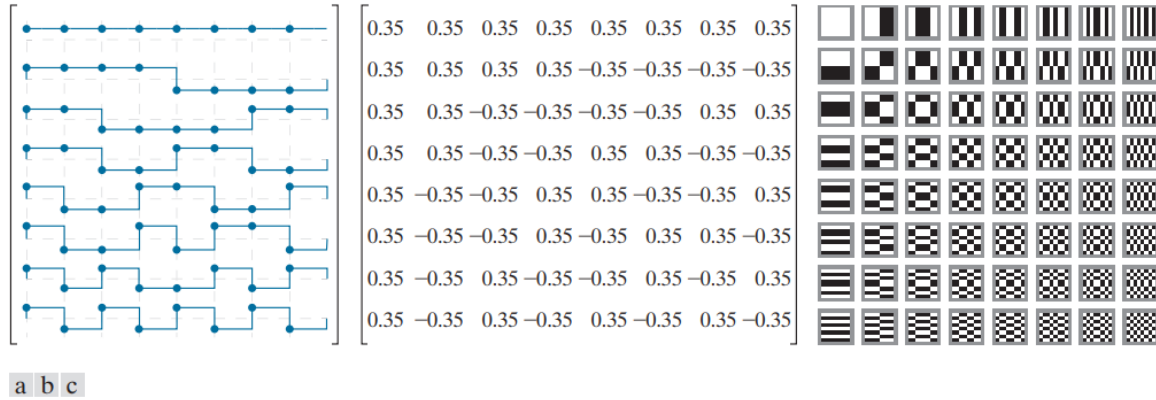
جایی که آپوستروف (') اضافه شده است تا ترتیب را در مقابل دستور هادامارد نشان دهد. توالی ردیفهای \mathbf{H}'_8 با شماره ردیفهای آنها مطابقت داشته باشد- یعنی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و ۷. یک روش متناوب برای تولید \mathbf{H}'_8 این است که دوباره ردیفهای Hadamard - دستور \mathbf{H}_8 را داد ، توجه داشته باشید که سطر S از \mathbf{H}'_8 مربوط به ردیف \mathbf{H}_8 است که کد خاکستری کمی معکوس S است. از آنجا که کد خاکستری n -bit مربوط به $(s_{n-1} \dots s_2 s_1 s_0)_2$ را می توان به عنوان محاسبه کرد

به یاد بیاورید که $N = 2^n$ ، بنابراین $n = \log_2 N$.

$$\begin{aligned} g_i &= s_i \oplus s_{i+1} \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-2 \\ g_{n-1} &= s_{n-1} \quad \text{for } i = n-1 \end{aligned} \quad (7-105)$$

جایی که { عملیات انحصاری OR را نشان می دهد ، ردیف \mathbf{H}'_8 همان ردیف S است $(g_0 g_1 g_2 \dots g_{n-1})_2$. \mathbf{H}_8 به عنوان مثال ، سطر ۴ یا $(100)_2$ ، \mathbf{H}'_8 ، که کد خاکستری آن $(110)_2$ است ، از ردیف $(011)_2$ یا ۳ از \mathbf{H}_8 آمده است. به ردیف ۴ \mathbf{H}'_8 در معادله (۷-۱۰۴) توجه کنید. در واقع مشابه ردیف ۳ \mathbf{H}_8 در معادله (۷-۱۰۱) است.

شکل ۷.۱۶ الف) و ب) به صورت گرافیکی و عددی ماتریس تبدیل WHT به ترتیب را برای مورد $N = 8$ نشان می دهد.



شکل ۷.۱۶ ماتریس تبدیل و تصاویر پایه تبدیل والش-هادمارد به ترتیب برای $N = 8$. تصاویر. برای تبدیل های بعدی، ماتریس AW' در رابطه با معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹) استفاده می شود.؛ برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود..

توابع پایه در شکل ۷.۱۶ (a) با افزایش u از ۰ به γ ، و توالی توابع موج مربعی زیرین افزایش می یابد. توجه داشته باشید همچنین ماتریس تبدیل در شکل ۷.۱۶ (b) حقیقی، متقارن و از معادله (۷-۱۰۵) و (۷-۹۷) زیر است. به عنوان

$$\mathbf{A}_{w'} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{H}'_s \quad (7-106)$$

این به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی می ماند تا نشان دهد که آن عمود است و آن AW در نهایت، به شباهت تصاویر پی در پی ترتیب در شکل ۷.۱۶ (ج) توجه کنید که بر اساس هسته تبدیل معکوس دوبعدی قابل تفکیک هستند

$$s(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)p_i(u) + b_i(y)p_i(v)]} \quad (7-107)$$

به تصاویر پایه ۲ DCT بعدی در شکل ۷.۱۰ (ج). توالی به عنوان تابعی از u و v افزایش می یابد، مانند فرکانس در تصاویر DCT، اما تفسیر فیزیکی چندان مفیدی ندارد.

مثال ۷.۱۳: تبدیل ساده والش-هادمارد به ترتیب.

برای محاسبه تبدیل والش-هادمارد به ترتیب توالی تابع $\mathbf{f} = [2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$ با ماتریس هادامارد H_4 به ترتیب هادامارد به ترتیب شروع می کنیم. (۷-۱۰۰) و از روش توصیف شده در رابطه با معادله (۷-۱۰۵) استفاده کنید. برای تبدیل ترتیب بردارهای پایه. نگاشت بردارهای پایه هادامارد H_4 به بردارهای ترتیب H_4^2 به شرح زیر محاسبه می شود:

Row of H_4'	Binary Code	Gray Code	Bit-Reversed Gray Code	Row of H_4
0	00	00	00	0
1	01	01	10	2
2	10	11	11	3
3	11	10	01	1

بنابراین ، مطابق با معادله (۷-۱۰۶) ، ماتریس تبدیل ترتیب والش-هادمارد به ترتیب $4 * 4$ است

$$\mathbf{A}_{W'} = \frac{1}{\sqrt{4}} \mathbf{H}_{W'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و تبدیل ترتیب شده است

$$\mathbf{t}_{W'} = \mathbf{A}_{W'} \mathbf{f} = [7 \ -2 \ 0 \ -1]^T.$$

۷.۸ تبدیل مورب

بسیاری از تصاویر تک رنگ دارای مناطق وسیعی از شدت یکنواخت و مناطق روشنایی اولیه هستند که زودتر افزایش یا کاهش می یابد. به غیر از تبدیل سینوسی گسسته ، همه تبدیلات ی که تا اینجا ارائه کرده ایم شامل یک بردار پایه (در فرکانس یا توالی $u = 0$) برای نشان دادن کارآمد سطوح سطح خاکستری است ، اما هیچ کدام یک تابع پایه ای ندارند که مورد هدف قرار گیرد. به طور خاص در نمایندگی از افزایش یا کاهش مقادیر شدت. تبدیل در نظر گرفته شده در این بخش ، که تبدیل مورب نامیده می شود ، شامل چنین تابع پایه ای است. ماتریس تبدیل مورب مرتبه $N * N$ که در آن $N = 2n$ به صورت بازگشتی با استفاده از

$$\mathbf{A}_{S1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{S}_N \quad (7-108)$$

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_N & b_N & 0 & -a_N & b_N & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{(N/2)-2} & 0 & 0 & \mathbf{I}_{(N/2)-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -b_N & a_N & 0 & b_N & a_N & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{(N/2)-2} & 0 & 0 & -\mathbf{I}_{(N/2)-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{N/2} \end{bmatrix} \quad (7-109)$$

در اینجا ، \mathbf{I}_N ماتریس یکه مرتبه $N * N$ است ،

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-110)$$

$$a_N = \left[\frac{3N^2}{4(N^2 - 1)} \right]^{1/2} \quad (7-111)$$

$$b_N = \left[\frac{N^2 - 4}{4(N^2 - 1)} \right]^{1/2} \quad (7-112)$$

توجه داشته باشید ۱) یک ماتریس یکه ۱*۱ و ۱۰ ماتریس تهی اندازه است * * .
 برای $N > 1$ وقتی $N \geq 8$ ، ترتیب ماتریس SN نیست ، اما می توان آن را با استفاده از روش نشان داده شده در مثال ۶.۱۳ برای WHT انجام داد. نمونه ای از استفاده از معادله (۷-۱۰۸) تا (۷-۱۱۲) ماتریس تبدیل مورب است

$$\mathbf{A}_{SI} = \frac{1}{\sqrt{4}} \mathbf{S}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (7-113)$$

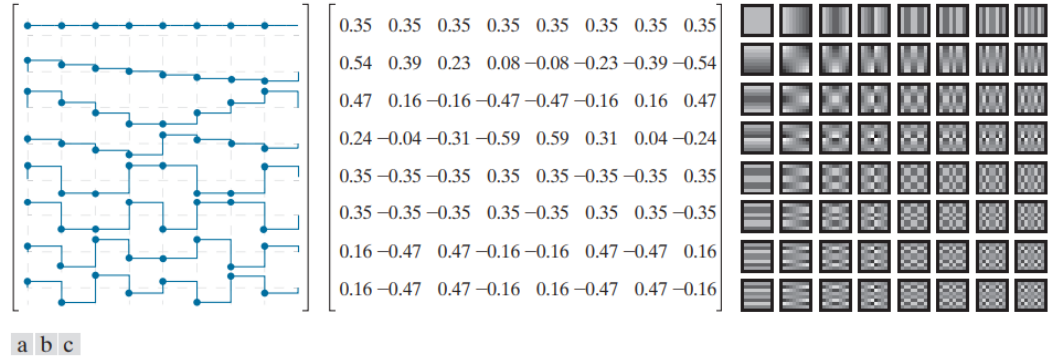
از آنجا که $N = 4$ ، بردارهای پایه ASI (و ردیف های ماتریس مورب \mathbf{S}_4) به ترتیب می شوند.

مثال ۷.۱۴: یک تبدیل ساده یک طرفه

با استفاده از معادلات (۷-۲۸) و (۷-۱۱۳) ، تبدیل شکل تابع $\mathbf{f} = [2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$ از مثال ۷.۱۳. $\mathbf{t}_{SI} = \bar{\mathbf{A}}_{SI} \bar{\mathbf{f}} = [7 \ -2.24 \ 0 \ 0]^T$ توجه داشته باشید که تبدیل فقط شامل دو عبارت غیر صفر است ، در حالی که تبدیل والش-هادامارد در مثال قبلی دارای سه عبارت غیر صفر بود. تبدیل مورب به طور م اثرتری نشان دهنده \mathbf{f} است زیرا \mathbf{f} یک تابع در حال افزایش خطی است - یعنی \mathbf{f} با بردار کج توالی یک رابطه زیادی دارد. بنابراین ، اصطلاحات کمتری در توسعه خطی با استفاده از توابع پایه مایل در مقابل توابع پایه والش وجود دارد.

شکلهای ۷.۱۷ (الف) و (ب) به صورت گرافیکی و عددی ماتریس تبدیل مورب به ترتیب را برای مورد $N = 8$ به تصویر می کشند. همانطور که از آپاستروف ها (') برای نشان دادن ترتیب در تبدیلهای والش-هادامارد ، \mathbf{S}' و ASI استفاده شد. برای نشان دادن نسخه های متوالی معادلات (۷-۱۰۸) و (۷-۱۰۹) استفاده می شود.

ماتریس تبدیل در شکل ۷.۱۶ (b) حقیقی است ، اما متقارن نیست. بنابراین ، $\mathbf{A}_{SI'}^{-1} = \mathbf{A}_{SI'}^T$ اما $\mathbf{A}_{SI'}^T \neq \mathbf{A}_{SI'}$ به ماتریس $\mathbf{A}_{SI'}$ همچنین متعامد است و می تواند همراه با آن استفاده شود



شکل ۷.۱۷ ماتریس تبدیل و تصاویر پایه تبدیل مورب برای $N = 8$. الف) نمایش گرافیکی ماتریس تبدیل عمود بر $A_{SI'}$ ، ب) $A_{SI'}$ به دو رقم اعشار گرد شده و ج) تصاویر پایه. برای تبدیل های ۱ بعدی، ماتریس $A_{SI'}$ در رابطه با معادلات (۲۸-۷) و (۲۹-۷) استفاده می شود.؛ برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۳۵-۷) و (۳۶-۷) استفاده می شود.

معادلات (۳۵-۷) و (۳۶-۷) برای پیاده سازی تبدیلات دو طرفه کج. شکل ۶.۱۷ ج) تصاویر دو طرفه با اندازه $8 * 8$ را نشان می دهد. توجه داشته باشید برای $4 \leq u \leq 5$ و $4 \leq v \leq 5$ ، آنها با تصاویر پایه مربوطه از WHT در شکل ۷.۱۶ یکسان هستند (c) این در شکلها ۷.۱۶ (a) و ۷.۱۷ (a) نیز مشهود است. هنگام $4 \leq u \leq 5$ در واقع، تمام بردارهای مایل کج شباهت زیادی به بردارهای اصلی تبدیل والش-هادامارد دارند. در نهایت، ما توجه داریم که ماتریس های مورب دارای ویژگی های لازم برای اجرای الگوریتم تبدیل سریع کج شبیه به FFT هستند.

۷.۹ تبدیل HAAR

در سال ۱۹۱۰ کشف شد، تابع های اصلی تبدیل Haar (Haar [۱۹۱۰]) بعداً قدیمی ترین و ساده ترین موجکهای متعامد شناخته شد. ما در بخش بعدی به توابع Haar در زمینه موجک ها نگاه می کنیم. در این بخش، ما به دگرگونی هار به عنوان یکی دیگر از تبدیلات مبتنی بر ماتریس که از مجموعه ای از توابع پایه مستطیلی شکل استفاده می کند، نزدیک می شویم. تبدیل Haar بر اساس توابع Haar، $h_u(x)$ است که در بازه پیوسته و نیمه باز $x \in [0,1)$ تعریف شده است. متغیر u یک عدد صحیح است که برای $u > 0$ را می توان بصورت منحصر به فرد تجزیه کرد

$$u = 2^p + q \quad (7-114)$$

جایی که p بزرگترین توان ۲ موجود در u است و q باقی مانده است - یعنی $q = 2^p - u$ سپس توابع پایه Haar هستند

$$h_u(x) = \begin{cases} 1 & u = 0 \text{ and } 0 \leq x < 1 \\ 2^{p/2} & u > 0 \text{ and } q/2^p \leq x < (q+0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & u > 0 \text{ and } (q+0.5)/2^p \leq x < (q+1)/2^p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7-115)$$

وقتی $u \cdot 0$ است، $h \cdot (x) = 1$ برای همه x ؛ تابع Haar اول مستقل از متغیر پیوسته x است. برای سایر مقادیر u ، $h_u(x) = 0$ مگر در فواصل نیمه باز $[q/2^p, (q+0.5)/2^p)$ و $[(q+0.5)/2^p, (q+1)/2^p)$ جایی که یک موج مستطیلی به بزرگی $2^{p/2}$ و $-2^{p/2}$ است، به ترتیب به پارامتر p دامنه و عرض هر دو موج مستطیلی را تعیین می کند، در حالی که q موقعیت آنها را در طول x تعیین می کند. با افزایش u ، امواج مستطیلی باریک می شوند و تعداد توابع که می توانند به صورت ترکیب خطی توابع Haar ارائه شوند افزایش می یابد. شکل ۷.۱۸ (الف) هشت تابع اول Haar (یعنی منحنی هایی که با رنگ آبی نشان داده شده است) را نشان می دهد. ماتریس تبدیل گسسته Haar را می توان با جایگزینی هسته تبدیل معکوس بدست آورد.

$$s(x, u) = \frac{1}{\sqrt{N}} h_u(x/N) \quad \text{for } x = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7-116)$$

متغیرهای p و q در معادل s و t در معادله (۷-۷۲) هستند.

برای $u = 0, 1, \dots, N-1$ جایی که $N = 2^n$ ، به معادله (۷-۲۲) و (۷-۲۴). ماتریس تبدیل ایجاد شده، با AH نشان داده می شود، می تواند به عنوان تابعی از ماتریس $N \times N$ Haar نوشته شود

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} h_0(0/N) & h_0(1/N) & \dots & h_0(N-1/N) \\ h_1(0/N) & h_1(1/N) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{N-1}(0/N) & \dots & & h_{N-1}(N-1/N) \end{bmatrix} \quad (7-117)$$

$$\mathbf{A}_H = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{H}_N \quad (7-118)$$

به عنوان مثال، اگر $N = 2$ ،

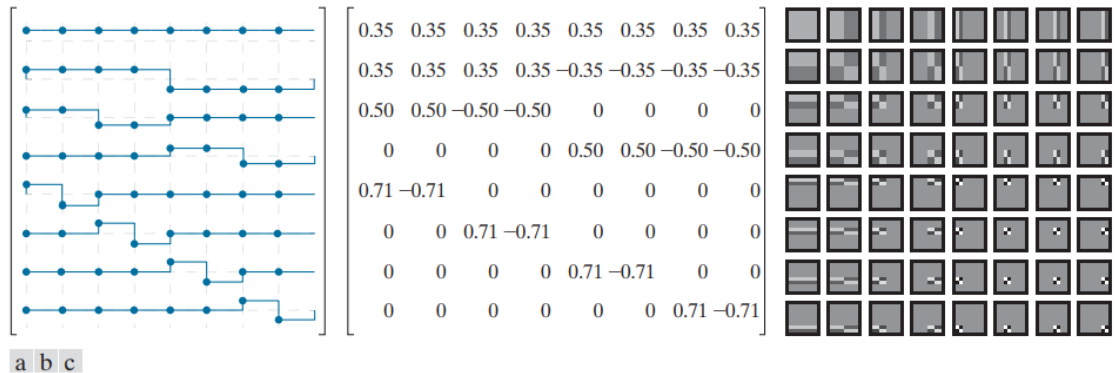
$$\mathbf{A}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_0(0) & h_0(1/2) \\ h_1(0) & h_1(1/2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-119)$$

ماتریس Haar را با آن اشتباه نگیرید. ماتریس هادامارد فصل ۷.۷. از آنجا که متغیر یکسان برای هر دو مورد استفاده قرار می گیرد، ماتریس مناسب باید از زمینه بحث

در محاسبه AH ، x و u معادله (۷-۱۱۶) و 0 و 1 هستند، بنابراین معادله (۷-۱۱۴)، (۷-۱۱۵)، و (۷-۱۱۶) $s(0,1) = h_1(0)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ ، $s(1,1) = h_1(0.5)/\sqrt{2} = -1/\sqrt{2}$ ، $s(0,0) = h_0(0)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ ، $s(1,0) = h_0(0.5)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ ، برای $N = 2$ ، u ، q و p معادل (۷-۱۱۴) مقادیر را فرض کنید

u	p	q
1	0	0
2	1	0
3	1	1

وقتی $u \cdot hu(x)$ مستقل از p و q است.



شکل ۷.۱۸ ماتریس تبدیل و تصاویر پایه تبدیل گسسته Haar برای $N = ۸$. برای تبدیل های $D-۱$ ، ماتریس AH در رابطه با معادلات (۷-۲۸) و (۷-۲۹) استفاده می شود. برای تبدیل های دو بعدی، با معادلات (۷-۳۵) و (۷-۳۶) استفاده می شود.

و ماتریس تبدیل Haar در اندازه $۴ * ۴$ می شود

$$\mathbf{A}_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (7-120)$$

ماتریس تبدیل برای $N = ۸$ در شکل ۷.۱۸ (b) نشان داده شده است. AH حقیقی، متعامد و ترتیب مرتب شده است. یک ویژگی مهم ماتریس تبدیل Haar این است که می توان آن را به محصولی از ماتریس با ورودی های غیر صفر کمتر از ماتریس اصلی تجزیه کرد. این در مورد همه تبدیل اتی که تا به اینجا بحث کرده ایم صادق است. آنها را می توان در الگوریتم FFT مانند پیچیدگی $O(N \log^2 N)$ پیاده سازی کرد. با این حال، ماتریس تبدیل Haar قبل از شروع فرآیند تجزیه ورودی های غیر صفر کمتری دارد و الگوریتم های مختلط تری را به ترتیب $O(N)$ ممکن می سازد. همانطور که در شکل ۷.۱۸ (ج) مشاهده می شود، تصاویر اصلی تبدیل دو بعدی Haar برای تصاویر با اندازه $۸ * ۸$ نیز دارای ورودی های غیر صفر کمی هستند.

۷.۱۰ تبدیل موجک

در سال ۱۹۸۷، موجک‌ها پایه و اساس یک رویکرد جدید قدرتمند در پردازش و تجزیه و تحلیل سیگنال به نام نظریه چند حلقه بودند (مالات [۱۹۸۷]). نظریه چند حلقه شامل تکنیک‌های مختلف رشته‌ها از جمله کدگذاری زیر باند از پردازش سیگنال، فیلتر آینه چهارگانه از تشخیص گفتار دیجیتالی و پردازش تصویر هرمی است. همانطور که از نامش پیداست، مربوط به نمایش و تجزیه و تحلیل سیگنالها (یا تصاویر) در بیش از یک وضوح است. یک تابع مقیاس بندی برای ایجاد یک سری تقریبی از یک تابع یا تصویر استفاده می‌شود، که هر یک با ضریب ۲ در رزولوشن متفاوت است.

همانطور که در بخش ۷.۱ اشاره شد، موجکها موجهای کوچکی هستند که طیف‌های آنها در باند تعیین شده است. (۷-۷۲).

از نزدیکترین تقریبهای مجاور آن، و توابع مکمل، که موجک نامیده می‌شوند، برای کدگذاری تفاوت‌های تقریبهای مجاور استفاده می‌شود. تبدیل موجک گسسته (DWT) از این موجک‌ها به همراه یک تابع مقیاس بندی واحد برای نشان دادن یک تابع یا تصویر به عنوان ترکیبی خطی از تابع موجک و مقیاس بندی استفاده می‌کند. بنابراین، تابع موجک‌ها و مقیاس بندی به عنوان پایه‌ای غیر طبیعی یا بی‌عادی برای توسعه DWT عمل می‌کنند. خطوط Daubechies و دو متعامد B شکل ۷.۳ (f) و (g) و توابع پایه Haar بخش قبل، سه مورد از پایه‌های زیادی هستند که می‌توانند در DWT استفاده شوند. در این بخش، ما یک چارچوب ریاضی برای تفسیر و کاربرد تبدیل موجک گسسته ارائه می‌دهیم. ما برای نشان دادن مفاهیم معرفی شده از تبدیل موجک گسسته با توجه به توابع پایه Haar استفاده می‌کنیم. همانطور که مطالب را پیش می‌برید، به یاد داشته باشید که تبدیل موجک گسسته یک تابع با توجه به توابع پایه Haar، تبدیل Haar در تابع نیست (اگرچه این دو به هم مرتبط هستند).

توابع مقیاس

مجموعه‌ای از توابع پایه را که شامل تمام تبدیل‌های صحیح و مقیاس‌گذاری‌های دوتایی از تابع مقیاس بندی پدر حقیقی، مربع و عدد $\varphi(x)$ است، در نظر بگیرید-یعنی، مجموعه توابع مقیاس بندی شده و تبدیل شده $\{\varphi_{j,k}(x) | j, k \in \mathbb{Z}\}$ کجا

تبدیل موجک گسسته، مانند همه تبدیلات ی که در این فصل در نظر گرفته شده است، گسترش خطی توابع را با توجه به مجموعه توابع انبساط متعامد یا بی‌عادی ایجاد می‌کند. ضرایب یک DWT مقیاس کامل ۱ بعدی با توجه به موجک‌های Haar و یک ترانس ۱ Haar یکسان هستند. Z مجموعه اعداد صحیح است.

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) \quad (7-121)$$

در این معادله، عدد صحیح k موقعیت w_j ، $k(x)$ را در امتداد محور x و مقیاس j شکل آن را تعیین می‌کند- یعنی عرض و دامنه آن. اگر j را محدود کنیم. برای مقداری از مقدار $j = j_0$ ، سپس $\{\varphi_{j_0,k} | k \in \mathbb{Z}\}$ اساس

فضای عملکردی است که توسط $\varphi_{j,k}(x)$ برای $j=j_0$ باز می شود. $k = V \cdot$ افزایش V_{j_0} تعداد توابع قابل نمایش در V_{j_0} را افزایش می دهد و به توابع با تنوع کمتر اجازه می دهد نکات و جزئیات دقیق تر در فضا گنجانده شود. همانطور که در شکل ۶.۱۹ نشان داده شده است با تابع های مقیاس گذاری Haar، این نتیجه این واقعیت است که با افزایش j_0 ، مقیاس استفاده از توابع برای نمایش توابع در V_{j_0} باریک تر و جدا شده با تبدیلات کوچکتر در x .

از بخش ۷.۱ به یاد بیاورید که طول یک پایه مجموعه ای از توابع است که می تواند به عنوان ترکیب خطی توابع پایه نشان داده شود

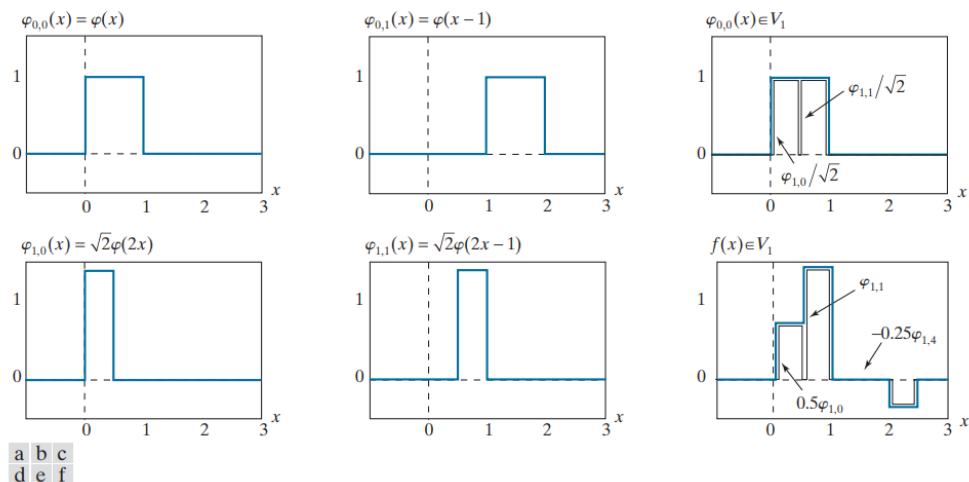
مثال ۷.۱۵: تابع مقیاس گذاری Haar

تابع مقیاس بندی ارتفاع واحد و عرض واحد را در نظر بگیرید

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7-122)$$

و توجه داشته باشید که تابع پایه $\varphi(x)$ از Haar $h \cdot (x)$ از معادله (۷-۱۱۵) است. شکل ۷.۱۹ تعدادی از تابع های مقیاس بندی پالسی را نشان می دهد که می توان با جایگزینی معادله ایجاد کرد. (۷-۱۲۲) به معادله (۷-۱۲۱). توجه داشته باشید که مقیاس ۱ است [یعنی زمانی که $j = 1$ مانند شکل ۱ است. ۷.۱۹ (d) و (e)]، توابع مقیاس بندی نصف عرض مقیاس ۰ هستند (یعنی وقتی $j = 0$ است مانند شکل ۷.۱۹ (a) و (b)). علاوه بر این، برای یک بازه

معین در x وجود دارد



شکل ۷.۱۹ تابع مقیاس گذاری Haar

مقیاس ۱ دو برابر مقیاس ۰ توابع مقیاس بندی است. به عنوان مثال، دو تابع مقیاس بندی V_1 ، $\varphi_{1,0}$ and $\varphi_{1,1}$ ، فاصله $0 \leq x < 1$ قرار دارند، در حالی که فقط یک تابع مقیاس بندی V_0 ، $\varphi_{0,0}$ ، فاصله یکسانی را اشغال می کند. شکل ۷.۱۹ (f) یکی از اعضای مقیاس بندی V_1 را نشان می دهد که به V_0 تعلق ندارد. تابع مقیاس در شکل ۷.۱۹ (a) و (b) برای نشان دادن آن بسیار درشت هستند. توابع با وضوح بالاتر، مانند آنچه در شکل ۷.۱۹

(d) و (e)، ها آمده است. مورد نیاز است. آنها می توانند، همانطور که در شکل ۷.۱۹ (f) نشان داده شده است، برای نشان دادن تابع استفاده شوند. به عنوان گسترش سه مدت $f(x) = 0.5\varphi_{1,0}(x) + \varphi_{1,1}(x) - 0.25\varphi_{1,4}(x)$ به روش مشابه، تابع مقیاس بندی $\varphi_{0,0}$ که هم تابع پایه و هم عضو V_0 است، می تواند با یک ترکیب خطی از توابع مقیاس بندی V_1 نشان داده شود (شکل ۷.۱۹ (ج) را ببینید) به شرح زیر:

$$\varphi_{0,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2k}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2k+1}(x)$$

تابع مقیاس بندی Haar در مثال قبل، مانند توابع مقیاس بندی تمام تبدیلهای موجک گسسته، از چهار الزامات اساسی تجزیه و تحلیل چند وضوح پیروی می کند (ماللات [۱۹۸۹a]):

۱. تابع مقیاس بندی نسبت به تبدیل ای صحیح آن متعامد است.

۲. فضاهای عملکردی که توسط تابع مقیاس بندی در مقیاسهای پایین باز می شوند، در مقیاسهای بالاتر در داخل آنها تودرتو است. به این معنا که،

$$V_{-\infty} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{\infty} \quad (7-123)$$

جایی که (برای نشان دادن "یک زیرفضا از" استفاده می شود. توابع مقیاس بندی شرایط شهودی را برآورده می کنند که اگر $f(x) \in V_j$ ، سپس $f(2x) \in V_{j+1}$

۳. تنها تابع قابل نمایش در هر مقیاس $f(x) = 0$ است.

۴. همه توابع قابل اندازه گیری و ادغام مربع را می توان به صورت ترکیبی خطی از تابع مقیاس بندی به صورت $n \rightarrow \infty$ نشان داد. به عبارت دیگر،

$$V_{\infty} = L^2(\mathbf{R}) \quad (7-124)$$

جایی که $L^2(\mathbf{R})$ مجموعه ای از توابع قابل اندازه گیری، یکپارچه و مربع، $D-1$ است.

تحت شرایط فوق، $w(x)$ می تواند به صورت ترکیبی خطی از کپی های دو وضوح از خود بیان شود:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{\varphi}(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (7-125)$$

به یاد بیاورید که \mathbf{R} مجموعه اعداد حقیقی است.

معادله پالایش یا اتساع، معادله (۷-۱۲۵) یک بسط سری را تعریف می کند که در آن انبساط مطابق با معادله (۷-۱۲۱)، عمل می کند. توابع مقیاس از یک مقیاس بالاتر از $\varphi(x)$ و $hw(k)$ ضرایب انبساط هستند. ضرایب انبساط، که می توانند در یک مجموعه مرتب جمع آوری شوند

$\{h_{\varphi}(k) | k = 0, 1, 2, \dots\} = \{h_{\varphi}(0), h_{\varphi}(1), \dots\}$ متقاضیان برای توابع مقیاس گذاری متعامد، از معادله (۷-۵۱) و (۷-۵۲) که استفاده می شود.

$$h_{\varphi}(k) = \langle \varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - k) \rangle \quad (7-126)$$

ضرایب تابع مقیاس بندی نیز می توانند در بردار مقیاس بندی ترکیب شوند.

مثال ۷.۱۶: ضرایب تابع مقیاس Haar.

ضرایب تابع مقیاس گذاری Haar [یعنی معادله (۷-۱۲۲)] $\{h_{\varphi}(n) | n = 0, 1\} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ هستند، اولین ردیف ماتریس Haar AH برای $N = 2$ در معادله (۷-۱۱۹). به عنوان یک تمرین برای خواننده باقی مانده است (به احتمال $lem 7, 33$) برای محاسبه این ضرایب با استفاده از معادله (۷-۱۲۶) معادله (۷-۱۲۵) سپس بازدهی دارد

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}\varphi(2x)] + \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}\varphi(2x - 1)] \\ &= \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) \end{aligned}$$

این بسط به صورت گرافیکی در شکل ۷.۱۹ (ج) نشان داده شده است، جایی که عبارات پراتنز عبارت قبلی $\varphi_{1,0}(x)$ و $\varphi_{1,1}(x)$ دیده می شود.

توابع موجک

با توجه به تابع مقیاس بندی پدر که نیازهای MRA بخش قبل را برآورده می کند، یک تابع موجک مادر $\psi(x)$ وجود دارد که تبدیل های صحیح آن و مقیاس گذاری دوتایی،

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (7-127)$$

برای همه $j, k \in \mathbb{Z}$ تفاوت بین هر دو فضای مقیاس بندی مجاور را شامل می شود. اگر اجازه دهیم W_0 نشان دهنده فضای عملکردی باشد که توسط توابع موجک $\{\psi_{j_0,k} | k \in \mathbb{Z}\}$ ، پس

$$V_{j_0+1} = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \quad (7-128)$$

جایی که $\{$ نشان دهنده اتحاد فضاهای عملکردی (مانند اتحاد مجموعه ها) است. مکمل متعامد V_j در V_{j_0+1} است و توابع مقیاس بندی که اساس V هستند، متعادل با توابع موجک هستند که اساس W هستند:

$$\langle \varphi_{j_0,k}(x), \psi_{j_0,l}(x) \rangle = 0 \quad \text{for } k \neq l \quad (7-129)$$

مکمل متعامد فضای بردار $V \in W$ مجموعه ای از بردارها در V است که با هر بردار در W متعامد هستند.

شکل ۷.۲۰ رابطه بین مقیاس بندی و فضاهای موجک را به صورت گرافیکی نشان می دهد. هر بیضی در تصویر یک فضای مقیاس است که مطابق با معادله (۷-۱۲۳)، درون فضای مقیاس بندی با وضوح بالاتر بعدی تودرتو قرار گرفته است. تفاوت بین فضاهای مقیاس بندی مجاور، فضای موجک است. از آنجا که فضای موجک $\psi(x)$ در فضای مقیاس بندی V_{j+1} و C_j قرار دارد، $\psi_{j,k}(x) \in W_j \subset V_{j+1}$ ، تابع موجک $X(C)$ - مانند همتای مقیاس گذاری آن در معادله (۷-۱۲۵) - می تواند باشد به عنوان مجموع وزنی توابع مقیاس بندی تبدیل یافته و دو وضوح نوشته شده است. یعنی، ما می توانیم بنویسیم

$$\psi(x) = \sum_k h_\psi(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (7-130)$$

جایی که ضرایب $h_\psi(k)$ ، که ضرایب موجک نامیده می شوند ، می توانند در مجموعه مرتب شده $\{h_\psi(k) | k = 0, 1, 2, \dots\} = \{h_\psi(0), h_\psi(1), \dots\}$ ترکیب شوند. از آنجا که تبدیل های موجک صحیح نسبت به یکدیگر و تابع های مقیاس بندی مکمل آنها متعامد هستند ، می توان نشان داد (به عنوان مثال ، Gopinath، Burrus و [Guo ۱۹۹۸]) ببینید که $h_\psi(k)$ معادله (۷-۱۳۰) مربوط به $h_\psi(k)$ معادله (۷-۱۲۵) است. توسط

$$h_\psi(k) = (-1)^k h_\varphi(1 - k) \quad (7-131)$$

ضرایب تابع موجک همچنین می توانند در بردار موجک ترکیب شوند.

مثال ۷.۱۷: تابع موجک Haar و ضرایب.

در مثال قبلی ، ضرایب مقیاس بندی Haar به عنوان $\{h_\varphi(n) | n = 0, 1\} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ تعریف شد.

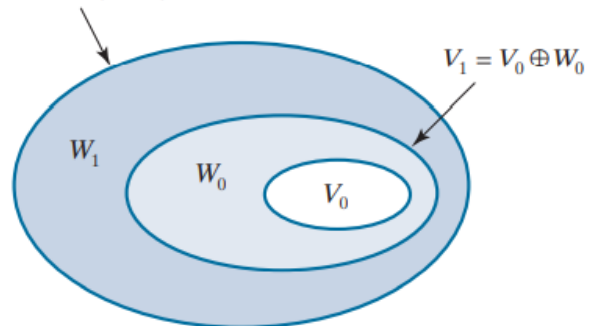
با استفاده از معادله (۷-۱۳۱) ، ضرایب تابع موجک مربوطه هستند

$$h_\psi(0) = (-1)^0 h_\varphi(1 - 0) = 1/\sqrt{2}$$

$$h_\psi(1) = (-1)^1 h_\varphi(1 - 1) = -1/\sqrt{2}$$

بنابراین $\{h_\psi(n) | n = 0, 1\} = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ این ضرایب مربوط به ردیف دوم ماتریس AH برای

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$



شکل ۷.۲۰ رابطه بین مقیاس بندی و فضا های تابع موجک.

$N = 2$ در معادله (۷-۱۱۹). جایگزینی این مقادیر به معادله (۷-۱۳۰) ، ما $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$ را

دریافت می کنیم که در شکل ۷.۲۱ (a) ترسیم شده است. بنابراین ، تابع موجک مادر Haar است

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (7-132)$$

توجه داشته باشید که این نیز تابع پایه $h_1(x)$ Haar از معادله (۷-۱۱۵) است. با استفاده از معادله (۷-۱۲۷) ،

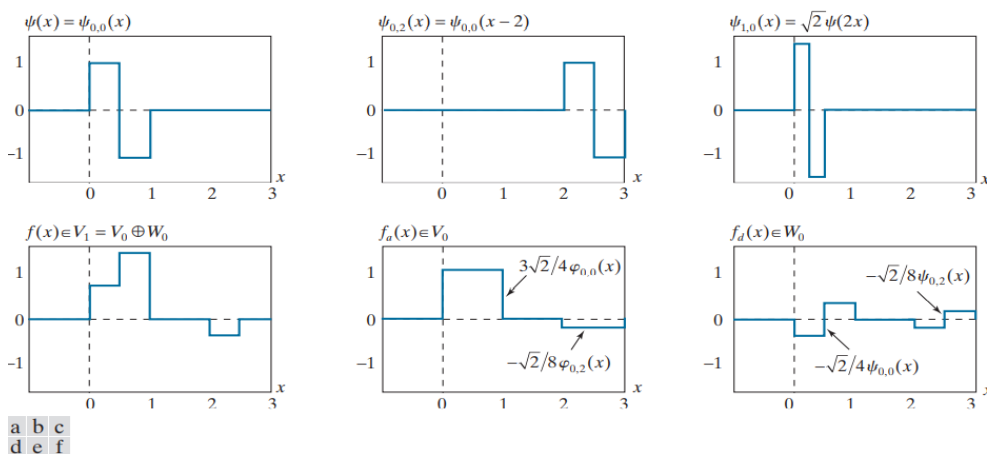
اکنون می توانیم جهان موجک های مقیاس شده و تبدیل شده Haar را ایجاد کنیم. دو شکل موجک ، $\psi_{1,0}(x)$ ،

و در شکل ۷.۲۱ (b) و (c) به ترتیب نشان داده شده است. موجک توجه داشته باشید $\psi_{1,0}(x) \in W_1$ باریک تر از $\psi_{0,2}(x) \in W_0$ است و به این ترتیب می تواند برای نشان دادن توابع جزئیات پنجم استفاده شود. شکل ۷.۲۱ (d) یکی از اعضای تابع V_1 را نشان می دهد که در V_0 نیست. این تابع در مثال ۷.۱۵ در نظر گرفته شده است (شکل ۷.۱۹ (f) را ببینید). اگرچه نمی توان تابع را در V_0 به طور دقیق نشان داد، معادله (۷-۱۲۸) نشان می دهد که می توان آن را به صورت تابعی از مقیاس بندی V_0 و W_0 و توابع موجک نوشت. گسترش حاصله است

$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$

$$f_a(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \varphi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8} \varphi_{0,2}(x)$$

$$f_d(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \psi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8} \psi_{0,2}(x)$$



شکل ۷.۲۱ تابع های موجک Haar

در اینجا، $f_a(x)$ تقریبی $f(x)$ با استفاده از توابع مقیاس V_0 است، در حالی که $f_d(x)$ تفاوت $f(x) - f_a(x)$ به عنوان مجموع موجک W_0 است. این تقریب ها و تفاوت ها، که در شکل ها نشان داده شده است. ۷.۱۹ (e) و $f(x)$ را به روشی شبیه به فیلترینگ پایین گذرو بالا گذر تقسیم کنید. فرکانسهای پایین $f(x)$ در $f_a(x)$ ثبت می شود- مقدار متوسط $f(x)$ را در هر فاصله صحیح فرض می کند- در حالی که جزئیات فرکانس بالاتر در $f_d(x)$ کدگذاری می شود.

گسترش سری موجک

ترکیب معادلات (۷-۱۲۴) و (۷-۱۲۸)، فضای همه قابل اندازه گیری، مربع-انتگرال-توابع صحیح را می توان به صورت $L^2(\mathbf{R}) = V_{in} \oplus W_{in} \oplus W_{in+1} \oplus \dots$ تعریف کرد، جایی که J_0 یک است. مقیاس شروع را امتحان کنید سپس می توانیم تابع سری موجک را تعریف کنیم. $H L^2(\mathbf{R})$ $f(x)$ با توجه به موجک $c(x)$ و تابع مقیاس بندی $w(x)$ به

عنوان

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x) \quad (7-133)$$

جایی که c_{j_0} برای $j \geq j_0$ ضرایب تقریب و جزئیات نامیده می شود. به طور فشرده هر تابع قابل اندازه گیری، قابل ادغام مربع و ۱ بعدی را می توان به صورت a بیان کرد. مجموع وزنی V توابع مقیاس بندی و موجک های W_j برای $j \geq j_0$ اولین مبلغ در معادله (۷-۱۳۳) تقریبی $f(x)$ از مقیاس توابع مقیاس $\cdot j$ تولید می کند. هر مقیاس متوالی از مجموع دوم جزئیات بیشتری را به عنوان مجموع موجک هایی با وضوح بالاتر ارائه می دهد. اگر تابع

های مقیاس و موجک طبیعی هستند،

$$c_{j_0} = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle \quad (7-134)$$

$$d_j = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \quad (7-135)$$

در اینجا، ما از معادله (۷-۱۳۳) استفاده کرده ایم. اگر آنها بخشی از پایه دوضلعی باشند، W و C اصطلاحات باید به ترتیب با توابع دو گانه W و $'$ جایگزین شوند.

مثال ۷.۱۸: گسترش سری موجک Haar $y = x^2$.

تابع ساده را در نظر بگیرید

$$y = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در شکل ۷.۲۲ (a) نشان داده شده است. استفاده از موجک Haar - به معادلات (۷-۱۲۲) و (۷-۱۳۲) مراجعه کنید. و مقیاس شروع $j_0 = 0$ ، معادله (۷-۱۳۴) و (۷-۱۳۵) را می توان برای محاسبه ضرایب توسعه زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} c_0(0) &= \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\ d_0(0) &= \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = \int_0^{0.5} x^2 dx - \int_{0.5}^1 x^2 dx = -\frac{1}{4} \\ d_1(0) &= \int_0^1 x^2 \psi_{1,0}(x) dx = \int_0^{0.25} x^2 \sqrt{2} dx - \int_{0.25}^{0.5} x^2 \sqrt{2} dx = -\frac{\sqrt{2}}{32} \\ d_1(1) &= \int_0^1 x^2 \psi_{1,1}(x) dx = \int_{0.5}^{0.75} x^2 \sqrt{2} dx - \int_{0.75}^1 x^2 \sqrt{2} dx = -\frac{3\sqrt{2}}{32} \end{aligned}$$

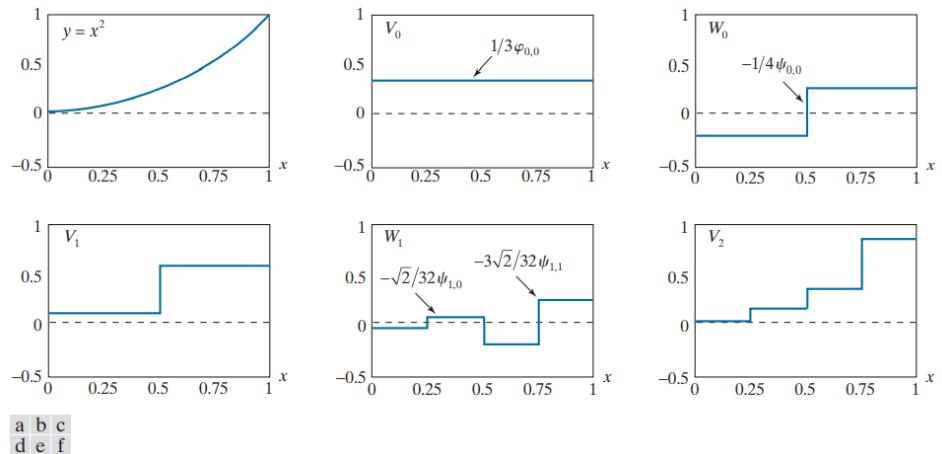
جایگزینی این مقادیر به معادله (۷-۱۳۳)، ما سری موجک را دریافت می کنیم

$$y = \underbrace{\frac{1}{3} \varphi_{0,0}(x)}_{V_0} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \psi_{0,0}(x) \right]}_{W_0} + \underbrace{\left[-\frac{\sqrt{2}}{32} \psi_{1,0}(x) - \frac{3\sqrt{2}}{32} \psi_{1,1}(x) \right]}_{W_1} + \dots$$

$$\underbrace{V_1 = V_0 \oplus W_0}_{V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1}$$

واژه اول در این بسط C_0 (۰) را به کار می گیرد تا تقریبی V_0 از تابع در حال بسط ایجاد کند. این تقریب در شکل ۷.۲۲ (b) نشان داده شده است و مقدار متوسط تابع اصلی است. عبارت دوم از d_0 (۰) برای بازنمایی تقریب

با افزودن سطحی از جزئیات از فضای موجک W_0 استفاده می‌کند. جزئیات اضافه شده و تقریب V_1 حاصل در شکلها نشان داده شده است. ۷.۲۲ (ج) و (د) به ترتیب. سطح دیگری از جزئیات از محصولات $d_1(0)$ و $d_1(1)$ با موجکهای مربوطه W_1 شکل می‌گیرد. این جزئیات اضافی در شکل ۷.۲۲ (e) نشان داده شده است، و تقریب حاصل از V_2 در شکل ۷.۲۲ (f) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که گسترش اکنون شبیه تابع اصلی شده است. همانطور که مقیاس‌های بالاتر (سطوح بیشتر جزئیات) اضافه می‌شود، تقریب به نمایش دقیق‌تری از آن تبدیل می‌شود. تابع، درک آن در حد $j \rightarrow \infty$



شکل ۷.۲۲ گسترش سری موجک $y = x^2$ با استفاده از موجک Haar تبدیل موج گسسته در یک بعد

مانند گسترش سری فوریه، گسترش سری موجک بخش قبل، تابع یک متغیر پیوسته واحد را به دنباله‌ای از ضرایب گسسته ترسیم می‌کند. اگر تابع در حال گسترش گسسته باشد، ضرایب انبساط تبدیل موجک گسسته آن (DWT) و خود انبساط تبدیل موجک گسسته معکوس تابع است. مقدار $J_0 = 0$ در معادل (۷-۱۳۳) تا (۷-۱۳۵) و محدود کردن توجه به توابع گسسته نقطه N که در آن N توان ۲ است (یعنی $N = 2^J$)، به دست می‌آوریم

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[T_\varphi(0,0)\varphi(x) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} T_\psi(j,k)\psi_{j,k}(x) \right] \quad (7-136)$$

$$T_\varphi(0,0) = \langle f(x), \varphi_{0,0}(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\varphi^*(x) \quad (7-137)$$

$$T_\psi(j,k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\psi_{j,k}^*(x) \quad (7-138)$$

به یاد داشته باشید که برای ورودی‌های گسسته، x یک متغیر گسسته است که مقادیر صحیح بین ۰ و $N-1$ را به خود می‌گیرد.

برای $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ و $j = 0, 1, \dots, J - 1$ ضرایب تبدیل تعریف شده با معادلات (۷-۱۳۷) و (۷-۱۳۸) به ترتیب ضرایب تقریب و جزئیات نامیده می شود. آنها با $c_j(k)$ و $d_j(k)$ از گسترش سری موجک در بخش قبلی مطابقت دارند. توجه داشته باشید که ادغام گسترش سری با جمع بندی در معادله (۷-۱۳۷) تا (۷-۱۳۸) جایگزین شده است. در مورد گسسته ، محصولات داخلی مانند محصولات معادله (۷-۱) و (۷-۲) ، برخلاف معادله (۷-۳) ، استفاده می شود. علاوه بر این ، الف فاکتور نرمال کننده N ، یادآور DFT در مثال ۷.۶ ، به هر دو تبدیل رو به جلو و معکوس اضافه شده است. این عامل به طور متناوب می تواند بصورت N در جلو یا معکوس قرار گیرد. در نهایت ، باید به یاد داشت که معادله (۷-۱۳۷) تا (۷-۱۳۸) برای پایه های متعامد معتبر است. اگر تابع های مقیاس بندی و موجک ارزش حقیقی داشته باشند ، می توان ترکیبات را کنار گذاشت. اگر اساس باشد. دوضلعی ، اصطلاحات W و C در معادلات (۷-۱۳۷) و (۷-۱۳۸) باید به ترتیب با دوگانه آنها ، w و C جایگزین شوند.

مثال ۷.۱۹: تبدیل موجک گسسته ۱ بعدی

برای نشان دادن استفاده از معادلات (۷-۱۳۷) تا (۷-۱۳۸) ، یک تابع گسسته از چهار نقطه را در نظر بگیرید. و $f(0) = 1, f(1) = 4, f(2) = -3, \text{ and } f(3) = 0$. از آنجا که $N = 4$ ، $J = 2$ است و مجموع آنها در معادله (۷-۱۳۶) تا (۷-۱۳۸) برای $x = 0, 1, 2, 3$ انجام می شود. هنگامی که $z = 0$ ، $k = 0$ است. وقتی $z = 1$ ، $k = 0$ یا 1 است. اگر از مقیاس پذیری Haar و توابع موجک استفاده کنیم و فرض کنیم چهار نمونه از $f(x)$ بر روی پشتیبانی از تابع مقیاس بندی ، که برابر ۱ است ، توزیع شده است. (۷-۱۳۷) می دهد

$$T_{\varphi}(0,0) = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 f(x) \varphi(x) = \frac{1}{2} [(1)(1) + (4)(1) + (-3)(1) + (0)(1)] = 1$$

توجه داشته باشید که ما نمونه های تابع مقیاس بندی Haar را با فاصله یکنواخت برای $k = 0, 1, 2, 3$ یعنی $w = 1$ (۲) برای $x = 0, 1, 2, 3$ به کار برده ایم. مقادیر نمونه برداری شده با عناصر ردیف اول Haar مطابقت دارد. ماتریس تبدیل AH در معادله (۷-۱۲۰) بخش ۷.۹. با استفاده از معادله (۷-۱۳۸) و نمونه های مشابه C_j, C ، که عناصر ردیف های ۲ ، ۳ و ۴ هجری قمری هستند ، بدست می آوریم

$$T_{\psi}(0,0) = \frac{1}{2} [(1)(1) + (4)(1) + (-3)(-1) + (0)(-1)] = 4$$

$$T_{\psi}(1,0) = \frac{1}{2} [(1)(\sqrt{2}) + (4)(-\sqrt{2}) + (-3)(0) + (0)(0)] = -1.5\sqrt{2}$$

$$T_{\psi}(1,1) = \frac{1}{2} [(1)(0) + (4)(0) + (-3)(\sqrt{2}) + (0)(-\sqrt{2})] = -1.5\sqrt{2}$$

بنابراین ، تبدیل موجک گسسته تابع چهار نمونه ساده ما نسبت به مقیاس بندی Haar و توابع موجک $\{1, 4, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}\}$ است. از آنجا که ضرایب تبدیل تابعی از دو متغیر- مقیاس z و تبدیل k هستند ، آنها را

در یک مجموعه مرتب ترکیب می کنیم. به نظر می رسد که عناصر این مجموعه با عناصر تبدیل تابع Haar به ترتیب مرتب شده است:

$$\mathbf{t}_H = \mathbf{A}_H \mathbf{f} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1.5\sqrt{2} \\ -1.5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

از قسمت قبل به یاد بیاورید که Haar تبدیل می شود تابعی از یک دامنه تبدیل شکل متغیر است که به u نشان داده می شود. معادله (۷-۱۳۶) بازسازی تابع اصلی را از ضرایب تبدیل موجک خود امکان پذیر می کند. جمع بندی را گسترش می دهیم ، بدست می آوریم

$$f(x) = \frac{1}{2} [T_\varphi(0,0)\varphi(x) + T_\psi(0,0)\psi_{0,0}(x) + T_\psi(1,0)\psi_{1,0}(x) + T_\psi(1,1)\psi_{1,1}(x)]$$

برای $x = 0$ ، 1 ، 2 ، 3 اگر $x = 0$ ، برای مثال

$$f(0) = \frac{1}{2} [(1)(1) + (4)(1) + (-1.5\sqrt{2})(\sqrt{2}) + (-1.5\sqrt{2})(0)] = 1$$

همانطور که در مورد جلو ، نمونه های یکنواخت از توابع مقیاس بندی و موجک در محاسبه معکوس استفاده می شود.

تبدیل موجک سریع

معادله تبیین چند حلقه و معادل موجک آن ، معادله (۷-۱۲۵) و (۷-۱۳۰) ، می توان توابع مقیاس بندی و موجک را در هر مقیاسی به عنوان تابعی از کپی های تبدیل یافته و دو وضوح توابع مقیاس بندی در مقیاس بالاتر بعدی تعریف کرد. به همین ترتیب ، ضرایب انبساط سری موجک گسترش و تبدیل موجک گسسته را می توان به صورت بازگشتی محاسبه کرد (به مسئله ۷.۳۵ مراجعه کنید)

$$c_j(k) = \sum_n h_\varphi(n-2k)c_{j+1}(n) \quad (7-139)$$

$$d_j(k) = \sum_n h_\psi(n-2k)c_{j+1}(n) \quad (7-140)$$

$$T_\varphi(j,k) = \sum_n h_\varphi(n-2k)T_\varphi(j+1,n) \quad (7-141)$$

$$T_\psi(j,k) = \sum_n h_\psi(n-2k)T_\varphi(j+1,n) \quad (7-142)$$

به ترتیب. برخلاف معادله (۷-۱۳۳) و (۷-۱۳۶)، جایی که تنها ضرایب مقیاس بندی مورد نیاز در محاسبات در مقیاس j_0 ، معادلات (۷-۱۳۹) تا (۷-۱۴۲) است. نیاز به محاسبه همه ضرایب مقیاس بندی تا بالاترین مقیاس مورد نظر است.

مقایسه این معادلات با معادله تعریف کننده پیچیدگی گسسته [یعنی معادله (۴-۴۸)]، می بینیم که n یک متغیر ساختگی از انقباض است و علامت های منهای باقیمانده و عبارات k_2 ترتیب ضرایب hw و hc را معکوس می کنند و نتایج حاصل از تبدیل را در $n = 0, 2, 4, \dots$ نشان می دهند. به ترتیب. بنابراین، برای تبدیل موجک گسسته، می توان معادلات را بازنویسی کرد. (۷-۱۴۱) و (۷-۱۴۲) به عنوان

$$T_\varphi(j, k) = T_\varphi(j+1, n) \star h_\varphi(-n) \quad (7-143)$$

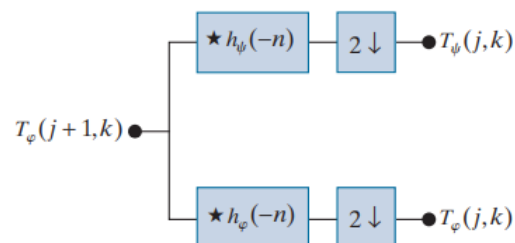
$$T_\psi(j, k) = T_\psi(j+1, n) \star h_\psi(-n) \quad (7-144)$$

همانطور که در شکل ۷.۲۳ نشان داده شده است، ارزیابی پیچیدگی ها در حالت منفی، حتی شاخص ها معادل فیلتر کردن و کاهش نمونه ۲ است (یعنی دور انداختن سایر موارد) ارزش مختلط (برای یک دنباله ۱ بعدی از نمونه های $\gamma(n)$ برای $n = 0, 2, \dots, 2^{j+1} - 2$ نمونه دنباله نمونه $\gamma_{2^j}(n)$ به عنوان تعریف می شود

$$T_\varphi(j, k) = T_\varphi(j+1, n) \star h_\varphi(-n) \quad (7-143)$$

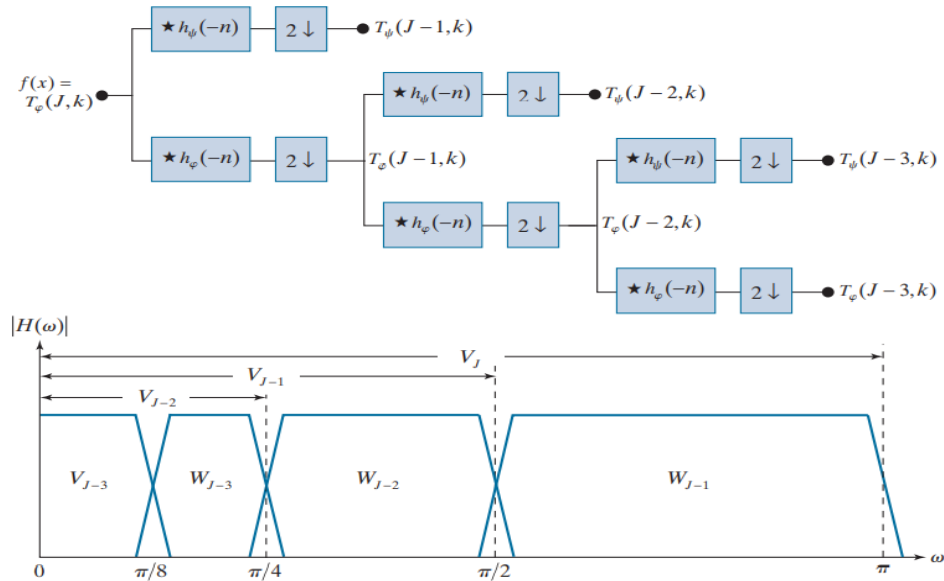
$$T_\psi(j, k) = T_\psi(j+1, n) \star h_\psi(-n) \quad (7-144)$$

معادلات (۷-۱۴۳) و (۷-۱۴۴) معادلات تعریف کننده یک فرم کارآمد محاسباتی از DWT به نام تبدیل موجک سریع (FWT) هستند. برای یک دنباله ورودی به طول $N = 2^j$ ، تعداد عملیات ریاضی درگیر روشن است



شکل ۷.۲۳ یک بانک فیلتر تجزیه و تحلیل FWT برای فیلترهای متعامد \star و ψ نشان دهنده پیچیدگی و نمونه برداری است. به ترتیب ۲

از بخش ۳.۴ بخاطر بسپارید که استفاده از همبستگی یا تبدیل در فیلترینگ فضایی به ترجیح شخصی بستگی دارد.



شکل ۷.۲۴ (الف) یک بانک فیلتر سه مرحله ای یا سه مقیاس FWT و (ب) ویژگیهای تقسیم فرکانس آن. به دلیل تقارن در پاسخ ضربه ای فیلتر، معمولاً نمایش فقط $[0, \pi]$ ترتیب $O(N)$ به این معنا که تعداد ضرب ها و اضافات با توجه به طول دنباله ورودی خطی است - زیرا تعداد ضرب ها و اضافات مربوط به پیچیدگی های انجام شده توسط بانک فیلتر FWT در شکل ۷.۲۳ متناسب با طول توالی ها است. در حال حل و فصل شدن بنابراین، FWT با الگوریتم FFT، که به ترتیب عملیات $O(N \log^2 N)$ نیاز دارد، مطلوب مقایسه می شود. شکل ۷.۲۴ (الف) یک بانک فیلتر سه مقیاس را نشان می دهد که در آن فیلتر FWT شکل ۷.۲۳ سه بار "تکرار" شده است تا یک ساختار سه مرحله ای برای ایجاد ضرایب تبدیل در مقیاس $T_\phi(j+1, k)$ ایجاد کند. ۲ و ۳ توجه داشته باشید که ضرایب بالاترین مقیاس نمونه هایی از خود تابع فرض می شود.^{۳۰}

ضرایب تقریبی مقیاس ۱-ز با مقیاس معکوس و موجک

اجازه دهید ضرایب $hw(\lfloor n \rfloor)$ و $hc(-n)$ ، و نمونه برداری مجدد از نتایج انجام شود. اگر ضرایب مقیاس و تابع موجک وجود داشته باشد، ترتیب تبدیل مقیاس معکوس و ضریب موجک $\{h_\psi(K-1-m) \mid m=0, 1, \dots, K-1\}$ and $\{h_\phi(K-1-m) \mid m=0, 1, \dots, K-1\}$ به ترتیب. برای ورودی گسسته به طول $N = 2J$ ، فیلتر بانک در شکل ۷.۲۳ می تواند

^{۳۰} اگر از تابع $f(x)$ بالاتر از نرخ نایکویست نمونه برداری شود، همانطور که معمولاً اتفاق می افتد، نمونه های آن تقریب مناسبی از ضرایب مقیاس بندی در وضوح نمونه برداری هستند و می توانند به عنوان ورودی های اولیه ضخامت مقیاس پذیری با وضوح بالا مورد استفاده قرار گیرند. به عبارت دیگر، در مقیاس نمونه گیری به ضرایب موجک یا جزئیات نیاز نیست. توابع مقیاس بندی با بالاترین وضوح به عنوان توابع ضربه واحد گسسته در معادلات عمل می کنند. (۷-۱۴۱) و (۷-۱۴۲)، اجازه می دهد تا $f(x)$ به عنوان ورودی مقیاس بندی (تقریب) در اولین بانک فیلتر دو بانده (Odegard)، Gopinath، و Burrus [۱۹۹۲] استفاده شود.

FWT در مقیاس P از بانک های فیلتر برای ایجاد تبدیل مقیاس P در مقیاس $J - 1$ ، $J - 2$ ، ...، استفاده می کند. $J - P$ ، جایی که $P \leq J$.

تا J بار تکرار شود در عمل، چپ ترین فیلتر تصویر شکل ۷.۲۴ (a) تابع ورودی را به یک جزء تقریبی پایین گذر تقسیم می کند که مربوط به مقیاس پذیری ضرایب $T_w(J, k)$ ، k و یک جزء جزئیات بالا گذر مربوط به ضرایب $T_c(J - 1, k)$ (ک) این به صورت گرافیکی در شکل ۷.۲۴ (ب) نشان داده شده است، جایی که فضای مقیاس بندی VJ به فضای موجک $WJ - 1$ و فضای مقیاس بندی $VJ - 1$ تقسیم شده است.

طیف تابع اصلی به دو جزء نیمه باند تقسیم می شود. بانک دوم فیلتر در شکل ۷.۲۴ (الف) طیف مقیاس بندی فضای $VJ - 1$ ، نیمه باند پایین بانک اول را به فضاهای چهار بانده $WJ - 2$ و $VJ - 2$ و ضرایب مربوط به FWT T_c تقسیم می کند. $T_w(J - 2, k)$ and $T_w(J - 2, k)$ به ترتیب. در نهایت، بانک فیلتر سوم فضاهای باند هشتم $WJ - 3$ و $VJ - 3$ را با ضرایب $T_w(J - 3, k)$ و $T_w(J - 3, k)$ ایجاد می کند. همانطور که در رابطه با معادله ذکر شد. (۷-۷۳) بخش ۷.۴ و در شکل ۷.۵ نشان داده شده است، با افزایش مقیاس تابع های موجک، طیف موجک ها کشیده می شوند (یعنی پهنای باند آنها دو برابر می شود و با یک فاکتور دو افزایش می یابد). در شکل ۷.۲۴ (b)، این امر با این واقعیت نشان داده می شود که پهنای باند $WJ - 1$ p 2 است، در حالی که پهنای باند $WJ - 2$ و $WJ - 3$ به ترتیب p 4 و p 8 است. برای تبدیلات در مقیاس بالاتر، طیف موجک ها همچنان در عرض پهنای باند کاهش می یابد، اما هرگز به فرکانس رادیان $v = 0$ نمی رسند.

مثال ۷.۲۰: محاسبه تبدیل موجک سریع ۱ بعدی

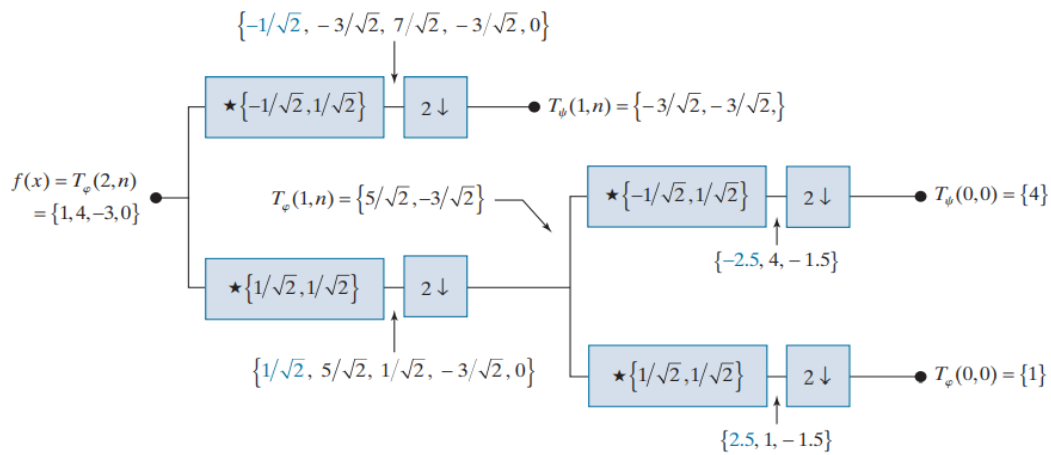
برای نشان دادن مفاهیم قبلی، تابع گسسته $f(x) = \{1, 4, -3, 0\}$ را از مثال ۷.۱۹ در نظر بگیرید. مانند آن مثال، ما تبدیل موجک آن را با توجه به مقیاس بندی Haar و توابع موجک محاسبه می کنیم. اما در اینجا، ما مستقیماً از توابع پایه Haar استفاده نخواهیم کرد. در عوض، ما از ضرایب مقیاس بندی و موجک مربوطه از مثالهای ۷.۱۶ و ۷.۱۷ استفاده می کنیم:

$$\{h_\phi(n) | n = 0, 1\} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\} \quad (7-146)$$

$$\{h_\psi(n) | n = 0, 1\} = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\} \quad (7-147)$$

از آنجا که تبدیل محاسبه شده در مثال ۷.۱۹ مجموعه مرتب شده $\{T_\phi(0,0), T_\psi(0,0), T_\psi(1,0), T_\psi(1,1)\}$ بود، ما FWT دو مقیاس مربوطه را برای ترازو $J = \{0, 1\}$ یادآوری از آزمون قبلی - لطفاً که $k = 0$ در هنگام $J = 0$ ، در حالی که $k = 0$ و $J = 1$ در هنگام $J = 1$ است. تبدیل با استفاده از یک بانک فیلتر دو مرحله ای که موازی با بانک فیلتر سه مرحله ای شکل ۷.۲۴ (a) محاسبه می شود. شکل ۷.۲۵ بانک فیلتر حاصله و توالی هایی را که از پیچیدگی ها و نمونه گیری های مورد نیاز FWT ناشی می شود، نشان می دهد. تابع ورودی توجه داشته باشید $f(x)$ به

عنوان ورودی مقیاس بندی (یا تقریب) در بانک فیلتر سمت چپ عمل می کند. برای محاسبه ضرایب $T_c(1)$ ، n که در انتهای شاخه بالایی شکل ۷.۲۵ ظاهر می شود، ما ابتدا $f(x)$ با $hc(n)$ برای مقیاس پذیری Haar و ضرایب موجک $K = 2$ و ترتیب موجک معکوس $\{h_\psi(K-1-m) | m = 0, 1, \dots, K-1\} = \{h_\psi(1-m) | m = 0, 1\} = \{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$. همانطور که در بخش ۳.۴ توضیح داده شده است، پیچش نیاز به برداشتن یکی از توابع مختلط در مورد مبدا، کشیدن آن دارد. گذشته از دیگری، و محاسبه مجموع حاصلضرب دو تابع. تبدیل جهت-موج معکوس ضرایب موجک $\{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ برای بدست آوردن $\{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ و کشیدن آنها از چپ به راست در سراسر دنباله ورودی $\{1, 4, -3, 0\}$ دریافت می کنیم

$$\{-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}, 0\}$$


شکل ۷.۲۵ محاسبه تبدیل موجک سریع دو مقیاسی از توالی $\{1, 4, -3, 0\}$ با استفاده از مقیاس گذاری Haar و ضرایب موجک.

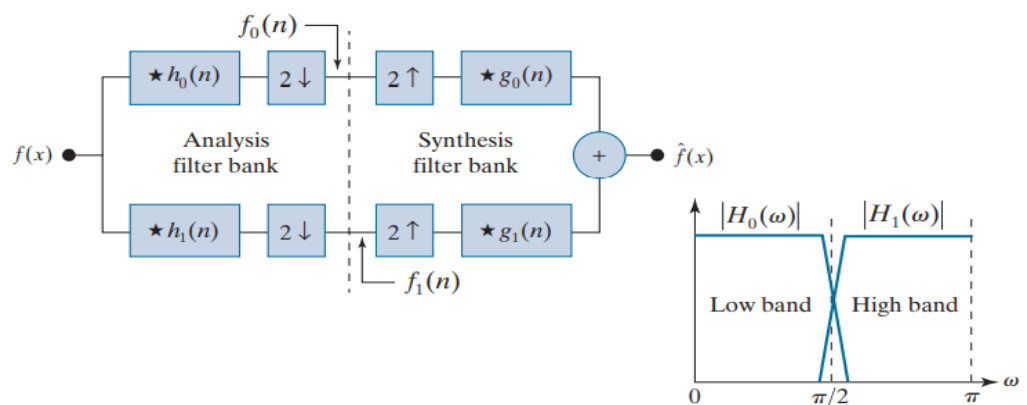
جایی که اولین عبارت مربوط به شاخص تبدیل $n = -1$ است. در شکل ۷.۲۵، مقادیر کانولوشن که با یک متغیر ساختگی منفی از انقباض (به عنوان مثال، $n < 0$) همراه هستند، با رنگ آبی نشان داده شده است. از آنجا که مقیاس $1 = j$ است، پیچیدگی های نمونه پایین با شاخص های زوج n تا $2^{j+1} - 2$ مطابقت دارد. بنابراین، $n = 0$ و 2 و $T_\psi(1,n) = \{-3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}\}$ پیچش ها و نمونه برداری های باقی مانده در یک شیوه مشابه در پردازش سیگنال دیجیتال (DSP)، فیلترهایی مانند آنچه در شکل نشان داده شده است. ۷.۲۳ تا ۷.۲۵ به عنوان فیلترهای پاسخ تکانشی نامحدود (FIR) شناخته می شوند. پاسخ آنها به تکانه واحد، دنباله ای نامحدود از خروجی ها است که مقادیر ضرایب فیلترهای مختلف را در نظر می گیرد. شکل ۷.۲۶ (الف) یک ترکیب شناخته شده از فیلترهای FIR ضرایب حقیقی را نشان می دهد که در ادبیات به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. سیستم کدگذاری و رمزگشایی زیر باند دو بانده نامیده می شود، از دو فیلتر تجزیه و تحلیل $h_0(n)$ و $h_1(n)$ و دو

فیلتر ترکیب $g_0(n)$ و $g_1(n)$ تشکیل شده است. فیلترهای تجزیه ورودی را به دو دنباله نیم طول $f_0(n)$ و $f_1(n)$ تجزیه می کند. همانطور که در شکل ۷.۲۶ (a) مشاهده می شود، فیلتر $h_0(n)$ یک فیلتر پایین گذر است که خروجی آن تقریبی $f(x)$ است. فیلتر $h_1(n)$ یک فیلتر بالا گذر است که خروجی آن تفاوت بین تقریب پایین گذر و $f(x)$ است. همانطور که در شکل ۷.۲۶ (ب) نشان داده می شود، طیف توالی ورودی به دو نیمه باند $H_0(v)$ و $H_1(v)$ تقسیم می شود. سپس از فیلترهای بانک ترکیب $g_0(n)$ و $g_1(n)$ استفاده می شود. برای بازسازی $f(x)$ از نسخه های نمونه برداری شده $f_0(n)$ و $f_1(n)$ برای یک دنباله ۱ بعدی نمونه های $y(n)$ ، دنباله نمونه $y_{2\uparrow}(n)$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$y_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} y(n/2) & \text{if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7-148)$$

جایی که نمونه گیری با ضریب ۲ انجام می شود، نمونه برداری با ضریب ۲ را می توان به عنوان درج صفر پس از هر نمونه $y(n)$ در نظر گرفت.

بلوک های حاوی \star در شکل ۷.۲۳ تا ۷.۲۵ FIR هستند. فیلترها فیلترهای FIR نیز در بخش ۴.۷ مورد بحث قرار گرفته است. توجه داشته باشید که ما از $h(n)$ برای تجزیه و تحلیل یا تجزیه فیلترها استفاده می کنیم که شامل یک فیلتر مقیاس بندی و یک فیلتر موجک و $g(n)$ برای فیلترهای ترکیب یا بازسازی است که شامل فیلتر مقیاس بندی و موجک نیز می شود. فیلترهای مقیاس بندی گاهی اوقات فیلترهای تقریبی یا پایین گذر نامیده می شوند و در شکل ۷.۲۶ دارای زیرنویس ۰ می باشند، در حالی که فیلترهای موجک فیلترهای جزئی یا بالا گذر نامیده می شوند و دارای زیرنویس ۱ می باشند.



شکل ۷.۲۶ (الف) فیلتر دیجیتال دو بانده سیستم کدگذاری و رمزگشایی زیر باند و (ب) خواص تقسیم طیف آن. هدف در کدگذاری زیر باند انتخاب فیلترهای تجزیه و تحلیل و ترکیب است. $\hat{f}(x) = f(x)$. هنگامی که این امر محقق شد، گفته می شود که سیستم از بازآرایی کامل استفاده می کند. فیلترهای سازه و فیلترها، تا حدودی با عوامل ثابت به شرح زیر مرتبط هستند:

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n) \quad (7-149)$$

$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (7-150)$$

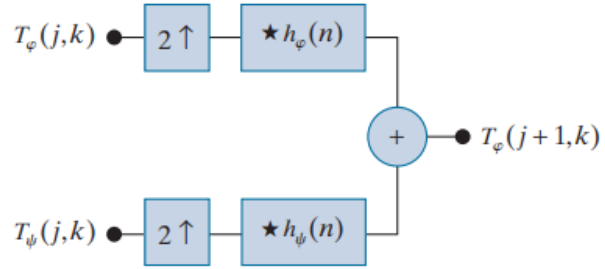
در این معادلات، $(-1)^n$ علائم ضرایب فیلتر تجزیه و تحلیل شاخص فرد را تبدیل می دهد و مدولاسیون نامیده می شود. هر فیلتر ترکیب یک نسخه تعدیل شده از فیلتر تجزیه و تحلیل است که در شکل ۷.۲۶ (a) به صورت مورب با آن مخالف است. بنابراین، فیلترهای تجزیه و تحلیل و ترکیب به صورت ضربدری گفته می شود. پاسخهای تکانشی آنها دوضلعی است. اگر آنها نیز متعامد و به طول K باشند، جایی که K بر ۲ بخش پذیر است، محدودیت های اضافی را برآورده می کنند

معادلات (۷-۱۴۹) و (۷-۱۵۱) در ادبیات فیلتر بانک به تفصیل شرح داده شده است (برای مثال، به وترلی و کوواچویچ [۱۹۹۵] مراجعه کنید). برای بسیاری از فیلترهای دوضلعی، g_0 و g_1 از نظر طول متفاوت هستند، بنابراین لازم است فیلتر کوتاه تر دارای لایه صفر باشد. در فیلترهای علی، $n=0$ و خروجی فقط به ورودی های فعلی و گذشته بستگی دارد.

در این معادلات، $(-1)^n$ علائم ضرایب فیلتر تجزیه و تحلیل شاخص فرد را تبدیل می دهد و مدولاسیون نامیده می شود. هر فیلتر ترکیب یک نسخه تعدیل شده از فیلتر تجزیه و تحلیل است که در شکل ۷.۲۶ (a) به صورت مورب با آن مخالف است. بنابراین، فیلترهای تجزیه و تحلیل و ترکیب به صورت ضربدری گفته می شود. پاسخهای تکانشی آنها دوضلعی است. اگر آنها نیز متعامد و به طول K باشند، جایی که K بر ۲ بخش پذیر است، محدودیت های اضافی را برآورده می کنند

$$\begin{aligned} g_1(n) &= (-1)^n g_0(K-1-n) \\ h_0(n) &= g_0(K-1-n) \\ h_1(n) &= g_1(K-1-n) \end{aligned} \quad (7-151)$$

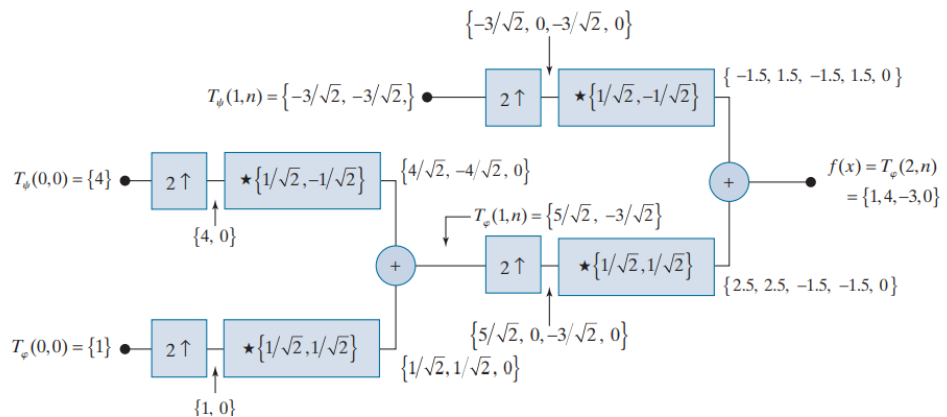
با توجه به شباهت بین بانک فیلتر تجزیه و تحلیل FWT در شکل ۷.۲۳ و بانک فیلتر تجزیه و تحلیل زیر باند در شکل ۷.۲۶ (a)، می توان بانک فیلتر ترکیب معکوس FWT شکل ۷.۲۷ را فرض کرد. برای مورد فیلترهای متعامد، معادله (۷-۱۵۱) فیلترهای ترکیب را محدود می کند تا نسخه های فیلترهای تجزیه و تحلیل معکوس شوند. مقایسه فیلترهای شکل ها ۷.۲۳ و ۷.۲۷، ما می بینیم که این واقعاً چنین است. با این حال، باید به خاطر داشت که بازسازی کامل با تجزیه و تحلیل و ترکیب فیلترهای دوگانه ای نیز امکان پذیر است، که نسخه های معکوس شده از یکدیگر نیستند. فیلترهای تجزیه و تحلیل دوتایی و مطابق با معادلات (۷-۱۴۹) و (۷-۱۵۰) به صورت متقاطع تنظیم می شوند. در نهایت، ما به بانک فیلتر معکوس شکل ۷.۲۷، مانند FWT جلو توجه می کنیم



شکل ۷.۲۷ یک بانک فیلتر ترکیب معکوس FWT برای فیلترهای ارتو معمولی. بانک فیلتر شکل ۶.۲۳، می تواند برای محاسبه FWT های معکوس چند مقیاسی تکرار شود. در مثال بعدی، یک ساختار FWT معکوس دو مقیاسی در نظر گرفته شده است. فرآیند ترکیب ضخیم نشان داده شده در آنجا می تواند به هر تعداد مقیاس گسترش یابد.

مثال ۷.۲۱: محاسبه تبدیل موجک سریع معکوس ۱ بعدی

محاسبه تبدیل موجک سریع معکوس همانند جلو خود را آینه می کند. شکل ۷.۲۸ فرایند دنباله ای را که در مثال ۷.۲۰ در نظر گرفته شده است نشان می دهد. برای شروع محاسبه، سطح ۰ تقریباً ضرایب ترکیب و جزئیات به ترتیب $\{1, 0\}$ و $\{4, 0\}$ نمونه برداری می شوند. تبدیل با $h_\phi(n) = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ and $h_\psi(n) = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ تولید $T_\phi(1,n) = \{5/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}\}$ را بدین ترتیب، تقریب سطح ۱ شکل ۷.۲۸، که با تقریب محاسبه شده در شکل ۷.۲۵ مطابقت دارد، بازسازی شده است. با ادامه این روش، $f(x)$ در سمت راست بانک دوم فیلتر ترکیب تشکیل می شود.



شکل ۷.۲۸ محاسبه تبدیل موجک سریع معکوس دو مقیاسی از توالی $\{1, 4, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}\}$ با مقیاس بندی Haar و توابع موجک.

تبدیل موج در دو بعد

تبدیل موجک ۱ بعدی قسمت قبل به راحتی به تابع های دو بعدی مانند تصاویر گسترش می یابد. در دو بعد ، یک تابع مقیاس بندی دو بعدی $\varphi(x, y)$ و سه موجک دو بعدی $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$, and $\psi^D(x, y)$ مورد نیاز است. هر کدام محصول دو تابع ۱ بعدی است. به استثنای محصولاتی که نتایج ۱ بعدی را تولید می کنند ، مانند $w(x) c(x)$ ، چهار محصول باقی مانده تابع مقیاس پذیری جداگانه را تولید می کنند

$$1 \int_{-\infty}^{\infty} \quad (7-152)$$

موجک های قابل تفکیک و "حساس به جهت"

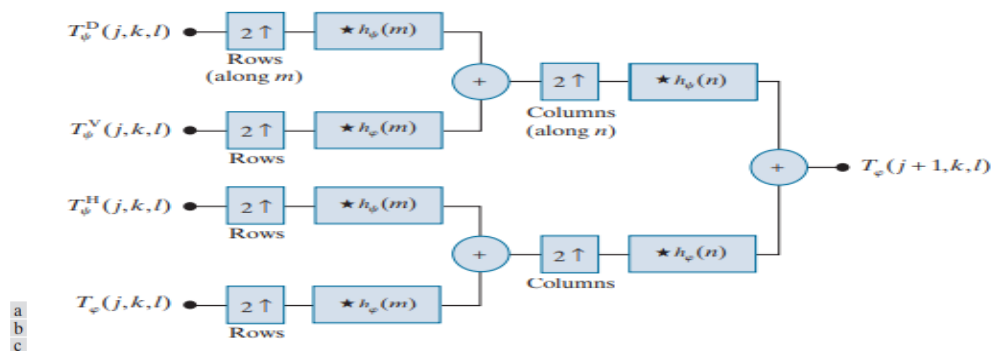
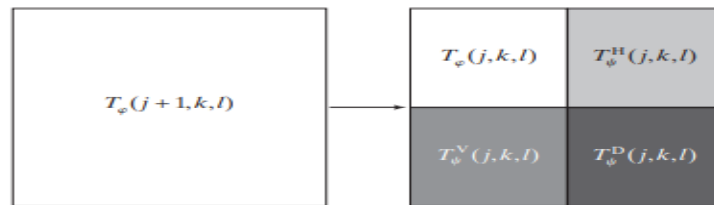
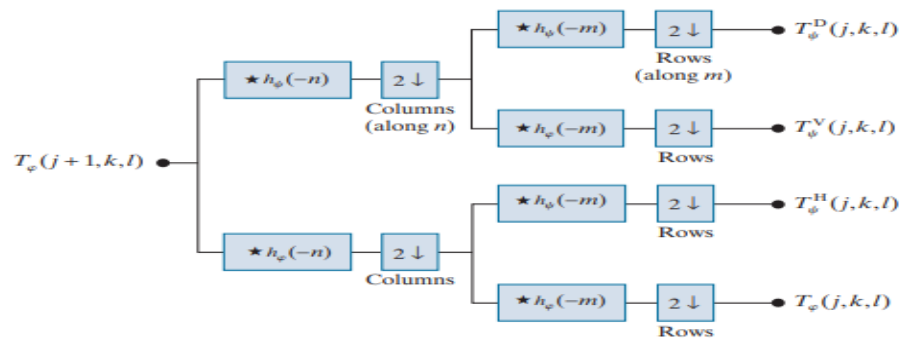
$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (7-153)$$

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad (7-154)$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (7-155)$$

این موجها تبدیلات شدت تصاویر- را در جهات مختلف اندازه گیری می کند: CH تبدیلات ستون ها (به عنوان مثال ، لبه های افقی) را اندازه گیری می کند ، CV به تبدیلات در طول ردیف ها (مانند لبه های عمودی) پاسخ می دهد و CD با تبدیلات در طول مورب ها مطابقت دارد. حساسیت جهت ، یک پیامد طبیعی تفکیک پذیری در معادله (۷-۱۵۳) تا (۷-۱۵۵) ؛ است. این پیچیدگی محاسباتی تبدیل دو بعدی را که در این بخش بحث شده است افزایش نمی دهد. مانند تبدیل موجک گسسته ۱ بعدی ، DWT دو بعدی را می توان با استفاده از فیلترهای دیجیتال و نمونه های کوچک پیاده سازی کرد. با مقیاس بندی دو بعدی و توابع موجک ، ما به سادگی ۱-D FWT ردیف های $f(x, y)$ ، و سپس ۱-D FWT ستونهای حاصل را می گیریم. شکل ۷.۲۹ (الف) فرایند را در قالب نمودار نمودار نشان می دهد. توجه داشته باشید ، مانند همتای ۱ بعدی خود در شکل ۷.۲۳ ، FWT دو بعدی مقیاس ضریب تقریبی $z = 1$ را نشان می دهد که در شکل برای نشان دادن مقیاس $T_{\varphi}(j+1, k, l)$ نشان داده شده است. z تقریباً ضرایب ترکیب و جزئیات با این حال ، در مورد دو بعدی ، ما سه مجموعه جزئیات دریافت می کنیم. ضرایب - جزئیات افقی $T_{\psi}^H(j, k, l)$ جزئیات عمودی $T_{\psi}^V(j, k, l)$ و مورب جزئیات $T_{\psi}^D(j, k, l)$ بانک فیلتر تک مقیاس شکل ۷.۲۹ (الف) را می توان "تکرار" کرد (با اتصال خروجی تقریبی به ورودی یک بانک دیگر) برای ایجاد یک ترازوی $P \leq J$ که مقیاس z برابر است به $J-1, J-2, \dots, J-P$. همانطور که در مورد ۱-D ، تصویر $f(x, y)$ به عنوان ورودی $T_{\varphi}(J, k, l)$ استفاده می شود. با جمع آوری ردیف های آن با $h_{\psi}(-n)$ و $h_{\varphi}(-n)$ و نمونه برداری از ستون های آن ، دو زیر تصویر به دست می آوریم که وضوح افقی آنها تا ۲ برابر کاهش می یابد. جزء بالا یا جزئیات اطلاعات فرکانس بالای تصویر را با جهت عمودی مشخص می کند ؛ جزء تقریبی پایین گذر شامل اطلاعات فرکانس پایین و عمودی آن است. سپس هر دو زیر تصویر به صورت ستونی فیلتر شده و نمونه

بردارای می شوند تا چهار زیر تصویر خروجی اندازه $T_\psi^V, T_\psi^H, T_\psi^D$ به دست آورند. این زیر تصاویر ، که معمولاً به صورت در شکل ۷.۲۹ (ب) ، محصولات داخلی $f(x, y)$ و مقیاس بندی دو بعدی و توجه داشته باشید m و n متغیرهای ساختگی ساختگی هستند ، در حالی که z ، مانند مورد $D-1$ ، مقیاس است و k و l تبدیل هستند. توابع موجک در معادله (۷-۱۵۲) تا (۷-۱۵۵) ، پس از آن نمونه گیری کوچک در هر بعد دو.



شکل ۷.۲۹ شکل موجک دو بعدی سریع: (الف) بانک فیلتر تجزیه و تحلیل ؛ (ب) تفکیک موقعیت حاصل ؛ و (ج) بانک فیلتر ترکیب .

شکل ۷.۲۹ (ج) بانک فیلتر ترکیب را نشان می دهد که فرایند توضیح داده شده را معکوس می کند. همانطور که انتظار می رفت ، الگوریتم بازسازی مشابه مورد $D-1$ است. در هر تکرار ، فرضیات z در مقیاس چهار مقیاس و زیر تصاویر با دو فیلتر $D-1$ نمونه برداری و ترکیب می شوند-یکی روی ستون های زیر تصویر و دیگری در ردیف های آن کار می کند. افزودن نتایج ، مقیاس تقریبی $1-z$ را به همراه دارد و این روند تا زمانی که تصویر اصلی بازسازی شود ، تکرار می شود.

مثال ۷.۲۲: محاسبه تبدیل موجک سریع دو بعدی

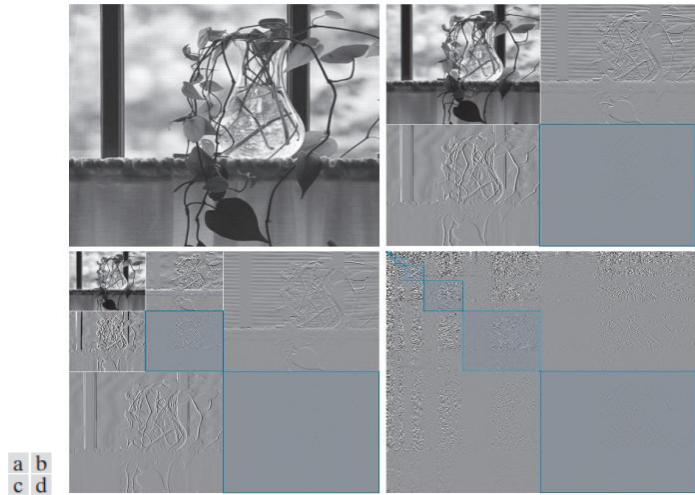
در این مثال، ما یک FWT دو بعدی و چند مقیاس را با توجه به توابع پایه Haar محاسبه کرده و آن را با تبدیل سنتی Haar بخش ۷.۹ مقایسه می‌کنیم. شکل ۷.۳۰ (الف)-(د) یک تصویر تک رنگ $512 * 512$ از یک گلدان روی طاقچه را نشان می‌دهد، موجک گسسته یک و دو مقیاس آن نسبت به تابع های Haar تبدیل می‌کند و Haar آن نیز به ترتیب تبدیل می‌شود. محاسبه تبدیل موجک به زودی مورد بحث قرار می‌گیرد. تبدیل Haar در شکل ۷.۳۰ (d) با استفاده از ماتریس تبدیل Haar $512 * 512$ محاسبه می‌شود [به معادلات (۷-۱۱۴) تا (۷-۱۱۸)] مراجعه کنید.

و عملیات مبتنی بر ماتریس تعریف شده در معادله (۷-۳۵). ضرایب جزئیات در شکلها ۷.۳۰ (b) و (c)، نشان داده شده است. و ضرایب تبدیل Haar در شکل ۷.۳۰ (d)، مقیاس بندی شده اند تا ساختار زیرین آنها بیشتر نمایان شود. هنگامی که مساحت یکسان از هر دو تبدیل به رنگ آبی سایه زده شود، پیکسل های مربوطه در آن مناطق از نظر ارزش یکسان هستند.

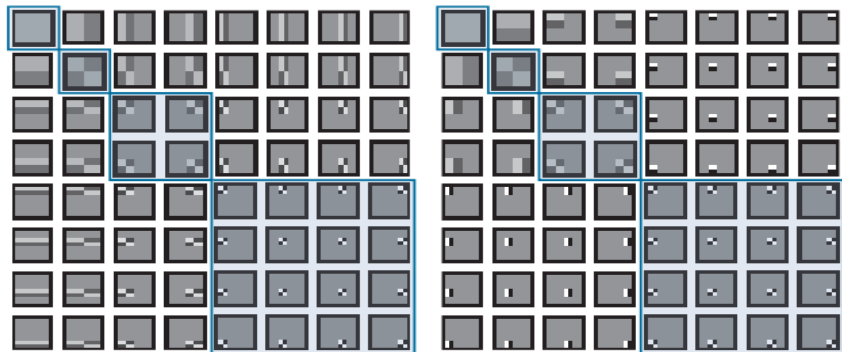
برای محاسبه FWT یک مقیاس شکل ۷.۳۰ (b)، تصویر شکل ۷.۳۰ (a) به عنوان ورودی یک بانک فیلتر مانند تصویر ۷.۲۹ (a) استفاده می‌شود. از آنجا که $J = \log_2 512 = 9$ and $P = 1$, $T_\phi(9, k, l) = f(x, y)$ و چهار خروجی تجزیه چهار اندازه حاصل شده [یعنی تقریب $T_\phi(8, k, \bar{l})$ و افقی، عمودی و مورب جزئیات $T_\psi^H(8, k, l)$, $T_\psi^V(8, k, l)$, and $T_\psi^D(8, k, l)$] سپس مطابق شکل ۷.۲۹ (b) به ترتیب شکل ۷.۳۰ (ب) یک فرآیند مشابه برای ایجاد تبدیل دو مقیاس در شکل ۷.۳۰ (ج) استفاده می‌شود، اما ورودی به بانک فیلتر یک زیر تقریبی یک چهارم اندازه $T_\phi(8, k, \bar{l})$ از گوشه سمت چپ بالا است. شکل ۷.۳۰ (ب) همانطور که در شکل ۷.۳۰ (ج) مشاهده می‌شود، تصویر فرعی تقریبی یک چهارم سپس با نتایج تجزیه چهار چهارم اندازه (در حال حاضر ۱۶۱ از اندازه تصویر اصلی) جایگزین می‌شود.

که توسط پاس فیلتر دوم ایجاد شده است. هر گذر از بانک فیلتر چهار تصویر خروجی با اندازه معیار تولید می‌کند که جایگزین ورودی ای است که از آنها گرفته شده است. این فرآیند تا $P = J = 9$ ، که یک تبدیل نه مقیاس ایجاد می‌کند، قابل تکرار است. در شکل ۷.۳۰ (ب) و (ج) به ماهیت جهت فرعی تصاویر مرتبط با T_ψ^H و T_ψ^D توجه کنید. جزئیات مورب در این تصاویر (یعنی T_ψ^D ناحیه ای که به رنگ آبی سایه زده است) با هم برابر است مناطق تیره سایه دار Haar در شکل ۷.۳۰ (d) تبدیل شکل می‌دهند. در مورد $D-1$ ، همانطور که در مثال ۷.۱۹ نشان داده شد، یک $1-D$ FWT در مقیاس J با توجه به توابع پایه Haar همانند نوع تبدیل D Haar-1 آن است. این به این دلیل است که تابع های اصلی دو تبدیل یکسان هستند. هر دو شامل یک تابع مقیاس بندی و یک سری توابع موجک مقیاس بندی شده و تبدیل شده است. در مورد ۲ بعدی، اما تصاویر اصلی متفاوت است. مقیاس بندی دو بعدی و تابع های موجک در معادله تعریف شده است. (۷-۱۵۳) تا (۷-۱۵۵) جهت گیری

افقی و عمودی را معرفی کنید که در تبدیل سنتی Haar وجود ندارد. به عنوان مثال ، شکل‌های ۷.۳۱ (a) و (b) ، تصاویر اصلی تبدیل 8×8 Haar و FWT سه مقیاس با توجه به توابع پایه Haar هستند. به مناطق برجسته آبی در امتداد مورب اصلی که تصاویر اصلی در آن مطابقت دارند توجه کنید. همین الگو در شکل ۷.۳۰ (ب) تا (د) رخ می دهد. اگر یک تبدیل موجک در مقیاس نه مقیاس گلدان محاسبه شود ، با شکل Haar در شکل ۷.۳۰ (د) در تمام مناطق سایه دار آن مطابقت دارد.



تصویر ۷.۳۰ (الف) 512×512 تصویر گلدان ؛ (ب) FWT یک مقیاس ؛ (ج) FWT دو مقیاس ؛ و (د) تبدیل شکل تصویر اصلی. همه تبدیلات برای برجسته سازی ساختار زیربنایی خود مقیاس بندی شده اند. وقتی نواحی متناظر دو تبدیل به رنگ آبی سایه زده می شوند ، پیکسل های مربوطه یکسان هستند.



شکل ۷.۳۱ (الف) تصاویر بر اساس Haar با اندازه 8×8 [از شکل ۷.۱۸ (ج)] و (ب) تصاویر اصلی تبدیل موجک گسسته سه مقیاس 8×8 با توجه به توابع پایه Haar.

بخش را با یک مثال ساده که استفاده از موجک در پردازش تصویر را نشان می دهد به پایان می بریم. همانطور که در حوزه فوریه ، رویکرد اصلی این است:

۱. تبدیل موجک دو بعدی یک تصویر را با توجه به موجک انتخاب شده محاسبه کنید. جدول ۷.۱ برخی از پایه های نماینده ، از جمله تابع مقیاس و موجک آنها و ضرایب فیلتر متناظر را نشان می دهد. ضرایب فیلتر در زمینه

شکل ۷.۲۶ آورده شده است. برای موجکهای متعامد، ضرایب ترکیب پایین گذر مشخص شده است. فیلترهای باقی مانده باید با استفاده از معادله (۷-۱۵۱) محاسبه شوند. برای موجکهای طبیعی، دو فیلتر تجزیه و تحلیل داده می شود و فیلترهای ترکیب باید با استفاده از معادلات (۷-۱۴۹) و (۷-۱۵۰) محاسبه شوند.

۲. تبدیل محاسبه شده را برای استفاده از توانایی DWT تبدیل دهید (۱) پیکسل های تصویر را از هم جدا کنید، (۲) فرکانس مهم و ویژگی های زمانی را آشکار کنید، و/یا (۳) شباهت تصویر را با تصاویر اصلی تبدیل اندازه گیری کنید. تبدیلاتی که برای هموارسازی، وضوح تصویر، کاهش نویز، تشخیص لبه ها و فشرده سازی طراحی شده اند (تنها به تعدادی از آنها) امکان پذیر است.

۳. تبدیل موجک معکوس را محاسبه کنید.

از آنجایی که تبدیل موجک گسسته یک تصویر را به مجموع وزنی از تصاویر محدود از نظر فضایی محدود می کند، اکثر تکنیک های تصویربرداری مبتنی بر فوریه دارای یک "دامنه موجک" معادل هستند.

مثال ۷.۲۳: تشخیص لبه بر اساس موجک.

شکل ۷.۳۲ تصویری ساده از سه مرحله قبل را ارائه می دهد. شکل ۷.۳۲ (الف) تصویری $128 * 128$ از کامپیوتر را ایجاد می کند که از پالس های سینوسی دو بعدی در زمینه سیاه نشان می دهد. شکل ۷.۳۲ (ب) تبدیل موجک گسسته دو مقیاسی از تصویر نسبت به سمالت های مرتبه ۴ است که مخفف "موجک متقارن" است. اگرچه آنها کاملاً متقارن نیستند، اما طوری طراحی شده اند که کمترین نامتقارن بودن و بیشترین تعداد لحظه های ناپدید شدن را داشته باشند (برای یک پشتیبانی جمع و جور معین [Daubechies ۱۹۹۲]). ردیف ۴ جدول ۷.۱ تابع های موجک و مقیاس سمالت ها و ضرایب فیلتر ترکیب پایین گذر مناسب را نشان می دهد. ضرایب فیلتر باقی مانده با استفاده از معادله (۷-۱۵۱) بدست می آیند. با K ، تعداد ضرایب فیلتر، روی ۸ تنظیم شده است:

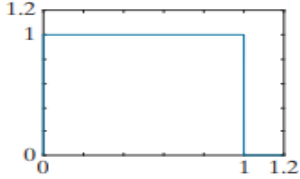
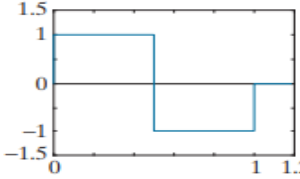
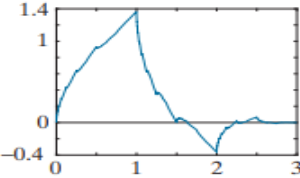
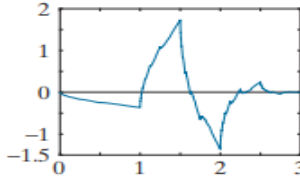
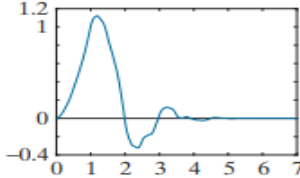
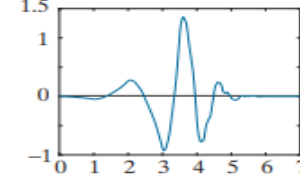
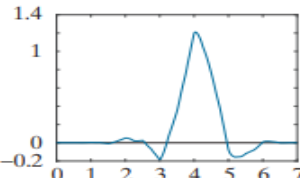
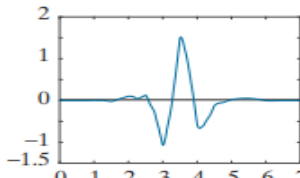
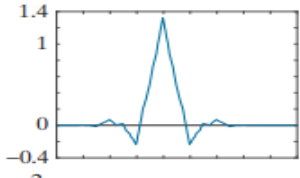
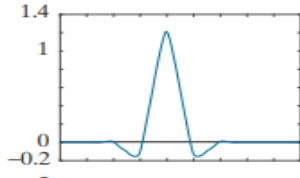
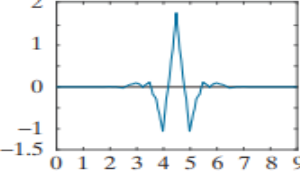
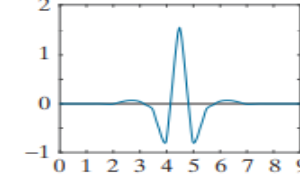
$$\begin{aligned} g_1(n) &= (-1)^n g_0(7-n) = \{-0.0758, 0.0296, 0.4976, -0.8037, 0.2979, 0.0992, -0.0126, -0.0322\} \\ h_0(n) &= g_0(7-n) = \{-0.0758, -0.0296, 0.4976, 0.8037, 0.2979, -0.0992, -0.0126, 0.0322\} \\ h_1(n) &= g_1(7-n) = \{-0.0322, -0.0126, 0.0992, 0.2979, -0.8037, 0.4976, 0.0296, -0.0758\} \end{aligned}$$

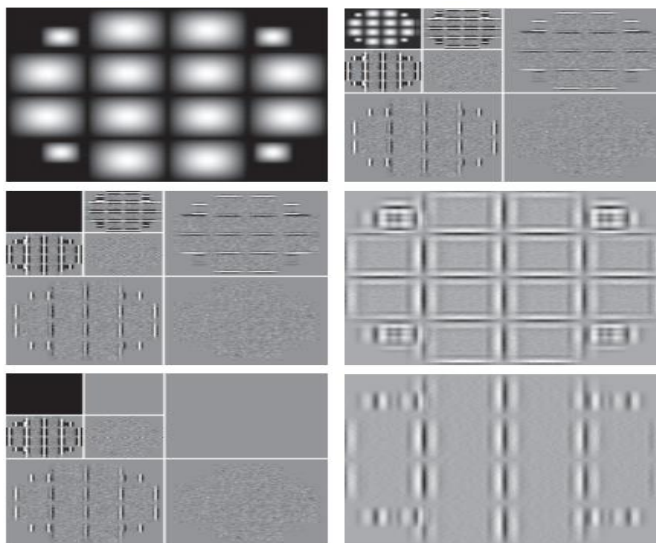
در شکل ۷.۳۲ (C)، جزء تقریبی تبدیل موجک گسسته با صفر کردن مقادیر آن حذف شده است. ^{۳۱} همانطور که در شکل ۷.۳۲ (د) نشان داده می شود، اثر خالص محاسبه تبدیل معکوس با استفاده از این ضرایب تبدیل یافته، افزایش لبه است، که یادآور نتایج تیز کردن تصویر مبتنی بر فوریه است که در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار گرفته است. توجه داشته باشید که تبدیل بین سیگنال و پس زمینه چقدر خوب ترسیم شده است، علیرغم این واقعیت که آنها نسبتاً نرم و سینوسی هستند. با به صفر رساندن جزئیات افقی نیز - شکلها ۷.۳۲ (e) و (f) را ببینید. ما می توانیم لبه های عمودی را جدا کنیم.

جدول ۷.۱: ضرایب فیلتر از موجک های نماینده

ضرایب فیلتر	تابع موجک	تابع مقیاس بندی	نام یا خانواده موجک
-------------	-----------	-----------------	---------------------

^{۳۱} لحظه برگشت موجک $\psi(x)$ is $m(k) = \int x^k \psi(x) dx$ است. لحظه های ناپدید شدن بر صاف بودن توابع مقیاس و موجک و توانایی ما در نمایش آنها به عنوان چند جمله ای تأثیر می گذارد. یک symlet سفارش N-دارای N در حال از بین رفتن است لحظات

Wavelet Name or Family	Scaling Function	Wavelet Function	Filter Coefficients
<p>Haar</p> <p>قدیمی ترین و ساده ترین موجک متعامد و ناپیوسته.</p>			$g_0(n) = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$
<p>Daubechies خانواده</p> <p>متعامد با ناپدید کننده ترین لحظات برای یک پشتیبانی مشخص. نشان داده شده dbN ، جایی که N تعداد لحظه های ناپدید شدن است db2 . و db1 نشان داده شده است ؛ Haar ردیف قبلی است</p>			$g_0(n) = \{0.482963, 0.836516, 0.224144, -0.129410\}$
<p>خانواده سیملت</p> <p>متعامد با کمترین عدم تقارن و بیشترین ناپدید شدن لحظات برای یک تکیه گاه معین sym4 یا مرتبه 4 نشان داده شده است.</p>			$g_0(n) = \{0.230372, 0.714847, 0.630881, -0.027984, -0.187035, 0.030841, 0.032883, -0.010597\}$
<p>کوهن داوچی فوو 7/9</p> <p>دو خطی B-spline مورد استفاده در استاندارد فشرده سازی برگشت ناپذیر (JPEG2000) به فصل 8 مراجعه کنید</p>			$g_0(n) = \{0.032231, -0.012604, -0.099220, 0.297858, 0.803739, 0.497619, -0.029636, -0.075766\}$
<p>کوهن داوچی فوو 7/9</p> <p>دو خطی B-spline مورد استفاده در استاندارد فشرده سازی برگشت ناپذیر (JPEG2000) به فصل 8 مراجعه کنید</p>			$h_0(n) = \{0.026749, -0.016864, -0.078223, 0.266864, 0.602949, 0.266864, -0.078223, -0.016864, 0.026749\}$
<p>کوهن داوچی فوو 7/9</p> <p>دو خطی B-spline مورد استفاده در استاندارد فشرده سازی برگشت ناپذیر (JPEG2000) به فصل 8 مراجعه کنید</p>			$h_1(n) = \{-0.091271, -0.057544, 0.591272, -1.115087, 0.591272, 0.057544, -0.091271, 0\}$



شکل ۷.۳۲ اصلاح DWT برای تشخیص لبه: الف) تصویر اصلی ؛ (ب) DWT دو مقیاس نسبت به نمادهای مرتبه ۴ ؛ (ج) اصلاح DWT شده با تقریب صفر تنظیم شده است. DWT (D) معکوس از (ج) ؛ (ه) اصلاح DWT با تقریب و جزئیات افقی روی صفر تنظیم شده است. و (و) DWT معکوس (e). (وقتی ضرایب جزئیات صفر هستند ، توجه کنید به صورت خاکستری میانی نمایش داده می شوند. وقتی ضرایب تقریبی صفر شود ، به رنگ سیاه نمایش داده می شود).

بسته های موجک

تبدیل موجک سریع یک تابع را به مجموع توابع مقیاس بندی و موجک تجزیه می کند که پهنای باند آنها از نظر لگاریتمی به هم مرتبط هستند. یعنی محتوای فرکانس پایین تابع با استفاده از توابع مقیاس بندی و موجک با پهنای باند محدود نمایش داده می شود ، در حالی که محتوای فرکانس بالا با استفاده از توابع با پهنای باند وسیع تر نشان داده می شود. این در شکل ۶.۵ آشکار است. هر نوار افقی از کاشی های ارتفاع ثابت ، که تابع های اصلی یک مقیاس FWT هستند ، با حرکت به سمت بالا از فرکانس ، ارتفاع خود را به صورت لگاریتمی افزایش می دهد. برای به دست آوردن کنترل بیشتر بر تقسیم بندی صفحه فرکانس زمان (به عنوان مثال ، برای به دست آوردن پهنای باند کوچکتر برای فرکانس های بالاتر) ، FWT باید تعمیم داده شود تا تجزیه انعطاف پذیرتری به دست آورد.

بسته موجکی نامیده می شود (Coifman and Wickerhauser [۱۹۹۲]). هزینه این کلی سازی افزایش پیچیدگی محاسباتی از $O(N)$ برای FWT به $O(N \log^2 N)$ برای یک بسته موجک است.

دوباره بانک فیلتر سه مقیاس شکل ۷.۲۴ (a) را در نظر بگیرید ، اما تجزیه را به عنوان یک درخت دوتایی تصور کنید. شکل ۷.۳۳ (الف) ساختار آن درخت را توضیح می دهد و مقیاس بندی FWT مناسب و ضرایب موجک از شکل ۷.۲۴ (الف) را به گره های درخت پیوند می دهد. گره ریشه دارای بالاترین ضریب تقریب در مقیاس است

که نمونه هایی از خود تابع است ، در حالی که برگها تقریباً تبدیل را به ارث می برند. خروجی های سازگار و دقیق جزئیات دو گره متوسط ، $T_\varphi(J-2,k)$ و $T_\varphi(J-1,k)$ تقریبی از بانک های فرعی هستند که بعداً فیلتر شده و به چهار گره برگ اضافی تبدیل می شوند. توجه داشته باشید که ضرایب هر گره وزن یک بسط خطی است که یک "قطعه" محدود شده از گره ریشه $f(x)$ تولید می کند. از آنجا که چنین قطعه ای عنصری از مقیاس بندی یا زیرفضا موجک شناخته شده است ، ما می توانیم ضرایب تولید کننده در شکل ۷.۳۳ (a) را با زیرفضا مربوطه جایگزین کنیم. نتیجه درخت تجزیه و تحلیل زیر فضایی شکل ۷.۳۳ (ب) است.

درختان تجزیه و تحلیل یک روش جمع و جور و آموزنده برای نمایش تبدیلات موجک چند مقیاس ارائه می دهند. ترسیم آنها ساده است ، فضای کمتری نسبت به فیلترهای مربوطه و نمودارهای بلوک مبتنی بر زیر نمونه خود دارد و تشخیص تجزیه های معتبر را نسبتاً آسان می کند. درخت تجزیه و تحلیل سه مقیاس شکل ۷.۳۳ (ب) ، برای مثال ، سه گزینه توسعه احتمالی را پیشنهاد می کند:

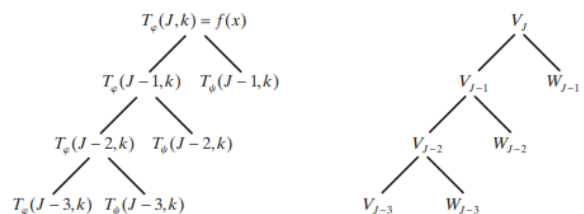
$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1} \quad (7-156)$$

$$V_J = V_{J-2} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} \quad (7-157)$$

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} \quad (7-158)$$

به یاد بیاورید که نشان دهنده اتحاد فضاها (مانند اتحاد مجموعه ها) است. معادلات (۷-۱۵۶) تا (۷-۱۵۸) را می توان با استفاده مکرر از معادله (۷-۱۲۸) به دست آورد.

آنها با تجزیه های FWT یک ، دو و سه مقیاس یک تابع $D-1$ مطابقت دارند. تجزیه معتبر به یک اصطلاح تقریبی (یا مقیاس بندی زیرفضا) و اجزای جزئیات کافی (یا زیرفضای موجک) برای پوشش طیف شکل ۷.۲۴ (ب) نیاز دارد. به طور کلی ، یک درخت تجزیه و تحلیل FWT در مقیاس P از تجزیه های منحصر به فرد P پشتیبانی می کند. درختان تجزیه و تحلیل همچنین یک مکانیسم موثر برای نمایش بسته های موجک هستند ، که چیزی بیش از تبدیل موجک معمولی با جزئیات فیلم به صورت تکراری نیستند. بنابراین ، درخت تجزیه و تحلیل FWT سه مقیاس شکل ۷.۳۳ (b) تبدیل به



شکل ۷.۳۳ یک درخت (الف) یک درخت محکم و (ب) درخت بانک تجزیه و تحلیل FWT دو مقیاس شکل ۷.۲۴. درخت بسته بندی موجک سه مقیاس شکل ۷.۳۴. به عضویت اضافی که باید معرفی شود توجه کنید. اولین زیرنویس هر گره دوبارمقیاس گره مادر FWT را که از آن نشأت گرفته است ، مشخص می کند.

دوم ، یک رشته با طول متغیر "A" و "D" ، مسیر را از گره اصلی به گره مورد بررسی رمزگذاری می کند. یک "A" نشان دهنده تقریب گذاری است ، در حالی که "D" نشان دهنده تبدیل جزئیات است. به عنوان مثال ، گره زیرفضا W_{J-1}, DA ، با "فیلتر کردن" ضرایب مقیاس $J-1$ FWT (یعنی $J-1$ اصلی در شکل ۷.۳۴) از طریق فیلتر جزئیات اضافی (تولید $J-1$ ، D, W_{J-1}) بدست می آید ، به دنبال یک فیلتر تقریبی (دادن $J-1$ ، W_{J-1}, DA). شکل ۷.۳۵ (الف) و (ب) به ترتیب ویژگیهای فیلتر بانک و تقسیم طیف درخت تجزیه در شکل ۷.۳۴ است. توجه داشته باشید که خروجی های "طبیعی مرتب شده" بانک فیلتر در شکل ۷.۳۵ (الف) بر اساس محتوای فرکانس در شکل ۷.۳۵ (ب) دوباره مرتب شده اند.

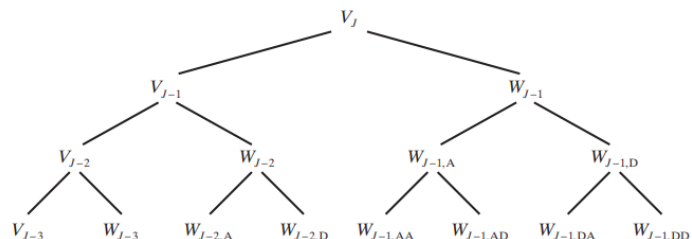
درخت بسته سه مقیاسی در شکل ۷.۳۴ تقریباً تعداد تجزیه ها (و کاشی های فرکانس زمان مربوط) را که با درخت FWT سه مقیاس امکان پذیر است تقریباً سه برابر می کند. به یاد بیاورید که در یک FWT معمولی ، ما نوارهای پایین گذر را به تنهایی تقسیم ، فیلتر و نمونه برداری می کنیم. این یک رابطه لگاریتمی ثابت (پایه ۲) بین عرض باند مقیاس بندی و فضاهای موجکی مورد استفاده در نمایش یک تابع ایجاد می کند [شکل ۷.۲۴ (ب) را ببینید]. بنابراین ، در حالی که درخت تجزیه و تحلیل FWT در مقیاس ۳ شکل ۷.۲۴ (a) سه تجزیه احتمالی را ارائه می دهد-که توسط معادله تعریف شده است. (۷-۱۵۶) تا (۷-۱۵۸)-درخت بسته موجک شکل ۷.۳۴ از ۲۶ تجزیه مختلف پشتیبانی می کند. به عنوان مثال ، V_J و بنابراین تابع $f(x)$ را می توان به صورت گسترده گسترش داد به یاد بیاورید که {نشان دهنده اتحاد فضاها (مانند اتحاد مجموعه ها) است. ۲۶ تجزیه همراه با شکل ۷.۳۴ توسط ترکیبات مختلفی از گره ها (فاصله ها) تعیین می شود که می توانند برای نشان دادن گره ریشه (فضا) در بالای درخت ترکیب شوند. معادلات (۷-۱۵۹) و (۷-۱۶۰) دو مورد از آنها را تعریف کنید

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD} \quad (7-159)$$

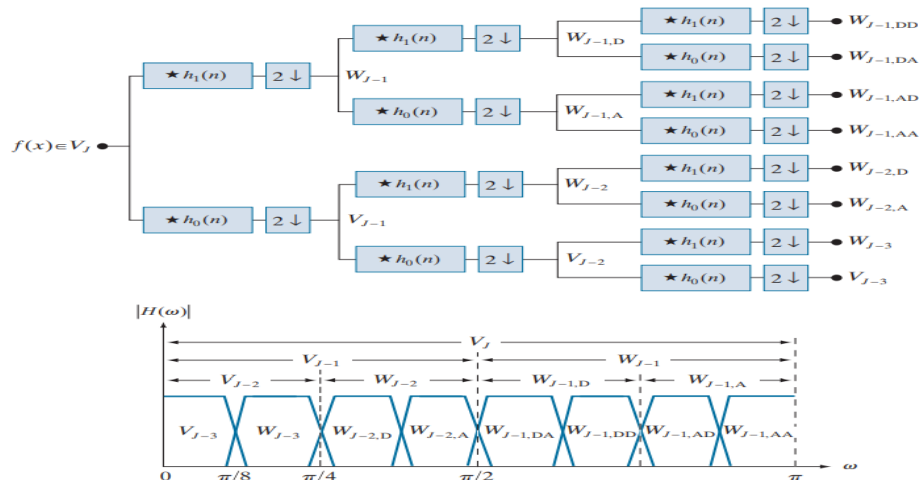
طیفی که در شکل ۷.۳۵ (b) نشان داده شده است ، یا به صورت

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD} \quad (7-160)$$

طیف آن در شکل ۷.۳۶ نشان داده شده است. به تفاوت بین این آخرین طیف و طیف بسته کامل شکل ۷.۳۵ (ب) یا طیف سه مقیاس FWT توجه کنید.



شکل ۷.۳۴ درخت تجزیه و تحلیل بسته موجک در سه مقیاس.



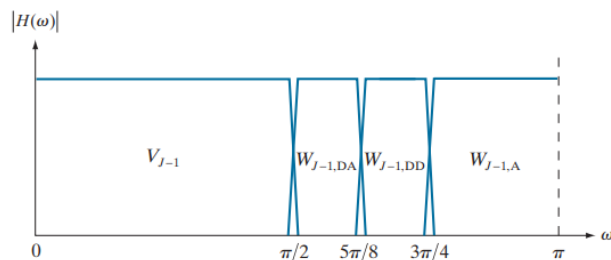
شکل ۷.۳۵ بانک (a) فیلتر و (ب) ویژگی های تجزیه طیف یک درخت تجزیه و تحلیل بسته موجک سه مقیاس کامل.

شکل ۷.۲۴ (ب) به طور کلی، بسته موجک در مقیاس P ، D تبدیل می شود (و مرتبط است درختان تجزیه و

$$D(P+1) = [D(P)]^2 + 1 \quad (7-161)$$

تحلیل سطح $(P-1)$ پشتیبانی می کند

تجزیه های منحصر به فرد، که در آن $D(1) = 1$. با چنین تعداد زیادی از بسط معتبر، تبدیل های مبتنی بر بسته کنترل بهتری را بر تقسیم بندی



شکل ۷.۳۶ طیف تجزیه در معادله (۷-۱۶۰).

طیف تابع تجزیه شده هزینه این کنترل افزایش پیچیدگی محاسباتی است. بانک فیلتر را در شکل ۷.۳۵ (a) با

شکل ۷.۲۴ (a) مقایسه کنید. اکنون بانک فیلتر دوبعدی چهار بانده شکل ۷.۲۹ (a) را در نظر بگیرید. همانطور که قبلاً ذکر شد، تقریب $W_{J-1,DA}$ را به خروجی های $J-1$ FWT، $T_\varphi(j,k,l)$ ، $T_\psi^H(j,k,l)$ ، $T_\psi^V(j,k,l)$ ،

(ج) همانطور که در مورد $D-1$ ، می توان "ایجاد" تبدیل در مقیاس "تکرار" کرد در مقیاس $\hat{T}_\psi^D(j,k,l)$ $j = J-1, J-2, \dots, J-P$ طیف ناشی از اولین تکرار، با $j+1 = J$ در شکل ۷.۲۹ (a)، در شکل ۷.۳۷

(a) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که صفحه فرکانس را به چهار ناحیه مساوی تقسیم می کند. چهاربانده

با فرکانس پایین در مرکز هواپیما با ضرایب تبدیل $T_\varphi(J-1,k,l)$ و فضای مقیاس بندی V_{J-1} همزمان است. این

نامگذاری با مورد $D-1$ سازگار است. با این حال، برای تطبیق ماهیت دو بعدی ورودی، ما اکنون سه (و نه یک)

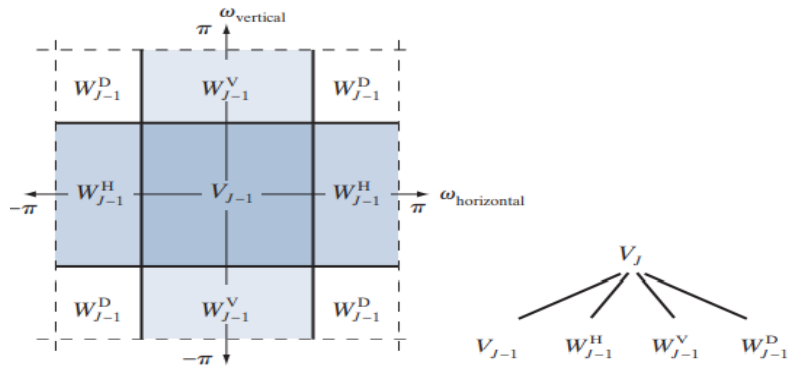
زیرفضا موجک داریم. آنها با W^H , W^V و W^D نشان داده می شوند و با مطابقت دارند. شکل ۷.۳۷ $T_\psi^H(J-1, k, l)$, $T_\psi^V(J-1, k, l)$, and $T_\psi^D(J-1, k, l)$ (ب) درخت تجزیه و تحلیل چهارگانه FWT چهار مقیاس تک مقیاسی را نشان می دهد. به حروف زیر که نامهای زیرفضای موجک را به همتایان همکار خود تبدیل می کند، توجه کنید.

شکل ۷.۳۸ قسمتی از درخت تجزیه و تحلیل بسته موجک در مقیاس سه بعدی را نشان می دهد. مانند همتای ۱ بعدی خود در شکل ۶.۳۴، اولین زیرنویس هر گره ای که از فرزندان یک گره جزئی معمولی FWT است مقیاس گره جزئیات والد است. زیرنویس دوم، یک رشته طول متغیر از "A"، "H"، "V" و "D"، مسیر را کد می کند

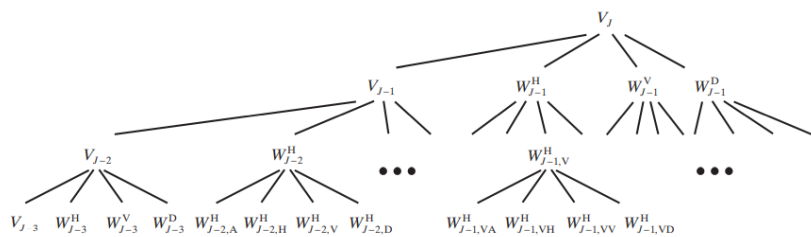
از گره والد به گره مورد نظر گره با برچسب W^H ، به عنوان مثال، با "فیلتر کردن سطر/ستون" مقیاس ضرایب افقی جزئیات $J-1$ (به عنوان مثال، W در شکل ۷.۳۸) از طریق جزئیات اضافی به دست می آید/تقریبا-فیلتر تقلید (بازده $W_{J-1,VD}^H$). $(W_{J-1,V}^H)$ ، و به دنبال آن یک فیلتر جزئیات/جزئیات (دادن مقیاس P ، درخت موجک ۲ بعدی D از درخت پشتیبانی می کند

$$D(P+1) = [D(P)]^4 + 1 \quad (7-162)$$

توسعه های منحصر به فرد، جایی که $D(1) = 1$. بنابراین، درخت سه مقیاس شکل ۷.۳۸ 83.522 تجزیه احتمالی را ارائه می دهد. مشکل انتخاب بین آنها موضوع مثال بعدی است.



شکل ۷.۳۷ اولین حالت تجزیه یک FWT دو بعدی: (الف) طیف و (ب) درخت تجزیه و تحلیل زیرفضا.



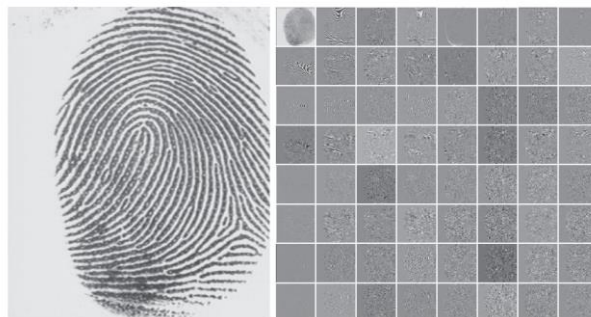
شکل ۷.۳۸ درخت تجزیه بسته های موجک سه مقیاس کامل. فقط بخشی از درخت ارائه می شود.
 مثال ۷.۲۴: تجزیه بسته های موجک دو بعدی.

همانطور که در بحث فوق اشاره شد، یک درخت بسته موجک گزینه های تجزیه متعددی را ارائه می دهد. در حقیقت، تعداد تجزیه های احتمالی اغلب آنقدر زیاد است که شمارش یا بررسی آنها به صورت جداگانه غیر ممکن است، اگر نگوییم غیرممکن است. یک الگوریتم کارآمد برای یافتن تجزیه های مطلوب با توجه به معیارهای خاص برنامه بسیار مطلوب است. همانطور که مشاهده می شود، توابع هزینه ای مبتنی بر انرژی و انترپی در بسیاری از موارد قابل اجرا هستند و برای استفاده در الگوریتم های جستجوی درخت دوتایی و چهارمعی مناسب هستند. مشکل کاهش میزان داده های مورد نیاز برای نمایش تصویر نگاشته ۴۰۰ * ۴۰۰ * ۸۰ را در شکل ۷.۳۹ (a) در نظر بگیرید. فشرده سازی تصویر به تفصیل در فصل ۸ مورد بحث قرار گرفته است. در این مثال، ما می خواهیم "بهترین" تجزیه بسته موجک سه مقیاس را به عنوان نقطه شروع برای فرآیند فشرده سازی انتخاب کنیم. با استفاده از درختان موجک سه مقیاس، ۸۳،۵۲۲ [در معادله (۷-۱۶۲) وجود دارد]. تجزیه بالقوه. شکل ۷.۳۹ (ب) یکی از آنها را نشان می دهد-یک بسته کامل موجک، تجزیه ۶۴ برگ مانند درخت تجزیه و تحلیل شکل ۷.۳۸. توجه داشته باشید که برگهای درخت مربوط به زیربندهای آرایه ۸ * ۸ از زیر تصاویر تجزیه شده در شکل ۷.۳۹ (ب) است. اما احتمال اینکه این تجزیه ۶۴ برگی خاص به منظور فشرده سازی به نحوی مطلوب باشد، نسبتاً کم است. در غیاب معیار بهینه مناسب، ما نه می توانیم آن را تأیید کنیم و نه آن را انکار کنیم. یک معیار معقول برای انتخاب تجزیه برای فشرده سازی تصویر شکل ۷.۳۹ (a) تابع هزینه افزودنی است

$$E(f) = \sum_{x,y} |f(x, y)| \quad (7-163)$$

این تابع یک اندازه گیری^{۳۲} احتمالی از مقدار انرژی تابع دو بعدی را فراهم می کند. بر اساس این اندازه گیری، انرژی تابع $f(x, y) = 0$ برای همه x و y است. از طرف دیگر مقادیر بالای E نشان دهنده توابع با مقدارهای غیر صفر زیادی است. از آنجایی که اکثر طرح های فشرده سازی مبتنی بر تبدیل با کوتاه یا محدود کردن ضرایب کوچک به صفر عمل می کنند، یک تابع هزینه که تعداد مقادیر نزدیک به صفر را حداکثر می کند، معیاری منطقی برای انتخاب تجزیه "خوب" از نظر فشرده سازی است.

^{۳۲} سایر اندازه گیری های احتمالی انرژی شامل مجموع مربعات $f(x, y)$ مجموع ورود مربع ها و غیره است. مسئله ۷.۴۸ یک تابع هزینه احتمالی مبتنی بر انرژی را تعریف می کند.



a b

شکل ۷.۳۹ (الف) یک اثر انگشت اسکن شده و (ب) تجزیه بسته های موجک سه مقیاس و کامل آن. اگرچه ۶۴ زیر تصویر تجزیه بسته به نظر می رسد مربع هستند (به عنوان مثال ، به تصویر زیر تقریبی توجه کنید) ، این فقط یک انحراف از برنامه مورد استفاده برای تولید نتیجه است. (تصویر اصلی از موسسه ملی استاندارد و فناوری تهیه شده است.)

تابع هزینه ای که توضیح داده شد ، از نظر محاسباتی ساده است و به راحتی با روال بهینه سازی درخت سازگار است. الگوریتم بهینه سازی باید از تابع برای به حداقل رساندن "هزینه" گره های برگ در درخت تجزیه استفاده کند. گره های برگ حداقل انرژی باید مورد توجه قرار گیرند زیرا دارای مقادیر نزدیک به صفر هستند که منجر به فشرده سازی بیشتر می شود. زیرا تابع هزینه معادله (۷-۱۶۳) یک اندازه گیری محلی است که فقط از اطلاعات موجود در گره مورد بررسی استفاده می کند ، یک الگوریتم کارآمد برای یافتن حداقل راه حل های انرژی به راحتی به شرح زیر ساخته می شود:

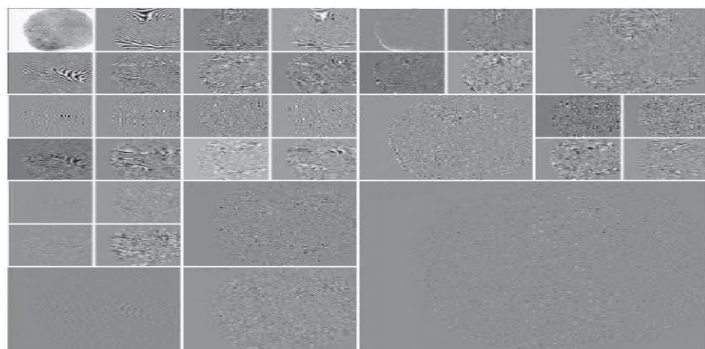
برای هر گره درخت تجزیه و تحلیل ، از ریشه شروع کنید و سطح به سطح برگها را ادامه دهید:

۱. انرژی گره ، نشان داده شده EP (برای انرژی مادر) و انرژی چهار فرزند آن - که به عنوان EA ، EH ، EV و ED نشان داده می شود را محاسبه کنید. برای تجزیه بسته های موجک دو بعدی ، والد یک آرایه دو بعدی از ضرایب تقریب یا جزئیات است. فرزندان عبارتند از تقریب فیلتر شده ، جزئیات افقی ، عمودی و مورب.

۲. اگر انرژی ترکیبی فرزندان کمتر از انرژی والدین باشد (یعنی $ED < EP + EA + EH + EV$) ، فرزندان را در درخت تجزیه و تحلیل قرار دهید. اگر انرژی ترکیبی فرزندان بیشتر یا مساوی با والدین باشد ، فرزندان خود را هرس کرده و فقط والدین خود را نگه دارید. این یک برگ از درخت تجزیه و تحلیل بهینه است. الگوریتم قبلی می تواند برای (۱) هرس درختان بسته موجک یا (۲) روشهای طراحی برای جمع آوری درختان مطلوب از ابتدا استفاده شود. در مورد دوم ، خواهران و برادران غیر ضروری - فرزندان گره هایی که در مرحله ۲ الگوریتم حذف می شوند - محاسبه نمی شوند.

شکل ۷.۴۰ تجزیه بهینه را نشان می دهد که از اعمال الگوریتم تازه توضیح داده شده در تصویر شکل ۷.۳۹ (a) با تابع هزینه معادله حاصل می شود. (۷-۱۶۳). توجه داشته باشید بسیاری از ۶۴ زیربند تجزیه کامل بسته اصلی در شکل ۷.۳۹ (ب) حذف شده است. علاوه بر این ، تصاویر فرعی که در شکل ۷.۴۰ تقسیم نشده اند (تجزیه

بیشتر) نسبتاً صاف بوده و از پیکسل هایی با ارزش خاکستری متوسط تشکیل شده است. از آنجا که تمام زیر تصویر تقریبی این تصویر به گونه ای مقیاس بندی شده است که سطح خاکستری ۱۲۸ نشان دهنده ضریب صفر است ، این زیر تصاویر حاوی انرژی کمی است. به طور کلی کاهش انرژی حاصل از تقسیم آنها وجود نخواهد داشت.



شکل ۷.۴۰ تجزیه بسته موجک مطلوب برای اثر انگشت شکل ۷.۳۹ (a).

مثال قبل بر اساس یک مشکل در دنیای حقیقی است که با استفاده از امواج موج حل شده است. دفتر تحقیقات فدرال (FBI) در حال حاضر پایگاه داده بزرگی از اثر انگشت را در اختیار دارد و یک استاندارد ملی مبتنی بر موجک برای دیجیتالی شدن و فشرده سازی تصاویر چاپ شده با انگشت (FBI [۱۹۹۳]) ایجاد کرده است. با استفاده از موجک های دو وجهی (Cohen and Daubechies, Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF) [۱۹۹۲]) ، استاندارد به نسبت فشرده سازی معمولی ۱۵:۱ دست می یابد. جدول ۷.۲ ضرایب تجزیه و تحلیل مورد نیاز را شرح می دهد. از آنجا که توابع مقیاس بندی و موجک خانواده CDF متقارن هستند و طول های مشابهی دارند ، از جمله پرکاربردترین موجک های دوضلعی هستند. مزایای فشرده سازی مبتنی بر موجک نسبت به روش سنتی JPEG در فصل ۸ مورد بررسی قرار گرفته است.

خلاصه ، منابع ، و خواندن بیشتر

مطالب موجود در این فصل یک پایه ریاضی محکم برای درک و دسترسی به نقش تبدیلات تصویر ، از جمله تبدیل موجک گسسته ، در پردازش تصویر ایجاد می کند. ما به دگرگونی ها به عنوان بسط سری می پردازیم که در آن ضرایب دگرگونی محصولات داخلی مجموعه ای از توابع پایه طبیعی یا طبیعی هستند و تصاویر در حال تبدیل هستند. برای بسیاری از تبدیلات ، این محصولات داخلی را می توان پیاده سازی کرد به عنوان عملیات ماتریس مستقیم خواندن بیشتر در مورد فرمول ماتریسی تبدیلات تصویر در کتابهایی مانند اندروز [۱۹۷۰] و وانگ [۲۰۱۲] ، و در مقالات اصلی در مورد خود تبدیلات موجود است. به عنوان مثال ، مقالات اصلی در مورد تبدیل (Haar [۱۹۱۰]) Haar ، تبدیل (Walsh [۱۹۲۳]) Walsh ، تبدیل (Hadamard [۱۸۹۳]) و تبدیل مورب (پرات ، چن و ولش [۱۹۷۴]) را ببینید. [۱۸۹۳]

جدول ۷.۲ Cohen- Daubechies- Feauveau بازسازی و تجزیه ضرایب فیلترها به ترتیب با ۶ و ۸ لحظه از بین بردن. (کوهن ، داوبچی ، و فوو [۱۹۹۲]).

n	$h_0(n)$	$h_1(n)$	n	$h_0(n)$	$h_1(n)$
0	0	0	9	0.825923	0.417849
1	0.001909	0	10	0.420796	0.040368
2	-0.001914	0	11	-0.094059	-0.078722
3	-0.016991	0.014427	12	-0.077263	-0.014468
4	0.011935	-0.014468	13	0.049733	0.0144263
5	0.049733	-0.078722	14	0.011935	0
6	-0.077263	0.040368	15	-0.016991	0
7	-0.094059	0.417849	16	-0.0019	0
8	0.420796	-0.758908	17	0.0019	0

متن های خوب زیادی در مورد موجک ها و کاربرد آنها وجود دارد. چندین مورد درمان ما را تکمیل می کند و در طول توسعه بخش تبدیل موجک فصل مورد استفاده قرار گرفت. از جمله آنها می توان به کتابهای Vetterli و Kovacevic [۱۹۹۵] و Gopinath, Burrus و Guo [۱۹۹۸] اشاره کرد. فهرست جزئی از برنامه های تصویربرداری که از نقطه نظر موجک به آنها نزدیک شده است شامل تطبیق تصویر ، ثبت ، تقسیم بندی ، کاهش صدا ، ترمیم ، افزایش ، فشرده سازی (فصل ۸ را ببینید) ، فیلترهای شکل شناسی و توموگرافی کامپیوتری است. تاریخچه تجزیه و تحلیل موجک در کتابی از هابارد [۱۹۹۸] ثبت شده است. پیشینیان اولیه موجک ها به طور همزمان در حوزه های مختلف توسعه یافته و در مقاله ای توسط مالات [۱۹۸۷] به چاپ رسیده است. این چارچوب ریاضی را به حوزه آورد. بسیاری از تاریخچه موجک ها را می توان از طریق آثار مایر [۱۹۸۷] [۱۹۹۰] [۱۹۹۲a] ، [۱۹۹۳] [b] ، [c] [۱۹۸۹a – c] [۱۹۸۷] Mallat [۱۹۹۸] ، و [Daubechies [۱۹۸۸] [۱۹۹۰] ردیابی کرد. [۱۹۹۲] [۱۹۹۳] [۱۹۹۶]. سرانجام، تعدادی از موضوعات ویژه به موجک ها اختصاص داده شده است ، از جمله یک موضوع ویژه در مورد تبدیل موجک و سیگنال چند راه حل analysis در IEEE Transactions on Information Theory [۱۹۹۲] ، یک مسئله ویژه در مورد موجک ها و پردازش سیگنال در معاملات IEEE در پردازش سیگنال [۱۹۹۳] ، و یک بخش ویژه در مورد نمایش چند راه حل در معاملات IEEE در تجزیه و تحلیل الگو و هوش ماشین [۱۹۸۹]. همه مثال های فصل با استفاده از MATLAB انجام شده است (به Gonzalez et al [۲۰۰۴] مراجعه کنید).

چالش ها و مسائل

راه حل مشکلاتی که با علامت (*) مشخص شده اند در بسته پشتیبانی دانشجویی DIP ξ E وجود دارد (به وب سایت کتاب مراجعه کنید: www.ImageProcessingPlace.com).

۷.۱ بردارهای ستون داده شده است

$$s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید که s_0 ، s_1 و s_2 متعامد هستند.

ب) آیا آنها نرمال هستند؟ اگر نه، آنها را نرمالیزه کنید تا یک ماتریس تبدیل از بردارهای متعامد ایجاد شود.

ج) با استفاده از نتیجه (b)، یک ماتریس تبدیل متعامد برای s_0 ، s_1 و s_2 بنویسید.

د) تبدیل بردار ستون را محاسبه کنید

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

ه) تبدیل معکوس نتیجه را در (د) محاسبه کنید.

۷.۲ معادله (۷-۲۳) را اثبات کنید.

۷.۳ * ثابت کنید که $r(x,u) = s(x,u)$ در معادله (۷-۱۶) و (۷-۱۷) برای بردارهای حقیقی و متعامد.

۷.۴ ثابت کنید که اگر $A^*TA = I$ ، توابع توسعه مربوطه متعامد هستند.

۷.۵ ثابت کنید که ماتریس A^3 در مثال ۷.۳ یک ماتریس تبدیل متعامد است.

۷.۶ ثابت کنید که تبدیلات عمودی محصولات داخلی را حفظ می کند.

با استفاده از معادلات (۷-۴) و (۷-۵)،

الف) نرم $\mathbf{f} = [3 + j2 \quad 1 - j]^T$ را بیابید.

ب) نرم $\mathbf{g} = [0.707 \quad -0.707]^T$ را بیابید.

ج) زاویه بین $\mathbf{h} = [0.707 \quad 0.707]^T$ و \mathbf{g} را بیابید.

د) * نرم $f(x) = \cos x$ را بیابید.

ه) زاویه بین f از (d) و $g(x) = \sin x$ را بیابید.

ف) آیا f و g با یکدیگر متعامد هستند؟

گ) آیا f و g متعامد هستند؟

۷.۸ با استفاده از نتایج مسئله ۷.۱ (ج) - (ه) و بردار ستون $\mathbf{g} = [2 \quad 7 \quad 1]$: الف) زاویه بین f و g را محاسبه کنید.

ب) فاصله بین f و g را محاسبه کنید. نکته:

فاصله بین بردارهای f و g برابر است

$$d = \sqrt{\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle}$$

ج) * نشان دهید که زوایا و فاصله ها با این تبدیل متعامد حفظ می شوند.

۷.۹ تبدیل معکوس T را در آزمون ۷.۳ محاسبه کنید.

۷.۱۰ ثابت کنید که مجموعه تابع های انبساط سینوسی $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ هستند.

۷.۱۱ ضرایب انبساط ۲ تایی را محاسبه کنید

$s_0 = [0.707 \quad 0.707]^T$, $s_1 = [0.707 \quad -0.707]^T$ و بسط های مربوطه را برای پایه های زیر بنویسید:

$$s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

متعامد؟ اگر چنین است، ماتریس تبدیل متعامد مربوطه را بنویسید.

۷.۱۳ اگر $f = [4 \quad -3 \quad 2 \quad 1]^T$ تبدیل f را با استفاده از ماتریس تبدیل مسئله ۷.۱۲ پیدا کنید. سپس معکوس را محاسبه کرده و نشان دهید که تبدیل برگشت پذیر است.

۷.۱۴ با توجه به ماتریس ۲ بعدی

$$F = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 & 0.5 \\ -3 & 1 & 5 & -0.5 \\ 2 & -4 & 8 & -0.5 \\ 1 & -3 & 3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

(الف) تبدیل F را با توجه به ماتریس تبدیل مسئله ۷.۱۲ محاسبه کنید.

(ب) * با استفاده از تبدیل D^{-1} محاسبه شده در مسئله ۷.۱۳، نحوه محاسبه تبدیل دو بعدی را به عنوان دو تبدیل D^{-1} توضیح دهید.

(ج) تبدیل معکوس دو بعدی حاصل از (الف) را محاسبه کنید.

۷.۱۵ ثابت کنید که توابع انبساط

$$u_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \quad \tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

۷.۱۶ ثابت کنید که A و A' در مثال ۷.۵ طبیعی هستند.

(الف) استفاده از ماتریس های بی عادی A و Of' مثال ۷.۵، تبدیل آرایه $4 * 4$ را محاسبه کنید

(ب) تبدیل معکوس نتیجه را در (الف) محاسبه کنید.

۷.۱۷ * یک جفت معادله ماتریس تبدیل دو بعدی برای آرایه های مستطیلی و توابع انبساط مختلط متعامد بنویسید.

۷.۱۸ یک جفت معادله ماتریس تبدیل دو بعدی برای توابع انبساط دو متعامد مختلط بنویسید.

۷.۱۹ نشان دهید که معادله (۷-۵۹) مثال ۷.۶ معادل سینوسی است (۲ پیکسل).

۷.۲۰ * ثابت کنید که تابع های توسعه DFT معادله (۷-۵۶) متعامد هستند.

۷.۲۱ معادله (۷-۵۲) را اثبات کنید.

۷.۲۲ شروع با گسترش سری توابع بسط تعریف شده در معادله (۷-۵۶) ، عبارتی برای تبدیل گسسته فوریه بدست آورید.

۷.۲۳ با توجه به بردارهای استاندارد $\mathbf{e}_0 = [1 \ 0]^T$ و $\mathbf{e}_1 = [0 \ 1]^T$ فضای داخلی محصول R^2 و یک بردار دلخواه \mathbf{r} با طول r و زاویه u ، رابطه متقاطع تک نقطه ای \mathbf{r} را با \mathbf{e}_0 و \mathbf{e}_1 محاسبه می کنند. چه موقع r بیشتر شبیه \mathbf{e}_0 است و چه برعکس؟

۷.۲۴ * ثابت کنید که تبدیل فوریه موجک مقیاس بندی شده زمان (c Ts t) توسط معادله (۷-۷۳) داده شده است.

۷.۲۵ معادل (۷-۸۰) را اثبات کنید.

۷.۲۶ ماتریس تبدیل هارتلی را برای $N = 4$

۷.۲۷ یک جفت معادلات تبدیل کسینوس گسسته از فرم داده شده در معادله (۷-۵۷) و (۷-۵۸) را بنویسید. برای تبدیل گسسته فوریه.

۷.۲۸ از آنجا که تبدیل کسینوس گسسته دوبعدی قابل تفکیک است ، DCT دو بعدی یک تصویر را می توان با گذر سطر و ستون با الگوریتم DCT ۱-D جمع بندی کرد. در واقع ، یک ویژگی جالب ۱-D DCT این است که می توان آن را با استفاده از الگوریتم FFT محاسبه کرد. نحوه انجام این محاسبه را با جزئیات نشان دهید.

۷.۲۹ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) ماتریس های تبدیل فوریه ، سینوس ، کسینوس و هارتلی با اندازه $N = 6$ را محاسبه کنید.

(ب) تبدیل هارتلی تابع جداگانه $f(x) = \{-2, -5, -3, 1, 0, 3\}$ را با استفاده از معادله (۷-۲۸) محاسبه کنید.

(ج) تبدیل هارتلی تابع را در (ب) از تبدیل گسسته فوریه آن محاسبه کنید آیا با نتیجه در (ب) برابر است؟

(د) از معادله (۷-۸۶) تا (۷-۸۹) استفاده کنید برای محاسبه DCT از $f(x) = [1, 6, 3]$.

(ه) از معادله (۷-۲۸) استفاده کنید برای محاسبه DST تابع در (ب).

۷.۳۰ تصاویر اصلی تبدیل Haar را برای $N = 2$ محاسبه کنید.

۷.۳۱ ایجاد جدول نگاشت ردیف های ماتریس تبدیل هادامارد- مرتب H_{16} به ترتیب ماتریس تبدیل هادامارد H'_{16} .

۷.۳۲ ماتریس تبدیل مورب را برای $N = 8$ بدست آورید.

۷.۳۳ ضرایب مقیاس بندی Haar را از معادلات (۷-۱۲۲) و (۷-۱۲۶) بدست آورید.

۷.۳۴ آن تابع مقیاس بندی را نشان دهید

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0.25 \leq x < 0.75 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

نیاز دوم تجزیه و تحلیل چند راه حل را برآورده نمی کند.

۷.۳۵ * معادل مشتق (۷-۱۴۰).

۷.۳۶ یک عبارت برای مقیاس بندی فضای V^3 به عنوان تابعی از مقیاس تابع $w(x)$ بنویسید. از تعریف تابع مقیاس گذاری Haar برای معادله استفاده کنید. (۷-۱۲۲) برای رسم توابع مقیاس گذاری Haar V^3 در تبدیل

$$k = \{0, 1, 2\}.$$

۷.۳۷ * موجک $\psi_{3,3}(x)$ را برای تابع موجک Haar بکشید. برای $\psi_{3,3}(x)$ یک عبارت از نظر توابع مقیاس گذاری Haar بنویسید.

۷.۳۸ فرض کنید تابع $f(x)$ عضوی از فضا سازی Haar V^3 باشد، یعنی $f(x) \in H V^3$. از معادله (۷-۱۲۸) استفاده کنید برای بیان V^3 به عنوان تابعی از مقیاس بندی فضای V_0 و هرگونه فضای موجک مورد نیاز. اگر $f(x)$ خارج از فاصله $[0, 1]$ است، بر اساس عبارت خود، توابع مقیاس بندی و موجک مورد نیاز برای گسترش خطی $f(x)$ را ترسیم کنید.

۷.۳۹ اولین چهار عبارت گسترش سری موجک تابع مورد استفاده در مثال ۷.۱۸ را با مقیاس شروع $j_0 = 1$ محاسبه کنید. بسط حاصله را بر حسب مقیاس بندی و توابع موجک مورد نظر بنویسید. نتیجه شما چگونه با نمونه ای که مقیاس شروع آن $j_0 = 0$ بود مقایسه می شود؟

۷.۴۰ DWT در معادله (۷-۱۳۷) و (۷-۱۳۸) برای مقیاس شروع $j_0 = 0$ است.

(الف) * این معادلات را برای هر مقیاس شروع $j_0 = l$ بازنویسی کنید.

(ب) ۱-D DWT تابع $f(x) = \{1, 4, -3, 0\}$ for $0 \leq x \leq 3$ در مثال ۷.۱۹ با $j_0 = 1$ (به جای ۰) دوباره محاسبه کنید.

(c) از نتیجه (b) برای محاسبه f (۱) از مقادیر تبدیل استفاده کنید.

۷.۴۱ * بانک فیلتر FWT مورد نیاز برای محاسبه تبدیل در مسئله ۷.۴۰ را ترسیم کنید. همه ورودی ها و خروجی ها را با توالی های مناسب برچسب گذاری کنید.

۷.۴۲ پیچیدگی محاسباتی تبدیل موجک سریع نقطه $O(N)$ است. یعنی تعداد عملیات متناسب است N . چه چیزی ثابت تناسب را تعیین می کند؟

۷.۴۳ به موارد زیر پاسخ دهید:

(a) * اگر ورودی بانک FWT فیلتر سه مقیاس شکل ۷.۲۴ (a) تابع مقیاس گذاری Haar برای

$\varphi(x) = 1$ for $n = 0, 1, \dots, 7$ در جاهای دیگر باشد. ، تبدیل حاصل از موجک های Haar چیست؟

(ب) اگر ورودی متناظر تابع موجک Haar باشد $\psi(x) = \{1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$ for $n = 0, 1, \dots, 7$ برای n

، ۱ ، تبدیل چیست؟ ۷؟

(ج) کدام دنباله ورودی تبدیل ایجاد می کند $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0\}$ با ضرایب غیر صفر $T_\psi(2,2) = B$ ؟

۷.۴۴ تبدیل موجک ۲ بعدی را با توجه به موجک های Haar از تصویر $2 * 2$ محاسبه کنید

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

بانک فیلتر مورد نیاز را بکشید و همه ورودی ها و خروجی ها را با آرایه های مناسب برچسب گذاری کنید.

۷.۴۵* در حوزه فوریه

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-2\pi i (ux_0/M + vy_0/N)}$$

و تبدیل بر نمایش $F(u, v)$ تأثیر نمی گذارد. با استفاده از دنباله ای از تصاویر زیر ، ویژگی تبدیل قالبهای

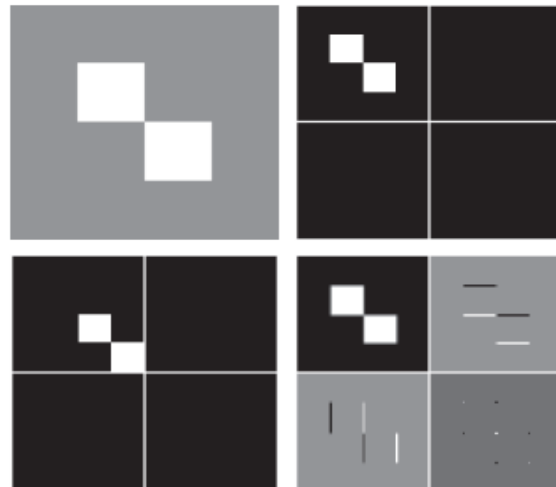
موجک را توضیح دهید. تصویر بالا سمت چپ شامل دو مربع سفید $32 * 32$ می باشد که بر روی زمین خاکستری

خاکستری $128 * 28$ متمرکز شده اند.

تصویر بالا سمت راست تبدیل موجک مقیاس آن نسبت به موجک های Haar است تصویر پایین سمت چپ

عبارت است از تبدیل موجک تصویر اصلی پس از جابجایی 32 پیکسل آن به راست و پایین ، و تصویر نهایی

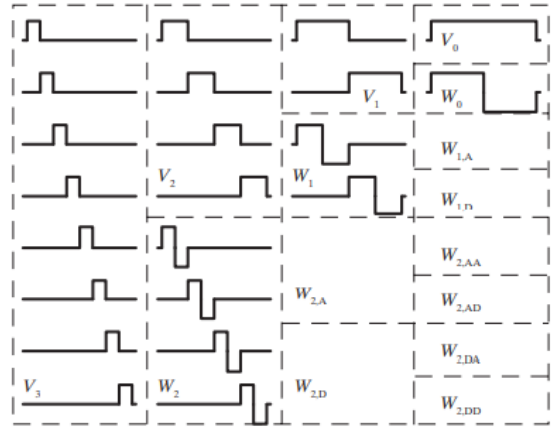
(سمت راست پایین) تبدیل موجک تصویر اصلی پس از تبدیل یک پیکسل به راست و به سمت پایین



۷.۴۶ جدول زیر تابع های موجک و مقیاس گذاری Haar را برای تبدیل موجک سریع چهار مقیاسی نشان می

دهد. توابع پایه اضافی مورد نیاز برای تجزیه کامل بسته سه مقیاس را ترسیم کنید. بیان یا بیان ریاضی را برای

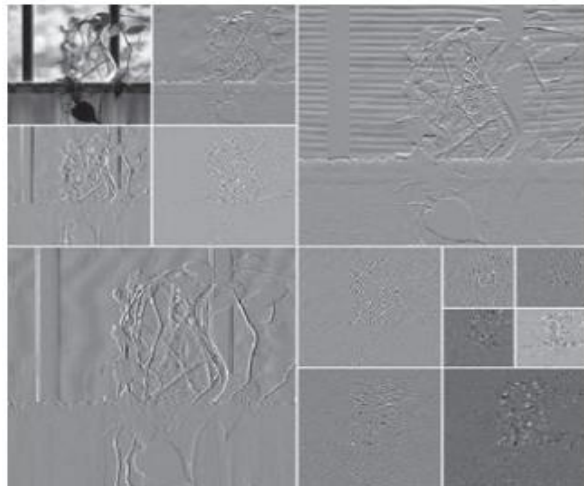
تعیین آنها بیان کنید. سپس توابع پایه را با توجه به محتوای فرکانس سفارش دهید و نتایج را توضیح دهید.



۷.۴۷ تجزیه بسته موجکی گلدان از شکل ۷.۳۰ (الف) در زیر نشان داده شده است.

(الف) درخت تجزیه مربوط به تجزیه را ترسیم کنید ، تمام گره ها را با نام فضاهای مقیاس بندی مناسب و موجک برچسب گذاری کنید.

(ب) طیف فرکانسی تجزیه را ترسیم و برچسب گذاری کنید.



۷.۴۸ با استفاده از موجک Haar ، حداقل تجزیه بسته آنتروپی برای تابع را برای ۲۵، ۲۵، ۲۵ $f(x)$ برای $n = 0$ ، ۱ ، ... ، ۱۵. استفاده کنید از آنتروپی شانون غیر عادی

$$E[f(x)] = \sum_x f^2(x) \ln[f^2(x)]$$

به عنوان معیار به حداقل رساندن درخت بهینه را رسم کرده و گره ها را با مقادیر آنتروپی محاسبه شده برچسب گذاری کنید.

فصل هشتم : فشرده سازی تصویر و برچسب گذاری

اما زندگی کوتاه است و اطلاعات بی پایان است ... اختصار یک شر ضروری است و وظیفه مختصر این است که از بهترین شغلی استفاده کند که اگرچه بد است ، اما از هیچ چیز بهتر است.
آلدوس هاکسلی

کشتی تایتانیک از خود محافظت می کند.

رابرت بالارد

پیش نمایش

فشرده سازی تصویر ، هنر و علم کاهش میزان داده های مورد نیاز برای نمایش یک تصویر ، یکی از مفیدترین و تجاری ترین فناوری ها در زمینه پردازش تصویر دیجیتال است. تعداد تصاویری که روزانه فشرده و بازسازی می شوند خیره کننده است و خود فشرده سازی و فشرده سازی عملاً برای کاربر نامرئی است. هرکسی که دارای دوربین دیجیتال است ، در اینترنت گشت و گذار می کند یا جدیدترین فیلم های هالیوودی را از طریق مزایای اینترنت از الگوریتم ها و استانداردهایی که در این فصل مورد بحث قرار می گیرد ، پخش می کند. این ماده ، که تا حد زیادی مقدماتی است ، برای برنامه های کاربردی تصویر ثابت و فیلم کاربرد دارد. ما هم تئوری و هم عمل را معرفی می کنیم ، پرکاربردترین تکنیک های فشرده سازی را مورد بررسی قرار می دهیم و استانداردهای صنعتی را که آنها را مفید می کند ، شرح می دهیم. این فصل با مقدمه ای بر برچسب گذاری دیجیتال تصویر ، فرایند درج داده های قابل مشاهده و نامرئی (مانند اطلاعات حق چاپ) در تصاویر به پایان می رسد.
پس از اتمام این فصل ، دانش آموزان باید:

قادر به اندازه گیری اطلاعات در یک تصویر دیجیتالی باشید. منابع اصلی کاهش داده ها در تصاویر دیجیتال را بشناسید. تفاوت بین فشرده سازی بدون ضرر و بدون خطا و میزان فشاری که با هر کدام ممکن است را بدانید. با استانداردهای رایج فشرده سازی تصویر ، مانند JPEG و JPEG-۲۰۰۰ ، که امروزه در حال استفاده هستند ، آشنا باشید.

روشهای اصلی فشرده سازی تصویر و نحوه و چگونگی کار آنها را بشناسید. قادر به فشرده سازی و از بین بردن مقیاس خاکستری ، رنگ و تصاویر ویدئویی باشید. تفاوت بین علامت گذار های قابل مشاهده ، نامرئی ، قوی ، شکننده ، عمومی ، خصوصی ، کلیدهای محدود و کلیدهای بدون محدودیت را بدانید. آشنایی با اصول درج و استخراج علامت در هر دو حوزه فضایی و تبدیل.

۸.۱ مبانی

اصطلاح فشرده سازی داده ها به فرایند کاهش میزان داده های مورد نیاز برای نمایش مقدار معینی از اطلاعات اشاره دارد. در این تعریف ، داده ها و اطلاعات یکسان نیستند. داده ها ابزاری هستند که از طریق آنها اطلاعات منتقل می شوند. از آنجا که می توان از مقادیر مختلف داده برای نشان دادن همان مقدار اطلاعات استفاده کرد ، گفته می شود که نمایش هایی که حاوی اطلاعات نامربوط یا مکرر هستند حاوی داده های اضافی هستند. اگر اجازه دهیم b و b' تعداد بیت (یا واحدهای حامل اطلاعات) را در دو نمایش اطلاعات یکسان نشان دهند ، افزونگی نسبی داده ها ، R ، نمایش با b بیت است.

$$R = 1 - \frac{1}{C} \quad (8-1)$$

جایی که C ، معمولاً نسبت فشرده سازی نامیده می شود ، به عنوان تعریف شده است

$$C = \frac{b}{b'} \quad (8-2)$$

اگر $C = ۱۰$ (گاهی ۱۰:۱ نوشته می شود) ، برای مثال ، نمایش بزرگتر دارای ۱۰ بیت داده برای هر ۱ بیت داده در نمای کوچکتر است. افزونگی نسبی مربوط به نمای بزرگتر ۰.۹ (۰.۹، $R = ۰.۹$) است ، که نشان می دهد ۹۰ data از داده های آن اضافی است.

در زمینه فشرده سازی تصویر دیجیتال ، b در معادله (۸-۲) معمولاً تعداد بیت های مورد نیاز برای نمایش تصویر به عنوان یک آرایه دو بعدی از مقادیر شدت است. آرایه های شدت دو بعدی که در بخش ۲.۴ معرفی شده اند ، فرمت های ترجیحی برای مشاهده و تفسیر انسان هستند- و استاندارد است که بر اساس آن سایر نمایندگی ها مورد قضاوت قرار می گیرند. وقتی صحبت از نمایش تصویر فشرده می شود ، این فرمت ها بهینه نیستند. آرایه

های شدت دو بعدی از سه نوع اصلی افزونگی داده رنج می برند که می توان آنها را شناسایی و مورد بهره برداری قرار داد:

۱. افزونگی برنامه نویسی. کد یک سیستم از نمادها (حروف ، اعداد ، بیت ها و موارد مشابه) است که برای نشان دادن مجموعه ای از اطلاعات یا مجموعه ای از رویدادها استفاده می شود. به هر قطعه از اطلاعات یا رویداد توالی ای از نمادهای کد اختصاص داده می شود که یک کلمه کد نامیده می شود. تعداد نمادها در هر کلمه رمز طول آن است. کدهای ۸ بیتی که برای نشان دادن شدت در اکثر آرایه های شدت دو بعدی استفاده می شوند حاوی بیت های بیشتری نسبت به نیاز برای نمایش شدت ها هستند.

۲. افزونگی مکانی و زمانی. از آنجا که پیکسل های اکثر آرایه های شدت دو بعدی از لحاظ مکانی با هم ارتباط دارند (یعنی هر پیکسل شبیه یا وابسته به پیکسل های همسایه است) ، اطلاعات بدون نیاز در نمایش پیکسل های همبسته تکرار می شوند. در یک دنباله ویدئویی ، پیکسل های مرتبط با زمان (یعنی پیکسل های مشابه یا وابسته به پیکسل در فریم های مجاور) نیز اطلاعات را تکراری می کنند.

۳. اطلاعات غیرمرتبط . بیشتر آرایه های شدت دو بعدی حاوی اطلاعاتی هستند که توسط سیستم بینایی انسان نادیده گرفته می شود و/یا به منظور استفاده از تصویر غیر ضروری است. به این معنا که از آن استفاده نمی شود زائد است.



a b c

شکل ۸.۱ رایانه تصاویر ۸ بیتی $256 * 256 * 8$ بیتی را با (الف) افزونگی کدگذاری ، (ب) افزونگی فضایی ، و (ج) اطلاعات نامربوط (هر یک برای نشان دادن یک افزونگی اصلی طراحی شده است ، اما ممکن است دیگران را نیز نشان دهد).

تصاویر کامپیوتری در شکلها نشان داده شده است. ۸.۱ (الف) تا (ج) هر یک از این افزونگی های اساسی را نشان دهید. همانطور که در سه بخش بعدی مشاهده می شود ، فشرده سازی زمانی حاصل می شود که یک یا چند افزونگی کاهش یا حذف شود.

افزونی کدگذاری

در فصل ۳، ما تکنیک هایی را برای افزایش تصویر با استفاده از روش هیستوگرام توسعه دادیم، با این فرض که مقادیر شدت یک تصویر مقادیر تصادفی است. در این بخش، ما از یک فرمول مشابه برای معرفی کدگذاری مطلوب اطلاعات استفاده خواهیم کرد. فرض کنید که یک متغیر تصادفی گسسته در فاصله $[0, L-1]$ برای تکرار استفاده می شود. از شدت یک تصویر $M * N$ هستید و هر r_k با احتمال رخ می دهد. $p_r(r_k)$ همانطور که در بخش ۳.۳ داریم،

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (8-3)$$

جایی که L تعداد مقادیر شدت است و n_k تعداد دفعاتی است که شدت k در تصویر ظاهر می شود. اگر تعداد بیت های مورد استفاده برای نمایش هر مقدار r_k $l(r_k)$ باشد، متوسط تعداد بیت های مورد نیاز برای نمایش هر پیکسل برابر است با

$$L_{avg} = \sum_{k=0}^{L-1} l(r_k) p_r(r_k) \quad (8-4)$$

به این معنا که میانگین طول کلمات کد اختصاص داده شده به مقادیر شدت مختلف با جمع بندی حاصل از تعداد بیت های مورد استفاده برای نشان دادن هر شدت و احتمال وقوع شدت بدست می آید. تعداد کل بیت های مورد نیاز برای نمایش یک تصویر $M * N$ MNL_{avg} است. اگر شدت ها با استفاده از یک کد طبیعی با طول ثابت m -bit نشان داده شود، سمت راست معادله (۸-۴) به m بیت کاهش می یابد. یعنی $L_{avg} = m$ وقتی m به جای $l(r_k)$ جایگزین می شود. ثابت m را می توان خارج از جمع بندی گرفت و تنها مجموع $p_r(r_k)$ را برای $0 \leq k \leq L-1$ باقی می گذارد که البته معادله ۱ است.

مثال ۸.۱: یک تصویر ساده از کدگذاری با طول متغیر.

تصویر ایجاد شده توسط کامپیوتر در شکل ۸.۱ (الف) دارای توزیع شدت نشان داده شده در ستون دوم جدول ۸.۱ است. اگر از یک کد باینری ۸ بیتی طبیعی (که در جدول ۸.۱ به عنوان کد ۱ نشان داده شده است) برای نشان دادن چهار شدت احتمالی آن استفاده شود، L_{avg} (میانگین تعداد بیت ها برای کد ۱) ۸ بیت است، زیرا $l(r_k) = 8$ بیت برای همه r_k از سوی دیگر، اگر از طرح تعیین شده به عنوان کد ۲ در جدول ۸.۱ استفاده شود، طول متوسط پیکسل های کدگذاری شده مطابق با معادله (۸-۴)، است.

$$L_{avg} = 0.25(2) + 0.47(1) + 0.03(3) = 1.81 \text{ bits}$$

تعداد کل بیت های مورد نیاز برای نمایش کل تصویر $MNL_{avg} = 256 \times 56 \times 1.81$ ، یا ۱۱۸،۶۲۱ است. از معادله (۸-۲) و (۸-۱)، فشرده سازی حاصله و افزونی نسبی مربوطه هستند

$$C = \frac{256 \times 256 \times 8}{118,621} = \frac{8}{1.81} \approx 4.42$$

$$R = 1 - \frac{1}{4.42} = 0.774$$

به ترتیب. بنابراین ، ۷۷.۴ درصد از داده ها در آرایه شدت ۸ بیتی ۲ بعدی اصلی اضافی هستند. فشردن سازی به دست آمده توسط کد ۲ ناشی از اختصاص بیت های کمتر به مقادیر شدت احتمالی بیشتر نسبت به مقادیر کمتر محتمل است. در کد^{۳۳} متغیر طول ، به ۲۱۲۸ (محتمل ترین شدت تصویر) کلمه کد ۱ بیتی ۱ [به طول ۱۲ = ۱] اختصاص داده می شود ، در حالی که ۲۲۵۵ (کمترین احتمال وقوع آن) مقدار ۳- را اختصاص می دهد. کلمه کد بیت ۰۰۱ [به طول ۳ = (۲۵۵) ۱۲]. توجه داشته باشید که بهترین کد طول ثابت که می توان به شدت تصویر در شکل ۸.۱ (a) اختصاص داد ، شمارش طبیعی ۲ بیتی است. دنباله {00,01,10,11} ، اما فشردن سازی حاصل فقط ۲۸ یا ۴:۱ است - حدود ۱۰ less کمتر از ۴:۱. فشردن سازی کد با طول متغیر. همانطور که مثال قبل نشان می دهد ، افزودن کدگذاری زمانی وجود دارد که کدهای اختصاص داده شده به مجموعه ای از رویدادها (مانند مقادیر شدت) از احتمالات رویدادها به طور کامل استفاده نکنند. افزودن برنامه نویسی تقریباً همیشه زمانی وجود دارد که شدت تصویر با استفاده از یک کد دوتایی طبیعی نشان داده شود. دلیل آن این است که اکثر تصاویر از اجسامی تشکیل شده اند که دارای شکل شناسی (شکل) و بازتاب منظم و تا حدی قابل پیش بینی هستند و نمونه گیری می شوند بنابراین اشیاء به تصویر کشیده بسیار بزرگتر از عناصر تصویر هستند. پیامد طبیعی این است که ،

جدول ۸.۱ نمونه ای از کدگذاری با طول متغیر.

r_k	$p_r(r_k)$	Code 1	$l_1(r_k)$	Code 2	$l_2(r_k)$
$r_{87} = 87$	0.25	01010111	8	01	2
$r_{128} = 128$	0.47	01010111	8	1	1
$r_{186} = 186$	0.25	01010111	8	000	3
$r_{255} = 255$	0.03	01010111	8	001	3
r_k for $k = 87, 128, 186, 255$	0	—	8	—	0

برای اکثر تصاویر ، شدت های خاصی بیشتر از سایرین محتمل است (یعنی هیتوگراف های اکثر تصاویر یکنواخت نیستند). یک کدگذاری باینری طبیعی تعداد یکسانی از بیت ها را به بیشترین و کمترین مقادیر محاسبه می کند و نمی تواند معادله (۸-۴) ، را به حداقل برساند. و منجر به افزودن برنامه نویسی می شود.

افزودن فضای و موقتی

مجموعه رایانه ای خطوط با شدت ثابت را در شکل ۸.۱ (ب) در نظر بگیرید. در آرایه شدت دو بعدی مربوطه:

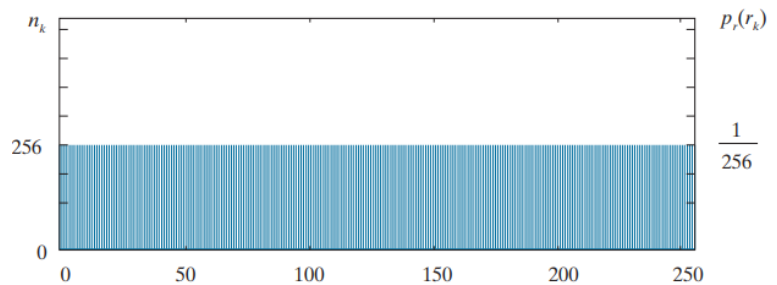
^{۳۳} یک کد دودویی طبیعی ، کدی است که در آن به هر رویداد یا قطعه ای از اطلاعات که باید کد شود (مانند مقدار شدت) ، یکی از کدهای ۲ متر از یک دنباله شمارش باینری m-bit اختصاص داده شود.

۱. همه ۲۵۶ شدت به همان اندازه محتمل است. همانطور که در شکل ۸.۲ نشان داده شده است ، هیستوگرام تصویر یکنواخت است.

۲. از آنجا که شدت هر خط به طور تصادفی انتخاب شده است ، پیکسل های آن در جهت عمودی از یکدیگر مستقل هستند.

۳. از آنجا که پیکسل های موجود در هر خط یکسان هستند ، در جهت افقی حداکثر همبستگی (کاملاً وابسته به یکدیگر) دارند.

اولین مشاهده به ما می گوید که تصویر شکل ۸.۱ (ب) (هنگامی که به عنوان یک آرایه معمولی با شدت ۸ بیت نمایش داده می شود) نمی تواند تنها با کدگذاری طول متغیر فشرده شود. بر خلاف تصویر شکل ۸.۱ (a) و مثال ۸.۱ ، که هیستوگرام آنها یکنواخت نبود ، یک کد ۸ بیتی با طول ثابت در این مورد معادله (۸-۴) را به حداقل می رساند. مشاهدات ۲ و ۳ یک افزونگی فضایی قابل توجه را نشان می دهد که می توان با نمایش تصویر در شکل ۸.۱ (b) به عنوان دنباله ای از جفت های طول اجرا حذف کرد ، جایی که هر جفت طول اجرا شروع یک شدت جدید و تعداد آنها را مشخص می کند. پیکسل های متوالی که آن شدت را دارند. یک نمایش مبتنی بر طول اجرا ، ۲ بعدی ، ۸ بیتی را فشرده می کند



شکل ۸.۲ هیستوگرام شدت تصویر در شکل ۸.۱ (ب) آرایه شدت $(۲۵۶ * ۲۵۶ * ۸)$ یا $[۲۵۶ + ۲۵۶] * ۸$ یا ۱۲۸:۱ هر خط ۲۵۶ پیکسلی نمای اصلی با یک مقدار شدت ۸ بیتی و طول ۲۵۶ در نمایش طول اجرا جایگزین می شود.

در اکثر تصاویر ، پیکسل ها از نظر مکانی (در X و Y) و در زمان (زمانی که تصویر بخشی از یک دنباله ویدئویی است) در ارتباط هستند. از آنجا که اکثر شدت پیکسل ها را می توان به طور منطقی از شدت های همسایه پیش بینی کرد ، اطلاعات منتقل شده توسط یک پیکسل تک کوچک اندک است. بیشتر سهم بصری آن مازاد بر این مفهوم است که می توان آن را از همسایگان خود استنباط کرد. برای کاهش افزونگی مرتبط با پیکسل های همبستگی مکانی و زمانی ، یک آرایه شدت دو بعدی باید به نمایشی موثر تر ، اما معمولاً "غیر بصری" تبدیل شود. به عنوان مثال ، می توان از طول اجرا یا تفاوت بین پیکسل های مجاور استفاده کرد. تبدیلات این نوع را نگاشت نامیده اند. گفته می شود که نقشه برداری برگشت پذیر است اگر پیکسل های آرایه شدت دو بعدی اصلی

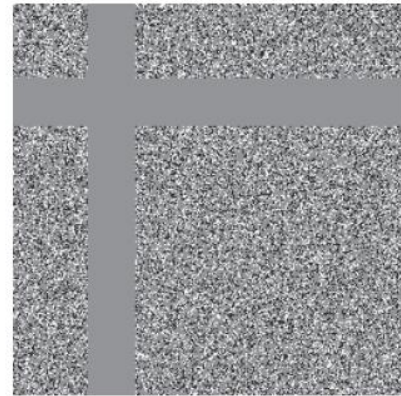
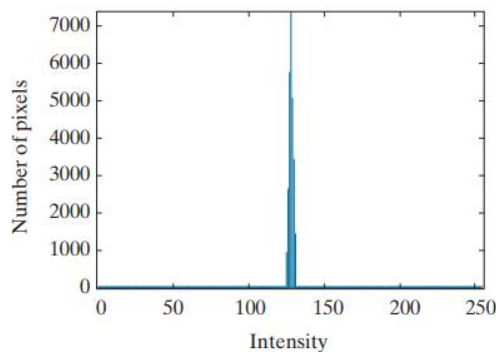
بدون خطا از مجموعه داده های تبدیل شده بازسازی شوند. در غیر این صورت ، گفته می شود که نقشه برگشت ناپذیر است.

اطلاعات غیر مرتب

یکی از ساده ترین روش های فشرده سازی مجموعه ای از داده ها حذف داده های اضافی از مجموعه است. در زمینه فشرده سازی تصویر دیجیتال ، اطلاعاتی که توسط سیستم بینایی انسان نادیده گرفته می شود یا به منظور استفاده از تصویر بیگانه است ، نامشخص برای حذف هستند. بنابراین ، تصویر کامپیوتری در شکل ۸.۱ (ج) ، زیرا به نظر می رسد یک میدان همگن خاکستری است ، می تواند تنها با شدت متوسط آن - یک مقدار ۸ بیتی - نشان داده شود. آرایه شدت $256 * 256 * 8$ بیت اصلی به یک بایت کاهش می یابد و فشرده سازی حاصل از آن (۲۵۶ * ۲۵۶ * ۸) یا ۶۵،۵۳۶: ۱ است. البته ، تصویر اصلی ۸ بیتی $256 * 256 * 8$ بیتی باید برای مشاهده و/یا تجزیه و تحلیل آن ایجاد شود ، اما در کیفیت بازسازی شده تصویر کاهش چندانی وجود نخواهد داشت یا اصلاً قابل درک نیست.

شکل ۸.۳ (الف) هیستوگرام تصویر را در شکل ۸.۱ (ج) نشان می دهد. توجه داشته باشید که چندین مقدار شدت (۱۲۵ تا ۱۳۱) در واقع وجود دارد. سیستم بینایی انسان این شدت ها را متوسط می کند ، فقط مقدار متوسط را درک می کند ، سپس تبدیلات کوچک در شدت را که در این مورد وجود دارد نادیده می گیرد. شکل ۸.۳ (ب) ، نسخه ای از تصویر با تصویر همسان با هیستوگرام در شکل ۸.۱ (ج) ، تبدیلات شدت را قابل مشاهده می کند و دو ناحیه با شدت ثابت قبلاً ناشناخته را نشان می دهد - یکی جهت عمودی و دیگری افقی. اگر تصویر شکل ۸.۱ (ج) تنها با مقدار متوسط آن نشان داده شود ، این ساختار "نامرئی" (یعنی مناطق با شدت ثابت) و تبدیلات شدت تصادفی اطراف آنها (اطلاعات حقیقی) از بین می رود. اینکه آیا این اطلاعات باید حفظ شوند یا خیر بستگی به برنامه دارد. اگر اطلاعات مهم است ، همانطور که ممکن است در برنامه های پزشکی مانند آرشیو اشعه ایکس دیجیتال باشد ، نباید حذف شود. در غیر این صورت ، اطلاعات اضافی هستند و می توان آنها را به دلیل تابع فشرده سازی حذف کرد.

ما این بخش را با ذکر این نکته خاتمه می دهیم که افزونگی مورد بررسی در اینجا با افزونگی های مورد بحث در دو بخش قبلی تفاوت اساسی دارد. حذف آن ممکن است زیرا خود اطلاعات برای پردازش بصری طبیعی و/یا استفاده مورد نظر از تصویر ضروری نیست. از آنجا که حذف آن منجر به از دست دادن اطلاعات کمی می شود ، حذف آن را معمولاً کواتنیزه می نامند. این اصطلاح با استفاده عادی از این کلمه مطابقت دارد ، که به طور کلی به معنای ترسیم طیف وسیعی از مقادیر ورودی به تعداد محدودی از مقادیر خروجی است (بخش ۲.۴ را ببینید). از آنجا که اطلاعات از بین می روند ، کمی سازی عملی غیر قابل برگشت است.



شکل ۸.۳ (الف) هیستوگرام تصویر در شکل ۸.۱ (ج) و (ب) هیستوگرام نسخه ای از تصویر را برابر کرده است

اندازه گیری اطلاعات تصویر

در بخشهای قبلی، چندین روش برای کاهش میزان داده های مورد استفاده برای نمایش یک تصویر معرفی کردیم. سوالی که به طور طبیعی مطرح می شود این است: در واقع چند بیت برای نمایش اطلاعات در تصویر مورد نیاز است؟ یعنی آیا مقدار کمی داده وجود دارد که برای توصیف تصویر بدون از دست دادن اطلاعات کافی باشد؟ نظریه اطلاعات چارچوب ریاضی را برای پاسخ به این سوالات و سوالات مربوطه فراهم می کند. فرض اساسی آن این است که تولید اطلاعات را می توان به عنوان یک فرایند احتمالی مدل سازی کرد که می تواند به گونه ای اندازه گیری شود که با شهود موافق باشد. مطابق با این فرض، یک رویداد تصادفی E با احتمال $P(E)$ گفته می شود که حاوی باشد

برای مرور مختصر اطلاعات و نظریه احتمالات به وب سایت کتاب مراجعه کنید.

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)} = -\log P(E) \quad (8-5)$$

واحدهای اطلاعات اگر $P(E) = 1$ (یعنی همیشه رویداد رخ می دهد)، $I(E) = 0$ و هیچ اطلاعاتی به آن نسبت داده نمی شود. از آنجا که هیچ عدم قطعیتی با رویداد مرتبط نیست، هیچ اطلاعاتی با اطلاع از وقوع این رویداد منتقل نمی شود [اگر $P(E) = 1$ همیشه اتفاق می افتد]. پایه لگاریتم در معادله (۸-۵) واحد مورد استفاده برای اندازه گیری اطلاعات را تعیین می کند. اگر از لگاریتم m استفاده شود، اندازه گیری در واحدهای m -ary گفته می شود. اگر پایه ۲ انتخاب شود، واحد اطلاعات بیت است. توجه داشته باشید که اگر $P(E) = \frac{1}{2}$ ، $I(E) = \log_2 2$ یا ۱ بیت است. یعنی ۱ بیت مقدار اطلاعاتی است که در صورت وقوع یکی از دو رویداد محتمل به همان اندازه، منتقل می شود. یک مثال ساده این است که یک سکه را بریزید و نتیجه را اعلام کنید. با توجه به منبع

رویدادهای تصادفی مستقل از مجموعه ای گسسته از رویدادهای احتمالی $\{a_1, a_1, \dots, a_I\}$ با احتمالات مرتبط $\{P(a_1), P(a_1), \dots, P(a_I)\}$ ، میانگین اطلاعات در هر خروجی منبع، آنتروپی منبع نامیده می شود

$$H = -\sum_{j=1}^J P(a_j) \log P(a_j) \quad (8-6)$$

به a_j در این معادله نمادهای منبع گفته می شود. از آنجا که آنها از نظر آماری مستقل نیستند، خود منبع را منبع حافظه صفر می نامند. اگر تصویری خروجی منبع "منبع شدت" حافظه صفر موهومی در نظر گرفته شود، می توان از هیستوگرام تصویر مشاهده شده برای تخمین احتمال نماد منبع استفاده کرد. سپس، آنتروپی منبع شدت تبدیل می شود

$$\tilde{H} = -\sum_{k=0}^{L-1} p_r(r_k) \log_2 p_r(r_k) \quad (8-7)$$

معادله (۸-۶) برای منابع حافظه صفر با علامت منبع L است. در معادله (۸-۷) از برآورد احتمالی برای مقادیر شدت $L-1$ در یک تصویر استفاده می شود

جایی که متغیرهای L ، r_k و $p_r(r_k)$ همانطور که قبلاً و در بخش ۳.۳ تعریف شده است. زیرا لگاریتم پایه ۲ استفاده می شود، معادله (۸-۷) متوسط اطلاعات در هر شدت خارج از منبع شدت موهومی در بیت است. امکان کدگذاری شدت وجود ندارد مقادیر منبع موهومی (و در نتیجه تصویر نمونه) با کمتر از \tilde{H} بیت/پیکسل

مثال ۸.۲: برآورد آنتروپی تصویر.

آنتروپی تصویر در شکل ۸.۱ (الف) را می توان با جایگزینی احتمالات شدت از جدول ۸.۱ به معادله (۸-۷) برآورد کرد:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= -[0.25 \log_2 0.25 + 0.47 \log_2 0.47 + 0.25 \log_2 0.25 + 0.03 \log_2 0.03] \\ &= -[0.25(-2) + 0.47(-1.09) + 0.25(-2) + 0.03(-5.06)] \\ &\approx 1.6614 \text{ bits/pixel} \end{aligned}$$

به روش مشابه، آنتروپی تصاویر در شکل ۸.۱ (b) و (c) را می توان ۸ بیت/پیکسل نشان داد و به ترتیب ۱.۵۶۶ بیت/پیکسل. توجه داشته باشید که تصویر شکل ۸.۱ (الف) دارای بیشترین اطلاعات بصری است، اما تقریباً کمترین آنتروپی محاسبه شده را دارد - ۱.۶۶ بیت/پیکسل. تصویر موجود در شکل ۸.۱ (ب) تقریباً پنج برابر آنتروپی تصویر را در (الف) دارد، اما به نظر می رسد اطلاعات بصری تقریباً (یا کمتر) داشته باشد. تصویر شکل ۸.۱ (ج)، که به نظر می رسد اطلاعات کمی دارد یا هیچ اطلاعاتی ندارد، تقریباً آنتروپی مشابه تصویر (الف) را دارد. نتیجه آشکار این است که میزان آنتروپی و در نتیجه اطلاعات موجود در یک تصویر، دور از شهود است.

اولین قضیه شانون

به یاد بیاورید که کد متغیر طول در مثال ۸.۱ توانست با استفاده از ۱.۸۱ بیت/پیکسل ، شدت تصویر را در شکل ۸.۱ (الف) نشان دهد. اگرچه این مقدار از برآورد آنتروپی ۱.۶۶۱۴ بیت/پیکسل از مثال ۸.۲ بیشتر است ، اولین نظریه شانون ، که قضیه کدگذاری بدون نویز نامیده می شود (شانون [۱۹۴۸]) ، به ما اطمینان می دهد که تصویر شکل ۸.۱ (الف) را می توان نشان داد. با تنها ۱.۶۶۱۴ بیت/پیکسل. برای اثبات آن به صورت کلی ، شانون به نمایندگی از گروه های نمادهای منبع متوالی با یک کلمه رمز واحد (و نه یک کلمه کد در نماد منبع) نگاه کرد و نشان داد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{L_{avg,n}}{n} \right] = H \quad (8-8)$$

جایی که L_{avg} ، میانگین تعداد نمادهای کد مورد نیاز برای نشان دادن همه گروه های n -سمبل است. در اثبات ، او نهمین منبع یک منبع حافظه صفر را منبع فرضی تعریف کرد که با استفاده از نمادهای منبع اصلی ، بلوک های نماد n تولید می کند و با استفاده از معادله (۸-۴) ، L_{avg} ، n محاسبه می کند. به کلمات رمز استفاده شده برای نشان دادن بلوک های n نماد n معادله (۸-۸) به ما می گوید که L_{avg} ، n می تواند ساخته شود. خودسرانه با رمزگذاری پسوندهای نامحدود طولانی منبع تک نمادی به H نزدیک می شود. یعنی می توان خروجی یک منبع حافظه صفر را با میانگین واحد اطلاعات H در نماد منبع نشان داد.

اگر اکنون به این ایده برگردیم که یک تصویر "نمونه" منبع شدت تولید کننده آن است ، یک بلوک از نمادهای منبع مربوط به گروهی از n پیکسل های مجاور است. برای ایجاد یک کد با طول متغیر برای بلوک های n پیکسل ، فرکانس های نسبی بلوک ها باید محاسبه شود. اما امتداد نهم یک منبع شدت فرضی با ۲۵۶ مقدار شدت دارای ۲۵۶ بلوک n پیکسل احتمالی است. حتی در حالت ساده $n = ۲$ ، هیستوگرام ۶۵،۵۳۶ عنصر و حداکثر ۶۵،۵۳۶ کلمه کد متغیر باید ایجاد شود. برای $n = ۳$ ، به تعداد ۱۶،۷۷۷،۲۱۶ کلمه رمز نیاز است. بنابراین حتی برای مقادیر کوچک n ، پیچیدگی محاسباتی مفید بودن روش برنامه نویسی فرمت را در عمل محدود می کند.

در نهایت ، ما توجه داریم که اگرچه معادله (۸-۷) محدوده پایینی را بر روی فشردگی ارائه می دهد که می توان با کدگذاری مستقیم پیکسل های آماری مستقل به دست آورد ، هنگامی که پیکسل های یک تصویر با هم ارتباط دارند ، خراب می شود. بلوک های پیکسل های همبسته را می توان با بیت های متوسط کمتر در هر پیکسل نسبت به معادله پیش بینی کرد. به طور معمول به جای استفاده از برنامه های افزودنی منبع ، توصیف کننده های کمتر همبسته (مانند طول های شدت) بدون افزودنی انتخاب و کدگذاری می شوند. این روشی بود که برای فشردگی سازی شکل ۸.۱ (ب) در بخش افزودنی مکانی و زمانی استفاده می شد. هنگامی که خروجی یک منبع

^{۳۴} خروجی افزونه n یک n -tuple از نمادها از منبع تک نمادی است. این یک متغیر تصادفی بلوک در نظر گرفته شد که در آن احتمال هر n -tuple حاصل احتمالات نمادهای جداگانه آن است. آنتروپی فرمت نهم n برابر آنتروپی منبع تک نمادی است که از آن مشتق شده است.

اطلاعات به تعداد نامحدودی از خروجی های قبلی بستگی دارد ، منبع را منبع مارکوف یا منبع حافظه نامیده می شود.

شاخص های راستی

پیشتر اشاره شد که حذف اطلاعات "نامربوط بصری" شامل از دست رفتن اطلاعات تصویر حقیقی یا کمی است. از آنجا که اطلاعات از بین می رود ، ابزاری برای تعیین کمی از ماهیت ضرر مورد نیاز است. از دو نوع معیار می توان برای چنین ارزیابی استفاده کرد: (۱) شاخص های راستی عینی و (۲) شاخص های راستی ذهنی.

هنگامی که از دست دادن اطلاعات را می توان به عنوان یک تابع ریاضی از ورودی و خروجی یک فرآیند فشرده سازی بیان کرد ، گفته می شود که بر اساس یک معیار برابری عینی است. یک مثال خطای میانگین مربع (rms) بین دو تصویر است. بگذارید $f(x, y)$ یک تصویر ورودی باشد و $\hat{f}(x, y)$ تقریبی از $f(x, y)$ باشد که از فشرده سازی و متعاقباً فشرده سازی ورودی حاصل می شود. برای هر مقدار x و y ، خطای $e(x, y)$ بین $f(x, y)$ و $\hat{f}(x, y)$ برابر است

$$e(x, y) = \hat{f}(x, y) - f(x, y) \quad (8-9)$$

به طوری که خطای کل بین دو تصویر برابر است

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\hat{f}(x, y) - f(x, y)]$$

جایی که تصاویر دارای اندازه $M * N$ هستند. خطای میانگین مربع ریشه ، e_{rms} ، بین $f(x, y)$ و $\hat{f}(x, y)$ (ریشه مربع خطای مربعی است که به طور متوسط بر روی آرایه $M * N$ قرار دارد. ، یا

$$e_{rms} = \left[\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\hat{f}(x, y) - f(x, y)]^2 \right]^{1/2} \quad (8-10)$$

اگر $\hat{f}(x, y)$ در نظر گرفته شود [با بازآرایی ساده شرایط در معادله (۸-۹)] مجموع تصویر اصلی $f(x, y)$ و سیگنال خطا یا "نویز" $e(x, y)$ ، میانگین مربع نسبت سیگنال به نویز تصویر خروجی ، SNR_{rms} را می توان در بخش ۵.۸ تعریف کرد:

$$SNR_{rms} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\hat{f}(x, y) - f(x, y)]^2} \quad (8-11)$$

مقدار rms نسبت سیگنال به نویز ، که SNR_{rms} مشخص شده است ، با گرفتن ریشه مربع معادله (۸-۱۱) بدست می آید.

در حالی که معیارهای تطابق عینی راهی ساده و مناسب برای ارزیابی از دست دادن اطلاعات ارائه می دهند ، تصاویر فشرده شده اغلب در نهایت توسط انسان مشاهده می شوند. بنابراین ، اندازه گیری کیفیت تصویر با ارزیابی

ذهنی افراد اغلب مناسب تر است. این را می توان با ارائه یک تصویر فشرده به مقطع بینندگان و میانگین ارزیابی های آنها انجام داد. ارزیابی ها ممکن است با استفاده از an انجام شود. مقیاس رتبه بندی مطلق ، یا با استفاده از مقایسه های جانبی $f(x, y)$ و $\hat{f}(x, y)$. جدول ۸.۲ یک مقیاس رتبه بندی مطلق ممکن را نشان می دهد. مقایسه های جانبی را می توان با مقیاسی مانند $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ برای نشان دادن ارزیابی های ذهنی انجام داد. خیلی بدتر ، بدتر ، کمی بدتر ، همان ، کمی بهتر ، بهتر ، بسیار بهتر ، به ترتیب. در هر دو صورت ، ارزیابی ها بر اساس معیارهای خلوص ذهنی انجام می شود.

جدول ۸.۲ مقیاس رتبه بندی سازمان مطالعه تخصیصات تلویزیونی. (فرندندال و بهرند).

ارزش	رتبه بندی	شرح
1	عالی	تصویری با کیفیت فوق العاده بالا ، تا آنجا که می خواهید.
2	خوب	تصویری با کیفیت بالا ، تماشای لذت بخشی را ارائه می دهد. مداخله قابل اعتراض نیست
3	قابل قبول	تصویری با کیفیت قابل قبول دخالت قابل اعتراض نیست
4	حاشیه ای	تصویری با کیفیت پایین ؛ ای کاش می توانستید آن را بهبود بخشید دخالت تا حدی قابل اعتراض است
5	پایین تر	تصویر بسیار ضعیفی است ، اما می توانید آن را تماشا کنید. قطعاً مداخله قابل اعتراض وجود دارد.
6	غیر قابل استفاده	تصویری آنقدر بد که نمی توانید آن را تماشا کنید.

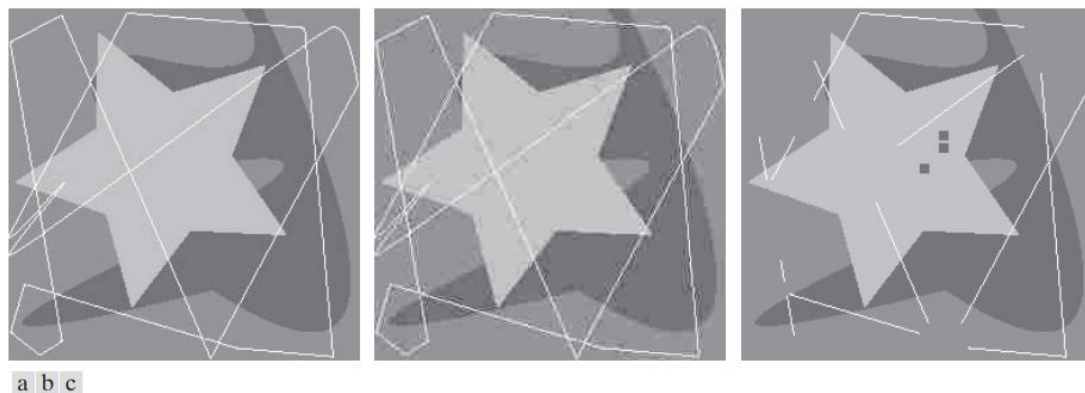
مثال ۸.۳: مقایسه کیفیت تصویر.

شکل ۸.۴ سه تقریب متفاوت از تصویر را در شکل ۸.۱ (الف) نشان می دهد. با استفاده از معادله (۸-۱۰) با شکل ۸.۱ (a) به صورت $f(x, y)$ و شکل ۸.۴ (a) تا $\hat{f}(x, y)$ (c)، خطاهای rms محاسبه شده ۵.۱۷ ، ۱۵.۶۷ ، و ۱۴.۱۷ سطح شدت به ترتیب. از نظر خطای rms (یک معیار شفافیت عینی) ، تصاویر به ترتیب کاهش کیفیت به ترتیب (a) ، (c) ، (b) رتبه بندی می شوند. با این حال ، ارزیابی ذهنی تصاویر با استفاده از جدول ۸.۲ ، ممکن است دارای رتبه عالی برای (a) ، رتبه حاشیه ای برای (b) ، و پایین تر یا رتبه غیر قابل استفاده برای (ج). بنابراین ، با استفاده از معیارهای خلوص ذهنی ، (b) قبل از (c) رتبه بندی می شود.

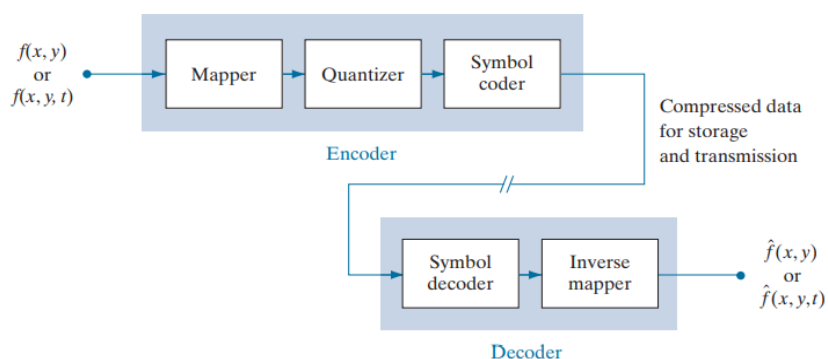
مدل های فشرده سازی تصویر

همانطور که در شکل ۸.۵ نشان داده شده است ، یک سیستم فشرده سازی تصویر از دو جزء عملکردی گسسته تشکیل شده است: یک رمزگذار و یک رمزگشا. رمزگذار فشرده سازی را انجام می دهد و رمزگشای عمل مکمل

رفع فشار را انجام می دهد. هر دو عملیات را می توان در نرم افزار انجام داد ، همانطور که در مرورگرهای وب و بسیاری از برنامه های تجاری ویرایش تصویر ، یا در ترکیب سخت افزار و نرم افزار ، مانند دستگاه های پخش کننده DVD تجاری انجام می شود. کدک دستگاه یا برنامه ای است که هم قادر به رمزگذاری و هم رمزگشایی است.



شکل ۸.۴ سه تقریب از تصویر در شکل ۸.۱ (الف).



شکل ۸.۵ بلوک دیاگرام تابع یک سیستم فشرده سازی کلی تصویر.

در اینجا ، نماد (x, p) برای نشان دادن $f(x, y)$ و $f(x, y, t)$ استفاده می شود.

تصویر ورودی $f(x, p)$ به رمزگذار وارد می شود ، که نمای فشرده ای از ورودی ایجاد می کند. این نمایش برای استفاده بعدی ذخیره می شود ، یا برای ذخیره و استفاده در یک مکان دور منتقل می شود. هنگامی که نمای فشرده به رمزگشای مکمل آن ارائه می شود ، یک تصویر خروجی بازسازی شده $f^{\wedge}(x, p)$ ایجاد می شود. در برنامه های تصویر ثابت ، ورودی رمزگذاری شده و خروجی رمزگشا به ترتیب $f(x, y)$ و $f^{\wedge}(x, y)$ است. در برنامه های ویدئویی ، آنها $f(x, y, t)$ و $f^{\wedge}(x, y, t)$ هستند ، که در آن پارامتر گسسته t زمان مشخص می کند. به طور کلی ، $f^{\wedge}(x, p)$ ممکن است یک کپی دقیق $f(x, p)$ باشد یا نباشد. اگر چنین باشد ، سیستم فشرده سازی بدون خطا ، بدون ضرر یا حفظ اطلاعات نامیده می شود. در غیر اینصورت ، تصویر خروجی بازسازی شده مخدوش می شود و سیستم فشرده سازی از دست رفته نامیده می شود.

فرایند کدگذاری یا فشرده سازی

رمزگذار شکل ۸.۵ برای حذف اضافات توصیف شده در بخشهای قبلی از طریق یک سری سه عملیات مستقل طراحی شده است. در مرحله اول فرایند کدگذاری، نقشه نگار $f(x, p)$ را به یک قالب (معمولاً غیر بصری) تبدیل می کند که برای کاهش افزونگی مکانی و زمانی طراحی شده است. این عملیات به طور کلی برگشت پذیر است و ممکن است مستقیماً میزان داده های مورد نیاز برای نمایش تصویر را کاهش دهد. برنامه نویسی طول اجرا نمونه ای از نگاشت است که به طور معمول فشرده سازی را در اولین مرحله از فرایند کدگذاری ایجاد می کند. نگاشت تصویر در مجموعه ای از ضرایب دگرگونی کمتر همبسته (به بخش ۸.۹ مراجعه کنید) نمونه ای از حالت مخالف است (برای دستیابی به فشرده سازی، ضرایب باید بیشتر پردازش شوند). در برنامه های ویدئویی، نقشه بردار از فریم های ویدئویی قبلی (و در برخی موارد آینده) برای تسهیل حذف افزونگی زمانی استفاده می کند.

کوانتیزر در شکل ۸.۵ دقت خروجی نقشه ساز را مطابق با معیار تثبیت از پیش تعیین شده کاهش می دهد. هدف این است که اطلاعات غیرمرتبط را از نمای فشرده دور نگه داریم. همانطور که قبلاً ذکر شد، این عملیات برگشت ناپذیر است. هنگامی که فشرده سازی بدون خطا مورد نیاز است، باید حذف شود. در برنامه های ویدئویی، نرخ بیت خروجی رمزگذاری شده اغلب اندازه گیری می شود (بر حسب بیت/ثانیه) و برای تنظیم تابع کوانتیزر استفاده می شود تا میانگین نرخ خروجی از پیش تعیین شده حفظ شود. بنابراین، کیفیت بصری خروجی می تواند از قاب به فریم دیگر به عنوان تابعی از محتوای تصویر متفاوت باشد. در مرحله سوم و نهایی فرایند کدگذاری، رمزگذار نماد شکل ۸.۵ یک کد با طول ثابت یا طول متغیر برای نشان دادن خروجی کوانتیزر تولید می کند و خروجی را مطابق کد ترسیم می کند. در بسیاری از موارد از یک کد با طول متغیر استفاده می شود. کوتاهترین کلمات کد به بیشترین مقادیر خروجی کوانتیزر اختصاص داده می شود، بنابراین افزونگی برنامه نویسی را به حداقل می رساند. این عملیات برگشت پذیر است. پس از اتمام، تصویر ورودی برای حذف هر یک از سه افزونگی توضیح داده شده در بخشهای قبلی پردازش شده است.

فرآیند رمزگشایی یا فشرده سازی

رمزگشای شکل ۸.۵ تنها شامل دو جزء است: رمزگشای نماد و نقشه بردار معکوس. آنها به ترتیب معکوس عملیات معکوس رمزگذار و نقشه ساز نماد رمزگذار را انجام می دهند. از آنجا که کمی سازی منجر به از دست رفتن اطلاعات برگشت ناپذیر می شود، یک بلوک کوانتیزر معکوس در مدل رمزگشایی عمومی گنجانده نشده است. در برنامه های ویدئویی، فریم های خروجی رمزگشایی شده در یک ذخیره فریم داخلی نگهداری می شوند (نشان داده نمی شود) و برای قرار دادن مجدد افزونگی زمانی که در رمزگذار حذف شده است، استفاده می شود.

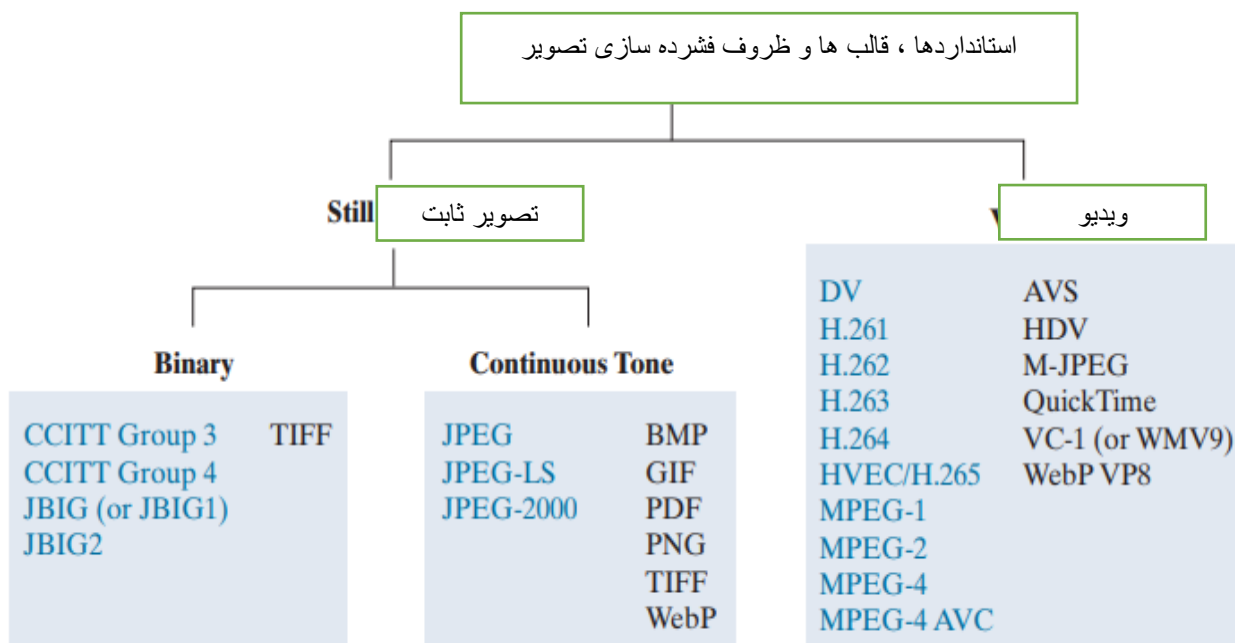
قالب های تصویر ، محتویات و استانداردهای فشرده سازی

در زمینه تصویربرداری دیجیتال ، فرمت فایل تصویری یک روش استاندارد برای سازماندهی و ذخیره داده های تصویر است. نحوه چیدمان داده ها و نوع فشرده سازی (در صورت وجود) که استفاده می شود را مشخص می کند. یک محفظه تصویر شبیه یک قالب فایل است ، اما انواع مختلفی از داده های تصویر را در بر می گیرد. از طرف دیگر استانداردهای فشرده سازی تصویر ، روش هایی را برای فشرده سازی و فشرده سازی تصاویر - یعنی کاهش میزان داده های مورد نیاز برای نمایش یک تصویر - تعریف می کند. این استانداردها زیربنای پذیرش گسترده فناوری فشرده سازی تصویر است.

شکل ۸.۶ مهمترین استانداردهای فشرده سازی تصویر ، قالبهای فایل و ظروف مورد استفاده امروزه را که بر اساس نوع تصویر مورد استفاده گروه بندی شده اند ، فهرست می کند. مدخل های آبی رنگ دارای استانداردهای بین المللی هستند که توسط سازمان استاندارد بین المللی (ISO) ، کمیسیون بین المللی الکتروتکنیک (IEC) و/یا اتحادیه بین المللی مخابرات (ITU-T)-سازمان ملل متحد (سازمان ملل متحد) که زمانی نامیده می شد ، مجازات شده است. کمیته مشورتی تلفن و تلگراف بین المللی (CCITT). دو استاندارد فشرده سازی ویدیو ، ۱-VC توسط انجمن مهندسان تصاویر و تلویزیون (SMPTE) و AVS توسط وزارت اطلاعات چین (MII) ، نیز گنجانده شده است. توجه داشته باشید که آنها با رنگ مشکی نشان داده شده اند ، که در شکل ۸.۶ برای نشان دادن مطالبی استفاده می شود که توسط سازمان استاندارد بین المللی تحریم نشده اند.

جداول ۸.۳ تا ۸.۵ استانداردها ، قالب ها و ظروف ذکر شده در شکل ۸.۶ را خلاصه می کند. سازمان های مسئول ، برنامه های کاربردی هدفمند و روش های فشرده سازی کلیدی شناسایی می شوند. روشهای فشرده سازی خود موضوع بخشهای ۸.۲ تا ۸.۱۱ هستند ، که در آن روشهای اصلی فشرده سازی بدون ضرر و بدون خطا که امروزه استفاده می شود را شرح خواهیم داد.

تمرکز این بخشها بر روی روشهایی است که در استانداردهای اصلی دوتایی ، با وضوح تصویر ثابت و فشرده سازی ویدیویی مفید بوده است. خود استانداردها برای نشان دادن روشهای ارائه شده استفاده می شوند. در جداول ۸.۳ تا ۸.۵ ، ارجاعات پیش رو به بخشهای مربوطه که روشهای فشرده سازی در آنها توضیح داده شده است ، در داخل پرانتز قرار گرفته است.



شکل ۸.۶ برخی از استانداردهای رایج فشرده سازی تصویر ، قالب های فایل و ظروف. نوشته های تحریم بین المللی با رنگ آبی نشان داده شده است. بقیه سیاه هستند

جدول ۸.۳ استانداردهای فشرده سازی تصویر بین المللی تحریم شده است. اعداد داخل پرانتز به بخشهای این فصل اشاره می کنند

نام	سازمان	شرح
<i>Bi-Level Still Images</i>		
CCITT Group 3	ITU-T	به عنوان یک روش فاکس (FAX) برای انتقال اسناد باینری روی خطوط تلفن طراحی شده است. پشتیبانی از کدگذاری ۱-D و ۲ [۸, ۶] و هافمن [۸, ۲]
CCITT Group 4	ITU-T	یک نسخه ساده و ساده از استاندارد گروه ۳ CCITT فقط از برنامه نویسی دو بعدی استفاده می کند.
JBIG or JBIG1	ISO/IEC/ ITU-T	استاندارد گروهی از متخصصان تصویر مشترک در دو سطح برای فشرده سازی پیشرونده و بدون ضرر تصاویر دو سطح. تصاویر با صدای پیوسته تا ۶ بیت/پیکسل را می توان بر اساس سطح بیت کدگذاری کرد [۸, ۸]. از کدگذاری حساس به زمینه [۸, ۴] استفاده می شود و یک نسخه اولیه با وضوح پایین تصویر می تواند به تدریج با داده های فشرده اضافی افزایش یابد.
JBIG2	ISO/IEC/ ITU-T	ادامه JBIG1 برای تصاویر دو سطح در برنامه های رومیزی ، اینترنت و FAX. روش فشرده سازی مورد استفاده مبتنی بر محتوا است ، با روشهای مبتنی بر فرهنگ لغت [۸, ۷] برای متن و مناطق نیم تن ، و هافمن [۸, ۲] یا کدگذاری حسابی [۸, ۴] برای سایر محتوای تصویر. می تواند بدون ضرر یا بدون ضرر باشد.
تصاویر ثابت با تن پیوسته		
JPEG	ISO/IEC/ ITU-T	استاندارد گروه مشترک متخصصان عکاسی برای تصاویر با کیفیت عکاسی. سیستم برنامه نویسی پایه زیان آور آن (که اغلب اجرا می شود) از تبدیل های کسینوس گسسته (DCT) بر روی بلوک های تصویر [۸, ۹] ، هافمن [۸, ۲] ، و طول اجرا [۸, ۶] کدگذاری استفاده می کند. این یکی از رایج ترین روش ها برای فشرده سازی تصاویر در اینترنت است.
JPEG-LS	ISO/IEC/ ITU-T	استانداردی بدون ضرر تا تقریباً بدون اتلاف برای تصاویر با تن پیوسته بر اساس پیش بینی سازگار [۸, ۱۰] ، مدل سازی زمینه [۸, ۴] و کدگذاری گولمب [۸, ۳]
JPEG- 2000	ISO/IEC/ ITU-T	پیگیری JPEG برای افزایش فشرده سازی تصاویر با کیفیت عکاسی. از کدگذاری حسابی [۸, ۴] و تبدیل موجک گسسته [۸, ۱۱] (DWT) استفاده می شود. فشرده سازی می تواند بدون ضرر یا بدون اتلاف باشد.

جدول ۸.۴ استانداردهای بین المللی فشرده سازی ویدیو را مجاز می داند. اعداد داخل پرانتز به بخشهای این فصل اشاره می کنند.

نام	سازمان	شرح
DV	IEC	ویدئوی دیجیتال استاندارد ویدئویی متناسب با برنامه های کاربردی و تجهیزات تولید ویدئویی نیمه حرفه ای ، مانند جمع آوری اخبار الکترونیکی و فیلمبرداری. فریم ها به طور مستقل برای ویرایش بدون عارضه با استفاده از رویکرد مبتنی بر DCT [۸,۹] مشابه JPEG فشرده می شوند.
H.261	ITU-T	یک استاندارد ویدئو کنفرانس دو طرفه برای خطوط ISDN (خدمات دیجیتال خدمات یکپارچه). از تصاویر با وضوح ۳۵۲ * ۲۸۸ و ۱۷۶ * ۱۴۴ بدون درهم تنیده پشتیبانی می کند که به ترتیب CIF (قالب متوسط متوسط) و QCIF (Quarter CIF) نامیده می شوند. از روش فشرده سازی مبتنی بر [۸,۹] DCT مشابه JPEG استفاده می شود ، با پیش بینی قاب به قاب [۸,۱۰] برای کاهش افزونگی زمانی متفاوت است. یک تکنیک مبتنی بر بلوک برای جبران حرکت بین فریم ها استفاده می شود.
H.262	ITU-T	MPEG-۲ را در زیر مشاهده کنید.
H.263	ITU-T	نسخه پیشرفته H.۲۶۱ برای مودم های معمولی تلفن (یعنی ۲۸,۸ کیلوبایت بر ثانیه) با وضوح بیشتر SQCIF : (Sub-Quarter CIF ۱۲۸ ۹۶ *)، ۵۷۶ * ۷۰۴ CIF () و ۱۶۰ CIF ()
H.264	ITU-T	افزونه H.۲۶۳ - H.۲۶۱ برای ویدئو کنفرانس ، پخش و پخش تلویزیون. این برنامه از تفاوت های پیش بینی در فریم ها [۸,۱۰] ، تغییرات عدد صحیح اندازه بلوک متغیر) به جای (DCT و کدگذاری حسابی سازگار با زمینه [۸,۴] پشتیبانی می کند.
H.265 MPEG-H HEVC	ISO/IEC ITU-T	برنامه نویسی ویدیویی با کارایی بالا. (HVEC) افزونه H.۲۶۴ که شامل پشتیبانی از اندازه بلوک های بزرگ تا ۶۴ * ۶۴ و حالت های پیش بینی درون فریم اضافی است که هر دو در برنامه های ویدیویی ۴K مفید هستند
MPEG-1	ISO/IEC	استاندارد گروه تخصصی فیلم های متحرک برای برنامه های CD-ROM با ویدئوهای غیر مهم تا حداکثر ۱,۵ مگابایت بر ثانیه. شبیه H.۲۶۱ است ، اما پیش بینی قاب می تواند بر اساس قاب قبلی ، قاب بعدی یا درون یابی هر دو باشد. تقریباً توسط همه رایانه ها و دستگاه های پخش DVD پشتیبانی می شود.
MPEG-2	ISO/IEC	فرمت MPEG-۱ برای DVD ها با سرعت انتقال حداکثر تا ۱۵ مگابایت بر ثانیه طراحی شده است. پشتیبانی از ویدئو و HDTV درهم تنیده. این موفق ترین استاندارد ویدیویی تا به امروز است.
MPEG-4	ISO/IEC	افزونه MPEG-۲ که اندازه بلوک های متغیر و تفاوت پیش بینی [۸,۱۰] را در فریم پشتیبانی می کند
MPEG-4 AVC	ISO/IEC	MPEG-۴ قسمت ۱۰ برنامه نویسی پیشرفته ویدیویی. (AVC) مشابه H.۲۶۴

۸.۲ کدگذاری هافمن

یکی از رایج ترین تکنیک ها برای حذف افزونگی برنامه نویسی به خاطر هافمن است (هافمن [۱۹۵۲]). هنگام کدگذاری نمادهای منبع اطلاعات به صورت جداگانه ، کدگذاری هافمن کوچکترین تعداد ممکن از نمادهای کد را در هر نماد منبع ارائه می دهد. از نظر اولین قضیه شانون (بخش ۸.۱ را ببینید) ، کد به دست آمده برای مقدار ثابت n مطلوب است ، مشروط به این که نمادهای منبع یکی یکی کدگذاری شوند. در عمل ، نمادهای منبع ممکن است شدت یک تصویر یا خروجی عملیات نقشه برداری شدت (تفاوت پیکسل ، طول اجرا و غیره) باشد. با استناد به جداول ۸.۳-۸.۵ ، کدهای هافمن در استفاده می شود

• CCITT

• JBIG۲

• JPEG

• MPEG-۱، ۲، ۴

• H.۲۶۱، H.۲۶۲

• H.۲۶۳، H.۲۶۴

و سایر استانداردهای فشرده سازی

جدول ۸.۵ استانداردهای متداول فشرده سازی تصویر و ویدئو ، فرمت های فایل و ظروف موجود در جداول ۸.۳ و ۸.۴. اعداد داخل پرانتز به بخشهای این فصل اشاره می کنند.