سلام!

۱. لطفاً قسمت درس این جزوهٔ خلاصه را خیلی خیلی سریع نخوانید! (مثلاً حداکثر در یکساعت).

۲. لطفاً تستهای این جزوهٔ خلاصه را موشکافانه و با دقت بخوانید! (یا تستی را حل نکنید، یا اگر حل می‌کنید، با تمام وجود! درکش کنید).

۳. به قسمتهایی که با تیترِ : «نکته بسیار مهم» و «اشتباهات رایج» مشخص کرده‌ام، بسیار دقت کنید (حتی با وجودیکه بسیاری از عزیزان از این نکات آگاهند، باز هم در جلسه کنکور، ...). تنها راه حل این مشکل، تست زدن است.

۴. دنبال ابداع روشهای تستی جدید نباشید! تنها رهیافتهای شما برای حل تست، عبارتند از :

درک کامل تئوری + حل مثالهای متعدد + مرور آموخته‌ها

۵ اکیداً توصیه می‌کنم تستهای ۵ سال گذشته را چندین مرتبه مرور کنید.

با توجه به فرصت بسیار اندکی که برای تهیهٔ این جزوه در اختیار داشتیم، احتمال بروز اشتباهات چاپی در آن وجود دارد. سپاسگزار خواهم شد اگر از طریق ایمیل و ... ، این خطاهای احتمالی را گوشزد کنید.

امیدوارم به همهٔ آرزوهای پاکتان برسید ...

ارادتمند شما، مصطفی تقوی کنی

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: برق	درس: تجزیه و تحلیل سیستمها						
مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع	نسبت
	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	۵ سال	از کل
سیگنالها	2	1	1	0	1	5	7%
خواص اساسی سیستمها	2	3	4	3	3	15	20%
پاسخ پله	0	0	0	1	0	1	1%
جمع کانالوشن	3	1	1	1	1	7	9%
انتگرال کانالوشن	2	1	2	0	1	6	8%
تحلیل سیستمهای LTI توسط سری فوریه پیوسته در زمان	0	1	0	0	0	1	1%
تعیین ضرایب سری فوریه پیوسته در زمان	1	0	1	0	0	2	3%
خواص سری فوریه پیوسته در زمان	0	0	0	0	0	0	0%
تحلیل سیستمهای LTI توسط سری فوریه گسسته در زمان	0	0	0	0	0	0	0%
تعیین ضرایب سری فوریه گسسته در زمان	0	1	1	0	0	2	3%
خواص سری فوریه گسسته در زمان	0	0	0	0	0	0	0%
تحلیل سیستمهای LTI توسط تبدیل فوریه پیوسته در زمان	1	1	0	2	0	4	5%
محاسبه تبدیل فوریه پیوسته در زمان و معکوس آن	1	0	1	0	0	2	3%
خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان	0	3	0	2	0	5	7%
تحلیل سیستمهای LTI توسط تبدیل فوریه گسسته در زمان	1	1	1	2	0	5	7%
محاسبه تبدیل فوریه گسسته در زمان و معکوس آن	0	0	0	0	0	0	0%
خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان	0	0	0	0	1	1	1%
فیلترهای گسسته	0	0	1	1	1	3	4%

رشته: برق   درس: تجزیه و تحلیل سیستمها

مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع ۵ سال	نسبت از کل
	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
فیلترهای پیوسته	0	0	0	0	2	2	3%
نمونه برداری و مدولاسیون	0	0	0	1	0	1	1%
همزادی در تبدیل فوریه وسری فوریه پیوسته و گسسته	0	2	0	1	1	4	5%
محاسبه تبدیل لاپلاس و معکوس آن	0	0	0	0	0	0	0%
خواص تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی	0	0	0	0	0	0	0%
تحلیل سیستمهای LTI با تبدیل لاپلاس	1	0	1	0	3	5	7%
محاسبه تبدیل z و معکوس آن	0	0	1	0	0	1	1%
خواص تبدیلz و ناحیه همگرایی	0	0	0	0	1	1	1%
تحلیل سیستمهای LTI با تبدیل z	1	0	0	1	0	2	3%
قضیه میسون (محاسبه تابع تبدیل)	0	0	0	0	0	0	0%
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای آنالوگ	0	0	0	0	0	0	0%
جمع	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**75**	**100%**

گسسته در زمان	پیوسته در زمان	فرمول
$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$	$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	**انرژی کل**
$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n]\rvert^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N+1}$	$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$	**توان متوسط**
$P_\infty = \frac{1}{2N+1} \sum_{n:<N>} \lvert x[n]\rvert^2$	$P_\infty = P = \frac{1}{T} \int_{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	**توان سیگنال متناوب**
✍ سیگنال متناوب نمی‌تواند انرژی باشد. (یکی از ۲ نوع دیگر است.)		
$E(N_1, N_2) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \lvert x[n]\rvert^2$	$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	**انرژی در بازهٔ خاص**
$P(N_1, N_2) = \frac{E(N_1, N_2)}{N_2 - N_1 + 1}$	$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$	**توان در بازهٔ خاص**
✍ مخرج کسر همان تعداد نمونه‌هاست.		
$x[n+N] = x[n]$	$x(t+T) = x(t)$	**سیگنال متناوب**
✍ در حالت DT، N علاوه بر مثبت بودن، باید عددی **صحیح** هم باشد.	✍ تنها شرط تناوب در حالت CT، مثبت بودن T است.	

دوره تناوب سیگنالها	اگر $x(t)$ با T_0 متناوب باشد، برای $x(at)$ خواهیم داشت: $T=\frac{T_0}{a}$	اگر $x[n]$ با N_0 متناوب باشد، برای $x[an]$ خواهیم داشت: $N=\frac{N_0}{a}$ ✍ در حالت DT، همیشه $\frac{N_0}{a}$ را تا حد ممکن ساده می کنیم (تا صورت و مخرج، هر دو اعداد اول شوند). در اینصورت، صورتِ کسر ساده شده $\frac{N_0}{a}$، همان دوره تناوب $x[an]$ است.
فرمول مجموع	$\int_a^b q^x dx=\frac{q^a-q^b}{\ln a}$	$\sum_{n=a}^{b} q^n=\frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$
خاصیت زوج وفرد	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$

معرفی سیگنالها

	پیوسته	گسسته
سیگنالهای نمایی **۱) حقیقی**	$x(t)=ce^{at}$	$x[n]=c\alpha^{n}$
۲) سینوسی	$x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+j\sin(\omega_0 t)$	$x[n]=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$
	✍ **دوره تناوب اصلی:** $T=\frac{2\pi}{\omega}$	✍ فقط وقتی ω_0 مضرب گویایی از π باشد، متناوب است. $N=\frac{2\pi}{\omega}$
	✍ با افزایش ω_0، سرعت تغییرات $x(t)$ زیاد می‌شود.	✍ با افزایش ω_0، سرعت تغییرات $x[n]$ لزوما زیاد نمی‌شود.
	✍ **توان سیگنال** $e^{j\omega_0 t}$ $P_\infty=P_T=1$	✍ توان سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ $P_\infty=P_T=1$
	✍ **هارمونیکهای سینوسی:** $\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad (k\in\mathbb{Z})$	✍ **هارمونیکهای سینوسی:** (هر N_0 عدد n متوالی) $\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}$
	✍ **توان** $\sin(\omega_0 t)$ و $\cos(\omega_0 t)$ $P_\infty=P_T=\frac{1}{2}$	✍ **توان** $\sin[\omega_0 n]$ و $\cos[\omega_0 n]$ $P_\infty=P_T=\frac{1}{2}$
۳) مختلط	(σ ضریب میرایی) $x(t)=ce^{(\sigma+j\omega_0)t}$	$x[n]=ce^{(\sigma+j\omega_0)n}$
تابع ضربه و خواص آن	**تعریف:** $\delta(f(t))=\begin{cases}0 & f(t)\neq 0\\ \text{Eigen Value} & f(t)=0\end{cases}$	$\delta(f[n])=\begin{cases}0 & f(t)\neq 0\\ 1 & f(t)=0\end{cases}$
	$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ $\int_{0}^{0}\delta(t)dt=1$ $\int_{0}^{0}\delta(t)dt=\frac{1}{2}$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]=1$

$\delta[an]=\delta[n]$	$\delta(at)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(t)$		
$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$	$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$	**خاصیت غربالی**	
$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$ $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$	$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$		
$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$	$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$		
	$f(t)=k(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_N)\ \Rightarrow\ \delta(f(t))=\frac{1}{\lvert k\rvert}\left\{\frac{\delta(t-t_1)}{\lvert t_1-t_2\rvert\ldots\lvert t_1-t_N\rvert}+\ldots\right\}$		
$u(f[n])=\begin{cases}1 & f[n]\geq 0\\ 0 & f[n]<0\end{cases}$	$u(f(t))=\begin{cases}1 & f(t)>0\\ 0 & f(t)<0\end{cases}$	**تعریف:**	**تابع پله و خواص آن**
$u[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k]=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$	$u(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=\int\limits_{0}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau$		
$r(f[n])=\begin{cases}f[n] & f[n]>0\\ 0 & f[n]<0\end{cases}$	$r(f(t))=\begin{cases}f(t) & f(t)>0\\ 0 & f(t)<0\end{cases}$	**تعریف:**	**تابع شیب و خواص آن**
$\sin c(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ $\frac{\sin at}{bt}=\frac{a}{b}\sin c\left(\frac{a}{\pi}t\right)$		**تعریف:** **نتیجه:**	**تابع سینک و خواص آن**
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$		**تابع رِکت نامتناوب**	**تابع رِکت و خواص آن**

	تابع رِکت متناوب $\mathrm{rect}_{T_0}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \frac{\tau}{2}<\lvert t\rvert<T_0\end{cases}$ ✍ در تابع $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$، τ پهنای پالس است. ✍ اگر α و β به ترتیب حد پایین و بالای رِکت باشند، آنگاه ضابطهٔ چنین تابعی، $x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t-\mathrm{mean}}{\mathrm{width}}\right)$ خواهد بود.
تابع مثلث	**تعریف:** $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ✍ در تابع $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$، 2τ پهنای پالس است. (τ حد بالا و پایین مثلث است.)

مثال	نکات	خواص سیستمها
جمع کنندهٔ انباره‌ای میانگین گیر سلف و خازن	✍ خروجی در هر لحظه به آینده یا گذشته ورودی بستگی دارد.	**سیستم حافظه دار**
مقاومت TI	✍ خروجی در هر لحظه، فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد. ✍ ضابطه‌ها و شروط، هر دو روی حافظه دار بودن سیستم تاثیر دارند.	**سیستم بدون حافظه**
جمع کننده انباره‌ای	✍ خروجی در هر لحظه، فقط به گذشته یا حال ورودی بستگی دارد. علی $\Rightarrow$ بی‌حافظه	**سیستم علی**
فیلتر میانگین گیرِ پردازش تصویر	✍ خروجی در هر لحظه، به آیندهٔ ورودی هم بستگی دارد. ✍ ضابطه‌ها و شروط، هر دو روی علی بودن سیستم تاثیر دارند. حافظه دار $\Rightarrow$ غیر علی	**سیستم غیرعلی**
میانگین گیر	✍ سیستمی که رابطه ورودی-خروجیش ۱-۱ باشد. ✍ ورودی‌های یکسان، خروجی‌های یکسان بدهد. ✍ بتوان از روی خروجی، ورودی را بصورت یکتا و بدون ابهام تعیین کرد.	**سیستم وارون پذیر**
	✍ سیستمی که مقادیری از ورودی را حذف یا صفر می‌کند.	**سیستم وارون ناپذیر**
	✍ به ازای تمام زمان‌ها، ورودی محدود، خروجی محدود ایجاد می‌کند. ✍ باید به ازای تمام tها (مثلاً $t \to \infty$)، پایداری سیستم بررسی شود.	**سیستم پایدار (معیار BIBO)**
میانگین گیر انتگرالگیر	✍ به ازای ورودی محدود، خروجی نامحدود ایجاد می‌کند.	**سیستم ناپایدار (معیار BIBO)**
مربع کننده	✍ سیستمی که هر شیفت زمانی در ورودیش، عینا در سیگنال خروجی ظاهر شود. ✍ اگر متغیر مستقل از آرگومان خارج شود، معمولا سیستم TV می‌شود.	**سیستم تغییر ناپذیر با زمان (TI)**

	✍ هر تغییر روی متغیر مستقل (بجز شیفت)، معمولا باعث TV شدن سیستم می‌شود. ✍ در سیستمهای چند ضابطه‌ای، اگر حتی یکی از ضابطه‌ها TV باشد، سیستم TV می‌شود.	$\int_{t-k}^{t+k}$, $\int_{t-k}^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{t+k}$, $\int_{t-k}^{t}$
سیستم تغییر پذیر با زمان (TV)	✍ در سیستمهای چند ضابطه‌ای، اگر کلیه ضابطه‌ها TI باشند، و شروط تابعی از زمان باشند، معمولا سیستم TV می‌شود. ✍ در سیستمهای چند ضابطه‌ای، اگر کلیه ضابطه‌ها TI باشند، و شروط تابعی از ورودی باشند، معمولا سیستم TI می‌شود.	وارون کننده $\int_{k}^{t}$, $\int_{t-\alpha}^{\beta}$, $\int_{\alpha}^{\beta}$, $\int_{-\infty}^{2t}$
سیستم خطی	✍ سیستمی که دارای خواص همگنی و جمعپذیری باشد. نتیجه: یک راه تشخیص خطی بودن، اعمال ورودی $\alpha x_1+\beta x_2$ به سیستم و بررسی برقراری شرط $\alpha y_1+\beta y_2$ می‌باشد. ✍ خاصیت جمع آثار در سیستم های خطی برقرار است. ✍ شرط لازم خطی بودن سیستم (نتیجهٔ همگنی): $x(t)\equiv 0 \Rightarrow y(t)\equiv 0$ ✍ در چند ضابطه‌ای‌ها حتی اگر یکی از ضابطه‌ها غیر خطی باشد، سیستم غیر خطی می‌شود.	$y(t)=tx\left(t^2-1\right)$
سیستم غیرخطی	✍ اگر یک سیگنال با ورودیِ $x(t)$ جمع شود، سیستم غیرخطی می‌شود. ✍ اعمال تابع غیرخطی <u>روی ورودی</u>، باعث غیرخطی شدن سیستم می‌شود. (اگر تابع غیر خطی <u>روی متغیر مستقل</u> اعمال شده بود، سیستم کماکان خطی است.). ✍ در چند ضابطه‌ای‌ها اگر کلیهٔ ضابطه‌ها L باشند و شروط تابعی از ورودی باشند، معمولا سیستم NL می‌شود. ✍ در چند ضابطه‌ای‌ها اگر کلیهٔ ضابطه‌ها L باشند و شروط فقط تابعی از زمان باشند، معمولا سیستم L می‌شود.	$y=x^3(t)$ $y[n]=\mathrm{Re}\{x[n]\}$ $y(t)=2x(t)+t$ $y(t)=\sin(x(t))$ $y(t)=\dfrac{x(t-1)}{x(t+1)}$

سیستمهای LTI	
سیستمهای پیوسته در زمان	**سیستمهای گسسته در زمان**
اهمیت سیستمهای LTI: ۱) تحلیل سیستمهای LTI ساده‌تر است. ۲) قابلیت مدلسازی سیستمهای فیزیکی با سیستمهای LTI	
تابع بصورت مجموع نمونه‌هایش: $x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$x[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-k]$
انتگرال کانولوشن: $y(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$	**جمع کانولوشن:** $y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$
✍ در تعیین حدود t به ۲ نکته توجه می‌کنیم: $\left\{\right.$ ۱- بررسی وضعیت همپوشانی (با توجه به پهنای سیگنالها) ۲- هم ضابطه بودن	
اگر $x(t)$ و $h(t)$ فاقد توابع ویژه باشند، $y(t)$ پیوسته خواهد بود.	
δ، عضو خنثی در عمل کانوالو: $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$	$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$
کانوالو کردن در $u(t)$، معادل انتگرالگیری از $-\infty$ تا t می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر: $x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$	کانوالو کردن در $u[n]$، معادل سیگماگیری از $-\infty$ تا n می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر: $x[n]*u[n-n_0]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$

خواص کانوالو	
۱- عرض کانولوشن	
۲- جابجایی (جابجاییِ جای پاسخ ضربه و ورودی)	
۳- شرکت پذیری (سیستمهای سری)	
۴- توزیع پذیری روی جمع (سیستمهای موازی)	
۵- مشتق: $\frac{dy(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}$	نمو: $y[n]-y[n-1]=\left(x[n]-x[n-1]\right)*h[n]=x[n]*\left(h[n]-h[n-1]\right)$
تعریف A_x: $A_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$	$A_x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]$
تعریف گشتاور مرتبه اول: $m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)dt$	$m_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nx[n]$
تعریف مرکز ثقل: $\eta_x=\frac{m_x}{A_x}$	
۶- سطح زیر منحنی:	$A_y=A_x.A_h$
۷- گشتاور مرتبه اول:	$m_y=m_xA_h+m_hA_x$
۸- مرکز ثقل:	$\eta_y=\eta_x+\eta_h$
۹-	$x(t)*y(t)=z(t) \Rightarrow x(kt)*y(kt)=\frac{1}{\lvert k\rvert}z(kt)$
۱۰-	$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{dx(t)}{dt}*\frac{dx(t)}{dt}$
اگر $z[n]=x[n]*h[n]$ ***باشد، برای تعیین*** x ***(با طول N)، نیاز به N مقدار از حاصل کانولوشن*** $z[n]$ ***و N مقدار از*** $h[n]$ ***می‌باشد.*** *لزومی به توالی N مقدار نمی‌باشد.*	

خواص سیستمهای LTI بر اساس توابع پله و ضربه		
	سیستمهای CT	**سیستمهای DT**
LTI و بدون حافظه	$h(t)=k\delta(t)$	$h[n]=k\delta[n]$
یادآوری: اگر رابطهٔ بالا برقرار بود، سیستم علی هم می‌باشد.		
LTI و علی	$h(t)\equiv 0 \quad , \quad t<0$ $s(t)\equiv 0 \quad , \quad t<0$	$h[n]\equiv 0 \quad , \quad n<0$ $s[n]\equiv 0 \quad , \quad n<0$
سیگنال علی: سیگنالی که در زمان‌های منفی صفر است.		
LTI و پایدار	$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert h(t)\rvert dt<\infty$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]<\infty$
قدر مطلق فراموش نشود.		
LTI و وارون پذیر	$h(t)*h_I(t)=\delta(t)$	$h[n]*h_I[n]=\delta[n]$
سیستم وارون هم، خودش یک سیستم LTI است.		
روابط پاسخ ضربه و پاسخ پله		
	$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$	$h[n]=s[n]-s[n-1]$
	$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$	$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$

سیستمهای CT و معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت	سیستمهای DT و معادلات دیفرنس خطی با ضرایب ثابت
معادلهٔ دیفرانسیل یک سیستم CT در حالت کلی: $$\sum_{k=0}^{M} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$	معادلهٔ دیفرنس یک سیستم DT در حالت کلی: $$\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$$
قضیه: یک سیستم بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، تنها زمانی LTI و علی است که سیستم در سکون اولیه باشد: (t_0 لحظهٔ اعمال ورودی) $$y(t_0) = y'(t_0) = \ldots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$$	**قضیه:** یک سیستم بیان شده توسط معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت، تنها زمانی LTI و علی است که سیستم در سکون اولیه باشد: (t_0 لحظهٔ اعمال ورودی) $$y[n_0] = y[n_0-1] = \ldots = y[n_0-(M-1)] = 0$$
M شرط اولیه داریم.	
عناصر پایهٔ نمایش بلوکی	
۱) ضرب کننده در اسکالر ۲) جمع کننده ۳) مشتقگیر	۱) ضرب کننده در اسکالر ۲) جمع کننده ۳) تاخیر دهنده

روشهای *realize* کردن سیستمها

- Direct Form I:
  - از دو طرف به وسط
  - حداقل M و حداکثر 2M انتگراتور (تاخیر دهنده)
  - ضرایب yها سمت راست و ضرایب xها سمت چپ
- Direct Form II:
  - از وسط به دو طرف
  - دقیقا M انتگراتور (تاخیر دهنده)
  - ضرایب yها سمت چپ و ضرایب xها سمت راست

	سیستم‌های با معادلهٔ دیفرنسِ خطی با ضرایب ثابت:	FIR: ۱- $y[n]=\sum_{i=0}^{N}\frac{b_i}{a_0}x[n-i]$ ۲- عرض پاسخ ضربهٔ این سیستمها محدود است. ۳- خروجی هر لحظه فقط به ورودیِ همان لحظه بستگی دارد. (نه مقادیر قبلی خروجی) ۴- ساختار این سیستم‌ها فیدبک ندارد. IIR: ۱-عرض پاسخ ضربهٔ این سیستمها نامحدود است. ۲-خروجی هر لحظه به ورودیِ همان لحظه و خروجیِ لحظات قبلی بستگی دارد. ۳- ساختار این سیستم‌ها فیدبک دارد.

تحلیل بر مبنای توابع ویژه

تعریف سیگنال پایهٔ x و مقدار ویژهٔ k

$x \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow kx$

ویژگی‌های سیگنال‌های پایه

۱- قابلیت بیان کردن سیگنال‌ها بصورت ترکیب خطی سیگنال‌های پایه

۲- سادگی پاسخ سیستم‌های LTI به سیگنال پایه

سیگنال‌های پایه و مقادیر ویژهٔ آنها

CT

تبدیل لاپلاس (کل صفحه مختلط)	$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$ $s=\sigma+j\omega$	$e^{st} \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow H(s)e^{st}$
سری فوریه (نقاط منفصل محور $j\omega$)	$H(jk\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ $s=jk\omega_0$	$e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow$ $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$
تبدیل فوریه (محور $j\omega$)	$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$ $s=j\omega$	$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$

DT

تبدیل z (کل صفحه مختلط)	$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$ $z=re^{j\omega}$	$z^n \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow H(z)z^n$
سری فوریه (N_0 نقطه روی دایرهٔ واحد، با اختلاف فاز ω_0)	$H\left(e^{jk\omega_0 n}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-}$ $z=e^{jk\omega_0}$	$e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow$ $H\left(e^{jk\omega_0}\right)e^{jk\omega_0 n}$
تبدیل فوریه (کل دایره واحد)	$H\left(e^{j\omega n}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j}$ $z=e^{j\omega}$	$e^{j\omega n} \rightarrow \boxed{\textbf{LTI}} \rightarrow$ $H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$

✍ *همان طور که می‌بینیم، پاسخ به نمایی، همان نمایی است با دامنهٔ تغییر یافته.*

<table>
<tr><th colspan="5">معادلات تجزیه و ترکیب سیگنالها</th></tr>
<tr><th></th><th>معادلهٔ تجزیه</th><th>معادلهٔ ترکیب</th><th>معادلهٔ تجزیه</th><th>معادلهٔ ترکیب</th></tr>
<tr><td rowspan="3">سری فوریهٔ مثلثاتی
(فقط در حالت CT)</td><td colspan="2">فرم ۱- $\alpha_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$, $\beta_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin k\omega_0 t\,dt$</td><td colspan="2">$x(t) = DC\ \text{مقدار} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">فرم ۲- $B_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$, $C_k = \frac{-1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin k\omega_0 t\,dt$</td><td colspan="2">$x(t) = DC\ \text{مقدار} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">✍ شکل مثلثاتی سری فوریه، فقط برای $x(t)$ های حقیقی بیان می‌شود.
✍ فرم ۱، معمولا در دروس ریاضیات و مدار و فرم ۲، معمولا در درس سیگنال بکار می‌رود. (من معمولا از فرم ۱ استفاده می‌کنم.)
✍ رابطهٔ ضرایب سری فوریه بصورت $a_k = \frac{\alpha_k - j\beta_k}{2} = B_k + jC_k$ می‌باشد.
✍ در درس ریاضی مهندسی، مقدار DC سیگنال را برابر $\frac{a_0}{2}$ تعریف می‌کنند ولی در درس سیگنال و سیستم، مقدار DC سیگنال را برابر a_0 تعریف می‌کنند!!!
✍ تقارن زوج و فرد، به ترتیب باعث صفر شدن ضرایب سینوسی و کسینوسی می‌شوند.
✍ تقارن نیم موج، باعث صفر شدن ضرایب زوج می‌شود. (با نکتهٔ قبلی ترکیب گردد.)
✍ برای محاسبهٔ $H(jk\omega_0)$ از روی پاسخ فرکانسی سیستم، $H(j\omega)$ یا همان تبدیل فوریهٔ $h(t)$، کافیست $H(j\omega)$ را در مضارب صحیح ω_0 بیابیم.</td></tr>
<tr><td>سری فوریه</td><td>$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$
☺ سریها همواره بصورت سیگما هستند. (بجز یکی)</td><td>$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
👍 حدود تمام سریها، روی یک تناوب است. (بجز یکی)</td><td>$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{k=<N_0>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$
✓ متناوب با دوره تناوب N_0</td><td>$x[n] = \sum_{k=<N_0>} a_k e^{jk\omega_0 n}$</td></tr>
<tr><td>تبدیل فوریه</td><td>$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$</td><td>$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$</td><td>$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
☺ تبدیلها همواره بصورت انتگرال هستند. (بجز یکی)
✓ متناوب با دوره تناوب 2π</td><td>$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$
👍 حدود تمام تبدیلها، بیکران است. (بجز یکی)</td></tr>
<tr><td colspan="3">✓ a_k ها و X ها مختلطند.</td><td colspan="2">✓ a_0 ها و $X(0)$ ها، مقادیر DC سیگنال هستند.</td></tr>
</table>

$x(t)$	CT			DT			$x[n]$
	سری فوریه	تبدیل فوریه	تبدیل لاپلاس	تبدیل Z	تبدیل فوریه	سری فوریه	
قراردادهای جدول: ۱. شروط مربوط به همگرایی در این جدول نوشته نشده‌اند. (مانند $\mathrm{Re}(a)>0$ برای $e^{-at}u(t)$) ۲. هنگام استفاده از تبدیل‌های این جدول که بر حسب f (و نه ω) نوشته شده‌اند، حتما ابتدا تابع مورد نظر را بر حسب f بنویسید.							
$e^{j\omega_0 t}$	$\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k\neq 1\end{cases}$					$\begin{cases}1 & k=m, m\pm N, m\pm 2N,\ldots\\ 0 & k=oth\end{cases}$	$e^{j\omega_0 n}$
$e^{j\omega_0 t}$		$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$			$2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$		$e^{j\omega_0 n}$
$\cos\omega_0 t$	$\begin{cases}\frac{1}{2} & k=\pm 1\\ 0 & k\neq \pm 1\end{cases}$					$\begin{cases}\frac{1}{2} & k=\pm m, \pm m\pm N, \pm m\pm 2N,\ldots\\ 0 & k=oth\end{cases}$	$\cos\omega_0 n$
$\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$			$\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)+\delta(\omega+\omega_0-2$		$\cos\omega_0 n$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$			$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$			$\cos[\omega_0 n]u[n]$

$\sin\omega_0 t$	$\begin{cases}\frac{1}{2j} & k=1\\ 0 & k\neq\pm1\\ \frac{-1}{2j} & k=-1\end{cases}$					$\begin{cases}\frac{1}{2j} & k=m, m\pm N, m\pm 2N,\ldots\\ 0 & k=oth\\ \frac{-1}{2j} & k=-m,-m\pm N,-m\pm 2N\end{cases}$	$\sin\omega_0 n$
$\sin\omega_0 t$		$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$			$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)-\delta(\omega+\omega_0-2$		$\sin\omega_0 n$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$			$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{1-(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\sin\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$			$\sin[\omega_0 n]u[n]$
١	$\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$					$\begin{cases}1 & k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$	١
١		$2\pi\delta(\omega)$			$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$		١
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT$	$\frac{1}{T_0}$					$\frac{1}{N_0}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN_0$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT$		$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$			$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$		$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN_0$

$rect_{T_0}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{X(jk\omega_0)}{T_0}=\frac{\tau}{T_0}\sin c(kf_0\tau)$					$\begin{cases}\frac{\sin\left[k\omega_0\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]}{N_0\sin\left[\frac{k\omega_0}{2}\right]}, & k\neq\pm mN_0\\ \frac{2N+1}{N_0}, & k=\pm mN_0\end{cases}$	$rect_{N_0}\left(\frac{n}{2N}\right)$
$rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$		$\tau\sin c(f\tau)$			$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$ a_k ها مربوط به $rect_{N_0}\left(\frac{n}{2N}\right)$ هستند.		$rect_{N_0}\left(\frac{n}{2N}\right)$
					$\frac{\sin\left[\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$		$rect\left(\frac{n}{2N}\right)$
$\delta(t)$		۱			۱		$\delta[n]$
$\delta(t)$		۱			۱		$\delta[n]$
$u(t)$		$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$			$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$		$u[n]$
$u(t)$			$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$			$u[n]$
$e^{-at}u(t)$		$\frac{1}{a+j\omega}$			$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$		$a^n u[n]$

$e^{-at}u(t)$			$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$			$a^n u[n]$
$te^{-at}u(t)$		$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$			$\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$		$(n+1)a^n u[n]$
$te^{-at}u(t)$			$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$			$na^n u[n]$
$t^n e^{-at}u(t)$		$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$			$\frac{r!}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^{r+1}}$		$\frac{(n+r)!}{n!}a^n u[n]$
$t^n e^{-at}u(t)$			$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$				
$e^{-a\|t\|}u(t)$		$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$					
$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$		$\tau \sin c^2(f\tau)$					
$\sin c(wt)$		$\frac{1}{w}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{w}\right)$			$\frac{1}{a}\operatorname{rect}_{2\pi}\left(\frac{f}{a}\right)$		$\sin c(an)$ $0<a<1$
$\sin c^2(t\tau)$		$\frac{1}{\tau}\Lambda\left(\frac{f}{\tau}\right)$					

مفروضات:

- x متناوب با دوره تناوب T_0 (یا N_0) و فرکانس پایه ω_0، با
  - ضرایب سری فوریهٔ a_k
  - تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ یا $X\left(e^{j\omega}\right)$
  - تبدیل لاپلاس $X(s)$ یا تبدیل $X(z)$
    - ROC تبدیل لاپلاس: $R_1:\ \alpha < \mathrm{Re}(s) < \beta$
    - ROC تبدیل Z: $R_1:\ \alpha < |z| < \beta$
- y متناوب با دوره تناوب T_0 (یا N_0) و فرکانس پایه ω_0، با
  - ضرایب سری فوریهٔ b_k
  - تبدیل فوریهٔ $Y(j\omega)$ یا $Y\left(e^{j\omega}\right)$
  - تبدیل لاپلاس $Y(s)$ یا تبدیل $Y(z)$
    - ROC تبدیل لاپلاس: $\mathrm{ROC}: R_2$
    - ROC تبدیل Z: $\mathrm{ROC}: R_2$

اگر در تبدیل L یا Z ، ROC نوشته نشده بود، فرض کنید: $\mathrm{ROC}:\ R_1$

جدول سری‌ها و تبدیل‌ها

$Ax(t)+By(t) \xleftrightarrow{F.S.} Aa_k + Bb_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} AX(j\omega)+BY(j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} AX(s)+BY(s) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap R_2$	$Ax[n]+By[n] \xleftrightarrow{F.S.} Aa_k + Bb_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} AX\left(e^{j\omega}\right)+BY\left(e^{j\omega}\right)$ $\xleftrightarrow{Z} AX(z)+BY(z) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap R_2$
$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.S.} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$	$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F.S.} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$ $\xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad , \quad R_1 \pm \begin{Bmatrix} z=0 \\ z=\infty \end{Bmatrix}$
$x(t)e^{jM\omega_0 t} \xleftrightarrow{F.S.} a_{k-M}$ $x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega-\omega_0)$ $x(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{L} X(s-s_0) \; , \; \alpha+\mathrm{Re}\{s_0\} < \mathrm{Re}(s) < \beta+\mathrm{Re}\{s_0\}$	$x[n]e^{jM\omega_0 n} \xleftrightarrow{F.S.} a_{k-M}$ $x[n]e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F.T.} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$ $x[n]z_0^n \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad , \quad \text{ROC}: \; z_0 R_1$
$x^*(t) \xleftrightarrow{F.S.} a^*_{-k}$	$x^*[n] \xleftrightarrow{F.S.} a^*_{-k}$

$\xleftrightarrow{F.T.} \; X^*(-j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} \; X^*(s^*)$, R_1	$\xleftrightarrow{F.T.} \; X^*(e^{-j\omega})$ $\xleftrightarrow{Z} \; X^*(z^*)$
$x(-t) \xleftrightarrow{F.S.} a_{-k}$ $\xleftrightarrow{F.T.} \; X(-j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} \; X(-s), -\beta < Re(s) < -\alpha$	$x[-n] \xleftrightarrow{F.S.} a_{-k}$ $\xleftrightarrow{F.T.} \; X(e^{-j\omega})$ $\xleftrightarrow{Z} \; X(z^{-1})$, $ROC: R_1^{-1}$
$x(at)$, $T = \frac{T_0}{a} \xleftrightarrow{F.S.} a_k$, $\omega = a\omega_0$ فقط در همین حالت $a > 0$ است. $\xleftrightarrow{F.T.} \; \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $\xleftrightarrow{L} \; \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$, $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow a\alpha < Re(s) < a\beta \\ a < 0 \Rightarrow a\beta < Re(s) < a\alpha \end{cases}$	$x_{(m)}[n]$[1] , $N = mN_0 \xleftrightarrow{F.S.} \frac{a_k}{m}$, $\omega = \frac{\omega_0}{m}$ فقط در همین حالت $a > 0$ است. $\xleftrightarrow{F.T.} \; X(e^{jm\omega})$ $\xleftrightarrow{Z} \; X(z^m)$, $ROC: R_1^{1/m}$
$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{F.S.} T_0 a_k b_k$	$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{F.S.} N_0 a_k b_k$

1- $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n = multiple\ of\ m \\ 0 & n \neq multiple\ of\ m \end{cases}$

$\xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega)Y(j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} X(s)Y(s) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap R_2$	$\xleftrightarrow{F.T.} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ $\xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap R_2$
کانولوشن مربوط به سیگنالهای متناوب را ***کانولوشن متناوب*** می نامیم. (انتگرال یا سیگمایش فقط روی یک تناوب می‌باشد.)	
$x(t)y(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k * b_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$ $\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$ ضریب $\frac{1}{2\pi}$ یادت نره!	$x[n]y[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_k * b_k = \sum_{l=<N_0>} a_l b_{k-l}$ $\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.S.} jk\omega_0 a_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} j\omega X(j\omega)$ $\xleftrightarrow{L} sX(s) \quad , \quad \text{min of } R_1$	$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F.S.} (1 - e^{-jk\omega_0}) a_k$ $\xleftrightarrow{F.T.} (1 - e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ $\xleftrightarrow{Z} (1 - z^{-1}) X(z) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap \{\lvert z \rvert > 0\}$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{jk\omega_0} a_k \quad , \quad k \neq 0$ $x(t)$ فاقد مولفه DC $\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{(1 - e^{-jk\omega_0})} a_k \quad , \quad k \neq 0$ $x[n]$ فاقد مولفه DC $\xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(j\omega) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$

$\xleftrightarrow{L} \quad \frac{1}{s}X(s) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap \{Re(s)>0\}$	$\xleftrightarrow{Z} \quad \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) \quad , \quad \text{min of } R_1 \cap \{\lvert z \rvert > 1\}$
$-jtx(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{dX}{d\omega}$ $-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX}{ds}$	$-jnx[n] \xleftrightarrow{F.T.} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ $-nx[n] \xleftrightarrow{Z} z\frac{dX(z)}{dz}$
$\frac{-x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F.T.} \int_{\omega}^{\infty} X(u)du$ $\frac{x(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_{s}^{\infty} X(u)du$	

$x = x^*$

یعنی x حقیقی باشد.

(CT یا DT، فرقی نمی‌کند.)

$\xleftrightarrow{F.S.}$

نتیجه ۱: $a_k = a_{-k}^*$

نتیجه ۲: $Re(a_k) = Re(a_{-k}) \quad , \quad Im(a_k) = -Im(a_{-k})$

نتیجه ۳: $\lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \quad , \quad \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k}$

$\xleftrightarrow{F.T.}$

نتیجه ۱: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

نتیجه ۲: $Re(X(j\omega)) = Re(X(-j\omega)) \quad , \quad Im(X(j\omega)) = -Im(X(-j\omega))$

نتیجه ۳: $\lvert X(j\omega) \rvert = \lvert X(-j\omega) \rvert \quad , \quad \measuredangle X(j\omega) = -\measuredangle X(-j\omega)$

✍ برای سیگنالهای حقیقی، نمادهای * و — را هر کجا بخواهیم می‌توانیم بگذاریم.

در سیگنالهای حقیقی، همواره
- قسمتهای **حقیقی** و ***اندازهٔ*** تبدیلها، تقارن **زوج** دارند
- قسمتهای **موهومی** و ***فاز*** تبدیلها، تقارن **فرد** دارند

در حالتی که x سیگنالی گسسته باشد، همان روابط بالا برقرارند فقط به جای $X(j\omega)$، از $X\left(e^{j\omega}\right)$ استفاده می‌کنیم.

$x(t)=x^*(t)=x(-t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k=a_k^*=a_{-k} \Rightarrow$ a_k حقیقی و زوج است.

Or $\xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega)=X^*(j\omega)=X(-j\omega) \Rightarrow$ $X(j\omega)$ حقیقی و زوج است.

$x[n]=x^*[n]=x[n] \xleftrightarrow{L}$ $X(s)$ تابعی فرد می شود!

در حالتی که x سیگنالی گسسته باشد، همان روابط بالا برقرارند فقط به جای $X(j\omega)$، از $X\left(e^{j\omega}\right)$ استفاده می‌کنیم.

$x(t)=x^*(t)=-x(-t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k=-a_k^*=-a_{-k} \Rightarrow$ a_k موهومی و فرد است.

Or $\xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega)=-X^*(j\omega)=-X(-j\omega) \Rightarrow$ $X(j\omega)$ موهومی و فرد است.

$x[n]=x^*[n]=x[n] \xleftrightarrow{L}$ $X(s)$ تابعی زوج می شود!

در حالتی که x سیگنالی گسسته باشد، همان روابط بالا برقرارند فقط به جای $X(j\omega)$، از $X\left(e^{j\omega}\right)$ استفاده می‌کنیم.

$x=x_e+x_o \xleftrightarrow{F.S.} \mathrm{Re}(a_k)+j\,\mathrm{Im}(a_k)=\mathrm{ev}(a_k)+\mathrm{odd}(a_k)$

با فرض x حقیقی $\xleftrightarrow{F.T.} \mathrm{Re}(X(j\omega))+j\,\mathrm{Im}(X(j\omega))=X_e(j\omega)+X_o(j\omega)$

✍ Re و ev فوریه مربوط به x_e هستند و Im و odd فوریه مربوط به x_o هستند و به همان ترتیب نوشته شده، برابرند!

رابطهٔ پارسوال

برای سیگنال **متناوب** $x[n]$ $\xleftrightarrow{F.S.}$ $P_x = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>}|x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0\rangle}|a_k|^2$

برای سیگنال **نامتناوب** $x[n]$ $\xleftrightarrow{F.T.}$ $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

نکتهٔ طلایی: تبدیل‌های DT (هم سری و هم تبدیل فوریه)، همواره **متناوبند**.

برای سیگنال **متناوب** $x(t)$ $\xleftrightarrow{F.S.}$ $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$

برای سیگنال **نامتناوب** $x(t)$ $\xleftrightarrow{F.T.}$ $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$

نکتهٔ طلایی: تبدیل‌های CT (هم سری و هم تبدیل فوریه)، همواره **نامتناوبند**.

✍ ضریب $\frac{1}{2\pi}$ در فرمول‌های E_x یادت نره!

ویژهٔ سری فوریهٔ DT

۱- **جمع نمونه‌های** $x[n]$: $\sum_{n=<N_0>} x[n] = N_0 a_0$

۲- **مجموع ضرایب** a_k: $\sum_{k=<N_0>} a_k = x[0]$

۳- **حاصل سریهای متناوب** $\sum_{n=<N_0>} (-1)^n x[n] = N_0 a_{\frac{N_0}{2}}$

ویژهٔ سری فوریهٔ CT

۱-**سطح زیر منحنی** $x(t)$: $\int_{T_0} x(t)dt = T_0 a_0$

۲- **مجموع ضرایب** a_k: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = x(0)$

ویژهٔ تبدیل فوریهٔ DT

۱-**جمع نمونه‌های** $x[n]$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = X\left(e^{j0}\right)$

مجموع نمونه‌ها در حوزهٔ زمان، $X(0)$ می‌شود.

۲- **سطح زیر منحنی** $X\left(e^{j\omega}\right)$: $\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)d\omega = 2\pi\, x[0]$

سطح زیر منحنی سیگنال حوزهٔ فرکانس، $2\pi x[0]$ می‌شود.

ویژهٔ تبدیل فوریهٔ CT

۱-**سطح زیر منحنی** $x(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(0)$

سطح زیر منحنی سیگنال حوزهٔ زمان، $X(0)$ می‌شود.

۲- **سطح زیر منحنی** $X(j\omega)$: $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi\, x(0)$

سطح زیر منحنی سیگنال حوزهٔ فرکانس، $2\pi x[0]$ می‌شود.

۳- حاصل سریهای متناوب: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = X\left(e^{j\pi}\right)$	۳- دوگانی: $\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega) \\ X(t) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi x(-\omega) \end{cases}$
ویژهٔ تبدیل Z	**ویژهٔ تبدیل لاپلاس**
۱-جمع نمونه‌های $x[n]$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = X(1)$ **۲-قضیه مقدار اولیه:** اگر به ازای $n<0$، $x[n]\equiv 0$ باشد: $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$ $x[1] = \lim_{z\to\infty} z\left[X(z) - x[0]\right]$ $x[2] = \lim_{z\to\infty} z^2\left[X(z) - x[0] - z^{-1}x[1]\right]$	**۱- قضیه مقدار اولیه و نهایی:** اگر به ازای $t<0$، $x(t)\equiv 0$ باشد و $x(t)$ در $t=0$ تابع تکین نداشته باشد: $x\left(0^+\right) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ $x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$