روش نصف کردن(دوبخشی) برای به دست آوردن ریشه‌های یک تابع

نخستین گام در حل معادله‌ی f(x)=0 عبارتست از تشخیص تعداد جواب‌ها و فاصله‌هایی که جواب‌ها در آن قرار دارند. در صورت پیوسته بودن f می‌توان از قضیه‌ی بولتسانو برای بررسی وجود ریشه‌ها استفاده کرد و در صورت مشتق‌پذیر بودن می‌توان از قضیه‌ی رُل برای یکتا بودن ریشه‌ها استفاده کرد.

قضیه(بولتسانو): اگر تابع f روی بازه‌ی [a,b] پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$، آنگاه معادله‌ی f(x)=0 در بازه‌ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

قضیه(رُل): اگر تابع f روی بازه‌ی [a,b] پیوسته، روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر و f(a)=f(b)= 0، آنگاه معادله‌ی $f'(x) = 0$ در بازه‌ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

در هر گام از روش نصف کردن، بازه‌ی دربرگیرنده‌ی جواب را نصف می‌کنیم و دو بازه‌ی جدید به دست می‌آوریم. سپس از بین این دو بازه، بازه‌ای را انتخاب می‌کنیم که f روی آن تغییر علامت بدهد. این بازه‌ی جدید دربردارنده‌ی ریشه‌ی تابع است که طول آن نصف شده است. با ادامه‌ی این روند دنباله‌ای از بازه‌های تو در تو به دست می‌آید که همگی دربردارنده‌ی ریشه‌ی تابع هستند.

اگر تابع f روی بازه‌ی [a,b] پیوسته باشد و تغییر علامت دهد، روش نصف کردن همواره همگراست، یعنی بعد از هر مرحله دقت جواب بهتر می‌شود. در حالت کلی این روش کند است. با هر گام جدید بازه‌ی دربردارنده‌ی جواب نصف می‌شود و بعد از n گام بازه‌ای به طول $\frac{b-a}{2^n}$ به دست می‌آید. به ویژه اگر بخواهیم جوابی با دقت rD (r رقم اعشار) داشته باشیم، تعداد گام‌های لازم n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{b-a}{2^n} < 0.5 \times 10^{-r}$$

مسأله ۱: الگوریتم روش نصف کردن را بنویسید.

مسأله ۲: نشان دهید که معادله‌ی $(x-2)^2 - \ln(x) = 0$ روی بازه‌ی [1,2] دقیقا یک ریشه دارد سپس با استفاده از الگوریتم جواب آن را با دقت 3D به دست آورید.

پیروز باشید!

محفوظ رستم‌زاده