به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ: ۹۵/۹/۱۸
شماره: ....
پیوست: ....

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۳۰)

۲۲–۰۱۵

نیمسال اوّل ۹۶–۹۵

مدّت امتحان: ۳ ساعت

- **این امتحان شامل ٦ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید و در هر برگهٔ دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.**
- **برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.**
- **استفاده از ماشین حساب در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.**
- **در طول جلسهٔ امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.**

سؤال ۱. فرض کنید z عددی مختلط باشد طوری که $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{2\pi}{3}$. اگر $\sqrt{3} = \frac{1}{z^3} + z^3$، مقدار $z^2 + \frac{1}{z^2}$ را محاسبه کنید.

سؤال ۲. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر دو عدد گویای داده شدهٔ q_1 و q_2، اگر $q_1 < q_2$، آنگاه $f(q_1) < f(q_2)$. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

سؤال ۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}$، لااقل یکی از دو مقدار $f(x)$ یا $f'(x)$ برابر با صفر است. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ ثابت است.

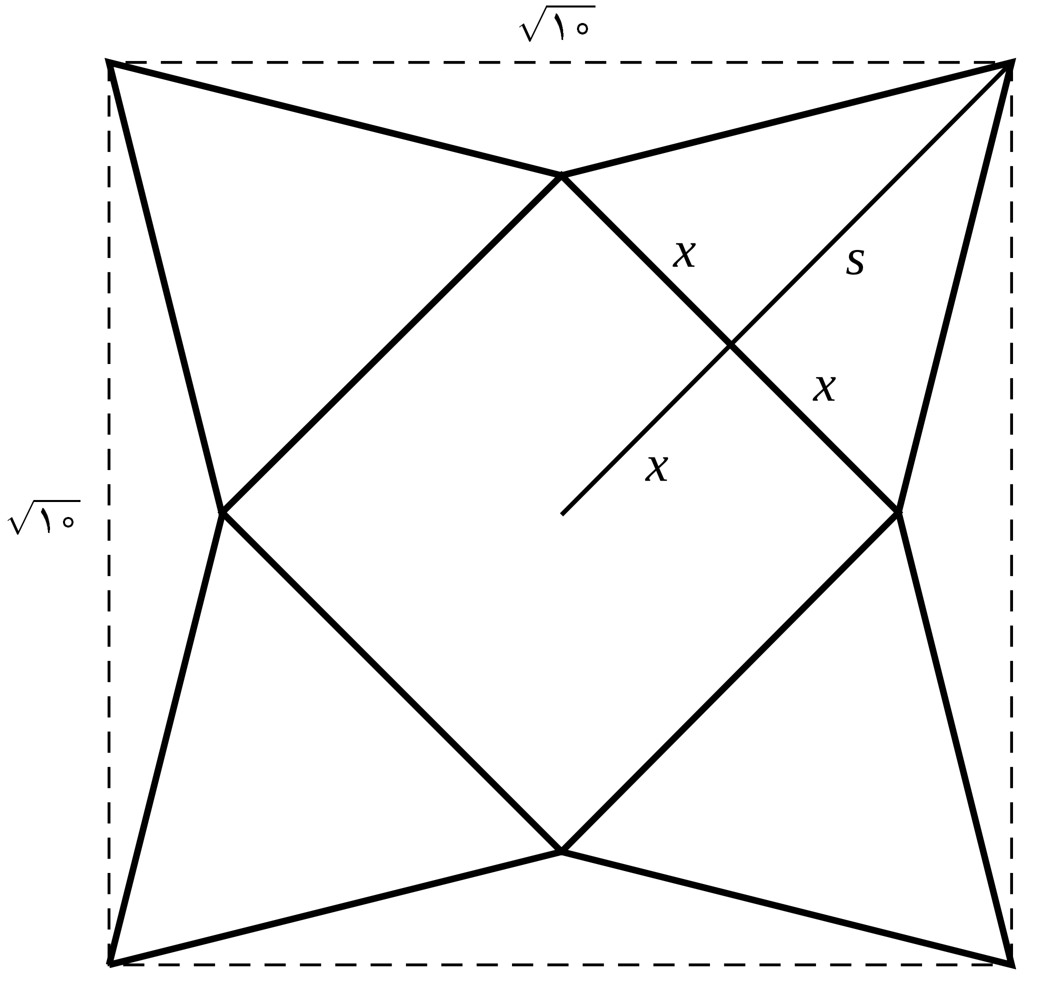
سؤال ۴. (الف) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ مینیمم مطلق دارد.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید اگر $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و با ضرایب حقیقی باشد که ریشهٔ حقیقی ندارد، آنگاه چندجمله‌ای

$$q(x) = p(x) + p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x)$$

نیز ریشهٔ حقیقی ندارد.

سؤال ۵. یک قطعهٔ مقوایی به شکل مربع و به ضلع $\sqrt{۱۰}$ متر را در نظر بگیرید (به مربع نقطه‌چین در شکل زیر نگاه کنید). با بریدن چهار مثلث مساوی از چهار طرف این مقوا مانند شکل، چهار مثلث متساوی الساقین و یک مربع به وجود می‌آید که با تا کردن مثلث‌های اخیر می‌توانیم یک هرم به قاعدهٔ مربع و وجوهی به شکل مثلث متساوی الساقین بسازیم. به ازای برش‌های مختلف اوّلیه، هرم‌های مختلف به دست می‌آید. در بین این هرم‌ها، بیشترین مقدار ممکن حجم چند متر مکعب است؟ (**راهنمایی:** حجم هرم ساخته شده $= \frac{۱}{۳} \times$ مساحت قاعدهٔ هرم $\times$ ارتفاع هرم.)



سؤال ٦. مقدار تقریبی $\ln(۱/۱)$ را طوری محاسبه کنید که مقدار خطای محاسبه از $۱۰^{-۴}$ کمتر باشد.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره،
سؤال ۳: ۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵+۱۵ نمره،
سؤال ۵: ۱۵ نمره، سؤال ٦: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۹۵/۹/۱۸

سؤال ۱: چون $z^3+\frac{1}{z^3}=\sqrt{3}$، $\left(z^3\right)^2-\sqrt{3}\left(z^3\right)+1=0$. در نتیجه، بنابر فرمول محاسبهٔ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم، z^3 با یکی از دو عدد زیر برابر خواهد بود:

$$\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}.$$

لذا z یکی از ۶ عدد زیر می‌باشد:

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right)\pm i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

امّا توجه می‌کنیم که این ۶ عدد به صورت

$$\cos\frac{\pi}{18}\pm i\sin\frac{\pi}{18},$$
$$\cos\frac{13\pi}{18}\pm i\sin\frac{13\pi}{18},$$
$$\cos\frac{25\pi}{18}\pm i\sin\frac{25\pi}{18}$$

می‌باشند که آرگومان‌های اصلی دو عدد اوّل برابر با $\pm\frac{\pi}{18}$، دو عدد دوم برابر با $\pm\frac{13\pi}{18}$ و دو عدد سوم برابر با $\mp\frac{11\pi}{18}$ است. با توجه به اینکه $\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg}z<\frac{2\pi}{3}$، به دست می‌آوریم

$$z=\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}.$$

در نتیجه

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(\cos\frac{22\pi}{18}+i\sin\frac{22\pi}{18}\right)+\left(\cos\frac{22\pi}{18}-i\sin\frac{22\pi}{18}\right)$$

$$=2\cos\frac{22\pi}{18}=2\cos\frac{11\pi}{9}=-2\cos\frac{2\pi}{9}.\ \blacksquare$$

سؤال ۲: ابتدا ادّعا می‌کنیم اگر x_1 و x_2 دو عدد حقیقی دلخواه باشند طوری که $x_2>x_1$، آنگاه $f(x_1)\le f(x_2)$.
فرض کنید ادّعا درست نباشد و داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$. با این فرض، قرار می‌دهیم

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left(f(x_1)-f(x_2)\right).$$

چون f در x_1 و x_2 پیوسته است، پس اعداد حقیقی $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ وجود دارند طوری که برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$|x-x_1|<\delta_1\Longrightarrow|f(x)-f(x_1)|<\epsilon,$$
$$|x-x_2|<\delta_2\Longrightarrow|f(x)-f(x_2)|<\epsilon.$$

اکنون فرض می‌کنیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{1}{2}(x_2-x_1)\}$. در این صورت، برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$|x-x_1|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_1)|<\epsilon,$$
$$|x-x_2|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_2)|<\epsilon.$$

حال اعداد گویای q_1 و q_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که $|q_1-x_1|<\delta$ و $|q_2-x_2|<\delta$. در نتیجه،

$$|f(q_1)-f(x_1)|<\epsilon,$$
$$|f(q_2)-f(x_2)|<\epsilon.$$

امّا اکنون به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}q_1<x_1+\delta&\le x_1+\frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)\\&=x_2-\frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)\le x_2-\delta<q_2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}f(q_1)&>f(x_1)-\epsilon\\&=f(x_1)-\frac{1}{2}\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f(x_1)-f(x_2)\right)+f(x_2)\\&=\epsilon+f(x_2)>f(q_2).\end{aligned}$$

یعنی اینکه، $q_1<q_2$ و $f(q_1)>f(q_2)$ که تناقض است. پس لزوماً $f(x_1)\le f(x_2)$ و درستی ادّعا ثابت می‌شود.
حال برای هر دو عدد حقیقی x_3 و x_4 که $x_4>x_3$ می‌توانیم اعداد گویای q_3 و q_4 را چنان انتخاب کنیم که $x_3<q_3<q_4<x_4$ و بنابر ادّعا و فرض به‌دست آوریم

$$f(x_3)\le f(q_3)<f(q_4)\le f(x_4),$$

یعنی اینکه، $f(x_3)<f(x_4)$. در نتیجه f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. $\blacksquare$

سؤال ۳: بنابر فرض، برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$\left(f^2\right)'(x)=2f(x)f'(x)=0.$$

در نتیجه f^2 روی $\mathbb{R}$ تابعی ثابت است. مثلاً فرض می‌کنیم برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f^2(x)=c$ که در آن $c\ge 0$.
اگر $c=0$، آنگاه برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f^2(x)=0$ که ایجاب می‌کند $f(x)=0$. پس در این حالت، f تابع ثابت صفر است.
اگر $c>0$، آنگاه برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f^2(x)=c$ که ایجاب می‌کند $f(x)=\pm\sqrt{c}$. اگر برای بعضی از مقادیر x، مقدار f برابر با $\sqrt{c}$ و برای بعضی مقادیر دیگر از x، مقدار f برابر با $-\sqrt{c}$ باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، لااقل به ازای یک مقدار x، مقدار f برابر با صفر می‌شود که چنین نیست. پس برای هر $x\in\mathbb{R}$، همواره $f(x)=\sqrt{c}$ یا همواره $f(x)=-\sqrt{c}$. پس در این حالت، f تابع ثابت $\sqrt{c}$ یا تابع ثابت $-\sqrt{c}$ است. $\blacksquare$

سؤال ۴: (الف) بنابر فرض، $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ و در نتیجه اگر قرار دهیم $M=|f(0)|+1$، آنگاه اعداد حقیقی $N_1>0$ و $N_2>0$ وجود دارند طوری که برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$x>N_1 \Longrightarrow f(x)>M,$$

$$x<-N_2 \Longrightarrow f(x)>M.$$

پس با فرض $N=\max\{N_1,N_2\}$، برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$|x|>N\Longrightarrow f(x)>M.$$

تابع f روی $[-N,N]$ پیوسته است، پس بنابر قضیهٔ ماکسیمم و مینیمم، f روی $[-N,N]$ مینیمم مطلق دارد. فرض کنید $c\in[-N,N]$ نقطه‌ای باشد که f در آن مینیمم مطلق را به خود می‌گیرد. توجه می‌کنیم که، در واقع، $f(c)$ مینیمم مطلق f روی $\mathbb{R}$ است، زیرا برای هر $x\in\mathbb{R}$، اگر $x\in[-N,N]$، آنگاه

$$f(x)\ge f(c),$$

و اگر $x\notin[-N,N]$، آنگاه $|x|>N$ و لذا

$$f(x)>M=|f(0)|+1>f(0)\ge f(c). \blacksquare$$

(ب) بدون اینکه به کلّیت بحث خللی وارد شود می‌توانیم فرض کنیم $a_n>0$. چون $p(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد، پس n زوج است. اکنون توجه می‌کنیم که $q(x)$ نیز یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است و ضریب جملهٔ درجهٔ n آن نیز a_n است. پس مثبت بودن a_n و زوج بودن n ایجاب می‌کند که $\lim_{x\to\pm\infty} q(x)=+\infty$. در نتیجه، بنابر قسمت (الف)، $q(x)$ روی $\mathbb{R}$ مینیمم مطلق دارد. فرض می‌کنیم $q(c)$ این مینیمم مطلق باشد، در نتیجه $q'(c)=0$. امّا

$$\begin{aligned} q'(c)&=p'(c)+p''(c)+\cdots+p^{(n)}(c)+p^{(n+1)}(c)\\ &=p'(c)+p''(c)+\cdots+p^{(n)}(c)=q(c)-p(c), \end{aligned}$$

لذا، $q(c)=p(c)$. چون $p(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد، پس لزوماً $p(c)>0$ و در نتیجه $q(c)>0$. اکنون اینکه $q(c)$ مینیمم مطلق $q(x)$ است ایجاب می‌کند که $q(x)$ نیز ریشهٔ حقیقی ندارد. ■

سؤال ۵: با توجه به شکل $s+x$ برابر است با نصف اندازهٔ قطر مقوای به شکل مربع که طول ضلع آن $\sqrt{10}$ متر است. در نتیجه

$$s+x=\frac{1}{2}\sqrt{10+10}=\sqrt{5}.$$

پس حجم هر کدام از هرم‌های قابل ساخت بر حسب x برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(4x^2)\sqrt{s^2-x^2}&=\frac{4}{3}x^2\sqrt{\left(\sqrt{5}-x\right)^2-x^2}\\ &=\frac{4}{3}x^2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}. \end{aligned}$$

در نتیجه مقادیر تابع $V:\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$V(x)=\frac{4}{3}x^2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}$$

حجم هرم‌های مختلف را به دست می‌دهد. چون V در بازهٔ $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ تابعی پیوسته می‌باشد، لذا در این بازه ماکسیمم مطلق دارد. برای محاسبهٔ ماکسیمم مطلق تابع V در بازهٔ مذکور، توجه می‌کنیم که

$$V'(x)=\frac{4}{3}\left(2x\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}+\frac{-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}}x^2\right)$$

$$=\frac{4}{3}x\left(\frac{10-5\sqrt{5}\,x}{\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}}\right)$$

در این بازه به ازای $x=0$ و $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$ صفر می‌شود. چون $V(0)=0$، $V\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0$ و $V\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{16}{15}$، لذا ماکسیمم مطلق تابع V در بازهٔ $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ برابر است با $\frac{16}{15}$ که همان بیشترین حجمی است که یک هرم می‌تواند در بین هرم‌های ساخته شده داشته باشد. ■

سؤال ۶: تابع $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\ln(1+x)$ را در نظر می‌گیریم و چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ n تابع f حول صفر را محاسبه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که

$$f'(x)=\frac{0!}{(1+x)^1},$$

$$f''(x)=-\frac{1!}{(1+x)^2},$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

در نتیجه چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ n تابع f حول صفر برابر است با

$$\begin{aligned} p_n(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\ &\quad+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\ &=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

اکنون بنابر قضیهٔ تیلور می‌توانیم بنویسیم

$$\ln(1.1)=f(0.1)=p_n(0.1)+e_{n+1}(0.1)$$

که در آن

$$e_{n+1}(0.1)=(-1)^n\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

و $0<c<0.1$. پس به ازای هر n، $p_n(0.1)$ مقدار تقریبی $\ln(1.1)$ را به دست می‌دهد و خطای محاسبه عبارت است از:

$$|e_{n+1}(0.1)|=\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}<\frac{10^{-(n+1)}}{n+1}.$$

برای اینکه خطای محاسبه کمتر از 10^{-4} باشد، باید n طوری باشد که

$$\frac{10^{-(n+1)}}{n+1}<10^{-4}.$$

برای این منظور کمترین مقدار n برابر با ۳ است. پس، در واقع، $p_3(0.1)$ مقدار تقریبی $\ln(1.1)$ را با خطای کمتر از 10^{-4} به دست می‌دهد. این مقدار تقریبی برابر است با:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}=\frac{286}{3000}=\frac{143}{1500}\approx 0.0953. \blacksquare$$