سری :

سری :
همگرا ← سری به یک عدد میل کند
واگرا ← سری به ∞ میل می‌کند یا به چند مقدار

1) تعیین همگرایی
- 1) آزمون نسبت ← $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$
- 2) آزمون مقایسه : $f<g$ $\begin{cases} f \text{ واگرا} \to g \text{ واگرا} \\ g \text{ همگرا} \to f \text{ همگرا} \end{cases}$
- 3) آزمون متناوب : $\sum(-1)^n a_n$ $\begin{cases} ① \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ ② \text{ نزولی} \end{cases}$

2) بازه و شعاع همگرایی
- 1) آزمون ریشه : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$
- 2) آزمون نسبت * ← $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1}$ مهم

3) بسط
- 1) تیلور : $f(x-a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$
- 2) مک لورن : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه

(اذن دخول سری برای همگرایی ← $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

(نکته دبیرستان : حد در ∞ = $\frac{\text{بالاترین درجه صورت}}{\text{بالاترین درجه مخرج}}$)

(انتگرال و سری $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{x^p}$ ← $P=1$ ← واگرا) (برای $P<1$ هم واگراست)

(آزمون انتگرال ← اگر در تشخیص همگرایی واگرایی دچار مشکل شدید ایده خوبی است)

انتگرال :

(همگرا ← حاصل انتگرال یک عدد است) (واگرا ← حاصل انتگرال ∞ می‌شود)

ناسره نوع ۱ : $\int_a^{\infty}$ یا $\int_{-\infty}^{b}$ یا $\int_{-\infty}^{\infty}$

$\int\frac{1}{x^p}dx$ ← $\begin{cases} P>1 \to \text{ همگراست.} \\ P\leq 1 \to \text{ واگراست.} \end{cases}$

ناسره نوع ۱ است. همان مفهوم سری

ناسره نوع ۲ : $\int_a^b\frac{1}{x-a}$ یا $\int_a^b\frac{1}{x-b}$

$\int\frac{1}{x^p}dx$ ← $\begin{cases} P<1 \to \text{ همگراست.} \\ P\geq 1 \to \text{ واگراست.} \end{cases}$

* نکته : مهم‌ترین آزمون تشخیص همگرایی انتگرال ← مقایسه ← (مثل سری)

* بدترین حالت می‌گیم انتگرال است بعنوان یک ایده همیشگی *

تشخیص روش : «تشخیص همگرایی، واگرایی» #سری

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ آزمون ریشه $\equiv$ * $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

① وجود فاکتوریل ! ← آزمون نسبت

② عدم وجود فاکتوریل ← آزمون مقایسه ← سری $\frac{1}{x^p}$ < $p>1$ همگرا ، $p\leq 1$ واگرا

بزرگه همگرا ← کوچیکه همگرا
کوچیکه واگرا ← بزرگه واگرا

③ وجود e و $\ln$ ← آزمون انتگرال* ← حاصل انتگرال به جای سری < عدد ← همگرا ، ∞ ← واگرا

و هر کجا گیر کردید!

④ وجود $(-1)^n$ ← آزمون متناوب (لایبنیتز) a_n : ① $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ② نزولی باشد

مثال۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} \xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cancel{n!}(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{3n!}}}{\frac{\cancel{n!}\ \cancel{2n!}}{\cancel{3n!}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{صورت Max}}{\text{مخرج Max}} = \frac{(n)(2n)(2n)}{(3n)(3n)(3n)} = \frac{4}{27} < 1$ $\boxed{\text{همگرا}}$

مثال۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n\cdot(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{\text{صورت Max}}{\text{مخرج Max}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n} = 1$! (بی نتیجه) $\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/e}{n} = \frac{1}{e} < 1$ $\boxed{\text{همگرا}}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}}$ ارزی

مثال۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{آزمون مقایسه}} \sum \frac{1}{n^2}$ مقایسه با ، $\frac{1}{n^2} > \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$ | بزرگه همگراست ← کوچیکه همگراست

سری $\frac{1}{n^p}$ (P)
همگرا ← $P>1$

روش سریع

مثال۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} = \int_{x=1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ $\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{cases}$ $= \int_0^{\infty} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,du = \int_0^{\infty} u e^{-u}\,du$

بازم جهم تقری کنید

$dx = x\,du$ ، $e^u = x$ $\mapsto dx = e^u\,du$

$= -ue^{-u} - e^{-u}\Big|_0^{\infty}$

$= (0-0)-(-0-1) = 1$ عدد ← $\boxed{\text{همگراست}}$

مثال۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}}$ همو $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

$\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{cases} = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{du}{u^3}}_{\text{نامسره نوع دو}} = \int_0^{\infty} u^{-3}\,du = \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2u^2}\Big|_0^{\infty} = (0)-(-\infty) = \boxed{\infty}$ واگرا

واگرا ← $P>1$

مثال۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases}$ $= \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{\cancel{u}}\, 2\cancel{u}\,du$

$= 2\int_1^{\infty} e^{-u}\,du = -2e^{-u}\Big|_1^{\infty} = -2(\cancel{e^{-\infty}} - e^{-1}) = \frac{2}{e}$ عدد ← $\boxed{\text{همگراست}}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه

بازه همگرایی

① آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

② یافتن بازه برای x

③ چک کردن همگرایی و واگرایی نقاط ابتدا و انتهای بازه

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{x^n}}{(n+1)\cancel{3^n}\,3}}{\frac{\cancel{x^n}\cdot x^{-1}}{n\cancel{3^n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x| = \frac{1}{3}|x|$$

$\frac{\text{Max صورت}}{\text{Max مخرج}} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} \frac{1}{3}|x|<1 \rightarrow |x|<3 \rightarrow \boxed{-3<x<3}$

$\boxed{x=-3} \xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(-3)^{-1}}{n3^n} = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ آزمون متناوب

$a_n=\frac{1}{n}$ $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \frac{1}{n}\ \text{نزولی}\end{cases}$ $\rightarrow$ همگراست. (پس $x=-3$ ok است)

$\boxed{x=3} \xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{3^n}\cdot 3^{-1}}{n\cancel{3^n}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \rightarrow$ سری $\frac{1}{n^p}$ در $p=1$ واگراست $\rightarrow$ پس $x=3$ قبول نیست

$\boxed{R=\frac{b-a}{2}}$

بنابراین بازه همگرایی $-3\leq x<3$ و شعاع همگرایی $R=3$ است.

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\cdot x^{2n}}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\,2^{2n+2}\cdot x^{2n+2}}{2n+2}}{\frac{\cancel{(-1)^n}\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{2^{2n}}\cdot 2^2\cdot \cancel{x^{2n}}\cdot x^2}{2n+2}}{\frac{\cancel{2^{2n}}\cdot\cancel{x^{2n}}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+2}|x^2| = 4|x^2|$$

$(-1)^n$ داخل قدرمطلق ⊕ می‌شود

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} 4|x^2|<1 \rightarrow x^2<\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}}$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{2^{2n}}\cdot\cancel{(-\frac{1}{2})^{2n}}}{2n}\quad \frac{(-1)^{2n}}{\cancel{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2n} \rightarrow$ آزمون متناوب

$a_n=\frac{1}{n}$ $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \frac{1}{n}\ \text{نزولی}\end{cases}$ $\rightarrow$ همگراست $\rightarrow$ ($x=-\frac{1}{2}$ ok)

$\boxed{x=\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{2^{2n}}\cdot\cancel{(\frac{1}{2})^{2n}}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} \rightarrow$ مشابه قبلی $\rightarrow$ همگرا

بنابراین بازه همگرایی $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ و شعاع همگرایی $R=\frac{1}{2}$ است.

مسئله ۵. مقادیر x را به گونه ای تعیین کنید که سری زیر همگرا شود (۲۰نمره)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx^n}$$

مسئله ۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید (۲۰نمره)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{\ln(\ln n)}}{n(\ln n)}$$

مسئله ۷. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید (۲۰نمره)

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات

- ریاضی۱
- ریاضی۲
- معادلات دیفرانسیل
- ریاضیات مهندسی
- محاسبات عددی

سوال ۵ :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx^n}$ بازه همگرایی؟

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)x^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{nx^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left|\frac{1}{x}\right|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \to |x|>1 \quad \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{به ازای } x=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{آزمون متناوب}} a_n = \frac{1}{n} \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \text{نزولی} \end{cases} \longrightarrow$ همگرا

پس $x=1$ درست است.

$\xrightarrow{\text{به ازای } x=-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{سری } \frac{1}{x^p}}$ واگرا

پس $x=-1$ درست نیست

بنابراین بازه همگرایی برابر است با $(-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$

سوال ۶ :

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\ln(\ln n)}}{n(\ln n)} \xrightarrow[\text{آزمون انتگرال}]{\text{وجود Ln}} \int_2^{\infty} \frac{2^{\ln(\ln x)}}{x(\ln x)}\,dx$

تغییر متغیر $\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \xrightarrow{\text{بازه هم تغییر کند}} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{2^{\ln u}}{u}\,du$ تغییر متغیر $\begin{cases} \ln u = t \\ \frac{du}{u} = dt \end{cases} \xrightarrow{\text{بازه هم تغییر کند}}$

$= \int_{\ln(\ln 2)}^{\infty} 2^t\,dt$

$= \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^t \Big|_{\ln(\ln 2)}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} 2^{\infty} - \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{\ln(\ln 2)}$

$= \boxed{\infty}$ واگرا

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی
ریاضی۱و۲ و معادلات دیفرانسیل

سوال ۷:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}$$

دارای هر دو نوع ناسره گی ⟵ بازه را می‌شکنیم

$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}$ (ناسره نوع ۲) $\xrightarrow[\text{هم‌ارزی}]{\ln(1+x)\sim x}$ $\int_0^1 \frac{x}{x^3+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

مقایسه با $\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ که می‌شود $\int \sqrt{x}$ که در بازه ۰ و ۱ قطعاً همگراست

و چون $\frac{1}{x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}} < \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $\xleftarrow{\text{طبق آزمون مقایسه}}$ $\int_0^1 \frac{1}{x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ یا همان $\int_0^1 \frac{x}{x^3+\sqrt{x}}$ همگراست

$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}$ (ناسره نوع ۱) $<$ $\frac{1}{x^3}$ $\quad p=3>1$

چون $\int \frac{1}{x^3}$ همگراست $\xleftarrow[\text{مقایسه}]{\text{طبق آزمون}}$ $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}$ همگراست.

در نهایت مجموع دو عبارت همگرا می‌شود.

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی
ریاضی۱و۲ و معادلات دیفرانسیل
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی