

هفدهمین آزمون هم‌آهنگ جی‌پک

سلجی زمین را نجات می‌دهد!



طراحی از:

گروه کامپیوتر جی‌پک

توضیحات:

- آزمون شامل ۳ سوال کوتاه پاسخ است و مدت زمان پاسخ‌گویی، ۱۸۰ دقیقه می‌باشد. ساعت شروع آزمون نیز ۱۸:۰۰ می‌باشد.
- پاسخ‌های تان را قبل از ساعت ۲۱:۰۰ به صورت گفته‌شده در وبلاگ برای ما بفرستید.
- پاسخ تمام سوال‌ها یک عدد صحیح است.
- این آزمون نمره‌ی منفی ندارد.

با رنج فراوان، گنج پنهان آق‌جی‌پک را دزدیدیم و به زمین برگشتیم. حال آق‌جی‌پک که به شدت عصبانی شده، در این فکر است که به زمین حمله کند و به کل زمین را نابود کند. از قضا مایاها در گذشته تاریخ حمله را پیش‌بینی کرده بودند و آن را ۲۱ دسامبر ۲۰۱۲ (امروز!) تعیین کرده بودند. از آنجایی که آق‌جی‌پک بسیار قدرتمند است، مایاها تصور داشتند آق‌جی‌پک زمین را نابود می‌کند و دیگر بعد از این تاریخ، تاریخی را در نظر نگرفته‌اند و گفته‌اند زندگی انسان‌ها به پایان می‌رسد. آق‌جی‌پک ابتدا می‌خواست با روش‌های خیلی ساده (طوفان خورشیدی، هم‌تراز کردن مدارهای سیاره‌ها، شهاب‌سنگ و ...) زمین را نابود کند. اما سازمان ناسا تمام این‌ها را فهمید و آق‌جی‌پک به فکری عظیم دست زد. سوال‌ها را بخوانید تا ببینید چه می‌شود ...

• فلج مغزی!!!

آق‌جی‌پک تصمیم گرفت یک ویروس مغزی به زمین بفرستد. او از ابتدای میلاد مسیح (۲۰۱۲ سال پیش) روی این ویروس کار می‌کرد و پس از تلاش بسیار این ویروس را در سال ۱۹۵۹ به زمین فرستاد و در مدت کوتاهی، همه‌ی افراد زمین به این ویروس مبتلا شدند. قرار بود این ویروس تا روز ۲۱ دسامبر سال ۲۰۱۲ به انحطاط مغزی زمینیان ادامه دهد و در این روز، آق‌جی‌پک نقشه‌ی شومش را عملی کند! این ویروس باعث مبتلا شدن به بیماری "فلج مغزی" می‌شود. این ویروس فقط به ۳ دسته از افراد اثری ندارد. در ادامه ویژگی این ۳ دسته آمده است.

جدول "ویروسی" یک جدول $2^k \times 2^k$ است که سطرها و ستون‌های آن با شماره‌های $1, 2, 3, \dots, 2^k$ از بالا به پایین و ستون‌های آن نیز با شماره‌های $1, 2, 3, \dots, 2^k$ از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. در هر خانه از این جدول یک عدد صحیح نوشته شده است. عمل قرینه کردن یک جدول ویروسی یا شبه ویروسی به شکل زیر انجام می‌شود:

✓ ابتدا اعداد خانه‌های آن را نسبت به قطر اصلی (قطری که از بالا-چپ جدول به پایین-راست آن کشیده می‌شود)، قرینه می‌کنیم.

سپس اعداد خانه‌های آن را نسبت به قطر فرعی (قطری که از بالا-راست جدول به پایین-چپ آن کشیده می‌شود)، قرینه می‌کنیم.

سپس جدول را به ۴ تکه‌ی $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ تقسیم می‌کنیم و این اعمال را دوباره روی هر یک از آن‌ها انجام می‌دهیم. این کارها را

آن قدر انجام می‌دهیم تا به جدول‌های 1×1 برسیم.

عدد موجود در خانه‌ی سطر i ام و ستون j ام جدول را در ابتدا a_{ij} و در انتها b_{ij} در نظر بگیرید. رمز یک جدول ویروسی یا غیر ویروسی، مقدار

$$\sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^{2^k} (a_{ij} \times b_{ij})$$

پس از قرینه کردن است.

(الف) (۱۰ امتیاز) دسته‌ی اول از افرادی که ویروس بر آن‌ها اثری ندارد، "باهوش‌ها" هستند. این افراد قدرت خاصی ندارند و فقط از ویروس در امان هستند. این دسته از افراد رمز جدول ویروسی‌ای را می‌دانند که در آن $k = 5$ است (یعنی جدول 32×32 است) و همچنین در ابتدا در این جدول در خانه‌ی a_{ij} عدد $32(i-1) + j$ نوشته شده است. برای این که حداقل ثابت کنید باهوش هستید، رمز را به دست آورده و به عنوان پاسخ ارائه دهید.

(ب) (۱۰ امتیاز) دسته‌ی دوم از افرادی که ویروس بر آن‌ها اثری ندارد، "المپیادی‌ها" هستند. این افراد قدرت‌های خاصی دارند که خودتان بهتر می‌دانید! اولین نفری که وارد این دسته شد، یک رومانیایی بود که المپیاد را در سال ۱۹۵۹ پایه‌گذاری کرد. این دسته از افراد رمز جدول ویروسی‌ای را می‌دانند که در آن $k = 15$ است و همچنین در ابتدا در این جدول در خانه‌ی a_{ij} عدد $i + j$ نوشته شده است. برای آن که ثابت کنید المپیادی هستید، رمز را به دست آورده و آن را در پیمانه‌ی $7 + 10^9$ به عنوان پاسخ ارائه دهید. البته در ادامه‌ی توضیحات این قسمت باید

گفت امسال در دوره‌ی ۲۲ المپیاد کامپیوتر، فردی از افراد دوره ما را از بیماری فلج مغزی آگاه کرد!!!

(پ) (۲۰ امتیاز) دسته‌ی سوم از افرادی که ویروس بر آن‌ها اثری ندارد، "سلطان‌ها" هستند. این افراد قدرت‌های ویژه‌ای دارند که فقط خودشان می‌دانند! تا کنون فقط ۱ نفر به این مقام رسیده است. این فرد که به یقین مدال طلای ۱ دوره‌ی ۲۳ المپیاد کامپیوتر را خواهد گرفت، با فروتنی تمام خواسته تا نام اصلی‌اش را نگفته و فعلاً او را "سلجی" (سلطان جی‌پک) بنامیم. او پس از شکافتن دروازه‌های علم، قدم بر سر وجود نهاد و امروز صبح، ۱ ساعت قبل از اجرای نقشه‌ی شوم آق‌جی‌پک، سلطان شد! سلطان‌ها رمز جدول ویروسی‌ای را می‌دانند که در آن $k = 25$ است و

همچنین در ابتدا در این جدول در خانه‌ی a_{ij} عدد $j \times i$ نوشته شده است. شاید شما سلجی باشید. اگر واقعاً سلجی هستید، رمز را یافته و آن را در پیمانه‌ی $7 + 10^9$ به عنوان پاسخ ارایه دهید.

• سلجی زمین را نجات می دهد!!!

سلجی پس از گذشت ۵۰ دقیقه از سلطان شدنش به نقشه‌ی شوم آق‌جی پک پی برد و فهمید اگر دست به کار نشود، تا ۱۰ دقیقه‌ی بعدش زمین نابود خواهد شد. او که هر دقیقه دروازه‌ای جدید به علوم به روی جهانیان می‌گشاید و بر سبب ابدال بودنش، مفرح ذات و ممد حیات بودن ما را از وظایف خود می‌داند، دریافت که چگونه نیرنگ پلیدانه‌ی آق‌جی پک را بر باد دهد. او فهمید برای نجات جان n نفر از مردم کره‌ی زمین، باید بزرگ‌ترین عدد "سوپر اول" که از n بزرگ‌تر نیست را بیاید. این عدد را $f(n)$ می‌نامیم. توجه کنید یک عدد سوپر اول است اگر تمام جایگت‌های ارقام آن اول باشد؛ مثلاً ۱۷ سوپر اول است زیرا ۱۷ و ۷۱ اول هستند.

الف) (۱۰ امتیاز) سلجی برای دست‌گرمی تصمیم گرفت ۱۰۰ نفر از اعضای زمین را نجات دهد. عددی که سلجی با آن این کار را کرد $f(100)$ چند است؟

ب) (۲۰ امتیاز) سلجی برای نشان دادن اقتدار خود، تصمیم گرفت به جای یافتن $f(6 \times 10^9)$ برای نجات مردم زمین، $f(2^31 - 1)$ را بیابد تا روی این ملحد زندق (آق‌جی پک) را کم کند. شما هم این مقدار را حساب کنید تا بار دیگر ثابت کنید شاید خودتان سلجی هستید!

• مرگِ آق‌جی‌پک!!!

پس از نجاتِ مردمِ زمین در ظهرِ امروز (۲۱ دسامبر ۲۰۱۲)، باز هم آق‌جی‌پک از رونرفت و یک نقشه‌ی ۲۰۱۲ ساله‌ی دیگر برای ما کشید. سلجی برای آن که درسِ بزرگی به این پیرِ ایکبیری (آق‌جی‌پک) بدهد، تصمیم گرفت آق‌جی‌پک را بکشد. آق‌جی‌پک هم‌آندِ دیوهای شاه‌نامه، شیشه‌ی عمر دارد. اما لامذهب شیشه نیست که! الماسِ ۱۰۰٪ است و به هر کربن‌ش ۴ کربنِ دیگر متصل است و با هیچ ترکیبی واکنش نمی‌دهد و انرژیِ پیوندِ آن ∞ است! پس سلجی فهمید شیشه‌ی عمرِ آق‌جی‌پک به این راحتی‌ها نمی‌شکند! پس باید راهی سلطانانه جست‌وجو کرد. او فهمید آق‌جی‌پک یک جدولِ 3×3 مرموز دارد که در هر خانه از آن ۱ یا -۱ نوشته شده است. با زدنِ دکمه‌ی این جدول، هر خانه از این جدول به حاصل‌ضربِ اعدادِ مجاورش تبدیل می‌شود (همه‌ی اعداد هم‌زمان تبدیل می‌شوند). توجه کنید ۲ خانه مجاورند اگر ضلعِ مشترک داشته باشند. عددِ جدول که آن را g نشان می‌دهیم، برابر با تعداد دکمه‌هایی است که باید بزنی تا تمام اعدادِ جدول ۱ شوند.

الف) (۱۰ امتیاز) سلجی فهمید جدولِ مرموزِ آق‌جی‌پک به شکل زیر است:

-۱	۱	-۱
۱	-۱	۱
-۱	۱	-۱

او برای دست‌گرمی خواست بفهمد حداقل چند بار باید دکمه را بزنی تا به جدولی برسیم که تکراری باشد (یعنی در مراحلِ قبل ظاهر شده باشد). پاسخ را بیابید تا پا به پای سلجی پیش رفته باشید!

ب) (۲۰ امتیاز) او پس! سلجی گند زد! پس از این که به جدولِ تکراری رسیدیم، جدولِ مرموزِ آق‌جی‌پک از بین رفت ولی به جای آن تمام 2^9 جدولِ 3×3 ممکن با خانه‌های ۱ و -۱ ظاهر شدند. سلجی فهمید برای مرگِ آق‌جی‌پک باید مجموعِ g تمام این جدول‌ها را بیابد. سریع باشید! پاسخ را هر چه زودتر بفرستید که گند از این بیش‌تر نشود!

و بالاخره آق‌جی‌پک مرد!!! ادامه دارد ...