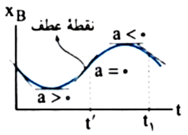
پاسخنامه تکلیف شماره ۴

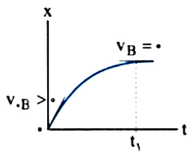
گام دوم به تعداد نقاط عطف روی نمودار مکان - زمان، شتاب متحرک صفر می‌باشد و علامت آن تغییر می‌کند. به شکل (ب) نگاه کنید. تا لحظهٔ t'، جهت تقعر نمودار رو به بالا است (*یعنی هر مماس رسم کنی، میفته پایین نمودار!*) و شتاب متحرک مثبت است. از لحظهٔ t' تا t_1، جهت تقعر نمودار رو به پایین است (*یعنی هر مماس رسم کنی، میفته بالای نمودار!*) و شتاب متحرک منفی است. در لحظهٔ t' جهت تقعر نمودار تغییر می‌کنه. به این نقطه چی می‌گفتیم؟ «نقطهٔ عطف». در این نقطه شتاب متحرک صفر و علامت آن تغییر می‌کند. نمودار $x-t$ متحرک B یک نقطهٔ عطف دارد. بنابراین، شتاب و نیروی خالص وارد بر آن یک بار صفر و سپس تغییر علامت می‌دهد.



(ب)

۱۴۹۲- گزینهٔ ۳ **گام اول** شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان سرعت متحرک را نشان می‌دهد. شیب نمودار A ثابت است؛ پس سرعت آن ثابت و شتاب متوسط آن در هر بازهٔ زمانی دلخواه صفر است.

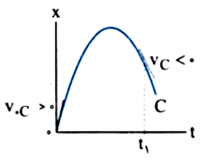
$$a_{av(A)}=\frac{\Delta v_A}{\Delta t}=\frac{v_A-v_{0A}}{\Delta t}=0$$



(الف)

گام دوم با توجه به شکل (الف) بزرگی شتاب متوسط متحرک B در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است با:

$$|a_{av(B)}|=\left|\frac{v_B-v_{0B}}{t_1-0}\right|=\left|\frac{0-v_{0B}}{t_1}\right|=\frac{v_{0B}}{t_1}\quad(I)$$



(ب)

گام سوم با توجه به شکل (ب)، بزرگی شتاب متوسط متحرک C در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است با:

$$|a_{av(C)}|=\left|\frac{v_C-v_{0C}}{t_1-0}\right|\xrightarrow{v_C<0,\,v_{0C}>0}|a_{av(C)}|=\frac{v_{0C}-v_C}{t_1}$$

v_C (شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان C در لحظهٔ t_1) منفی است؛ پس می‌توانیم بگوییم:

$$|a_{av(C)}|=\frac{v_{0C}+|v_C|}{t_1}\quad(II)$$

گام چهارم شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان C در مبدأ زمان بزرگ‌تر از شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان B در مبدأ زمان است؛ یعنی سرعت اولیهٔ C بزرگ‌تر از سرعت اولیهٔ B است:

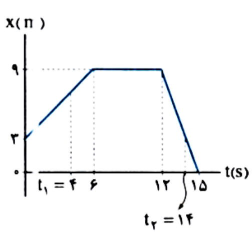
$$v_{0C}>v_{0B}\xrightarrow{(II,I)}\frac{v_{0C}+|v_C|}{t_1}>\frac{v_{0B}}{t_1}\Rightarrow|a_{av(C)}|>|a_{av(B)}|$$

نکته در نمودار $(x-t)$ در یک بازهٔ زمانی معین و یکسان، هر چه گودی (تقعر) نمودار بیشتر باشد، شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی بیشتر است.

تیزهوش در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1، گودی نمودار C بیشتر از نمودار B و گودی نمودار B بیشتر از نمودار A است (در واقع نمودار A اصلاً گودی ندارد) بنابراین:

$$|a_{av(C)}|>|a_{av(B)}|>|a_{av(A)}|$$

۱۴۹۳- گزینهٔ ۳ **گام اول** وقتی نمودار مکان - زمان متحرک به شکل یک خط راست است، سرعت متحرک ثابت و برابر شیب نمودار است. بنابراین، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1=4\,s$ برابر شیب نمودار در بازهٔ زمانی صفر تا $6\,s$ است.



$$v_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{9-3}{6-0}=\frac{6}{6}=1\,m/s$$

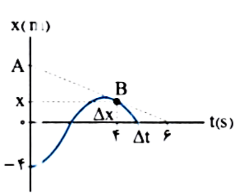
با همین استدلال، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2=14\,s$ برابر شیب نمودار در بازهٔ زمانی $12\,s$ تا $15\,s$ است.

$$v_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{0-9}{15-12}=\frac{-9}{3}=-3\,m/s$$

گام دوم شتاب متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{-3-1}{14-4}=-0/4\,m/s^2\Rightarrow|a_{av}|=0/4\,m/s^2$$

۱۴۹۴- گزینهٔ ۳ **گام اول** سرعت اولیهٔ متحرک صفر و سرعت آن در لحظهٔ $t=4\,s$ منفی است؛ (شیب مماس بر نمودار در نقطهٔ B منفی است.) پس شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $4\,s$ منفی است و سرعت در لحظهٔ $t=4\,s$ به این صورت به دست می‌آید:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{t-t_0}\Rightarrow-0/5=\frac{v-0}{4-0}\Rightarrow v=-2\,m/s$$

گام دوم سرعت متحرک در لحظهٔ $t=4\,s$ برابر شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه، یعنی شیب پاره‌خط AB، است. با توجه به مثلث مشخص‌شده در شکل، مکان متحرک در لحظهٔ $t=4\,s$ را حساب می‌کنیم:

$$v=\text{شیب }AB\Rightarrow-2=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow-2=\frac{0-x}{6-4}\Rightarrow x=4\,m$$

گام سوم محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $4\,s$:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-t_0}=\frac{4-(-4)}{4-0}=\frac{8}{4}=2\,m/s$$

۱۴۹۵- گزینهٔ ۱ روش اول: **گام اول** v را به دست می‌آوریم:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{36-6}{20-5}=\frac{30}{15}=2\,m/s$$

گام دوم حالا نوبت x_0 است؛ کافی است یکی از مختصات $(t_1=5\,s, x_1=6\,m)$ یا $(t_2=20\,s, x_2=36\,m)$ را در معادلهٔ مکان - زمان جسم قرار دهیم.

$$x=vt+x_0=2t+x_0\Rightarrow x_1=2t_1+x_0\Rightarrow 6=2\times5+x_0\Rightarrow x_0=6-10=-4\,m\Rightarrow x=2t-4$$

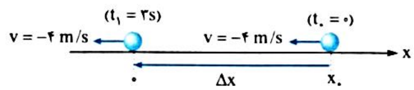
روش دوم: مختصات داده‌شده را در معادلهٔ مکان - زمان متحرک قرار می‌دهیم و به دو معادله ـ دو مجهول می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_1 = vt_1 + x_0 \Rightarrow ۶ = v\times ۵ + x_0 \\ x_2 = vt_2 + x_0 \Rightarrow ۳۶ = v \times ۲۰ + x_0 \end{cases} \Rightarrow ۳۶ - ۶ = (۲۰v + x_0) - (۵v + x_0) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵v \Rightarrow v = ۲\,m/s$$

$$۶ = ۵v + x_0 = ۵\times ۲ + x_0 \Rightarrow x_0 = ۶ - ۱۰ = -۴\,m \Rightarrow x = ۲t - ۴$$

تیزباش هر دوتا مختصات داده‌شده باید در معادلهٔ مکان - زمان متحرک صدق کنند. مختصات $(t_1 = ۵\,s, x_1 = ۶\,m)$ فقط در (۱) و (۳) و مختصات $(t_2 = ۲۰\,s, x_2 = ۳۶\,m)$ فقط در (۱) و (۴) صدق می‌کنند. پس (۱) به درستی مکان متحرک را در همهٔ لحظه‌ها نشان می‌دهد.

۱۴۹۶- گزینهٔ ۳ متحرک فقط $۳\,s$ در مکان‌های مثبت بوده؛ نتیجه می‌گیریم در لحظهٔ $t = ۳\,s$ به مبدأ می‌رسد و از این لحظه به بعد وارد مکان‌های منفی می‌شود. با این حساب، نحوهٔ حرکت متحرک مطابق شکل روبه‌رو است. جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیهٔ اول را با Δx نشان داده‌ایم.

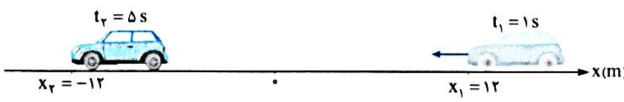


$$\Delta x = v\Delta t$$

$$۰ - x_0 = -۴\times ۳ \Rightarrow x_0 = ۱۲\,m \Rightarrow x = vt + x_0 = -۴t + ۱۲$$

تیزباش با توجه به توصیف حرکت متحرک در صورت تست، متحرک از قسمت مثبت محور با سرعت ثابت به قسمت منفی محور می‌رود. یعنی در ابتدا در قسمت مثبت محور قرار دارد $(x_0 > ۰)$ و با سرعت منفی حرکت می‌کند $(v < ۰)$. این دو مورد فقط در معادلهٔ (۳) رعایت شده است.

۱۴۹۷- گزینهٔ ۳ **گام اول** متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و دو بار از ۱۲ متری مبدأ عبور کرده؛ پس حتماً بار اول از مکان $x_1 = ۱۲\,m$ و بار دوم از مکان $x_2 = -۱۲\,m$ عبور کرده است. سرعت متوسط متحرک در این مدت برابر است با:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-۱۲ - ۱۲}{۵ - ۱} = \frac{-۲۴}{۴} = -۶\,m/s$$

گام دوم معادلهٔ حرکت متحرک به صورت روبه‌رو تعیین می‌شود:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{v = v_{av} = -۶\,m/s} x = -۶t + x_0$$

یکی از مختصات (t_1, x_1) یا (t_2, x_2) را در معادلهٔ بالا قرار دهید تا x_0 به دست آید:

$$x_1 = -۶t_1 + x_0 \Rightarrow ۱۲ = -۶\times ۱ + x_0 \Rightarrow x_0 = ۱۸\,m$$

تیزباش متحرک در مدت $۴\,s$ (t_1 تا t_2) از مکان $x_1 = ۱۲\,m$ به مکان $x_2 = -۱۲\,m$ می‌رود و $-۲۴\,m$ یا به عبارتی در هر ثانیه $-\frac{۲۴}{۴} = -۶\,m$ جابه‌جا می‌شود. پس یک ثانیه قبل از لحظهٔ t_1 (یعنی در لحظهٔ $t = ۰$) در فاصلهٔ ۶ متری از x_1 و سمت راست آن، یعنی در مکان $x_0 = ۱۸\,m$ قرار دارد.

۱۴۹۸- گزینهٔ ۳ تغییر مکان، یعنی جابه‌جایی. جابه‌جایی متحرک را در $۲\,s$ حساب کنید!

$$\Delta x = v\Delta t = ۱۲\Delta t = ۱۲\times ۲ = ۲۴\,m$$

⚠ مکان اولیهٔ متحرک هیچ نقشی در مقدار جابه‌جایی آن ندارد.

۱۴۹۹- گزینهٔ ۴ سرعت متحرک $-۲\,m/s$ و تندی آن $۲\,m/s$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} x = -۲t + ۴ \\ x = vt + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = -۲\,m/s \xrightarrow{s = |v|} s = ۲\,m/s \Rightarrow l = s\Delta t = ۲\times ۵ = ۱۰\,m$$

۱۵۰۰- گزینهٔ ۲ چون x تابع درجه‌اول از زمان است، سرعت متحرک ثابت است. از مقایسهٔ معادلهٔ داده‌شده با فرم کلی معادلهٔ مکان - زمان در حرکت یکنواخت بر خط راست $(x = vt + x_0)$ می‌فهمیم سرعت متحرک $۲/۵\,m/s$ است و سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی که شما بگید، ثابت و برابر با $۲/۵\,m/s$ است!

۱۵۰۱- گزینهٔ ۲ در حرکت با سرعت ثابت، متحرک در هر ثانیه به یک اندازه جابه‌جا می‌شود. مثلاً سرعت این متحرک $۴/۲\,m/s$ است که نشان می‌دهد متحرک در هر ثانیه (مهم نیست کدام ثانیه) $۴/۲\,m$ و در هر ۳ ثانیه (مهم نیست کدام ۳ ثانیه) $۳\times ۴/۲\,m$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\text{جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ پنجم}}{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ اول}} = \frac{۳\times ۴/۲}{۱\times ۴/۲} = ۳$$

۱۵۰۲- گزینهٔ ۲ جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیهٔ اول، دوم، سوم و هر ۴ ثانیهٔ دیگری برابر است با:

$$\Delta x = v\Delta t = v\times ۴ = ۴v$$

جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی ۲ ثانیه‌ای (مثل ۲ ثانیهٔ چهارم) برابر است با:

$$\Delta x' = v\Delta t' = v\times ۲ = ۲v$$

فرض تست: $\Delta x - \Delta x' = ۸ \Rightarrow ۴v - ۲v = ۸ \Rightarrow ۲v = ۸ \Rightarrow v = ۴\,m/s$

۱۵۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا تندی متحرک را برحسب متر بر ثانیه به دست می‌آوریم:

$$۹۰\,km/h = \frac{۹۰}{۳/۶}\,m/s = ۲۵\,m/s$$

مسافت طی‌شده توسط خودرو در مدت $۰/۵\,s$ برابر است با:

$$l = s\Delta t = ۲۵\times ۰/۵ = ۱۲/۵\,m$$

۱۵۰۴- گزینهٔ ۱ همهٔ امواج الکترومغناطیسی با تندی نور در خلأ منتشر می‌شوند. فرض کنید فاصلهٔ ایستگاه تا ماهواره d باشد؛ تپ در مدت $\Delta t = \frac{۰/۲۴}{۲} = ۰/۱۲\,s$ این فاصله را با سرعت $v = ۳\times ۱۰^۸\,m/s$ طی می‌کند؛ بنابراین:

$$d = v\Delta t = ۳\times ۱۰^۸ \times ۰/۱۲ = ۳/۶\times ۱۰^۷\,m = ۳/۶\times ۱۰^۴\,km$$

۱۵۰۵- گزینهٔ ۲ طبق محاسبات زیر، اگر ترن بدون توقف حرکت می‌کرد، پس از ۴/۵ ساعت به مقصد می‌رسید.

$$l = s\Delta t \xrightarrow{s=۲۵\ m/s=۹۰\ km/h} ۴۰۵ = ۹۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۴/۵\ h$$

ترن $۴/۵\ h$ با تندی ثابت $۲۵\ m/s$ حرکت کرده است ولی پس از ۵ ساعت به مقصد رسیده؛ پس در مجموع $۰/۵\ h$ هم در طول راه توقف داشته است.

$$\Delta t' = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵\ h = ۰/۵ \times ۶۰\ min = ۳۰\ min$$ (زمان توقف)

۱۵۰۶- گزینهٔ ۴ به کمک معادلهٔ حرکت یکنواخت داریم:

$$l = s\Delta t \Rightarrow \begin{cases} l = s \times ۱۰ \\ l = (s+۵) \times ۸ \end{cases} \Rightarrow ۱۰s = ۸s + ۴۰ \Rightarrow ۲s = ۴۰ \Rightarrow s = ۲۰\ m/s$$

۱۵۰۷- گزینهٔ ۴ **گام اول** زمان حرکت قطار در حالت دوم ۲۰٪ کم‌تر از زمان حرکت قطار در حالت اول است؛ بنابراین:

$$\Delta t_۲ = \Delta t_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰}\Delta t_۱ = \frac{۴}{۵}\Delta t_۱$$

به کمک معادلهٔ حرکت یکنواخت به صورت نسبتی داریم:

$$\ell = s\Delta t \Rightarrow \frac{\ell_۲}{\ell_۱} = \frac{s_۲}{s_۱} \times \frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱} \xrightarrow{\ell_۲=\ell_۱} ۱ = \frac{s_۲}{s_۱} \times \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{s_۲}{s_۱} = \frac{۵}{۴}$$

گام دوم درصد افزایش تندی قطار برابر است با:

$$\frac{\Delta s}{s_۱} \times ٪۱۰۰ = \frac{\frac{۵}{۴}s_۱ - s_۱}{s_۱} \times ٪۱۰۰ = \frac{۱}{۴} \times ٪۱۰۰ = ٪۲۵$$

۱۵۰۸- گزینهٔ ۳ **گام اول** فرض کنید فاصلهٔ بین دو شهر l و زمانی که قطار باید این فاصله را طی کند Δt باشد. در حالتی که قطار با تندی $s_۱ = ۷۲\ km/h$ حرکت می‌کند، قطار در مدت $\Delta t_۱$ به مقصد می‌رسد. $\Delta t_۱$، $۲\ h$ بیشتر از Δt است.

$$l = s_۱\Delta t_۱ = ۷۲(\Delta t + ۲) \quad (I)$$

و در حالتی که قطار با تندی $s_۲ = ۱۰۸\ km/h$ حرکت می‌کند، قطار در مدت $\Delta t_۲$ به مقصد می‌رسد. $\Delta t_۲$، $۱\ h$ کم‌تر از Δt است.

$$l = s_۲\Delta t_۲ = ۱۰۸(\Delta t - ۱) \quad (II)$$

از مقایسهٔ (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

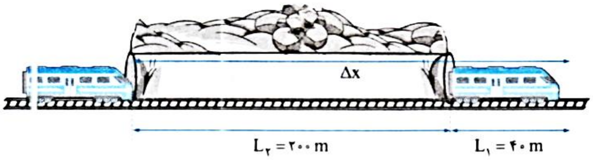
$$۷۲(\Delta t + ۲) = ۱۰۸(\Delta t - ۱) \Rightarrow \frac{\Delta t + ۲}{\Delta t - ۱} = \frac{۱۰۸}{۷۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\Delta t + ۴ = ۳\Delta t - ۳ \Rightarrow \Delta t = ۷\ h$$

پس اگر قطار در مدت $۷\ h$ به مقصد برسد، کسی رانندهٔ آن را بابت زودآمدن یا دیرآمدن مؤاخذه نمی‌کند!

گام دوم فاصلهٔ بین دو شهر را از رابطه‌های (I) یا (II) حساب می‌کنیم:

$$l = ۷۲(\Delta t + ۲) = ۷۲(۷ + ۲) = ۶۴۸\ km$$

۱۵۰۹- گزینهٔ ۴ مطابق شکل روبه‌رو، وقتی می‌توانیم مدعی شویم که قطار به طور کامل از تونل عبور کرده که همهٔ نقاط آن از تونل رد شده باشند و قطار مسافتی به اندازهٔ مجموع طول خود و طول تونل را طی کند. اگر طول قطار را با $L_۱$ و طول تونل را با $L_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه:

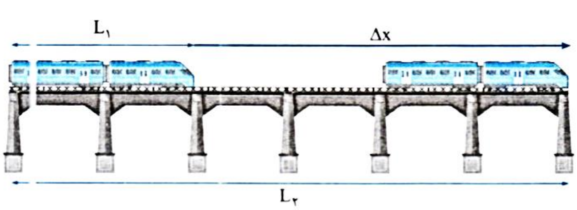


$$\Delta x = L_۱ + L_۲ = ۴۰ + ۲۰۰ = ۲۴۰\ m \quad , \quad \Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۲۴۰ = ۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۱۲\ s$$

۱۵۱۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید قطار اول در مدت $t_۱ = ۲\ min$ و قطار دوم در مدت $t_۲ = ۳\ min$ به طور کامل از روی پل عبور کنند؛ در این صورت (طول پل را برابر x در نظر گرفتیم):

$$\begin{cases} L + x = v_۱t_۱ \\ ۲L + x = v_۲t_۲ \end{cases} \xrightarrow{v_۱=v_۲} \frac{L+x}{۲L+x} = \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳(L+x) = ۲(۲L+x) \Rightarrow ۳L + ۳x = ۴L + ۲x \Rightarrow L = x$$

۱۵۱۱- گزینهٔ ۲ شکل روبه‌رو اولین لحظه و آخرین لحظه‌ای را نشان می‌دهد که کل قطار روی پل بوده است. اگر طول قطار $L_۱$ و طول پل $L_۲$ باشد، جابه‌جایی قطار در مدتی که کاملاً روی پل بوده برابر خواهد بود با:



$$\Delta x = L_۲ - L_۱ = ۲۰۰ - ۴۰ = ۱۶۰\ m$$

و زمان لازم برای این جابه‌جایی:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۱۶۰ = ۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۸\ s$$

۱۵۱۲- گزینهٔ ۲ جابه‌جایی متحرک را در قسمت اول مسیر با $\Delta x_۱$ و در قسمت دوم با $\Delta x_۲$ نشان می‌دهیم، داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{v_۱\Delta t_۱ + v_۲\Delta t_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{۲۰ \times ۳ + ۱۰ \times ۲}{۳ + ۲} = \frac{۸۰}{۵} \Rightarrow v_{av} = ۱۶\ m/s$$

۱۵۱۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

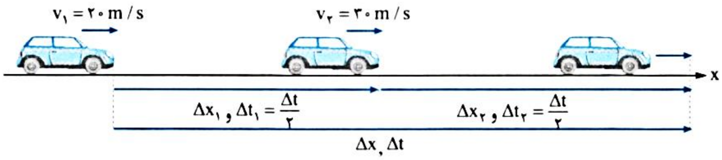
$$v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{v_۱\Delta t_۱ + v_۲\Delta t_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} \Rightarrow ۲۰ = \frac{۱۰t_۱ + ۴۰t_۲}{t_۱ + t_۲} \Rightarrow ۲۰t_۱ + ۲۰t_۲ = ۱۰t_۱ + ۴۰t_۲ \Rightarrow ۱۰t_۱ = ۲۰t_۲ \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲} = ۲$$

۱۵۱۴- گزینهٔ ۲ **روش اول:** **گام اول** جابه‌جایی متحرک در کل مسیر را با Δx و زمان حرکت را با Δt نشان می‌دهیم. زمان حرکت را به دو نیمه تقسیم می‌کنیم. متحرک نیمهٔ اول را $(\Delta t_۱ = \frac{\Delta t}{۲})$ با سرعت $v_۱ = ۲۰\ m/s$ و نیمهٔ دوم $(\Delta t_۲ = \frac{\Delta t}{۲})$ را با سرعت $v_۲ = ۳۰\ m/s$ طی می‌کند. اگر جابه‌جایی متحرک در این دو نیمه را به ترتیب با $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ نشان دهیم، داریم:

$$\Delta x_۲ = v_۲\Delta t_۲ = ۳۰\frac{\Delta t}{۲} = ۱۵\Delta t \quad , \quad \Delta x_۱ = v_۱\Delta t_۱ = ۲۰\frac{\Delta t}{۲} = ۱۰\Delta t$$

گام دوم با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t} = \frac{۱۰\Delta t + ۱۵\Delta t}{\Delta t} = ۱۰ + ۱۵ = ۲۵\ m/s$$



روش دوم: به سطر نهایی پاسخ در روش اول توجه کنید. زمان حرکت متحرک تأثیری در جواب نهایی ندارد و مقدار آن هر چه باشد، باز به جواب درست می‌رسیم. پس می‌توانیم برای Δt یک مقدار دلخواه انتخاب کنیم و اصطلاحاً با روش عددگذاری به جواب برسیم. به Δt یک مقدار عددی بدهید. مثلاً $۱۰\ s$ که نصفش می‌شود $۵\ s$. بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta x_۱ = v_۱\Delta t_۱ = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰\ m \\ \Delta x_۲ = v_۲\Delta t_۲ = ۳۰ \times ۵ = ۱۵۰\ m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t} = \frac{۱۰۰ + ۱۵۰}{۱۰} = \frac{۲۵۰}{۱۰} = ۲۵\ m/s$$

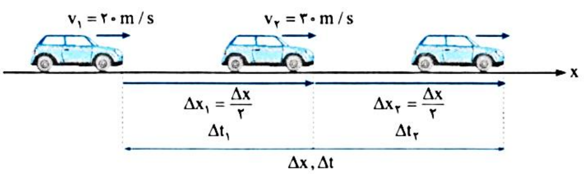
نکته **اگر متحرکی مسیر را در n بازهٔ زمانی مساوی به ترتیب با سرعت‌های ثابت $v_۱$ ، $v_۲$ ، ..... و v_n در یک جهت طی کند، سرعت متوسط آن در کل مسیر برابر میانگین سرعت‌های آن است:**

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n}{n}$$

تیزباش برای تست بالا می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} = \frac{۲۰ + ۳۰}{۲} = ۲۵\ m/s$$

۱۵۱۵- گزینهٔ ۱ **روش اول:** **گام اول:** جابه‌جایی متحرک در طول مسیر را با Δx و زمان جابه‌جایی را با Δt نشان می‌دهیم. متحرک نیمهٔ اول مسیر $(\Delta x_۱ = \frac{\Delta x}{۲})$ را با سرعت $v_۱ = ۲۰\ m/s$ و نیمهٔ دوم $(\Delta x_۲ = \frac{\Delta x}{۲})$ را با سرعت $۳۰\ m/s$ طی می‌کند. بنابراین:



$$\Delta x_۱ = v_۱\Delta t_۱ \Rightarrow \frac{\Delta x}{۲} = ۲۰\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta t_۱ = \frac{\Delta x}{۴۰} \quad , \quad \Delta x_۲ = v_۲\Delta t_۲ \Rightarrow \frac{\Delta x}{۲} = ۳۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲ = \frac{\Delta x}{۶۰}$$

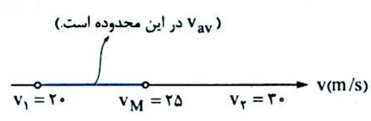
گام دوم به کمک رابطهٔ سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۴۰} + \frac{\Delta x}{۶۰}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴۰} + \frac{۱}{۶۰}} = ۲۴\ m/s$$

روش دوم: طراح تست طول مسیر را مشخص نکرده؛ یعنی مسیر برایش مهم نبوده است! پس برای ما هم نباید مهم باشد و طول مسیر هر چه باشد، باید به جواب برسیم. پس می‌تونیم به Δx یک عدد دلخواه نسبت بدهیم. عددی که نصفش به راحتی به ۲۰ و ۳۰ ساده بشه؛ مثلاً $۱۲۰\ m$.

$$\begin{cases} \Delta x_۱ = v_۱\Delta t_۱ \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۲} = ۲۰\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta t_۱ = ۳\ s \\ \Delta x_۲ = v_۲\Delta t_۲ \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۲} = ۳۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲ = ۲\ s \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{۱۲۰}{۳ + ۲} = \frac{۱۲۰}{۵} = ۲۴\ m/s$$

تیزباش **سرعت متوسط متحرکی که نیمی از زمان حرکت خود را با سرعت $v_۱ = ۲۰\ m/s$ و نیم دیگر را با سرعت $v_۲ = ۳۰\ m/s$ طی می‌کند، در کل مسیر $۲۵\ m/s$ می‌شود. در این تست، متحرک نیمی از مسیر را با سرعت $v_۱ = ۲۰\ m/s$ و نیم دیگر را با سرعت $۳۰\ m/s$ طی کرده است. واضح است که زمان بیشتری را با سرعت کم‌تر $(v_۱ = ۲۰\ m/s)$ حرکت کرده است (چرا؟) پس سرعت متوسط به $v_۱ = ۲۰\ m/s$ نزدیک‌تر است تا $v_۲ = ۳۰\ m/s$ و تنها گزینهٔ قابل پذیرش ۱ است! این را گفتیم تا همیشه به گزینه‌ها هم توجه کنید.**



۱۵۱۶- گزینهٔ ۱ **گام اول** با توجه به اطلاعات تست می‌توان نوشت:

$$\Delta x_۱ = v_۱\Delta t_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳}\Delta x = ۶۰\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta t_۱ = \frac{۱}{۱۸۰}\Delta x$$

$$\Delta x_۲ = v_۲\Delta t_۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳}\Delta x = ۳۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲ = \frac{۲}{۹۰}\Delta x$$

گام دوم به کمک رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{\Delta x}{\frac{۱}{۱۸۰}\Delta x + \frac{۲}{۹۰}\Delta x} = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۸۰} + \frac{۲}{۹۰}} = \frac{۱}{\frac{۱ + ۴}{۱۸۰}} = \frac{۱۸۰}{۵} = ۳۶\ m/s$$

۱۵۱۷- گزینهٔ ۴ رابطهٔ سرعت متوسط را برای این حرکت می‌نویسیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{vt + (۲v) \times (۳t)}{t + ۳t} = \frac{vt + ۶vt}{۴t} = \frac{۷}{۴}v = ۱/۷۵v$$

تیزباش متحرک زمان بیشتری را با سرعت ۲v حرکت کرده است. پس سرعت متوسط به ۲v نزدیک‌تر است تا v و تنها گزینهٔ قابل قبول، ۴ است.

۱۵۱۸- گزینهٔ ۳ جابه‌جایی متحرک را در t ثانیهٔ اول با $\Delta x_۱$ و در t ثانیهٔ بعد با $\Delta x_۲$ نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} v_{av}=\dfrac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\dfrac{v_۱\Delta t_۱+v_۲\Delta t_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\dfrac{vt+(-۲v)t}{t+t}=\dfrac{-vt}{۲t}=\dfrac{-v}{۲}\Rightarrow |v_{av}|=\dfrac{v}{۲} \\ s_{av}=\dfrac{l_۱+l_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\dfrac{|v_۱\Delta t_۱|+|v_۲\Delta t_۲|}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\dfrac{vt+۲vt}{t+t}=\dfrac{۳vt}{۲t}=\dfrac{۳v}{۲} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{s_{av}}{|v_{av}|}=۳ \xrightarrow{|v_{av}|=۵m/s} s_{av}=۳\times ۵=۱۵\,m/s$$

۱۵۱۹- گزینهٔ ۲ *قبول دارید زمان رفت ($\Delta t_۱$) از زمان برگشت ($\Delta t_۲$) کوتاه‌تره؟! پس:*

$$\Delta t_۲-\Delta t_۱=۱۵\,\min=\frac{۶۰}{۴}\,\min=\frac{۱}{۴}\,h$$

فاصلهٔ دو شهر را با l نشان می‌دهیم:

$$l=s\Delta t \Rightarrow \Delta t=\frac{l}{s}$$

$$\Delta t_۲-\Delta t_۱=\frac{۱}{۴}h \Rightarrow \frac{l}{s_۲}-\frac{l}{s_۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{l}{۶۰}-\frac{l}{۹۰}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۳l-۲l}{۱۸۰}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow l=\frac{۱۸۰}{۴}=۴۵\,km$$

۱۵۲۰- گزینهٔ ۳ **گام اول** دو هواپیما یک مسیر را طی می‌کنند و به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند:

$$\Delta x_۱=\Delta x_۲$$

$$v_۱\Delta t_۱=v_۲\Delta t_۲ \Rightarrow ۱۰۸۰\times ۲=۹۰۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲=۲/۴\,h$$

گام دوم اختلاف زمانی رسیدن دو هواپیما برابر است با:

$$\Delta t_۲-\Delta t_۱=۲/۴-۲=۰/۴\,h=۰/۴\times ۶۰\,\min=۲۴\,\min$$

۱۵۲۱- گزینهٔ ۱ **گام اول** فاصلهٔ بین دو شهر را حساب می‌کنیم:

$$l=s_۱\Delta t_۱ \xrightarrow{\Delta t_۱=۱h=۳۶۰۰s} l=۲۰\times ۳۶۰۰=۷۲\times ۱۰^۳\,m$$

گام دوم اتومبیل دومی همین فاصله را در ۵۰ دقیقه طی می‌کند:

$$\Delta t_۲=\Delta t_۱-۱۰\,\min=۶۰\,\min-۱۰\,\min=۵۰\,\min=۵۰\times ۶۰\,s=۳\times ۱۰^۳\,s$$

$$l=s_۲\Delta t_۲ \Rightarrow ۷۲\times ۱۰^۳=s_۲\times ۳\times ۱۰^۳ \Rightarrow s_۲=۲۴\,m/s$$

۱۵۲۲- گزینهٔ ۳ در شکل روبه‌رو اتومبیل کندتر را با (۱) و اتومبیل سریع‌تر را با (۲) نشان داده‌ایم. هر دو اتومبیل از A تا B جابه‌جا می‌شوند؛ پس به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند: $\Delta x_۱=\Delta x_۲=\overline{AB}$

اما واضح است که اتومبیل کندتر دیرتر می‌رسد؛ یعنی زمان حرکت اتومبیل (۱)، ۲ دقیقه بیشتر از زمان حرکت اتومبیل (۲) است.

$$\Delta t_۱=\Delta t_۲+۲\,\min=\Delta t_۲+۲\times ۶۰\,s=\Delta t_۲+۱۲۰\,s$$

$$\Delta x_۱=\Delta x_۲ \Rightarrow v_۱\Delta t_۱=v_۲\Delta t_۲ \Rightarrow ۲۰\Delta t_۱=۲۵\Delta t_۲ \Rightarrow ۲۰(\Delta t_۲+۱۲۰)=۲۵\Delta t_۲ \Rightarrow ۲۰\Delta t_۲+۲۰\times ۱۲۰=۲۵\Delta t_۲$$

$$\Rightarrow ۵\Delta t_۲=۲۰\times ۱۲۰ \Rightarrow \Delta t_۲=۴۸۰\,s$$

گام دوم طول AB برابر است با:

$$\Delta x_۲=v_۲\Delta t_۲=۲۵\times ۴۸۰=۱۲۰۰۰\,m=۱۲\,km$$

۱۵۲۳- گزینهٔ ۲ هواپیمای کندتر ظرف ۳ h به مقصد می‌رسد:

$$l=s_۱\Delta t_۱ \Rightarrow ۳۰۰۰=۱۰۰۰\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta t_۱=۳\,h$$

پرواز هواپیمای سریع‌تر ۲/۵ h طول می‌کشد:

$$l=s_۲\Delta t_۲ \Rightarrow ۳۰۰۰=۱۲۰۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲=۲/۵\,h$$

خب؛ در چه صورتی دومی هم‌زمان با اولی به فرودگاه می‌رسد؟ در صورتی که دومی با ۰/۵ h تأخیر نسبت به هواپیمای اولی به پرواز درآمده باشد:

$$\Delta t=\Delta t_۱-\Delta t_۲=۳-۲/۵=۰/۵\,h=۳۰\,\min$$

۱۵۲۴- گزینهٔ ۳ **گام اول** زمان لازم برای رسیدن متحرک‌ها به مقصد برابر است با:

$$\Delta x=vt \Rightarrow \Delta x_A=v_At_A \Rightarrow ۲۴۰=۱۰\times t_A \Rightarrow t_A=۲۴\,s$$

$$\Delta x_B=v_Bt_B \Rightarrow ۲۴۰=۱۲\times t_B \Rightarrow t_B=۲۰\,s$$

گام دوم پس در لحظه‌ای که متحرک B به مقصد رسیده، متحرک A هنوز به ۴ ثانیه زمان نیاز دارد تا به مقصد برسد. در این لحظه فاصلهٔ دو متحرک از هم بیشینه بوده و برابر است با:

$$\Delta x_{max}=v_A\times(t_A-t_B) \Rightarrow \Delta x_{max}=۱۰\times(۲۴-۲۰)=۴۰\,m$$

۱۵۲۵- گزینهٔ ۴ **روش اول:** دو متحرک به اندازهٔ مجموع مسافت‌هایی که طی می‌کنند، از هم دور می‌شوند.

$$l=l_۱+l_۲=|v_۱|\Delta t+|v_۲|\Delta t=(|v_۱|+|v_۲|)\Delta t=(۱۰+۱۲)\times ۲۰=۲۲\times ۲۰ \Rightarrow l=۴۴۰\,m$$

روش دوم: همان راه‌حل بالا است، به زبان نسبی! سرعت نسبی دو متحرک می‌شود:

$$v_{\text{نسبی}}=۱۰+۱۲=۲۲\,m/s$$

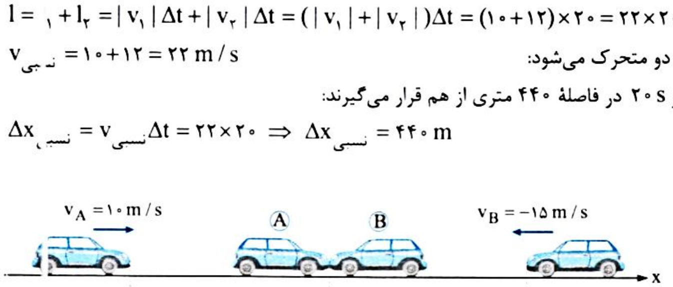
یعنی دو متحرک در هر ثانیه ۲۲ m از هم دور می‌شوند و بعد از ۲۰ s در فاصلهٔ ۴۴۰ متری از هم قرار می‌گیرند:

$$\Delta x_{\text{نسبی}}=v_{\text{نسبی}}\Delta t=۲۲\times ۲۰ \Rightarrow \Delta x_{\text{نسبی}}=۴۴۰\,m$$

۱۵۲۶- گزینهٔ ۳ **روش اول:** **گام اول** برای نوشتن معادلهٔ حرکت دو متحرک به یک مبدأ نیازمندیم. چه نقطه‌ای بهتر از مکان اولیهٔ A! با این حساب، معادلهٔ حرکت دو متحرک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_A=v_At+x_{۰A}=۱۰t+۰=۱۰t$$

$$x_B=v_Bt+x_{۰B}=-۱۵t+۱۰۰۰$$



گام دوم زمانی که دو متحرک به هم می‌رسند، xهایشان برابر می‌شود:

$$x_A=x_B$$

$$۱۰t=-۱۵t+۱۰۰۰ \Rightarrow ۲۵t=۱۰۰۰ \Rightarrow t=۴۰\,s$$

گام سوم مسافتی که A در مدت ۴۰ s طی می‌کند، برابر است با:

$$\Delta x_A=v_A\Delta t=۱۰\times ۴۰=۴۰۰\,m$$

روش دوم: وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، مجموعاً مسافتی معادل $1000\,m$ را طی می‌کنند!

$l_A + l_B = 1000$

$s_A\Delta t + s_B\Delta t = 1000 \Rightarrow (s_A + s_B)\Delta t = 1000 \Rightarrow (10+15)\Delta t = 1000 \Rightarrow \Delta t = 40\,s$

$l_A = s_A\Delta t = 10\times 40 = 400\,m$

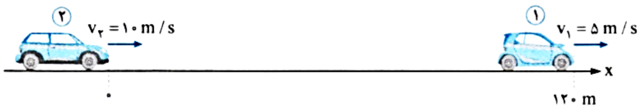
(شما هم با سرعت نسبی تست را یک بار دیگر حل کنید، خیلی شبیه راه‌حل بالا است.)

تیزهوش تندی B، ۱/۵ برابر تندی A است $(s_B = 1/5 s_A)$. پس مسافتی که B در یک مدت معین طی می‌کند، ۱/۵ برابر مسافتی است که A در همان مدت طی می‌کند:

$$l = s\Delta t \Rightarrow \frac{l_B}{l_A} = \frac{s_B}{s_A} = 1/5$$

$$l_B + l_A = 1000 \Rightarrow 1/5 l_A + l_A = 1000 \Rightarrow 2/5 l_A = 1000 \Rightarrow l_A = 400\,m$$

۱۵۲۷- گزینهٔ ۳ **روش اول:** **گام اول** معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم. فاصله‌ها نسبت به مبدأ مکان سنجیده می‌شود. به اختیار خودمان، مکان اولیهٔ یکی از دو متحرک را مبدأ مکان در نظر می‌گیریم. مکان اولیهٔ اتومبیل عقبی چطوره؟! بنابراین $x_{02} = 0$ و $x_{01} = 120\,m$ است.



$x_1 = v_1 t + x_{01} = 5t + 120$

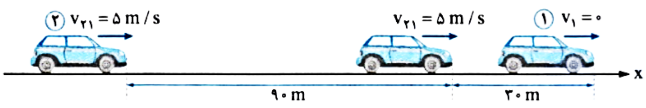
$x_2 = v_2 t + x_{02} = 10t + 0 = 10t$

گام دوم فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر تفاضل مکان‌هایشان از یکدیگر است. فاصلهٔ دو متحرک تا وقتی اتومبیل (۱) از اتومبیل (۲) جلوتر است، برابر «$x_1 - x_2$» و از لحظه‌ای که اتومبیل (۲) از اتومبیل (۱) سبقت می‌گیرد، برابر «$x_2 - x_1$» است. پس کلاً می‌توانیم بگوییم فاصلهٔ دو متحرک برابر $|x_1 - x_2|$ است. قرار است $|x_1 - x_2| < 30\,m$ باشد:

$$|(5t+120) - 10t| < 30 \Rightarrow \begin{cases}(5t+120) - 10t < 30 \Rightarrow 5t > 90 \Rightarrow t > 18\,s \\ 10t - (5t+120) < 30 \Rightarrow 5t < 150 \Rightarrow t < 30\,s\end{cases} \Rightarrow 18\,s < t < 30\,s$$

بنابراین در مجموع به مدت $30 - 18 = 12\,s$ فاصلهٔ دو اتومبیل از هم کم‌تر از $30\,m$ است.

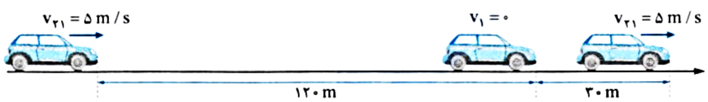
روش دوم: (روش نسبی) **گام اول** متحرک (۲) هر ثانیه $5\,m$ به متحرک (۱) نزدیک می‌شود. می‌توانیم فرض کنیم مطابق شکل زیر (الف) اتومبیل (۱) ساکن است و اتومبیل (۲) با سرعت نسبی $v_{21} = 5\,m/s$ به آن نزدیک می‌شود. با این فرض، زمانی اتومبیل (۲) برای اولین بار به ۳۰ متری اتومبیل (۱) می‌رسد که $90\,m$ بیشتر از اتومبیل (۱) جابه‌جا شود:



(الف)

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\Delta t \Rightarrow 90 = 5\Delta t \Rightarrow \Delta t = 18\,s$$

گام دوم بنابراین پس از $18\,s$ اتومبیل (۲) برای اولین بار در فاصلهٔ ۳۰ متری اتومبیل (۱) واقع می‌شود. اتومبیل (۲) از اتومبیل (۱) سبقت می‌گیرد و بالأخره مطابق شکل (ب) برای بار دوم در فاصلهٔ ۳۰ متری از آن قرار می‌گیرد. این اتفاق زمانی می‌افتد که اتومبیل (۲)، $150\,m$ بیشتر از اتومبیل (۱) جابه‌جا شود. زمان لازم برای انجام این اتفاق را با $\Delta t'$ نشان می‌دهیم.



(ب)

$$\Delta x'_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\Delta t' \Rightarrow 150 = 5\Delta t'$$

$$\Rightarrow \Delta t' = 30\,s$$

پس کلاً در بازهٔ زمانی $18\,s$ تا $30\,s$ و به مدت $12\,s$ فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر کم‌تر از $30\,m$ می‌شود.

۱۵۲۸- گزینهٔ ۲ **گام اول** مشخصات اتومبیل سریع‌تر را با زیروند ۱، مشخصات اتومبیل کندتر را با زیروند ۲ و فاصلهٔ دو شهر را با l نشان می‌دهیم. مسافتی که دو اتومبیل تا لحظهٔ رسیدن به هم طی می‌کنند را با l_1 و l_2 نشان می‌دهیم. واضح است که مجموع l_1 و l_2 برابر فاصلهٔ دو شهر از هم است.

$$l = l_1 + l_2 = s_1\Delta t + s_2\Delta t = (s_1 + s_2)\Delta t = (60+40)\times 2 = 100\times 2 = 200\,km$$

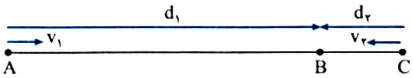
گام دوم حالا ببینیم اتومبیل سریع‌تر این فاصله را در چه مدت طی می‌کند:

$$l = s_1\Delta t_1 \Rightarrow 200 = 60\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{20}{6}\,h = \frac{20}{6}\times 60\,min = 200\,min$$

۱۵۲۹- گزینهٔ ۴ حرکت دو متحرک یکنواخت است و چون در زمان یکسان، متحرک A به اندازهٔ $0/6\,d$ و متحرک B به اندازهٔ $0/4\,d$ جابه‌جا شده‌اند، بزرگی سرعت متحرک A، $\frac{3}{2}$ برابر بزرگی سرعت متحرک B است. از طرف دیگر با توجه به این‌که ۴۰ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک A از نقطهٔ (۳) به نقطهٔ (۲) برسد، می‌توان نوشت:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{v_A}{v_B}\times\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \xrightarrow{v_A = \frac{3}{2}v_B} \frac{0/4d}{0/6d} = \frac{3}{2}\times\frac{40}{\Delta t_B} \Rightarrow \Delta t_B = 90\,s$$

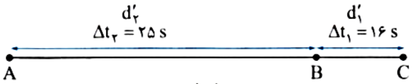
۱۵۳۰- گزینهٔ ۲ **گام اول** دو متحرک در نقطهٔ B به هم می‌رسند. براساس شکل (الف):



(الف)

$$\begin{matrix} d_1 = v_1\Delta t \Rightarrow AB = v_1\Delta t \\ d_2 = v_2\Delta t \Rightarrow BC = v_2\Delta t \end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{v_1}{v_2} \quad (I)$$

گام دوم ادامهٔ ماجرا را در شکل (ب) ببینید!



(ب)

$$\begin{matrix} d'_1 = v_1\Delta t_1 \Rightarrow BC = v_1\times 16 \\ d'_2 = v_2\Delta t_2 \Rightarrow AB = v_2\times 25 \end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{v_2}{v_1}\times\frac{25}{16} \quad (II)$$

گام سوم رابطه‌های (I) و (II) را ترکیب کنید.

$$\frac{AB}{BC}\times\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \frac{AB}{BC}\times\frac{AB}{BC}=\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{۵}{۴}$$

گام چهارم شکل صورت تست نشان می‌دهد که طول کل مسیر ۱۸۰ m است:

$$AB+BC=۱۸۰$$

$$\frac{۵}{۴}BC+BC=۱۸۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴}BC=۱۸۰ \Rightarrow BC=۸۰\,m$$

گام چهارم برای متحرک اول می‌توان نوشت:

$$BC=v_۱\times۱۶ \Rightarrow ۸۰=v_۱\times۱۶ \Rightarrow v_۱=۵\,m/s$$

۱۵۳۱- گزینهٔ ۴ **گام اول** قبل از هر اقدامی سرعت قطارها را برحسب متر بر ثانیه به دست بیاریم:

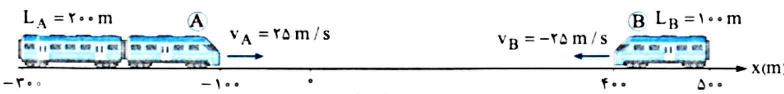
$$v_A=v_B=۹۰\,km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}\,m/s=۲۵\,m/s$$

دو قطار زمانی به طور کامل از کنار هم عبور می‌کنند که ته‌به‌ته شوند! پس باید معادلهٔ مکان - زمان انتهای دو قطار را بنویسیم. با توجه به شکل (الف) معادلهٔ حرکت انتهای قطار A برابر است با:

$$x_A=v_At+x_{۰A}=۲۵t-۳۰۰$$

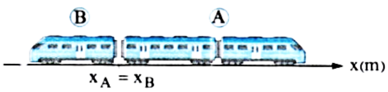
و معادلهٔ مکان - زمان انتهای قطار B:

$$x_B=v_Bt+x_{۰B}=-۲۵t+۵۰۰$$



(الف)

گام دوم شکل (ب) لحظهٔ عبور کامل دو قطار از کنار یکدیگر را نشان می‌دهد. انتهای دو قطار در یک مکان قرار گرفته‌اند که ما دنبال آن مکان هستیم!



(ب)

$$x_A=x_B \Rightarrow ۲۵t-۳۰۰=-۲۵t+۵۰۰ \Rightarrow ۵۰t=۸۰۰ \Rightarrow t=\frac{۸۰}{۵}=۱۶\,s$$

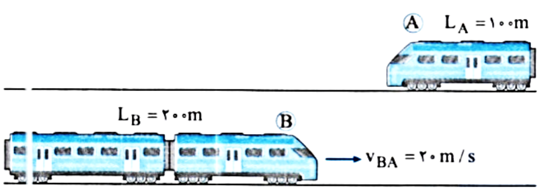
$t=۱۶\,s$ را در x_A یا x_B قرار می‌دهیم:

$$x_A=۲۵t-۳۰۰=۲۵\times۱۶-۳۰۰=۴۰۰-۳۰۰=۱۰۰\,m$$

گام سوم انتهای قطار A در مکان ۱۰۰m و جلوی آن در مکان ۳۰۰m = ۲۰۰ + ۱۰۰ قرار دارد.

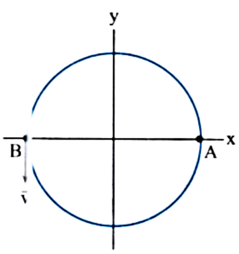
تمرین **جلوی قطار B در چه مکانی برحسب متر قرار دارد؟ صفر**

۱۵۳۲- گزینهٔ ۲ برای سادگی کار می‌توانیم فرض کنیم قطار A ثابت است و قطار B با سرعت نسبی ۲۰ m/s به آن نزدیک می‌شود. قطار B از لحظه‌ای که پیشانی آن روبه‌روی یکی از مسافرهای قطار A قرار می‌گیرد تا لحظه‌ای که انتهای آن از جلوی چشمان او عبور می‌کند، به اندازهٔ طول خود $(L_B=۲۰۰\,m)$ جابه‌جا می‌شود. زمان طی این مسافت برابر ۱۰ s است.



$$\Delta x_{نسبی}=v_{نسبی}\Delta t \Rightarrow ۲۰۰=۲۰\Delta t \Rightarrow \Delta t=۱۰\,s$$

۱۵۳۳- گزینهٔ ۴ ذره پس از یک دقیقه مسافت ۱۲۰ m را طی می‌کند.



$$l=s\Delta t \xrightarrow{\Delta t=۱\,min=۶۰\,s} l=۲\times۶۰=۱۲۰\,m$$

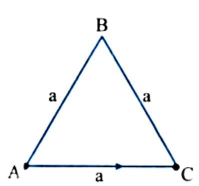
پس ۷/۵ بار محیط دایره را طی می‌کند:

$$\frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{محیط دایره}}=\frac{۱۲۰}{۱۶}=۷/۵$$

ذره پس از ۷ دور به جای اولیه‌اش (A) می‌رسد و پس از ۰/۵ دور در نقطهٔ مقابل مکان اولیه‌اش، یعنی در نقطهٔ B قرار می‌گیرد. بردار سرعت همیشه مماس بر مسیر حرکت است؛ پس بردار سرعت در نقطهٔ B در خلاف جهت محور y است:

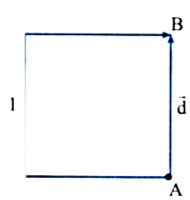
$$\vec{v}_B=-۲\vec{j}$$

۱۵۳۴- گزینهٔ ۲ ذره فاصلهٔ ABC به طول 2a را طی می‌کند و از A تا C (به اندازهٔ a) جابه‌جا می‌شود. جابه‌جایی ذره نصف مسافت طی‌شده توسط آن است؛ پس:



$$\begin{cases} v_{av}=\dfrac{d}{\Delta t} \\ s_{av}=\dfrac{l}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{d}{l}=\frac{AC}{AB+BC}=\frac{a}{a+a} \Rightarrow \frac{v_{av}}{۲۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow v_{av}=۱۰\,m/s$$

۱۵۳۵- گزینهٔ ۲ **گام اول** ذره در مدت ۶ s، مسافت ۱۲ m را طی می‌کند:



$$l=s\Delta t=۲\times۶=۱۲\,m$$

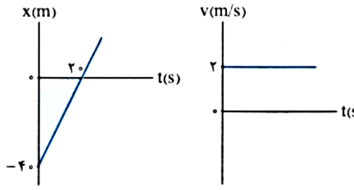
هر ضلع مربع ۴ m است. بنابراین ذره در مدت ۶s، سه ضلع مربع را طی می‌کند. پس از ۶ s به رأس چهارم مربع (B) می‌رسد. جابه‌جایی ذره برابر طول یک ضلع مربع است؛ پس:

$$|\vec{d}|=۴\,m \Rightarrow v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\,m/s$$

گام دوم وقتی تندی متحرک ثابت است، تندی متوسط آن نیز ثابت و هم‌اندازه با تندی‌اش است:

$$s_{av}=s=۲\,m/s$$

۱۵۳۶- گزینهٔ ۴ دونده در مبدأ زمان در مکان‌های **منفی** است. پس $x_0 < ۰$ است (رد ۱ و ۲)
از طرفی، دونده در جهت محور x می‌دود؛ پس سرعت او **مثبت** است. یعنی شیب نمودار باید مثبت باشد (رد ۳)



۱۵۳۷- گزینهٔ ۲ **روش اول**: چون نمودار $x-t$ متحرک به شکل خط راست است، شیب، یعنی سرعت آن ثابت است (رد ۳ و ۴)؛ سرعت متحرک برابر شیب نمودار است. با توجه به مثلث رنگی داریم:

$$v = \text{شیب نمودار} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲\,m/s$$

روش دوم: معادلهٔ حرکت شخص به صورت $x = vt + x_0 = vt - ۴۰$ است. شخص در لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ از مکان $x = ۰$ عبور می‌کند. این مختصات ($x = ۰$ و $t = ۲۰\,s$) باید در معادلهٔ مکان - زمان شخص صدق کند؛ بنابراین:

$$x = vt - ۴۰ \Rightarrow ۰ = v \times ۲۰ - ۴۰ \Rightarrow ۲۰v = ۴۰ \Rightarrow v = ۲\,m/s$$

۱۵۳۸- گزینهٔ ۳ سرعت متحرک در ۲۵۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$v_1 = \frac{۱۰۰۰-۰}{۲۵۰-۰} = ۴\,m/s$$

متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۲۵۰\,s$ تا $t = ۵۰۰\,s$ به خودش استراحت داده و در مکان $x = ۱۰۰۰\,m$ جا خوش کرده است! (۱ نادرست) سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۵۰۰\,s$ تا $t_2 = ۱۰۰۰\,s$ برابر است با:

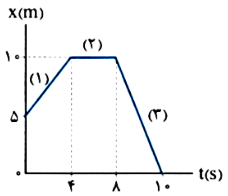
$$v_2 = \frac{۲۵۰۰-۱۰۰۰}{۱۰۰۰-۵۰۰} = \frac{۱۵۰۰}{۵۰۰} = ۳\,m/s$$

خب، با این حساب سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰۰\,s$ بیشتر از سرعت آن در لحظهٔ $t = ۸۰۰\,s$ است (۴ نادرست) و تندی متحرک در ۲۵۰ ثانیهٔ اول بیشتر از تندی آن در ادامهٔ مسیر است (۳ درست). در ضمن، متحرک در مدت $۱۰۰۰\,s$، $۲۵۰۰\,m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط آن برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰۰۰} = ۲/۵\,m/s$$

با توجه به این‌که $v_{av} < v_2$ است، ۲ هم نادرست است.

۱۵۳۹- گزینهٔ ۴ شیب نمودار در هر مرحله، سرعت متحرک در آن مرحله را نشان می‌دهد.



$$v_1 = \text{شیب خط}\ (۱) = \frac{۱۰-۵}{۴-۰} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵\,m/s$$

$$v_2 = \text{شیب خط}\ (۲) = \frac{۱۰-۱۰}{۸-۴} = ۰$$

$$v_3 = \text{شیب خط}\ (۳) = \frac{۰-۱۰}{۱۰-۸} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵\,m/s$$

۱۵۴۰- گزینهٔ ۲ **گام اول** سرعت خودروی A را از روی شیب نمودار آن تعیین و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} t_0 = ۰ \ , \ x_{0A} = ۳۰۰\,m \\ t = ۱۰\,s \ , \ x_A = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۰-(-۳۰۰)}{۱۰-۰} = \frac{۳۰۰}{۱۰} = ۳۰\,m/s \Rightarrow x_A = v_A t + x_{0A} = ۳۰t - ۳۰۰$$

گام دوم همان عملیات بالا، این بار برای خودروی B:

$$\begin{cases} t_0 = ۰ \ , \ x_{0B} = ۳۰۰\,m \\ t = ۲۰\,s \ , \ x_B = ۶۰۰\,m \end{cases} \Rightarrow v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{۶۰۰-۳۰۰}{۲۰-۰} = \frac{۳۰۰}{۲۰} = ۱۵\,m/s \Rightarrow x_B = v_B t + x_{0B} = ۱۵t + ۳۰۰$$

گام سوم در لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند، xشان برابر می‌شود؛ بنابراین:

$$۳۰t - ۳۰۰ = ۱۵t + ۳۰۰ \Rightarrow ۱۵t = ۶۰۰ \Rightarrow t = ۴۰\,s$$

کافی است لحظهٔ فوق را در معادلهٔ حرکت یکی از دو خودرو قرار دهیم تا مکان به هم رسیدنشان مشخص شود:

$$x_A = ۳۰ \times ۴۰ - ۳۰۰ = ۱۲۰۰ - ۳۰۰ = ۹۰۰\,m$$

۱۵۴۱- گزینهٔ ۲ **گام اول** معادلهٔ مکان - زمان متحرک A را می‌نویسیم:

$$v_A = \text{شیب خط}\ A = \frac{۸}{۴} = ۲\,m/s$$

$$x_A = v_A t + x_{0A} = ۲t + ۰ = ۲t$$

گام دوم معادلهٔ مکان - زمان متحرک B را می‌نویسیم:

$$v_B = \text{شیب خط}\ B = \frac{۲۴-۱۲}{۴-۰} = \frac{۱۲}{۴} = ۳\,m/s$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} = ۳t + ۱۲$$

گام سوم B همیشه از A جلوتر است. وقتی فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر ۲۰ m می‌شود که $x_B - x_A = ۲۰\,m$ شود:

$$x_B - x_A = ۲۰ \Rightarrow (۳t + ۱۲) - ۲t = ۲۰ \Rightarrow t + ۱۲ = ۲۰ \Rightarrow t = ۸\,s$$

تیزهوش A در مدت ۴ s، ۸ m و B در همین مدت، ۱۲ m جابه‌جا می‌شود. پس سرعت A، $\frac{۸\,m}{۴\,s} = ۲\,m/s$ و سرعت B، $\frac{۱۲\,m}{۴\,s} = ۳\,m/s$ است.
یعنی B در هر ثانیه ۱ m بیشتر از A جابه‌جا می‌شود: $v_{\text{B نسبت به A}} = v_B - v_A = ۳ - ۲ = ۱\,m/s$
فاصلهٔ اولیهٔ B و A، ۱۲m است برای این‌که فاصلهٔ دو متحرک ۲۰m شود، B باید ۸ m بیشتر از A جابه‌جا شود که این اتفاق در مدت ۸ s رخ می‌دهد.

۱۵۴۲- گزینهٔ ۳ **گام اول** به نمودار سرعت - زمان دو متحرک نگاه می‌کنیم، متحرکی را که با سرعت ثابت $+۱۰\,m/s$ حرکت می‌کند، A و متحرک دیگر را B می‌نامیم و معادلهٔ حرکت هر دو را می‌نویسیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} = ۱۰t + x_{0A}$$

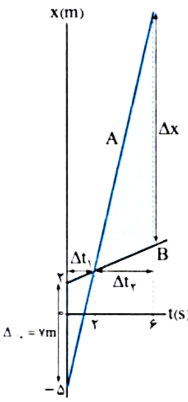
$$x_B = v_B t + x_{0B} = -۵t + x_{0B}$$

گام دوم حالا به نمودار مکان - زمان دو متحرک نگاه می‌کنیم. دو متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ به هم می‌رسند؛ پس:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۱۰t + x_{0A} = -۵t + x_{0B} \Rightarrow ۱۰ \times ۲۰ + x_{0A} = -۵ \times ۲۰ + x_{0B} \Rightarrow ۲۰۰ + x_{0A} = -۱۰۰ + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} - x_{0A} = ۳۰۰\,m$$

۱۵۴۳- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار $x-t$، در لحظهٔ $t=۰$ متحرک A، ۴۳۰ متر عقب‌تر از متحرک B بوده است، اما در لحظهٔ $t=۳۰\,s$، متحرک A، ۵۰ متر جلوتر از متحرک B است، بنابراین تغییر مکان متحرک A در بازهٔ صفر تا ۳۰ s، به اندازهٔ $۴۳۰+۵۰=۴۸۰\,m$ بیشتر از متحرک B بوده است. از طرف دیگر حرکت دو متحرک یکنواخت است، پس سرعت دو متحرک برابر با سرعت متوسطشان است و می‌توان نوشت:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A-v_B=\frac{\Delta x_A}{\Delta t}-\frac{\Delta x_B}{\Delta t}=\frac{\Delta x_A-\Delta x_B}{\Delta t}=\frac{۴۸۰}{۳۰}=۱۶\,m/s$$



۱۵۴۴- گزینهٔ ۳ **روش اول:** **گام اول** دو متحرک در لحظهٔ $t=۲\,s$ از یک مکان عبور می‌کنند؛ پس:

$$\begin{cases} x_A=v_A+x_{۰A}=v_At-۵ \\ x_B=v_Bt+x_{۰B}=v_Bt+۲ \end{cases} \xrightarrow[t=۲s]{x_A=x_B} (v_A\times ۲)-۵=(v_B\times ۲)+۲$$

$$\Rightarrow ۲v_A-۲v_B=۷ \Rightarrow v_A-v_B=۳/۵\,m/s$$

گام دوم فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ $t=۶\,s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ } t=۶\,s: x_A-x_B=((v_A\times ۶)-۵)-((v_B\times ۶)+۲)=$$

$$۶v_A-۶v_B-۵-۲=۶(v_A-v_B)-۷=۶\times ۳/۵-۷=۲۱-۷=۱۴\,m$$

روش دوم: با توجه به تشابه دو مثلث مشخص‌شده در شکل می‌توانیم فاصلهٔ دو متحرک از هم (Δx) را حساب کنیم. نسبت اضلاع نظیر دو مثلث برابر است با:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x_۰}=\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱} \Rightarrow \frac{\Delta x}{۷}=\frac{۶-۲}{۲} \Rightarrow \Delta x=۷\times ۲=۱۴\,m$$

۱۵۴۵- گزینهٔ ۲ **گام اول** معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک A و B به دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t}=\frac{۱-۴}{۱-۰}=-۳\,m/s \Rightarrow x_A=v_At+x_{۰A}=-۳t+۴$$

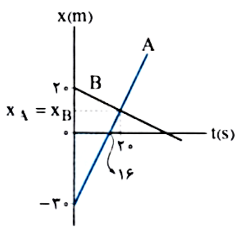
$$v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t}=\frac{-۴-(-۹)}{۱-۰}=۵\,m/s \Rightarrow x_B=v_Bt+x_{۰B}=۵t-۹$$

گام دوم لحظه‌ای که $\vec{d}_A=-۲\vec{d}_B$ برابر است با:

$$x_A=-۲x_B \Rightarrow -۳t+۴=-۲\times(۵t-۹) \Rightarrow ۷t=۱۴ \Rightarrow t=۲\,s$$

فاصلهٔ دو متحرک در این لحظه به صورت روبه‌رو تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} x_A=(-۳\times ۲)+۴=-۲\,m \\ x_B=(۵\times ۲)-۹=۱\,m \end{cases} \Rightarrow |x_B-x_A|=۱-(-۲)=۳\,m$$



۱۵۴۶- گزینهٔ ۲ **گام اول** از تشابه مثلث‌های رنگی در شکل روبه‌رو می‌توانیم مکان به هم رسیدن دو متحرک را به دست آوریم.

$$\frac{\text{ارتفاع مثلث بزرگ}}{\text{ارتفاع مثلث کوچک}}=\frac{\text{قاعدهٔ مثلث بزرگ}}{\text{قاعدهٔ مثلث کوچک}} \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۰-۱۶}=\frac{۳۰}{x_A}$$

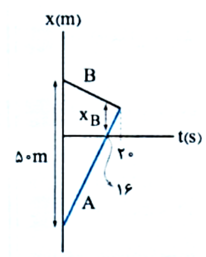
$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۴}=\frac{۳۰}{x_A} \Rightarrow x_A=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵\,m$$

گام دوم متحرک B در لحظهٔ $t=۲۰\,s$ از مکان $x_B=x_A=۷/۵\,m$ عبور می‌کند. همین داده برای تعیین سرعت B کافی است.

$$v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t}=\frac{x_B-x_{۰B}}{۲۰-۰}=\frac{۷/۵-۲۰}{۲۰}=\frac{-۱۲/۵}{۲۰}=-\frac{۵}{۸}\,m/s$$

گام سوم معادلهٔ حرکت متحرک B را می‌نویسیم و مکان آن را در لحظهٔ عبور متحرک A از مبدأ $(t=۱۶\,s)$ به دست می‌آوریم:

$$x_B=v_Bt+x_{۰B}=-\frac{۵}{۸}t+۲۰=-\frac{۵}{۸}\times ۱۶+۲۰=-۱۰+۲۰=۱۰\,m$$



تیزبینی به مثلثی که نمودارهای A و B با محور x ساخته‌اند و همچنین مثلث رنگی توجه کنید. x_B فاصلهٔ متحرک B از متحرک A در لحظهٔ عبور A از مبدأ است که به راحتی با نوشتن نسبت تشابه دو مثلث یادشده به دست می‌آید:

$$\frac{۵۰}{x_B}=\frac{۲۰}{۲۰-۱۶} \Rightarrow \frac{۵۰}{x_B}=\frac{۲۰}{۴} \Rightarrow \frac{۵۰}{x_B}=۵ \Rightarrow x_B=\frac{۵۰}{۵}=۱۰\,m$$

۱۵۴۷- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{a=-۴\,m/s^۲} v=-۴t+v_۰$$

با جای‌گذاری مختصات $(t=۱\,s\,,\,v=۲۰\,m/s)$ در معادلهٔ فوق، $v_۰$ معلوم می‌شود:

$$۲۰=-۴\times ۱+v_۰ \Rightarrow v_۰=۲۴\,m/s \Rightarrow v=-۴t+۲۴$$

تیزبینی سرعت اولیهٔ متحرک رو طور دیگه‌ای هم می‌تونستیم حساب کنیم؛ شتاب متحرک $-۴\,m/s^۲$ است؛ یعنی هر ثانیه‌ای که از زمان می‌گذرد، $۴\,m/s$ از مقدار سرعت کم و هر ثانیه‌ای که به عقب برمی‌گردیم، $۴\,m/s$ به مقدار سرعت اضافه می‌شود. پس ۱s قبل از لحظهٔ $t=۱s$ (یعنی در لحظهٔ $t_۰=۰$)، سرعت متحرک $۲۰+۴=۲۴\,m/s$ بوده است.