



مدرسای شریف

فصل چهارم

« انتگرال گیری از توابع مختلط »

حتماً انتظار دارید محاسبه انتگرال‌های مختلط دشوارتر از محاسبه انتگرال‌هایی باشد که تاکنون آموخته‌اید، اما با مطالعه این فصل خواهید دید که در اکثر اوقات این طور نیست.

به طور کلی تست‌هایی که در مبحث انتگرال‌های مختلط قابل طرح است معمولاً محاسبه انتگرال تابعی مانند $f(z)$ بر یک منحنی مانند C می‌باشد، می‌توان آنها را به سه دسته کلی زیر تقسیم کرد:

(۱) تابع زیر انتگرال غیر تحلیلی می‌باشد، که تنها روش انتگرال‌گیری از این نوع توابع استفاده از نمایش پارامتری منحنی C است.

(۲) تابع زیر انتگرال تحلیلی می‌باشد که علاوه بر استفاده از روش پارامتری می‌توان با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری که در درس ریاضی عمومی آموخته‌ایم، این انتگرال‌ها را محاسبه نمود.

(۳) در این حالت که تابع زیر انتگرال به جز در نقاط محدودی در C (یک منحنی بسته است) تحلیلی است، استفاده از قضایائی که در ادامه فصل به آنها اشاره می‌شود ما را در حل راحت این گونه مسائل یاری خواهد کرد.

تذکره: انتگرال‌های نوع سوم بیشترین حجم تست‌های مربوط به این فصل را در آزمون‌ها به خود اختصاص می‌دهند.

قبل از اینکه به روش‌های محاسبه انتگرال روی منحنی (مسیر) بپردازیم، بهتر است با برخی تعاریف آشنا شویم.

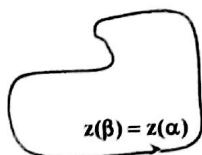
هر منحنی مانند C در صفحه مختلط در فاصله $\alpha \leq t \leq \beta$ را می‌توان به شکل مقابل نمایش داد:

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

را خم یا قوس نیز نامگذاری می‌کنند، اگر منحنی C خودش را قطع نکند به آن منحنی ساده می‌گوییم و اگر در منحنی ساده رابطه $z(\alpha) = z(\beta)$ برقرار باشد، آن گاه منحنی C را ساده بسته (ژردان) می‌نامیم.

منحنی C را هموار می‌گوییم هر گاه در هر نقطه دارای مشتق پیوسته و غیر صفر باشد. هر گاه تعداد متناهی از منحنی‌های هموار را که ابتدای هر یک به انتهای دیگری وصل شده به هم متصل کنیم، یک منحنی تکه‌ای هموار پدید می‌آید.

با تغییر t از α به β برای منحنی جهت نیز تعریف می‌شود در ناحیه ساده و بسته اگر جهت حرکت روی C به شکلی باشد که ناحیه در سمت چپ مافوق بگیرد جهت را مثبت و اگر در خلاف این جهت حرکت کنیم، جهت را منفی نامگذاری می‌کنند. (شکل ۱) حرکت در جهت مثبت را نشان می‌دهد در واقع حرکت در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت مثبت را نشان می‌دهد.



شکل ۱: منحنی ساده بسته



شکل ۲: منحنی ساده و غیر بسته



شکل ۳: منحنی بسته و غیر ساده

با انتگرال‌گیری روی مسیر در کتاب ریاضی عمومی (۲) آشنا شدید و انتگرال‌گیری مختلط بسیار شبیه همان انتگرال‌ها می‌باشد. اگر بخواهیم انتگرال مختلط تابع f از متغیر z را در امتداد مرز C از نقطه $z = a$ و $z = b$ حساب کنیم آن را به دو صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\int_a^b f(z) dz \quad \text{یا} \quad \int_C f(z) dz$$

انتگرال‌گیری مختلط به مسیر انتگرال‌گیری و نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد (البته اگر تابع زیر انتگرال تحلیلی باشد و منحنی بسته نباشد، دیگر به مسیر بستگی ندارد). اگر مقدار انتگرال به مسیر بستگی نداشته باشد، معمولاً نماد انتگرال به صورت سمت چپ مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته علامت برای مسیرهای بسته به صورت $\oint$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مرگانه منحنی C با معادله پارامتری $z(t) = x(t) + iy(t)$ که $\alpha \leq t \leq \beta$ ، مفروض باشد، آنگاه داریم:

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] d[z(t)]$$

مجدداً یادآوری می‌کنیم از این روش بیشتر در مواردی که تابع زیر انتگرال غیر تحلیلی باشد، استفاده می‌شود.

در محاسبه انتگرال‌های پارامتری در بازه $a \leq t \leq b$ باید به ترتیب مراحل زیر را انجام دهیم:

مرحله اول: نوشتن مسیر به صورت $z(t) = x(t) + iy(t)$

مرحله دوم: محاسبه مشتق $z(t)$ و به دست آوردن $d[z(t)]$

مرحله سوم: در تابع $f(z)$ به جای تمام z ها، عبارت $z(t)$ را که در مرحله اول به دست آورده بودیم، جایگزین می‌کنیم. (یا $x(t)$ را به جای x و $y(t)$ را به جای y در ضابطه $f(z)$ قرار می‌دهیم.)

مرحله چهارم: از عبارت $f[z(t)]d[z(t)]$ که عبارتی بر حسب t می‌باشد از a تا b انتگرال می‌گیریم.

مثال ۱: حاصل $\int_C \bar{z} dz$ روی منحنی $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ در فاصله $0 \leq t \leq 2$ کدام است؟

۱۰ - $\frac{1}{3}i$ (۴)

۱۰ + $\frac{1}{3}i$ (۳)

۸ - $\frac{16}{3}i$ (۲)

۸ + $\frac{16}{3}i$ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» ☒

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) = t^2 + it \Rightarrow d[z(t)] = (2t + i)dt$$

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow \bar{z}(t) = x(t) - iy(t) = t^2 - it$$

$$I = \int_C \bar{z} dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^2 (2t^3 + it^2 - i2t^2 + t)dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)dt$$

$$I = \int_0^2 2t^3 dt - i \int_0^2 t^2 dt + \int_0^2 t dt = 2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 - i \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 10 - \frac{1}{3}i$$

نکته: تبدیل مسیر انتگرال‌گیری و همچنین تابع $f(z)$ به شکل پارامتری بر حسب t ، معمولاً در مسائلی که در صورت سؤال، x و y بر حسب t بیان شده باشند، صورت می‌گیرد و ما در اکثر مسائل سعی می‌کنیم x و y را بر حسب یکی از آن‌ها (x یا y) نوشته و سپس یک انتگرال بر حسب یک متغیر را محاسبه کنیم.

مثال ۲: اگر $f(z) = \text{Re}(z)$ آنگاه حاصل انتگرال $I = \int_C f(z) dz$ که C سهمی $y = x^2$ از $z = 0$ تا $z = 1 + i$ می‌باشد، کدام است؟

$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ (۴)

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$ (۳)

$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$ (۲)

$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳» ☒ $f(z) = \text{Re}(z) = x$ تابعی غیر تحلیلی می‌باشد، از طرفی داریم:

$$z = x + iy \xrightarrow{y=x^2} z = x + ix^2 \Rightarrow dz = (1 + 2ix)dx$$

توجه شود چون فقط متغیر x داریم لذا بازه تغییرات $z = 0$ تا $z = 1 + i$ را به صورت $x = 0$ تا $x = 1$ می‌نویسیم:

$$I = \int_C \text{Re}(z) dz = \int_0^1 x(1 + 2ix) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2ix^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$$



مثال ۳: حاصل انتگرال $\int_{i+1}^{4i+2} z^2 dz$ در طول بیضی $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ ، $0 \leq t \leq 2$ برابر است با:

(۴) $-\frac{16}{3} - 6i$

(۳) $-\frac{73}{5} + 4i$

(۲) $-32 + 9i$

(۱) $-21 + 3i$

پاسخ: گزینه «۴» تابع $f(z) = z^2$ تحلیلی است. بنابراین از فرمول عادی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int_{i+1}^{4i+2} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{i+1}^{4i+2} = \frac{(4i+2)^3}{3} - \frac{(i+1)^3}{3} = \frac{64i^3 + 96i^2 + 48i + 8}{3} - \frac{i^3 + 3i^2 + 3i + 1}{3} = \frac{-64i - 96 + 48i + 8 + i + 3 - 3i - 1}{3} = -\frac{16}{3} - 6i$$

مثال ۴: در صورتی که z یک متغیر باشد، مطلوب است مقدار $\int_C f(z) dz$ وقتی که $f(z) = x + 1 + iy^2$. در این انتگرال، منحنی C ، مسیر انتخاب شده روی خط $y = x$ می‌باشد که از مبدأ مختصات تا نقطه $(1, 1)$ امتداد می‌یابد.

(۴) $\frac{7}{6} + \frac{11}{6}i$

(۳) $-2i$

(۲) $\frac{8}{3} + \frac{12}{7}i$

(۱) $2i$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(z) = x + 1 + iy^2 \xrightarrow{y=x} f(z) = x + 1 + ix^2$$

$$z = x + iy \xrightarrow{y=x} z = (1+i)x \Rightarrow dz = (1+i)dx$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 (x + 1 + ix^2)(1+i) dx = (1+i) \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{ix^3}{3} \right]_0^1 = (1+i) \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{i}{3} \right) = (1+i) \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{11}{6}i$$

مثال ۵: حاصل $\int_C e^{\bar{z}} dz$ که در آن C قسمتی از خط $y = -x$ واصل بین نقاط $z_1 = 0$ و $z_2 = \pi - i\pi$ می‌باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{e^{\pi} + 1}{i}$

(۳) $i(e^{\pi} + 1)$

(۲) $i(e^{\pi} - 1)$

(۱) $\frac{e^{\pi} - 1}{i}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر بخواهیم معادله پارامتری C را بنویسیم با فرض $x = t$ آنگاه $y = -t$ می‌باشد و داریم:

$$z = x + iy \xrightarrow{y=-x} z = x - ix \Rightarrow \bar{z} = x + ix, dz = (1-i)dx$$

$$\int_C e^{\bar{z}} dz = \int_0^{\pi} e^{x+ix} (1-i) dx = (1-i) \int_0^{\pi} e^{(1+i)x} dx = \left[\frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)x} \right]_0^{\pi} = i(e^{\pi} + 1)$$

نکته ۲: اگر مرز C و یا تابع $f(z)$ در مختصات قطبی داده شده باشد، بهتر است بازه‌های انتگرال‌گیری، تابع $f(z)$ و همچنین dz را در مختصات قطبی بنویسیم و انتگرال را در مختصات قطبی حساب کنیم. در این گونه مسائل یادآوری مطلب زیر خالی از لطف نیست:

معادله دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r به صورت $z = z_0 + re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) می‌باشد، به خصوص معادله دایره واحد (یعنی $z_0 = 0, r = 1$) به صورت $z = e^{i\theta}$ نوشته می‌شود.

مثال ۶: حاصل $\oint_C z d\bar{z}$ که در آن C دایره‌ای به مرکز $1+i$ و شعاع ۱ می‌باشد، کدام است؟

(۴) $2\pi i$

(۳) $(1-i)2\pi$

(۲) $-2\pi i$

(۱) 0

پاسخ: گزینه «۲»

$$z = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow z = 1+i + e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = 1-i + e^{-i\theta} \Rightarrow d\bar{z} = -ie^{-i\theta} d\theta$$

$$\oint_C z d\bar{z} = \int_0^{2\pi} (1+i + e^{i\theta})(-ie^{-i\theta}) d\theta = -i \int_0^{2\pi} (1+i)e^{-i\theta} d\theta - i \int_0^{2\pi} e^{+i\theta} e^{-i\theta} d\theta = -i(1+i) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta - i \int_0^{2\pi} 1 d\theta$$

$$(1-i) \left[-\frac{1}{i} e^{-i\theta} \right]_0^{2\pi} - i[\theta]_0^{2\pi} = 0 - 2\pi i = -2\pi i$$

مثال ۷: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=1} \bar{z} dz$ کدام است؟

$$\frac{2\pi i}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi i}{2} \quad (۳)$$

$$2\pi i \quad (۲)$$

$$\pi i \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» چون مسیر انتگرال گیری به صورت دایره واحد داده شده لذا بهتر است، انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta, \quad I = \oint_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \cdot ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

مثال ۸: حاصل $I = \oint_{|z|=1} |z| |dz|$ کدام است؟

$$4\pi \quad (۴)$$

$$3\pi \quad (۳)$$

$$2\pi \quad (۲)$$

$$-\pi \quad (۱)$$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow |dz| = |ie^{i\theta}| d\theta$$

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$|ie^{i\theta}| = |i(\cos \theta + i \sin \theta)| = |i \cos \theta - \sin \theta| = \sqrt{(-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} = 1$$

$$I = \oint_{|z|=1} |z| |dz| = \int_0^{2\pi} 1 \times d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

پس $|dz| = d\theta$ از طرفی $|z| = |e^{i\theta}| = 1$ و لذا داریم:

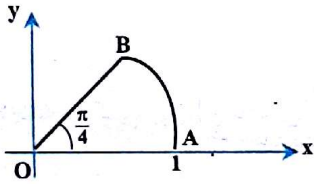
مثال ۹: حاصل انتگرال $I = \oint_C \bar{z} dz$ در صورتی که C مسیر OABO کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

$$1 + i\frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$i\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$



پاسخ: گزینه «۳» تابع زیر انتگرال همه جا غیر تحلیلی است و با توجه به مسیر داده شده باید از روش پارامتری در محاسبه انتگرال کمک بگیریم. دقت کنید مسیر از سه قسمت تشکیل شده که به صورت زیر است:

(۱) در مسیر OA چون $y=0$ ، پس $\bar{z} = x - iy = x - i \times 0 = x$ و چون فقط x از ۰ تا ۱ تغییر می کند، لذا در این مسیر، انتگرال به صورت $I_1 = \int_0^1 x dx$ نوشته می شود.

(۲) اما در مسیر AB روی دایره ای به شعاع یک و مرکز صفر در حرکت هستیم که θ از صفر تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می کند، می دانیم معادله دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع r به صورت $z = re^{i\theta}$ نوشته می شود، پس $z = 1 \times e^{i\theta}$ و داریم:

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

پس در این مسیر انتگرال به صورت $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^{-i\theta}}_{\bar{z}} \cdot \underbrace{ie^{i\theta} d\theta}_{dz}$ نوشته می شود. که با توجه به اینکه $e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} = 1$ ، پس $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} i d\theta$ می باشد.

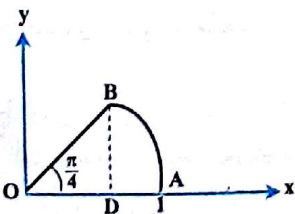
(۳) اما در مسیر BO واضح است روی خط $y=x$ تشریف داریم! و به همین دلیل می توانیم به جای y در رابطه x قرار دهیم و $\bar{z}$ را به صورت زیر بنویسیم: $\bar{z} = x - iy \Rightarrow \bar{z} = x - ix = (1-i)x$

و همچنین چون $z = x + iy = x + ix$ لذا $dz = (1+i)dx$ خواهد بود. اما نکته مهم تعیین بازه انتگرال گیری

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow OD = \cos \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در این قسمت است که اگر کمی مثلثات بلد باشیم، داریم:

پس انتگرال در ناحیه سوم را می توانیم به صورت $I_3 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 x(1-i)(1+i)dx$ بنویسیم (در یکی از کلاس هایم



دانشجویی گفت چون OB شعاع دایره ای به مرکز صفر و شعاع یک است لذا x از ۱ تا صفر تغییر می کند!

اما اگر شما هم همین نظر را دارید دقت کنید که تغییرات از ۱ تا صفر (از B تا O) به صورت تغییرات شعاعی است و راستای x و y آن با هم تغییر می کند، همان طور که دیدید تغییرات x باید روی محور x ها حساب شود.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^1 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} i d\theta + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 2x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + i \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[x^2 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 = \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = i\frac{\pi}{4}$$

محاسبه انتگرال‌های دسته دوم

همان‌طور که اشاره شده در برخی انتگرال‌ها که تابع زیر آن تحلیلی می‌باشد، استفاده از فرمول‌های مستقیم انتگرال‌گیری (همانند آنچه در ریاضی عمومی (۱) آموختیم) حل مسئله را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۱۰: حاصل $I = \int_C z^2 dz$ در صورتی که C در خط $y = x$ از نقطه $z = 0$ تا $z = 1+i$ باشد، کدام است؟

$$\frac{(1+i)^3}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3}(1+i)^3 \quad (۳)$$

$$(1+i)^3 \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2}(1+i)^3 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» تابع $f(z) = z^2$ تابعی تحلیلی است و از هر دو روش آن را حل می‌کنیم:

روش اول:

$$z = x + iy \xrightarrow{y=x} z = x + ix \Rightarrow dz = (1+i)dx$$

$$I = \int_0^1 z^2 dz = \int_0^1 (x + ix)^2 (1+i) dx = (1+i)^3 \int_0^1 x^2 dx = (1+i)^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

روش دوم: با توجه به تحلیلی بودن تابع با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری تست را حل می‌کنیم:

$$I = \int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}$$

ملاحظه می‌کنید در توابع تحلیلی استفاده از روش پارامتری اصلاً به نفع ما نیست.

مثال ۱۱: حاصل $I = \int_0^1 z \cos z dz$ کدام است؟

$$\sinh 1 + \cosh 1 \quad (۴)$$

$$\frac{1+e}{e} \quad (۳)$$

$$\frac{1-e}{e} \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(z) = z \cos z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است لذا از فرمول‌های عادی انتگرال‌گیری که برای این انتگرال روش جزء به جزء است، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^1 z \cos z dz = \left[z \sin z \right]_0^1 - \int_0^1 \sin z dz = 1 \sin 1 + [\cos z]_0^1 = 1(\sin 1) + \cosh 1 - 1 = -\sinh 1 + \cosh 1 - 1 = \frac{1-e}{e}$$

محاسبه دسته سوم انتگرال‌های مختلط

همان‌طور که گفته شد، در این نوع انتگرال‌ها تابع زیر انتگرال به جز تعداد نقاط محدودی در C (یک منحنی بسته و تحلیلی است) و برای ورود به این بحث قضایای کوشی را تعریف می‌کنیم و در ادامه فصل با بیان قضیه مانده‌ها تمام این نوع انتگرال‌ها را به راحتی محاسبه می‌کنیم.

قضیه کوشی - گورسا

اگر $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی منحنی ساده و بسته C تحلیلی باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

توجه شود، انتگرال‌گیری در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) می‌باشد.

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ در صورتی که C دایره‌ای با معادله $|z-1-2i|=2$ باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}\pi i$ (۲) صفر (۳) $+\frac{3}{2}\pi i$ (۴) πi

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(z)$ در نقاط $z=0$ و $z=2$ تحلیلی نیست که این نقاط نیز درون دایره C نیستند. برای این که بدانیم نقاط $z=0$ و $z=2$ (ریشه‌های مخرج) درون ناحیه موردنظر قرار دارند یا نه، کافیه در معادله $|z-1-2i|=2$ به جای z ، مقادیر $z=0$ و $z=2$ را قرار دهیم. اگر حاصل عبارت سمت چپ از عدد ۲ بیشتر شد، نقطه درون ناحیه قرار ندارد و اگر مقدار عبارت مساوی و یا کوچکتر از ۲ شد، نقطه موردنظر درون ناحیه قرار دارد.

$z=0 \Rightarrow |0-1-2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} > 2$ و $z=2 \Rightarrow |2-1-2i| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} > 2$
پس هر دو نقطه خارج ناحیه قرار دارند و تابع $f(z)$ در ناحیه C تحلیلی است و لذا حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

قضیه موررا

هرگاه $f(z)$ در ناحیه ساده D پیوسته و برای هر مرز بسته C درون D ، رابطه $\oint_C f(z)dz = 0$ برقرار باشد، آنگاه f در ناحیه D تحلیلی است. در واقع این قضیه عکس قضیه کوشی - گورسا می‌باشد.

فرمول انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در داخل و روی ناحیه بسته C در حوزه ساده D تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه داخلی D باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

دقت کنید انتگرال گیری در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) می‌باشد.

مثال ۱۳: حاصل $I = \oint_C \frac{dz}{z}$ روی منحنی بسته C که شامل مبدأ مختصات است، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $2\pi i$ (۳) $3\pi i$ (۴) πi

پاسخ: گزینه «۲» منحنی بسته را دایره $|z|=1$ انتخاب می‌کنیم و بر طبق فرمول انتگرال کوشی با توجه به اینکه $f(z)=1$ است، داریم:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i f(0) \xrightarrow{f(z)=1} I = 2\pi i$$

مثال ۱۴: حاصل انتگرال مختلط $\oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{z^2 + 4z + 3} dz$ کدام است؟

- (۱) πi (۲) $\pi i \cos 1$ (۳) $\pi \cos 1$ (۴) $i \cos 1$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $f(z) = \frac{\cosh z}{z+3}$ فرض شود، داریم:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)(z+3)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z+1} dz = \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-(-1)} dz$$

تابع $f(z) = \frac{\cosh z}{z+3}$ در ناحیه $|z| \leq 2$ تحلیلی است و چون (-1) در ناحیه فوق قرار دارد، داریم:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-(-1)} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \times \frac{\cosh(-i)}{2} = \pi i \cosh i \xrightarrow{\cosh iz = \cos z} I = \pi i \cos 1$$

مثال ۱۵: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi i}{2}$ (۳) $-\frac{\pi i}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

✓ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = -1, z_4 = -i$$

توجه شود نقاط $i, 1, -1, -i$ در داخل دایره $|z|=2$ قرار دارند، و هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^4 - 1)(z - i)} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{4i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^4 - 1)(z - 1)} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \times \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

$$I_3 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^4 - 1)(z + 1)} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

$$I_4 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^4 - 1)(z + i)} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \times \left(\frac{1}{4i}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

تذکره ۲: حالت کلی‌تر فرمول انتگرال کوشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

رابطه فوق جهت محاسبه مشتق مرتبه n ام تابع تحلیلی $f(z)$ نیز کاربرد دارد.

مثال ۱۶: حاصل $\oint_C \frac{e^z}{z^3} dz$ در صورتی که C مربعی با رئوس $\pm 4i$ و ± 4 باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi i}{3}$ (۲) $\frac{\pi i}{3}$ (۳) $\frac{4\pi i}{3!}$ (۴) $-\frac{4\pi i}{3!}$

✓ پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(z) = e^z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است و واضح است که $z_0 = 0$ داخل مربع فوق می‌باشد، پس داریم:

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{3!} \times f^{(2)}(0) = \frac{2\pi i}{3!} \times e^0 = \frac{\pi i}{3}$$

مثال ۱۷: حاصل انتگرال $I = \oint_C \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$ در صورتی که C مرز دایره $|z|=2$ در جهت مثبت باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi i}{e}$ (۲) $\frac{2\pi e}{3}$ (۳) $\frac{\pi i}{2e}$ (۴) $2\pi e i$

✓ پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول فوق در این تست $z_0 = -1$ و $n = 3$ می‌باشد، لذا داریم:

$$I = \oint \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = 2\pi \cdot \frac{f'''(-1)}{3!}$$

$$f(z) = e^z \Rightarrow f'''(z) = e^z \Rightarrow f'''(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{e \times 3!} = \frac{\pi i}{2e}$$

مثال ۱۸: حاصل $I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$ کدام است؟

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{2}i \quad (4)$$

$$\frac{\pi^2}{2}i \quad (3)$$

$$-\frac{\pi^2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I = \oint \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = \oint \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} dz$$

$$I = \oint \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{2}i$$

تابع $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ در ناحیه $|z-1| \leq 1$ تحلیلی است، لذا داریم:

کران بالای قدر مطلق یک انتگرال مختلط

بعضی اوقات لازم می‌شود که قدر مطلق انتگرال را روی یک خط مختلط تخمین بزنیم، فرمول زیر که به نامساوی ML هم شهرت دارد، این کار را انجام می‌دهد:

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq ML$$

که در آن L طول مسیر C و M عدد ثابتی است به شکلی که در هر نقطه روی مسیر C، نامساوی $|f(z)| \leq M$ برقرار است.

مثال ۱۹: اگر C قوس دایره $|z|=2$ از $z=2$ تا $z=2i$ باشد که در ربع اول واقع است. یک کران بالا برای $\left| \oint_C \frac{dz}{z^2-1} \right|$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» از آنجایی که طول مسیر C به اندازه ربع دایره $|z|=2$ می‌باشد، پس $L = \pi$ می‌باشد، از طرفی طبق خواص نامساوی‌هایی که در

فصل دوم گفتیم، داریم:

$$|z^2-1| \geq ||z|^2-1| = |4-1| = 3 \Rightarrow |z^2-1| \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow M = \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \int \frac{dz}{z^2-1} \right| \leq ML = \pi \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

نامساوی کوشی

اگر $f(z)$ درون و روی دایره C تحلیلی باشد و C دایره‌ای با مرکز z_0 و شعاع r در نظر گرفته شود و M مقدار ماکزیمم $f(z)$ روی منحنی باشد، آنگاه داریم:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

مثال ۲۰: اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعی تحلیلی درون و روی دایره واحد ($|R|=1$) باشد و چنانچه M حداکثر مقدار $|f(z)|$ روی C باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر برای ژاکوبین در مرکز دایره C برقرار است؟

$$J \leq M \quad (1)$$

$$J^2 \leq M \quad (2)$$

$$J \leq M^2 \quad (3)$$

$$J \leq M^2 \quad (4)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

✓ پاسخ: گزینه «۴» مقدار ژاکوبین برابر مقدار روبه‌رو است:

چون تابع f تحلیلی است، لذا باید روابط کوشی - ریمنان برقرار باشد، یعنی $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ پس داریم:

از طرفی می‌دانیم برای تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ ، مشتق، به صورت $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ می‌باشد و لذا داریم:

با توجه به نامساوی کوشی و این‌که درون و روی دایره C به مرکز $z_0 = 0$ و شعاع $r = 1$ تابع تحلیلی است، لذا داریم:

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$|f'(0)| \leq \frac{M(1!)}{(1)!} \Rightarrow |f'(0)| \leq M \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} |f'(0)|^2 \leq M^2$$

و چون $J = |f'(z)|^2$ پس $J \leq M^2$ است.

قضیه مدول ماکزیمم (اصل ماکزیمم قدر مطلق)

هرگاه $f(z)$ در ناحیه بسته و کراندار D پیوسته و در داخل D تحلیلی و غیر ثابت باشد، آن‌گاه مقدار ماکزیمم $|f(z)|$ در داخل D رخ نمی‌دهد بلکه در نقطه‌ای روی مرز D این اتفاق می‌افتد.

قضیه مدول مینیمم (اصل مینیمم قدر مطلق)

هرگاه $f(z)$ در ناحیه بسته و کراندار D پیوسته و در داخل D تحلیلی و غیر ثابت باشد و در هیچ نقطه‌ای از D صفر نشود، آنگاه مینیمم $|f(z)|$ در روی مرز D اتفاق می‌افتد و $|f(z)|$ در داخل آن هیچگاه مینیمم نمی‌شود.

✓ مثال ۲۱: برای تابع $f(z) = z + 1$ ، ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ روی ناحیه $|z| \leq 1$ به ترتیب کدام است؟

(۴) ۱ و ۲

(۳) ۲ و ۳

(۲) ۰ و ۲

✓ پاسخ: گزینه «۲»

$$|z+1| = |x+iy+1| = |(x+1)+iy| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

با نوشتن مرز $|z|=1$ ، به شکل $x^2 + y^2 = 1$ ، رابطه بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$|z+1| = \sqrt{1+2x+1} = \sqrt{2+2x} \xrightarrow[\text{روی مرز } x=\pm 1 \text{ است}]{\text{ماکزیمم و مینیمم روی مرز اتفاق می‌افتد}} \max |z+1| = \sqrt{2+2(+1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\min |z+1| = \sqrt{2+2(-1)} = 0$$

قضیه لیوویل

اگر $f(z)$ تابعی تام (در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد) و همچنین در تمام صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه تابع $f(z)$ حتماً باید تابعی ثابت باشد.

✓ مثال ۲۲: اگر تابع $f(z) = e^{Az}$ در کل صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه مقدار A کدام است؟

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{z^2}$

(۴) A هر مقدار می‌تواند داشته باشد.

✓ پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم تابع $f(z) = e^{Az}$ در تمام صفحه تحلیلی است و چون در صورت سؤال گفته شده کراندار نیز می‌باشد، پس طبق قضیه لیوویل باید تابعی ثابت باشد و این یعنی مشتق آن صفر باشد:

$$f'(z) = Ae^{Az} = 0 \Rightarrow A = 0$$

قضیه مقدار میانگین گاوس

اگر تابع $f(z)$ بر روی دایره $|z - z_0| = r$ تحلیلی باشد، آنگاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

مثال ۲۶: حاصل $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(e^{i\theta}) d\theta$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) π (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» دقت کنید چون $f(z) = \cos^2 z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است، می‌توانیم فرض کنیم بر روی دایره $|z - 0| = 1$ نیز تحلیلی است، در واقع در این تست $z_0 = 0$ و $r = 1$ در نظر گرفته شده است:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(0 + e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{f(0)=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(e^{i\theta}) d\theta = 1$$

انتگرال گیری با استفاده از قضیه مانده‌ها

اگر $f(z)$ داخل خم ساده و بسته C به جز در نقاط منفرد (تکین) متناهی $z_1, z_2, \dots, z_n$ ، تحلیلی باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Resf}(z) + \text{Resf}(z) + \dots + \text{Resf}(z)] = 2\pi i \quad \text{که در درون } C \text{ قرار دارند.}$$

مثال ۲۷: مقدار انتگرال مختلط $I = \oint_{|z|=1} (z + \frac{1}{z}) e^{\frac{1}{z}} dz$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) πi (۳) $2\pi i$ (۴) $3\pi i$

پاسخ: گزینه «۴»

$$(z + \frac{1}{z}) e^{\frac{1}{z}} = (z + \frac{1}{z}) [1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots] = z + 1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{z}) + \dots$$

ضرب $\frac{1}{z}$ با توجه به رابطه فوق برابر $\frac{3}{2}$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$I = 2\pi i \times \frac{3}{2} = 3\pi i$$

مثال ۲۸: اگر $f(z) = z^2 \bar{z} \cos z$ ، در این صورت حاصل $\oint_{|z|=1} f(z) dz$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۰ (۲) $2\pi i$ (۳) $-2\pi i$ (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به رابطه $z\bar{z} = |z|^2$ و نظر به اینکه انتگرال گیری روی دایره واحد ($|z|=1$) خواسته شده پس $f(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(z) = (z\bar{z})z^2 \cos z = |z|^2 \cdot z^2 \cos z \Rightarrow f(z) = 1 \times z^2 \cos z = z^2 \cos z$$

خب حالا چون تابع $f(z)$ یک تابع تحلیلی در تمام نقاط و از جمله روی منحنی $|z|=1$ است، به راحتی می‌توانیم نتیجه بگیریم حاصل $\oint_{|z|=1} f(z) dz$ برابر صفر است.

مثال ۲۹: مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{z}{z^2 - 1} dz$ به کمک قضیه مانده‌ها در حالتی که C دایره یک باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}\pi i$ (۲) $\frac{4}{3}\pi i$ (۳) πi (۴) $2\pi i$

مثال ۳۲: حاصل انتگرال $I = \oint_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz$ که C دایره‌ای به معادله $|z-2-i|=2$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{2\pi i}{2}$ (۳) $-\frac{2\pi i}{2}$ (۴) $\frac{2\pi i}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» تابع دارای قطب مرتبه دوم $z=0$ و قطب ساده $z=2$ می‌باشد که فقط $z=2$ داخل دایره C قرار دارد:

$$\text{Resf}(z) = \frac{z+1}{z^2-2z} = \frac{z}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \Rightarrow I = 2\pi i \times \frac{1}{-2} = -\frac{2\pi i}{2}$$

توضیح: همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد با قرار دادن $z=2$ و $z=0$ در معادله $|z-2-i|=2$ می‌توانیم بودن یا نبودن نقاط را درون ناحیه بررسی کنیم، چون $2 > \sqrt{5} = |0-2-i|$ می‌باشد، پس $z=0$ داخل ناحیه قرار ندارد.

مثال ۳۳: حاصل $I = \oint_{|z|=5} \frac{e^z dz}{z^2-6z}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi i}{3}$ (۲) $\frac{2\pi i}{5}$ (۳) $-\frac{\pi i}{3}$ (۴) $-\frac{2\pi i}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» نقاط $z=0$ و $z=6$ قطبهای تابع هستند که $z=6$ خارج دایره $|z|=5$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\text{Resf}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z^2-6z} = -\frac{1}{6} \Rightarrow I = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

مثال ۳۴: حاصل انتگرال $I = \oint_C \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz$ بر روی مرز C مربع $1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi i}{2}$ (۳) $\frac{\pi i}{4}$ (۴) $\frac{\pi i}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» قطبهای تابع $z=0$ و $z=-2$ می‌باشند که $z=-2$ خارج از ناحیه انتگرال‌گیری و $z=0$ قطب مرتبه دوم تابع است، لذا داریم:

$$\text{Resf}(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dz} \frac{e^z}{z^2(z+2)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{e^z(z+2) - e^z}{(z+2)^2} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow I = 2\pi i \times \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

مثال ۳۵: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=1} \frac{\Delta z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$ کدام است؟

- (۱) $2\pi i$ (۲) $4\pi i$ (۳) $8\pi i$ (۴) $10\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» تابع دارای قطب مرتبه سوم $z=1$ است:

$$\text{Resf}(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 \cdot \frac{\Delta z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} \right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} (\Delta z^2 - 3z + 2)'' = \frac{10}{2!} = 5 \Rightarrow I = 5 \times 2\pi i = 10\pi i$$

مثال ۳۶: فرض کنید C معرف دایره $|z|=2$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال $\oint_C \frac{(z^2+1)}{z^6-6z^4+\Delta z^2} dz$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $-\frac{\pi i}{4}$ (۲) $\frac{\pi i}{4}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{\pi i}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است ابتدا باید نقاط تکین تابع تحت انتگرال را حساب کنیم، برای این منظور مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$z^6 - 6z^4 + \Delta z^2 = 0 \Rightarrow z^2(z^4 - 6z^2 + \Delta) = 0 \Rightarrow z^2(z^2 - 5)(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z=0, z=\pm\sqrt{5}, z=\pm 1$$