دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی ۱

تاریخ امتحان: ۹۷/۰۹/۰۵

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: math-teacher.blog.ir
شماره دانشجویی:
رشته تحصیلی:
نام استاد درس:

شماره سوال	نمره
۱	
۲	
۳	
۴	
۵	
جمع کل:	

تذکر: ۱- پاسخ هر سوال را روی صفحه جداگانه و به ترتیب بنویسید، در غیر این صورت پاسخ نامه تصحیح نخواهد شد.

۲- به هیچ وجه برگه ها را از محل دوخت جدا نکنید.

۳- از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی پاسخ نامه جداً خودداری شود.

۱- مقادیر $z \in \mathbb{C}$، صادق در معادله $\mathrm{Re}(z^2) + i\, Im\big(\bar{z}(1+2i)\big) = -3$ را بیابید. (۱۰ نمره)

پاسخ: math-teacher.blog.ir

فرض کنیم $\longrightarrow z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\rightarrow z^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \rightarrow \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

$\rightarrow \bar{z}(1+2i) = (x-iy)(1+2i) = x + 2xi - yi - 2yi^2$

$= x + 2y + (2x-y)i \rightarrow Im(\bar{z}(1+2i)) = 2x - y$

جایگذاری در رابطه $\longrightarrow x^2 - y^2 + (2x-y)i = -3$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ حل دستگاه $\longrightarrow x = \pm 1,\ y = \pm 2$

$(1, 2)\ ,\ (-1, -2)$

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} z &= 1 + 2i \\ z &= -1 - 2i \end{aligned}}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
math-teacher.blog.ir
مدرس تخصصی ریاضیات
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- تابع $f(x) = asinx - x + b$ را در نظر بگیرید که در آن $0<a<1$ و $b>0$، نشان دهید معادله $f(x) = 0$ دقیقا یک ریشه دارد. (۱۰ نمره)

پاسخ : math-teacher.blog.ir

$f(+\infty) = a\sin(+\infty) - \infty + b \xrightarrow{-1\le \sin(\infty)\le 1 \,،\, 0<a<1} f(\infty) = -\infty$

$b>0$ امّا با لاخره یک عدد محدود است.

$f(-\infty) = a\sin(-\infty) + \infty + b \xrightarrow{\text{مثبت}} f(-\infty) = +\infty$

باتوجه به اینکه $f(+\infty)f(-\infty) < 0$ و تابع پیوسته است طبق قضیه بولتزانو نتیجه می‌گیریم که معادله حداقل ۱ ریشه در بازه $(-\infty, \infty)$ دارد.

حالا فرض کنیم بیش از ۱ ریشه دارد، فرضاً ۲ ریشه $\leftarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$

بنابراین طبق قضیه رول $\leftarrow c \in R \rightarrow f'(c) = 0$

$f'(x) = a\cos x - 1 \xrightarrow{x=c} f'(c) = a\cos c - 1$

باتوجه به اینکه $-1 \le \cos c \le 1$ و $0 < a < 1$ بنابراین عبارت $-1 < a\cos c < 1$ یعنی همواره کمتر از ۱ است

پس عبارت $f'(c)$ همواره منفی و فاقد ریشه خواهد بود.

بنابراین فرض وجود ۲ ریشه باطل و معادله فقط ۱ ریشه دارد.

ابراهیم شاه ابراهیمی - ۲ آذرماه ۹۷

۳- حد زیر را محاسبه کنید. (15 نمره)

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}+(\sin x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

پاسخ :

math-teacher.blog.ir

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}+(\sin x)^{\frac{1}{x}}\right]=\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}+(\sin x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\left[\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}}_{A}+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{x}}}_{B}\right]$$

محاسبه A ←

$$A=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=(\infty)^0$$ مبهم ← برای رفع $\ln$

$$\ln(A)=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

قوانین $\ln$ ←

$$\ln(A)=\lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}-\sin x\cdot\ln(x)=0\times\infty$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$$

هم ارزی

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0^+}x=\boxed{0}$$

$$\to \ln A=0\to \boxed{A=1}$$

محاسبه B ←

$$B=\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{x}}=0^{+\infty}=0$$ مبهم نیست

به طور مثال $x=\frac{1}{1000}$ ← یعنی این عبارت به سمت صفر میل می‌کند

$$\left(\sin\frac{1}{1000}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{1000}\right)^{1000}=10^{-6}$$

بنابراین ←

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}+(\sin x)^{\frac{1}{x}}\right]=1$$

۴- الف) چند جمله‌ای تیلور تابع $f(x) = sin^2x$ حول $x = 0$ را تا درجه ششم بیابید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) حاصل حد زیر را بیابید.(15 نمره)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin^2x - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6}$$

پاسخ : math-teacher.blog.ir

بسط تیلور $\longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$ $\xrightarrow{x_0=0}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

$Sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ جملات با درجات زوج (0,2,4,6) صفرند.

$Cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ جملات با درجات فرد (1,3,5,7) صفرند

$$Sin^2x = \frac{1-Cos2x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45}\right)$$

$$= \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}}$$ (الف)

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{Sin^2x - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - x^2 + \frac{x^4}{3}}{x^6}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{45}x^6}{x^6} = \boxed{\frac{2}{45}}$$

برای همه شما آرزوی موفقیت در امتحانات پایان ترم دارم - آذر ۹۷

۵- مطلوب است شیب خط مماس بر منحنی $r = \cos^2\theta$ در نقطه $\theta = \frac{\pi}{4}$. (۱۰ نمره)

پاسخ:

math-teacher.blog.ir

شیب خط مماس: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} * = \frac{(\frac{dr}{d\theta})\sin\theta + r(\frac{d\sin\theta}{d\theta})}{(\frac{dr}{d\theta})(\cos\theta) + r(\frac{d\cos\theta}{d\theta})} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$

$$* \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$r = \cos^2\theta \xrightarrow{\theta=\pi/4} r = \frac{1}{2}$

$\frac{dr}{d\theta} = -2\cos\theta\sin\theta = -\sin 2\theta \xrightarrow{\pi/4} \frac{dr}{d\theta} = -1$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(-1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آذر ۹۶

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
math-teacher.blog.ir
مدرس تخصصی ریاضیات
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی