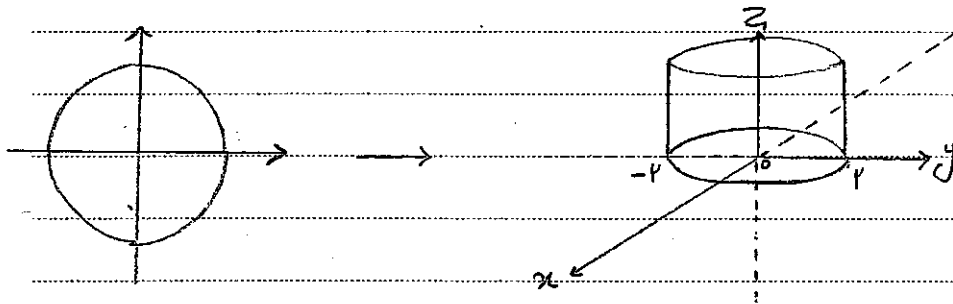


مضامین: رویه‌ها و استوانه‌ها در مختصات

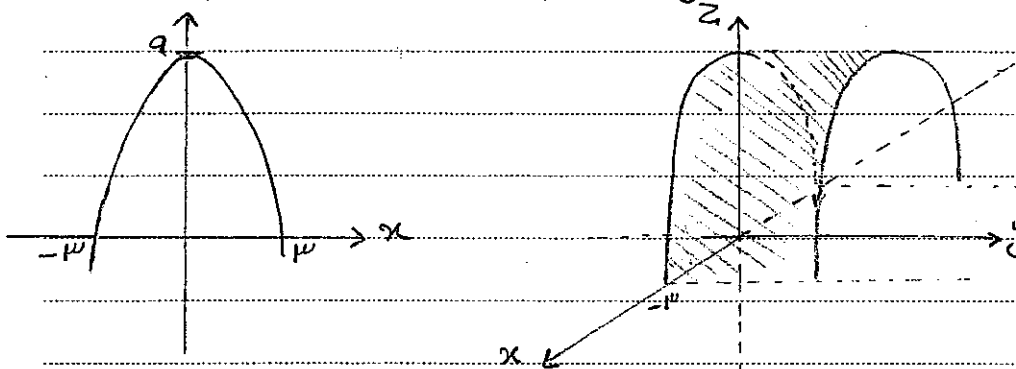
تعریف استوانه در مختصات: هر معادله‌ای که در آن فقط دو معادله موجود باشد آن را معادله یک استوانه در مختصات می‌نامیم.
 $F(x, y) = 0$, $F(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$.
 هر استوانه دارای یک محور هاست که متغیر این محور در معادله استوانه دیده نمی‌شود.
 و برای رسم یک استوانه:

ابتدا معادله آن را در صفحه رویی رسم کرده و سپس این صفحه را در راستای محورهای عمود بر صفحه رسم

مثال: معادله یک استوانه با محورهای z است $x^2 + y^2 = 4$.



استوانه‌ای با محورهای z است $x^2 + y^2 = 9$ $\rightarrow z = -x^2 + 9$



$$x^2 - y^2 = 1$$

Subject _____

Date _____

۴. $z = \frac{1}{y}$

تعریف رویه (سطح) : Surface

هر معادله که در آن سه متغیر x و y و z مجرب باشند آنرا را معادله یک رویه در مختصات سه بعدی میگویند.
 $F(x, y, z) = 0$

مثال

صفحه $ax + by + cz = d$ یک رویه در مختصات است.

کره $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ یک رویه در مختصات است.

اگر در معادله یک رویه حداقل دو متغیر از رجه ۲ داشته باشیم آنرا را رویه درجه دوم (اصطلاحاً بیضی و بیضی دایره) میگویند.

همه رویه های درجه ۲ عبارتند از:

۱. بیضی کُرن (بیضی دایره)

۲. سهمی کُرن بیضی

۳. سهمی کُرن هذلولی

۴. هذلولی کُرن یک پارچه

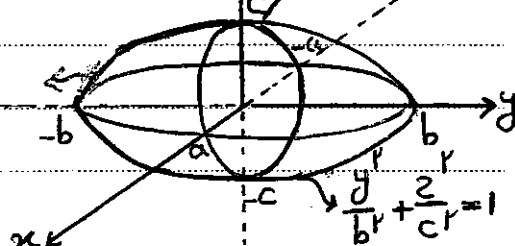
۵. هذلولی کُرن دو پارچه

۶. مخروط بیضی

به سبک مشابه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ (الف)

ب) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ به سبک مشابه

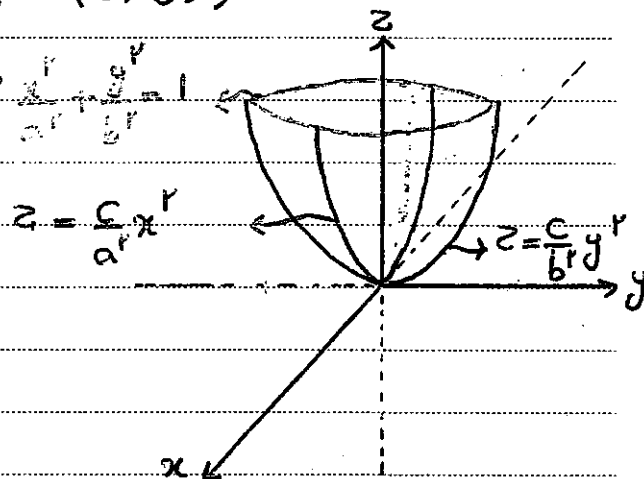
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



* در حالت خاص $a=b=c=R$ فرض شود آن گاه معادله تبدیل به
کره ای به شعاع R می شود.

(۱) سهمی نوک به پستی:

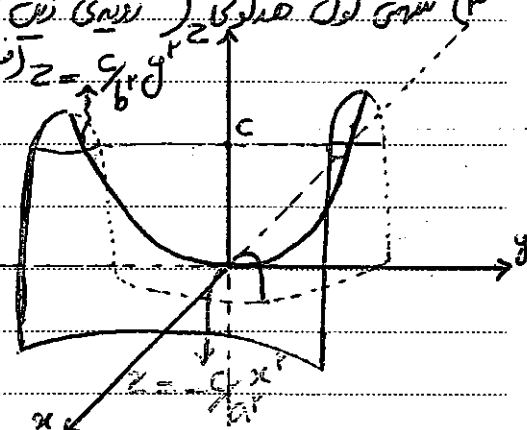
مقطع عمود بر محور z ها $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ ←
 (فرض $c > 0$) مقطع عمود بر محور y ها $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2}$ ←
 (ب) مقطع عمود بر محور x ها $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2}$ ←



c مثبت ← سهمی نوک رو به بالا
 c منفی ← سهمی نوک رو به پایین

(۳) سهمی نوک عمود بر z (همه ی زین است) (فرض $c > 0$)

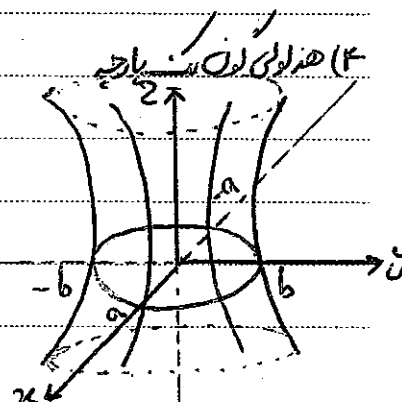
مقطع عمود بر محور z ها است $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ →
 مقطع عمود بر محور x ها است $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2}$ →
 مقطع عمود بر محور x ها است $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2}$ →



هنگامی $\text{if } z = c \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

هنگامی $\text{if } z = -c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

مقطع عمود بر محور z ها است $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 1$ →
 مقطع عمود بر محور x ها است $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1$ →
 مقطع عمود بر محور x ها است $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1$ →



Subject

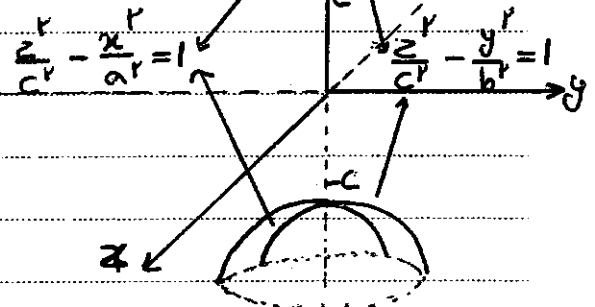
Date

الف) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } z \text{ ها است}$

ب) $-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } y \text{ ها است}$

ج) $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } x \text{ ها است}$

از $z = \sqrt{c^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



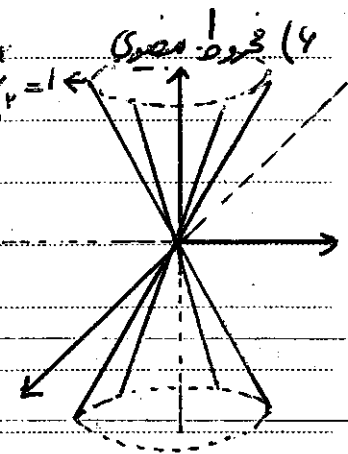
الف) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } z \text{ ها است}$

ب) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } y \text{ ها است}$

ج) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow$ $\text{مقطع ناقص در } x \text{ ها است}$

$x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{b} y$

$y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{a} x$



مقطع ناقص: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

+ : معادله نیم مخروط بالایی / - : معادله نیم مخروط پایینی

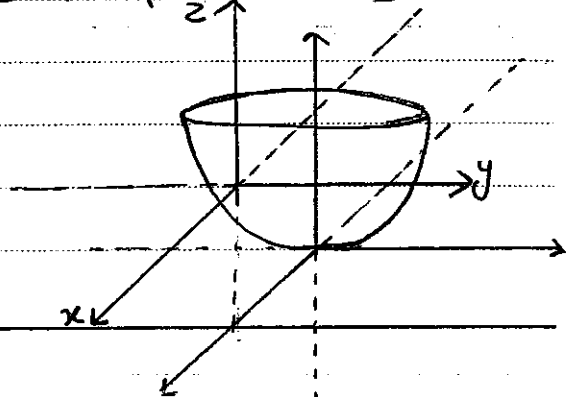
مثال) معادله زیر را ساده و آن را رسم کنید.

$4x^2 + y^2 - 4y + 8x - 4z = 0 \rightarrow (4x^2 + 8x) + (y^2 - 4y) + (-4z) = 0$

$(4(x^2 + 2x)) + (y^2 - 4y) - 4z = 0 \rightarrow (4(x+1)^2 - 4) + (y-1)^2 - 4z = 0$

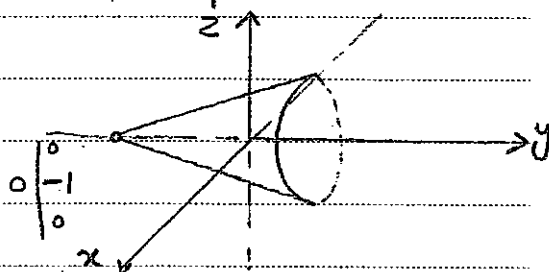
$4(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4z + 4 \rightarrow (x+1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = z + 1$ $\text{سمت راست به معنی با محور } z$

مختصات رأس $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$



$$y = -1 + \sqrt{1+x^2+2z^2} \rightarrow y+1 = \sqrt{1+x^2+2z^2} \rightarrow (y+1)^2 = 1+x^2+2z^2$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$



این معادله یک مَنبَره دایره‌ای در سه بعد را نشان می‌دهد.

$$F(x^2 - 1, y^2 - 2, z^2 + 4z) = k$$

$$F(x^2 - 1, y^2 - 2, z^2 + 4z) = k \rightarrow F(x-1, y^2 - (z-1)^2 - 4) = k$$

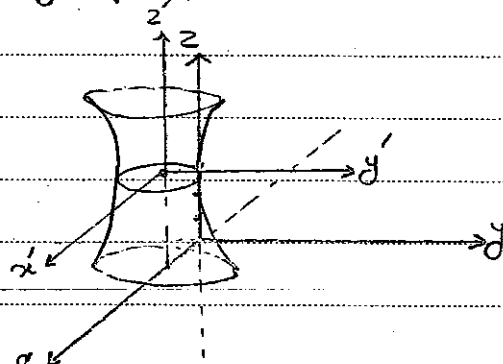
$$F(x-1, y^2 - (z-1)^2) = k-4$$

if $k=4$ → این یک مَنبَره دایره‌ای در سه بعد است.

if $k>4$ → این یک مَنبَره دایره‌ای در سه بعد است.

if $k<4$ → این یک مَنبَره دایره‌ای در سه بعد است.

$$\text{مثلاً } k=4 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + y^2 - (z-1)^2 = 1$$



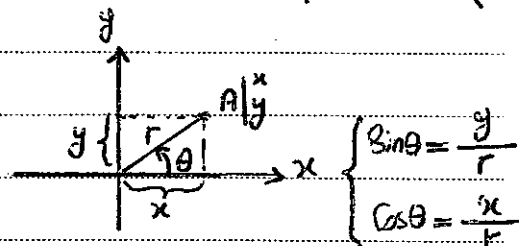
انواع منبَره دایره‌ای:

(1) مَنبَره دایره‌ای

$$\vec{r} = A \hat{r}$$

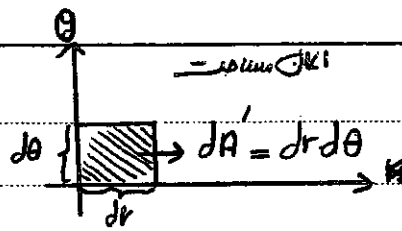
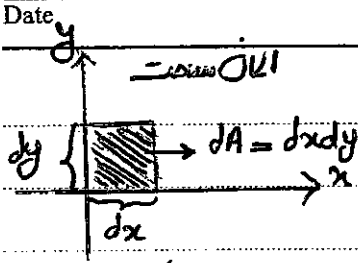
$$\vec{r} = A' \hat{r}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$



Subject _____

Date _____



$$dA \neq dA'$$

$$dA = |J| dA'$$

ضریب زکوینی تبدیل منصف نقاط به منصف

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r > 0$$

$$dA = r dA'$$

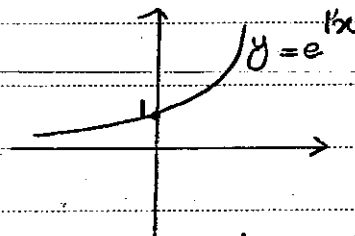
$$dx dy = r dr d\theta$$

مثال: معادله زیر را از مختصات قطبی به مختصات دکارتی برده و عبار آن را رسم کنید.

$$\ln(r) + \ln(\sin \theta) = r \cos \theta \rightarrow \ln(r \sin \theta) = \ln(y) = r \cos \theta \rightarrow y = e^{rx}$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$



(r) مختصات استوانه ای (مختصات قطبی سه بعدی)

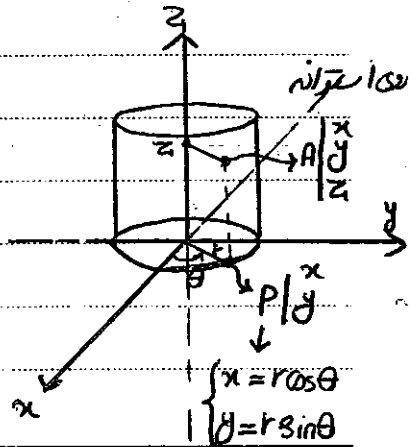
$$A \left| \frac{x}{y}{z} \right.$$

$$A' \left| \frac{r}{\theta}{z} \right.$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc tan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$



Subject

Date

$$\int dV = dx dy dz \rightarrow \text{اگر هم در یک خط} \quad dV \neq dV'$$

$$\int dV = r dr d\theta dz \rightarrow \text{در استوانه ای} \quad dV = |J| dV'$$

ضریب ژاکوبین تبدیل یکاری به استوانه ای

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0 \quad ? \quad dV_2 = 0$$

$$dV = r dV'$$

$$dx dy dz = r dr d\theta dz$$

مثال (نقطه) $A \left| \begin{smallmatrix} p \\ \sqrt{p} \\ -1 \end{smallmatrix} \right.$ را از مختصات یکاری به مختصات استوانه ای ببرید.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{p} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{p}}{p}\right) = \frac{\pi}{4} \\ z = z = -1 \end{cases} \quad A' \left| \begin{smallmatrix} \sqrt{p} \\ \frac{\pi}{4} \\ -1 \end{smallmatrix} \right.$$

مثال (نقطه) بخواهیم زیر را از مختصات استوانه ای به مختصات یکاری برده و در یک معادله به آن قرار دهیم و یک معادله

$$r^2 - r \cos \theta + r \sin \theta - z^2 + 12 = 1$$

$$r^2(x^2 + y^2) - rx + ry - z^2 + 12 = 1 \rightarrow r^2(x^2 - 1) + (ry^2 + ry) - (z^2 - 12) = 1$$

$$(r^2(x-1)^2 - 1) + (r^2(y+1)^2 - 1) - ((z-1)^2 - 1) = 1$$

$$r^2(x-1)^2 + r^2(y+1)^2 - (z-1)^2 = 1 + 1 + 1 - 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{1} - \frac{(z-1)^2}{1} = 1 \quad \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \quad \text{هنگامی که یک یا دو یا سه مختصات 2 در رأس}$$

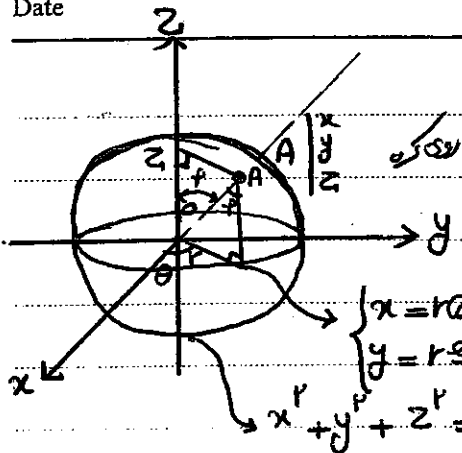
$$A \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right.$$

مختصات یکاری: $A \left| \begin{smallmatrix} p \\ \theta \\ p \end{smallmatrix} \right.$

$$\begin{aligned} & \text{مثال: } p \text{ شعاع یکاری} \\ & \theta \text{ زاویه قطبی} \rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ & p \text{ زاویه یکاری} \rightarrow 0 \leq p \leq \pi \end{aligned}$$

Subject

Date



$$OZA \text{ مثلث} : \cos \phi = \frac{z}{\rho} \rightarrow z = \rho \cos \phi$$

$$OBA \text{ مثلث} : \sin \phi = \frac{r}{\rho} \rightarrow r = \rho \sin \phi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \phi = \text{ArcCos} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dV = dx dy dz \\ dV' = dp d\theta d\phi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{این دو دایره} \\ \text{یکدیگر را می‌پوشانند} \end{array} \rightarrow dV = dV' \quad dV = |J| dV'$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi > 0$$

$$\rightarrow dV = \rho^2 \sin \phi dV'$$

$$\rightarrow dx dy dz = (\rho^2 \sin \phi) dp d\theta d\phi$$

نقطه A را از مختصات دکارتی به مختصات کروی تبدیل می‌کنیم.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} \right) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{کروی A} \left(\frac{\sqrt{3}}{\rho}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{\mu} \right)$$

$$\phi = \text{ArcCos} \left(\frac{z}{\rho} \right) = \text{ArcCos} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{\mu}$$

سوال امتحانی: معادله زیر را از مختصات کروی به مختصات دکارتی تبدیل کنید و جواب را به ازای مختصات دکارتی بنویسید.

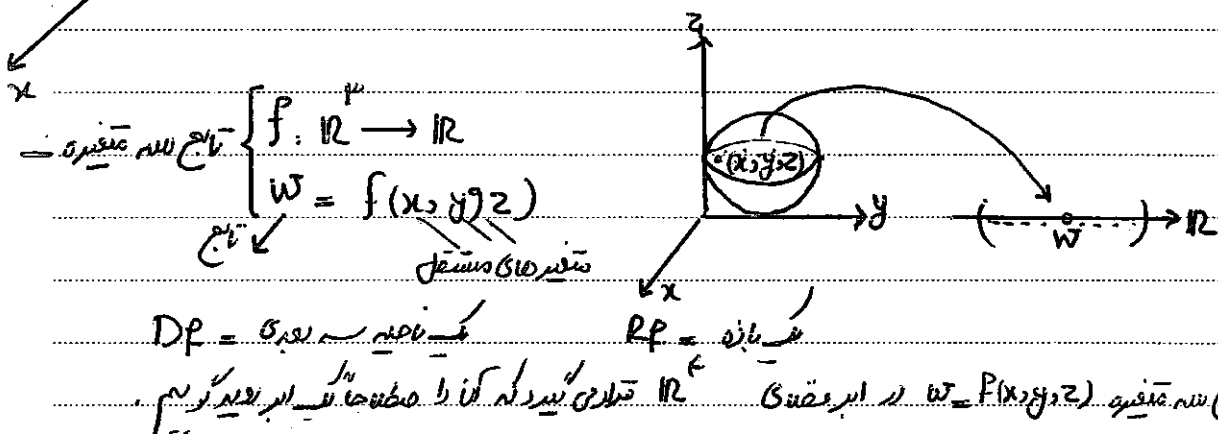
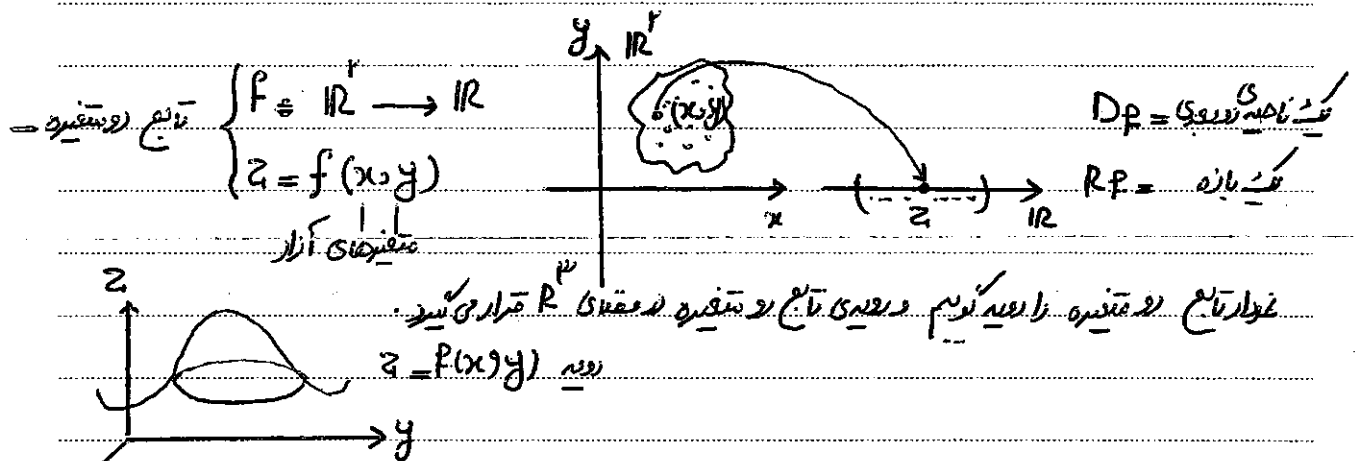
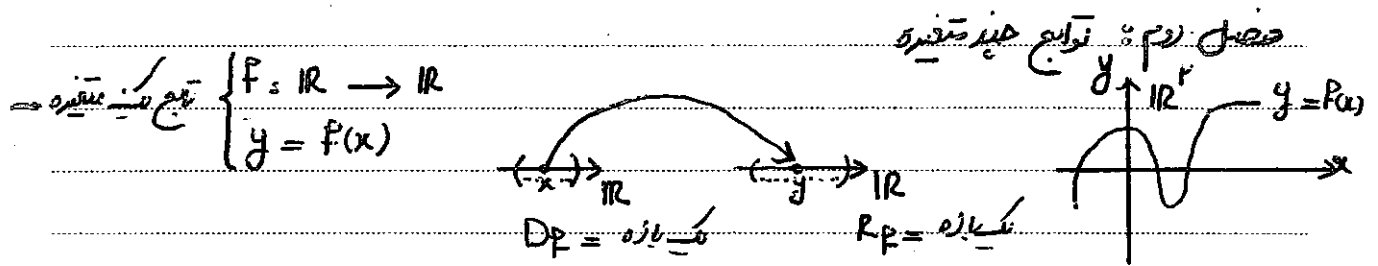
$$\rho^2 \sin^2 \phi (1 + \sin^2 \theta) - \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin \phi \cos \theta = 0 \rightarrow \underbrace{\rho^2 \sin^2 \phi (1 + \sin^2 \theta)}_{\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^4 \phi} - \underbrace{\rho^2 \cos^2 \phi}_{-z^2} + \underbrace{\rho^2 \sin \phi \cos \theta}_{\rho^2 x} = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 - 2z^2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + \frac{y^2}{1} - \frac{2z^2}{1} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{نقطه (1,0,0)} \\ \text{نقطه (0,1,0)} \\ \text{نقطه (0,0,1)} \end{array}$$

Subject

Date

تمرین: معادله زیر را به مختصات قطبی تبدیل کنید و رسم کنید.

$$\rho = 2 \sin \theta (\cos \theta - 2 \sin \theta)$$


Subject

Date

مثال ۱) تابع مساحت یک مستطیل $S = x \times y$ یک تابع دو متغیره است.

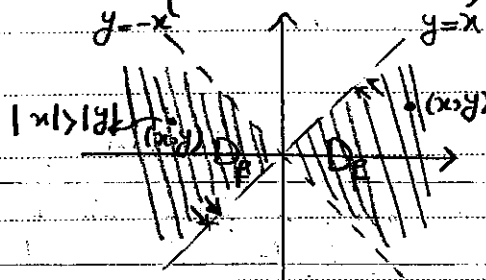
۲) حجم یک مکعب مستطیل $V = x \times y \times z$ یک تابع سه متغیره است.

۳) حجم مخروط $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ یک تابع دو متغیره است.

مثال ۲) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره است.
 $z = f(x, y) = \ln(|x| - |y|)$

مثال ۳) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع سه متغیره است.
 $w = f(x, y, z) = \frac{r}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

$$1) D_f = \{(x, y) \mid |x| - |y| > 0\} = \{(x, y) \mid |x| > |y|\}$$



$|x| = |y|$ دو خط میانی

اگر D_f شامل (x, y) باشد پس $|x| > |y|$ و $|x| - |y| > 0$

$$|x| - |y| \rightarrow 0^+$$

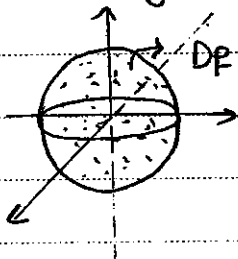
$$\ln(|x| - |y|) \rightarrow \ln(0^+) = -\infty$$

پس اگر D_f شامل (x, y) باشد پس $|x| - |y| > 0$ و $|x| - |y| \rightarrow 0^+$

$$|x| - |y| \rightarrow +\infty \rightarrow \ln(|x| - |y|) \rightarrow \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$2) D_f = \{(x, y, z) \mid 9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$$

اگر D_f شامل (x, y, z) باشد پس $9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ و $9 - x^2 - y^2 - z^2 \rightarrow 0^+ \rightarrow \frac{r}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \rightarrow +\infty$



Subject _____

Date _____

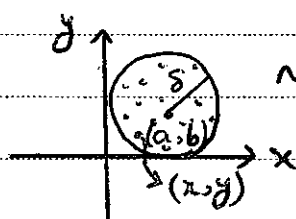
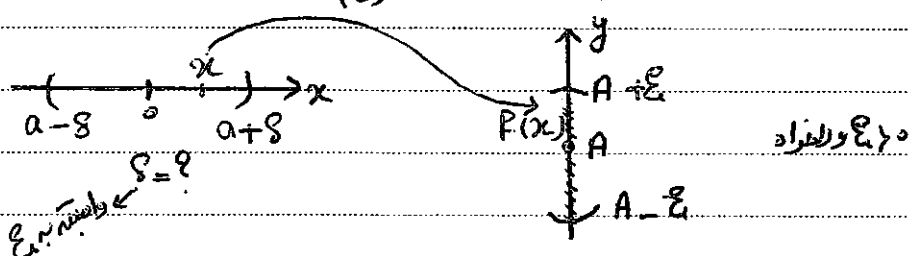
حدود بیرونی در توانج چند متغیره :

منظر از اینست :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

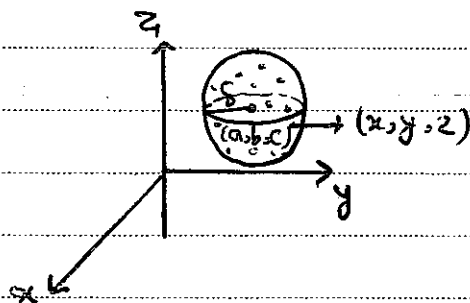
$$x \rightarrow a$$

یعنی $\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon)$



$$N_\delta(a, b)$$

منظر از اینست : $\forall (x, y) \in N_\delta(a, b) \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$



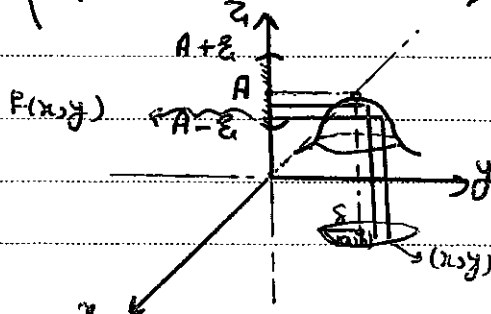
$$\forall (x, y, z) \in N_\delta(a, b, c) \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

حال منظر از اینست :

یعنی $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) (0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y)-A| < \varepsilon)$

منظر از اینست : δ و افراد ε و افراد δ



Date _____

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = 0$$

$$|f(x,y) - d| < \varepsilon \rightarrow |f(x,y) - 1| < \varepsilon \rightarrow |f(x-1) + r(y-1)| < \varepsilon \rightarrow |f(x-1) + r(y-1)| < r|x-1| + r|y-1| < \varepsilon$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{P} \rightsquigarrow 78 \text{ k} \varepsilon \rightarrow 8 \text{ k} \varepsilon$$

$\frac{1}{2} \ll \frac{8}{1} \rightarrow$ ارتفاع مسير
 $\frac{1}{2}$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) + 1| < \epsilon \right) \quad \epsilon > 0 \text{ (اختار من غير قيد)}$$

$$|f(x, y) + 1| < \varepsilon \rightarrow |r_x^r + y^r - f(x, y) + 1| < \varepsilon \rightarrow |r(x-0)^r + (y+1)^r - f(x)| < \varepsilon \rightarrow$$

$$|r(x-0)^r + (y+1)^r - f(x-0)| < \varepsilon \rightarrow |r(x-0)^r + (y+1)^r - f(x-0)| \leq r|(x-0)^r| + |(y+1)^r| + |f(x-0)| < \varepsilon$$

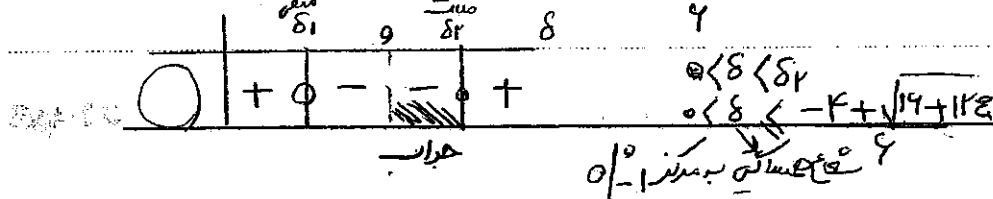
نظرفسر: $|f(x) - 0| \leq f\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} < f\delta \rightarrow |y+1| \leq \sqrt{\frac{\delta}{f}} < \delta$

$$r|(x-y)^r| \leq r|(x-y)^r + (y+1)^r| \leq r\delta^r \rightarrow |(y+1)^r| \leq \binom{r}{1} \delta^r$$

$$r|(x-0)^r| + |(y+1)^r| + f|x-0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad (1, P) \rightarrow \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \rightarrow$$

$$\mu\delta^T + F\delta - \xi \leq 0 \quad \delta \text{ — макс. допустимая}$$

$$\Delta = b - K_{ac} = 14 + 11\epsilon_0 \quad \delta = -K \pm \sqrt{14 + 11\epsilon}$$



Subject

Date

بررسی وجود حد از حالت % مسم در توابع چند متغیره :

اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = \%$ مسم

برای رفع ابهام از روش استاندارد می شود
روش اول : استاندارد از مسیر خاص

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } y = mx \\ \text{ب) } y = kx^2 \\ \text{پ) } x = ky^2 \end{array} \right\}$$

اگر روی هر سه مسیر مقدار حد موجود ، متناهی و مستقل از مسیر هم برابر باشد آن گاه می گوییم حد تابع در مبدأ موجود است .

روش دوم : (روش قطبی) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = \%$ اگر

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

چون اگر در شکل قطبی مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ در مورد θ متناهی و مستقل از θ ثابت آن گاه می گوییم حد تابع در مبدأ موجود است .

اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b) \neq \text{مبدأ}} F(x,y) = \%$ مسم

تبدیل : در این حالت ابتدا با یک تبدیل $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ را به مبدأ انتقال داده و سپس از روش های ماکزیمم استاندارد می گوییم .

$$F(x,y) = \frac{f_x^2 + x y^2}{x^2 + y^2} = \%$$

مثال وجود حد تابع را به مبدأ بررسی کنید .

$$\begin{aligned} \text{فرض} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} &\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_x^2 + x y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 (\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1} = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

لذا حد تابع برابر نمی باشد .

Subject

Date

دو عدد (0 و 0) $\lim_{x \rightarrow 0} y = mx \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx + m^2x}{x^2 + m^2x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx + m^2x}{1 + m^2x^2} = \frac{0}{1+m^2}$
 $= 0 \rightarrow$ مستقیم

ب) $y = kx^2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2 + k^2x^4}{x^2 + k^2x^4} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2 + k^2x^4}{1 + k^2x^4} = \frac{0}{1} = 0$ مستقیم

ج) $x = ky^2 \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^2y^4 + ky^2}{ky^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^2y^2 + k}{k + y^2} = \frac{k}{k} = 1$

$f(x, y) = \frac{e^{xy} + \tan(y^2) + x^2 - 1}{xy + y^2}$

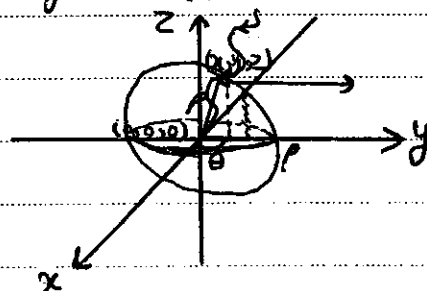
در حد تابع را بنویسید $A|_0$
 $\left\{ \begin{array}{l} e^{xy} \sim 1 + xy \\ \tan(y^2) \sim y^2 \end{array} \right. \rightarrow f(x, y) = \frac{1 + xy + y^2 + x^2 - 1}{xy + y^2} = \frac{xy + y^2 + x^2}{xy + y^2} \xrightarrow{r^2} \frac{x^2}{y} \rightarrow \frac{0}{0}$
 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{r^2(x+1)y + r^2 + (x+1)^2 - 1}{(x+1)y + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta}{r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta + r^2}{r^2 \sin \theta} = \frac{r^2 (\cos \theta + \sin \theta + 1)}{r^2 \sin \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\sin \theta}$
 $\xrightarrow{A|_0} \frac{1 + 0 + 1}{0} = \infty$

رفع اجماع حاصل $\frac{0}{0}$ در تابع سه متغیره :

$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = \frac{0}{0}$

$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$



$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$

حال اگر در شکل کوی مقدار هر سه متغیره مستقل از هم درازای ρ و θ باقی بماند و فقط ϕ متغیر باشد.

1

Subject

Date

؟ ایا $A|_1^0$ تعریف می شود (چرا)

$$f(x, y, z) = \frac{\arctan(xz) + y^r - r}{x^r + y^r + z^r - a} \quad \text{با توجه به} \quad \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 1, 1)} \frac{xz + y^r - r}{x^r + y^r + z^r - a} =$$

$$\begin{cases} \text{چون} \\ x = X+0 \\ y = Y+1 \\ z = Z+1 \end{cases} \quad \lim_{(X, Y, Z) \rightarrow (0, 1, 1)} \frac{X(Z+1) + (Y+1)^r - r}{X^r + (Y+1)^r + (Z+1)^r - a} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^r \sin \rho \cos \theta + \rho^r \sin \rho \cos \theta + \rho^r \sin^r \rho \sin \theta + r \rho^r \sin \rho \sin \theta}{\rho^r + r \rho^r \sin \rho \sin \theta + r \rho^r \cos \rho} =$$

$$\frac{\sin \rho \cos \theta + r \sin \rho \sin \theta}{r \sin \rho \sin \theta + r \cos \rho} \rightarrow \frac{\sin \theta + r \sin \theta \cos \theta}{r \sin \theta + r \cos \theta}$$

؟ آیا تعریف می شود یا نه؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{f_x^r y}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \sin(xy) & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این حالت $f(0, 0) = g(0) = 0$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f_x^r y}{x^r + y^r} \stackrel{؟}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^r \cos \theta \sin \theta}{r^r \cos^r \theta + r^r \sin^r \theta}$$

Subject

Date

مشتقات جزئی در تابع چند متغیره :

یا دارای : $y = f(x)$ تابع یک متغیره

تغییر Δx

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{تابع مشتق}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m = \tan(\alpha)$$

α زاویه بین خط مماس و خط عمود

حاصل مشتق در متغیره $z = f(x, y)$

تغییر $\Delta x \rightarrow$

تغییر $\Delta y \rightarrow$

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x = z_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

تابع مشتق جزئی نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = m_1 = \tan(\alpha)$$

α زاویه بین خط مماس و خط عمود

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = m_2 = \tan(\beta)$$

β زاویه بین خط مماس و خط عمود

Subject

Date

$\frac{\partial F}{\partial x} = r_{xy} + r$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^r - r_{xy} + r$
 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$

$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, r) = -r$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_{xy}(\Delta x, y) + (r_{xy})^r + r \Delta x}{\Delta x}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(r, 0) = r$
 $r_{xy} + r$

$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, r) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x, r) - F(-1, r)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^r - r + r_{xy} - r) - (-1 - r)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r + r_{xy}}{x+1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1} r_{xy} = -r = \tan(\alpha)$

$\frac{\partial F}{\partial x}(r, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(r, y) - F(r, 0)}{y}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = yz e^{xyz} + z y^{xz} \ln y + y z x^{yz-1} + z(1 + \tan(xz))$

$\frac{\partial F}{\partial y} = xz e^{xyz} + xz y^{xz-1} + z x^{yz} \ln x$

$\frac{\partial F}{\partial z} = x y e^{xyz} + x y^{xz} \ln y + y x^{yz} \ln x + x(1 + \tan(xz))$

Subject

Date

مشتقات جزئی مرتب بالاتر :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{xx} \rightarrow \text{مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به } x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = F_{yx} \rightarrow \text{مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به } x \text{ و } y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} \rightarrow \text{مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به } y \text{ و } x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F_{yy} \rightarrow \text{مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به } y$$

قضیه: اگر $F(x, y)$ در ناحیه A دو مرتبه مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} (a, b) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} (a, b)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} = F_{xyz} = F_{zyx} = F_{xzy} = F_{yzx} = F_{zxy} = F_{xzy} \rightarrow \text{مشتق جزئی مرتبه سوم نسبت به } x, y, z$$

مثال: اگر $F(x, y, z) = \cos(xy) + \cos(yz) + \ln(xyz)$ ، محاسبه مشتقات:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial z \partial x}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z \partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y \sin(xy) + \frac{1}{x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x \sin(xy) - z \sin(yz) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -y \sin(yz) + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\sin(xy) - xy \cos(xy) + 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -\sin(xy) - xy \cos(xy) + 0$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial z \partial x} = F_{yzx} = F_{zyx} = 0 \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z \partial y} = F_{xzy} = 0$$

Subject

Date

رینراسین ها خیز و کله در تابع چند متغیره :

$$y = f(x)$$

یادآوری :

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx$$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

(تکرار جمله برای متغیر x : $\Delta x = dx$)

$$| \Delta y - dy |$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

رینراسین تابع

کاربرد : اگر $\Delta x \rightarrow 0$ کنه : $| \Delta y - dy | \rightarrow 0$ رینجه $\Delta y \approx dy$

$$\rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$z = f(x, y)$$

حال در تابع دو متغیره

$$dz_x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$$

$$dz_y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$dz = dz_x + dz_y = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$| \Delta z - dz |$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

رینراسین تابع

کاربرد : اگر $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ کنه : $| \Delta z - dz | \rightarrow 0$ رینجه $\Delta z \approx dz$

$$\rightarrow f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \rightarrow$$

تایم

تایم دو متغیره

Subject

Date

مثال: اگر $F(x,y) = e^{xy} + \ln(xy) + \ln(1+xy)$ در نقطه $A(1,1)$ تغییرات x و y به ترتیب

0.1 و -0.1 باشد، تغییرات z چقدر و کجای تابع را به دست آورده

$$dz_x = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x = \left(ye^{xy} + \frac{y}{\cos^2(xy)} + \frac{y}{1+xy} \right) \Delta x = 1 \times 0.1 = 0.1$$

$$dz_y = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y = \left(xe^{xy} + \frac{x}{\cos^2(xy)} + \frac{x}{1+xy} \right) \cdot \Delta y = 0 \times (-0.1) = 0$$

$$dz = dz_x + dz_y = 0.1$$

$$F(x) = \frac{x^2 + y}{x - y} \quad A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. , \quad \Delta x = 0.1, \quad \Delta y = -0.1$$

$$dz = dz_x + dz_y = 0.1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y = \left(\frac{x^2 - y^2 - x^2 - y}{(x-y)^2} \right) \Delta x + \left(\frac{x - y + x^2 + y}{(x-y)^2} \right) \Delta y =$$

$$-1 \times 0.1 + 1 \times (-0.1) = -0.1 - 0.1 = -0.2$$

$$dz = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F(1.1, 1) - F(1, 1) =$$

$$\frac{1.1^2 + 1}{1.1 - 1} - \frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{1.21 + 1}{0.1} - \frac{2}{0} = \frac{2.21}{0.1} - 2 = 22.1 - 2 = 20.1$$

$$dz = -0.2$$

مثال: با استفاده از تغییرات $\sqrt{11 \times 15}$ را به دست آورده

$$F(x,y) = \sqrt{xy} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \end{cases}$$

$$\sqrt{11 \times 15} = \sqrt{(9+2) \times (14-1)} \approx \sqrt{9 \times 14} + \frac{14}{2\sqrt{9 \times 14}} \times 2 + \frac{9}{2\sqrt{9 \times 14}} \times (-1) \approx$$

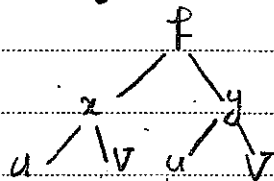
$$12 + \frac{14}{12} - \frac{9}{12} = 12 + \frac{5}{12} = 12.4167 \approx 12.42$$

Subject

Date

$$\begin{cases} x = e^u \cos(v) \\ y = e^u \sin(v) \end{cases}, W = f(x, y)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^r + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^r = e^{-ru} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^r + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^r \right]$$



$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^u \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot e^u \sin(v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-e^u \sin(v)) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (e^u \cos(v))$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^r + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^r = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^r \cdot e^{ru}$$

$$x e^{-ru} \rightarrow e^{-ru} \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^r + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^r \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^r + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^r$$

$$\frac{\partial f}{\partial u^r} + \frac{\partial f}{\partial v^r} = 0 \quad \begin{cases} u = k(x^r - y^r) \\ v = xy \end{cases}, f = (u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^r} + \frac{\partial f}{\partial y^r} = 0$$

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$w = f\left(\frac{x}{y^{\alpha}}, \frac{z}{y^{\beta+1}}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{\alpha+1} \cdot \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-xy}{\alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{-\beta z}{y^{\beta+1}} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$y \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\beta z}{y^{\beta}} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \quad (2)$$

Subject

Date

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial z} = 0 + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\alpha \beta z \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\alpha \beta z}{y^\beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \quad (12)$$

$$(1) + (12) + (13) = 0$$

نتیجه ضمیمه در تابع جدید می باشد: $F(x, y) = 0$ اگر y تابع از x باشد، $F(x, y) = 0$ اگر x تابع از y باشد.

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

حال اگر z تابع از x و y باشد، $F(x, y, z) = 0$ اگر z تابع از x و y باشد.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

و اگر w تابع از x, y, z باشد، $F(x, y, z, w) = 0$ اگر w تابع از x, y, z باشد.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

مثال: اگر w تابع از x, y, z باشد، $F: \sqrt{x^2 - \frac{y}{z}} + x + z - y \cdot \ln\left(x - \frac{w}{z}\right) = 0$

مطلوبه ضمیمه است: $\frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = \frac{\left[\frac{z}{\sqrt{x^2 - \frac{y}{z}}} + yz \cdot x + w \cdot z \cdot \ln(z) - \frac{y^2}{\left(x - \frac{w}{z}\right)} \right]}{\left[\frac{y}{\sqrt{x^2 - \frac{y}{z}}} + 0 + x \cdot z \cdot \ln(z) + \frac{y^2}{\left(x - \frac{w}{z}\right)} \right]}$$

Subject

Date

مثال) اگر سبب مخروط به سطح 4cm و ارتفاع 4cm از سطح آن 4cm کاهش شود به ارتفاع آن 4cm افزایش شود. اندازه تغییرات حجم مخروط را با استفاده از دفرانسیل به دست آورده.

تایید و متغیره $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = F(R, h)$ حجم مخروط

$$F(R + \Delta R, h + \Delta h) \approx F(R, h) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial F}{\partial h} \cdot \Delta h}_{\text{اندازه تغییرات حجم مخروط}}$$

$$\text{اندازه تغییرات حجم مخروط} = \text{دفرانسیل حجم} = \frac{\partial F}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial F}{\partial h} \Delta h$$

$$(\frac{1}{3} \pi R h) \Delta R + (\frac{1}{3} \pi R^2) \Delta h = (\frac{1}{3} \pi \times 4 \times 4)(-0.1) + (\frac{1}{3} \pi \times 4^2) \times 0.1 = -\frac{16}{3} \pi + \frac{16}{3} \pi = -16\pi$$

← ظاهر شد که 16π از حجم مخروط کم شود.

x, y مقدار کاملها تولیدی نوع داده $F(x, y)$ تابع

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$$

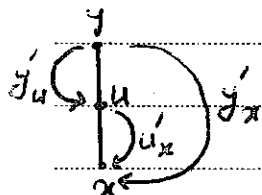
محاسبه

توانیم زنجیره‌ای در مشتقات خبری:

یادآوری: اگر $u = g(x)$ ، $y = f(u)$

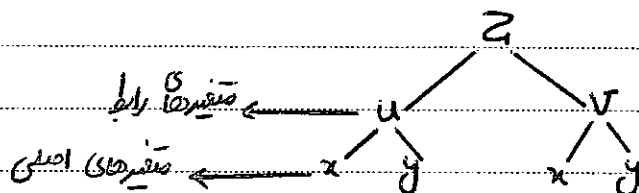
$$y'_x = y'_u \times u'_x = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

قانون زنجیره



حال در توابع چند متغیره قاعده‌ی زنجیره‌ای در حالت‌ها زیر قابل بحث است:

$$\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases} \quad , \quad z = f(u, v)$$



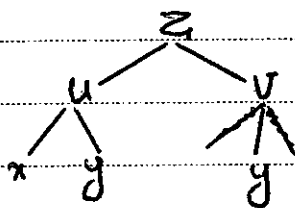
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Subject

Date

$$\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(y) \end{cases}$$

$$z = f(u, v)$$



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$1 \leq i \leq n, \quad u_i = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \times \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \times \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \times \frac{\partial u_n}{\partial x_j}$$

$$1 \leq j \leq m$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z}{\partial u_k} \times \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

$$w = f(\underbrace{rx + fy - yz}_{u_1}, \underbrace{fy + fz - yx}_{u_2}, \underbrace{kx - yz + yz}_{u_3})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u_1} \times \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_2} \times \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_3} \times \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)$$

$$w = f(u_1, u_2, u_3)$$

$$u_1 = rx + fy - yz$$

$$u_2 = fy + fz - yx$$

$$u_3 = kx - yz + yz$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u_1} \times \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_2} \times \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_3} \times \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u_1} \times \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_2} \times \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial u_3} \times \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 + 0 + (k - f) \frac{\partial w}{\partial u_3} = 0 \rightarrow k = f$$

Subject

Date

استفاده از قاعده زنجیره ای در مشتقات ضمیمه

اگر z تابعی از u و v باشد، $F(u, v) = 0$ ، u, v تابعی از x, y و z باشد، آنگاه:

$$\begin{array}{c}
 F \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 u \quad v \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 x \quad y \quad z \quad x \quad y \quad z
 \end{array}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial z}\right]}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial z}\right]}$$

مثال) اگر z تابعی از x, y باشد و $F = \left(y + \frac{z}{x}, x + \frac{z}{y}\right) = 0$ حال عبارت $A = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آوریم.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial z}\right]} \rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - x \cdot \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial z}\right]} \rightarrow y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{z}{y^2}\right]}{\frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u}}$$

حالت ترکیبی در مشتقات ضعیف :

اگر λ و μ تاهید و تابعی از $\mathbb{C}$ باشند

$$P(x, y, u, v) = 0$$

$$g(x, y, u, v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ سب صفر ہوں گے}$$

استاد احمد در علامه دانشگاه

$$\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0 \\ g(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$
 متن خبری نسبت به لاگاریتمه روابط دستگاه
 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ حاصل می شود

$\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}$

مثال ۵) اگر u و v توابعی از x و y باشند

$$\begin{cases} x y \cdot u - y^2 \cdot v = x \\ x^2 \cdot u + x y \cdot v = y \end{cases}$$

مطلوب: محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{d}{dx}, \begin{cases} r_y \cdot u + r_{xy} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0 - y' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ r_x \cdot u + x' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot v + xy \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \times \left\{ F_{xy} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - y' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right. &= -F_y \cdot u + 1 \\ y \times \left\{ x' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial v}{\partial x} \right. &= -F_x \cdot u + y \cdot v \end{aligned} \rightarrow \Delta x^r y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -F_{xy} \cdot u + x + y' \cdot v \rightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-F_{xy} \cdot u + x + y' \cdot v}{\Delta x^r y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{cases} F_{xy} \cdot u - y^r \cdot v = x & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^r \cdot u + xy \cdot v = y & \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{xy} \cdot u + rxy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - ry \cdot v - y^r \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 0 + rx^r \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x \cdot v + xy \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x' \left\{ \begin{aligned} f_{xy} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - g \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= -f_x \cdot u + f_y \cdot v \rightarrow x' y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -f_x' \cdot u + x y v + y \rightarrow \\ g x' \left\{ \begin{aligned} x' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= -x v + 1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

باجایگزینی $\frac{dy}{dx}$ در دستگاه (۱) و (۲) داریم:

تجزیه اگر چه ممکن است، اما در هر دو تابع از S, r باشند.
 مطلوب $\frac{\partial z}{\partial r}$ ، $\frac{\partial z}{\partial S}$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{\frac{y}{z}} = 0$$

$$\sin(Sx) + \cos(ry) = 0$$

$$\ln(x) + e^{sy} = 0$$

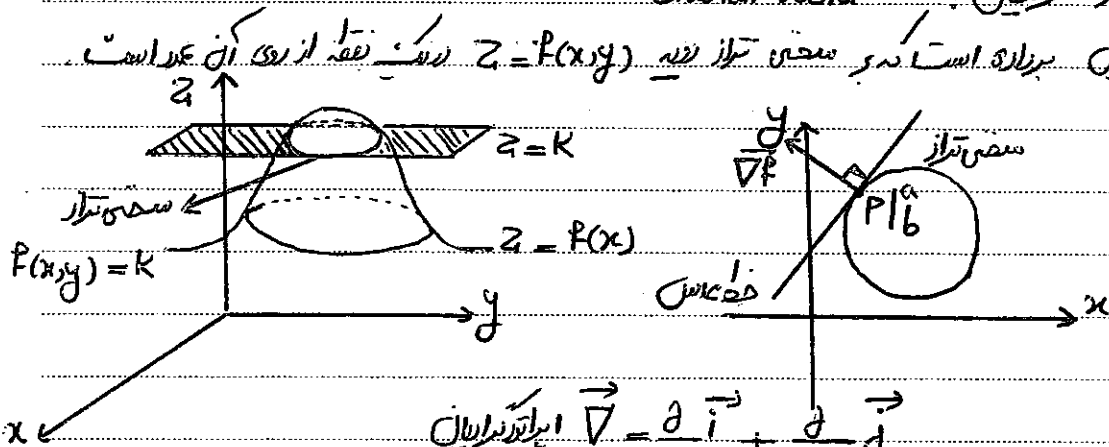
$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial S}$$

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial S}$$

مشتق سببی (مشتق چپ) در اینجا:

تعریف بردار گرادیان: Gradient Vector

بردار گرادیان برضای است که در سطحی قرار دارد $z = f(x, y)$ در یک نقطه از روی آن عبارت است



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

Subject _____

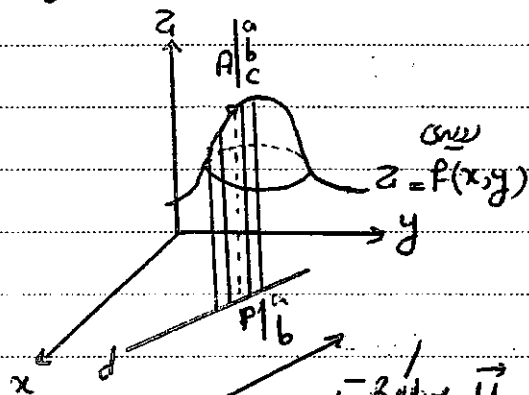
Date _____

نکته: با توجه به اینکه رویه‌ها توسط معادلات $z = z(x, y)$ مشخص می‌شوند، پس می‌توان گفت که بردارهای نرمال به سطح
رویه نیز عمود است.

مثال) اگر $P(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2y) + F_x + F_y$ در نقطه $A(1, 0)$ بردار سطح را بدست آوریم.

$$\vec{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} \quad \text{بردارهای نرمال}$$

اگر دو جسم انتظامی تغییرات پدید می آید $z = f(x, y)$ را نقطه $P(a, b)$ در راسته z برپایه xy باشد $u = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$ بردار مماس در آن نقطه است.



سواء كانت $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$, $|\vec{u}| = 1$

$$\frac{d}{dt} \lim_{t \rightarrow 0} : (Df)_{p, \vec{u}} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{p, \vec{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + uT) - f(a, b)}{t}$$

د خطی تابع: $\begin{cases} x = a + ut \\ y = b + ut \end{cases}$ $ME \mathbb{R}$

$$\text{Step 2: } \left(\frac{dF}{dt} \right)_{P, \vec{u}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \right)_{P, \vec{u}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \times u_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \times u_2 \right)_{P, \vec{u}} =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) = \frac{dF}{dt} \cdot \vec{u}$$

↓
ضرب داخلی
↓
ضرب داخلی

$$P(x,y) = x^2 + y^2 - xy$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} = (k_x - y) \vec{i} + (k_y - x) \vec{j} = k \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{v}_{\text{موج}} = \vec{v}_P \cdot \vec{u} = \frac{F_P}{P} + \frac{\sqrt{P}}{P} = \frac{\omega \sqrt{P}}{P}$$

$$\text{Sol: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(1 + \sqrt{\frac{t}{P}}t, 0 - \sqrt{\frac{t}{P}}t) - P(b_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(1 + \sqrt{\frac{t}{P}}t)^r + (0 - \sqrt{\frac{t}{P}}t)^r - (1 + \sqrt{\frac{t}{P}}t)(0 - \sqrt{\frac{t}{P}}t)}{t}$$

$$\% \dot{r} \rightarrow \underline{\text{HOP}} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)(1 + \frac{r}{p}t) - t - \frac{r}{p}(0 - \frac{r}{p}t) + \frac{r^2}{p^2}(1 + \frac{r}{p}t)}{t^2} = \frac{r^2 - 0 - 0 + \frac{r^2}{p}}{t^2} = \frac{\Delta r^2}{p}$$

مثال) سطح مرتبه $F(x,y,z) = e^{xy} + e^{yz} + \ln(xz) + x + yz$ در نقطه $A(1, 1, 1)$

در جهت بردار عدد بر صفحه $x - y + yz = 1$ کاسه بر صفحه

$$\vec{n} = x\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k} \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

بردار گرادیان $\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = (ye^{xy} + \frac{1}{x} + 1)\vec{i} + (xe^{xy} + e^{yz})\vec{j} + (ye^{yz} + \frac{1}{z} + 1)\vec{k}$

در نقطه $A(1, 1, 1)$ $\vec{\nabla}F = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

مشتق سطح: $\vec{\nabla}F \cdot \vec{u} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

خارج از سطح مشتق سطح:

حالت الف) اگر $\cos\theta = 1$ آنگاه $\theta = 0^\circ$ در بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{\nabla}F$ موازی و هم جهت اند در این

حالت مقدار مشتق سطح ماکزیمم در برابر $|\vec{\nabla}F|$ است

به عبارت دیگر: در جهت بردار $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|}$ مشتق سطح Max می شود.

حالت ب) اگر $\cos\theta = -1$ آنگاه $\theta = \pi$ در بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{\nabla}F$ در خلاف جهت یکدیگرند

در این حالت مشتق سطح کمترین مقدار برابر $-|\vec{\nabla}F|$ است

به عبارت دیگر: در جهت بردار $\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|}$ مشتق سطح Min می شود.

حالت پ) اگر $\cos\theta = 0$ آنگاه $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\vec{u} \perp \vec{\nabla}F$ در این حالت مشتق سطح برابر صفر است.

به عبارت دیگر: در جهت بردار $\vec{u}$ عدد بر $\vec{\nabla}F$ مشتق سطح صفر می شود.

مثال) اگر $F(x,y,z) = \sin(xy) + \cos(yz) + xy + y^2 - z$ در نقطه $A(1, 1, 1)$ بردار جهت را طوری

بیابیم که در آن جهت مشتق سطح Max شود. یعنی: "Min" شود. "Max" شود.

بردار گرادیان $\vec{\nabla}F = (y\cos(xy) + 1)\vec{i} + (x\cos(yz) - z\sin(yz) + x + 2y)\vec{j} + (-y\sin(yz) - 1)\vec{k}$

در نقطه $A(1, 1, 1)$ $\vec{\nabla}F = 0\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$

Subject

Date

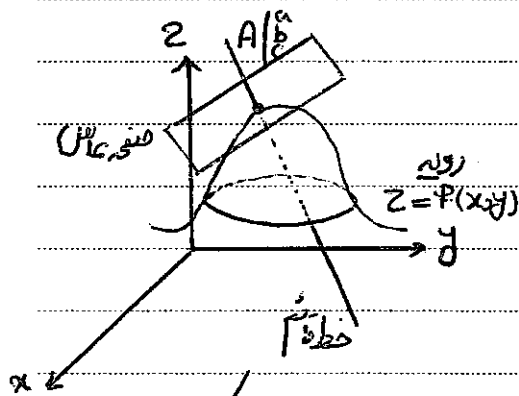
برای Max: $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} P}{|\vec{\nabla} P|} = \frac{\vec{\nabla} P}{\sqrt{5}} = \frac{1\sqrt{5}}{5}\vec{j} - \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}$

برای Min: $\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{|\vec{\nabla} P|} = -\frac{1\sqrt{5}}{5}\vec{j} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}$

مثال: $\vec{V} = ?$, $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} P = 0$

$\vec{V} = \vec{j} + 2\vec{k} \perp \vec{\nabla} P$

برای جهت بردار $\vec{u}$: $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}} = \frac{1\sqrt{5}}{5}\vec{j} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{k}$



به دست آوردن معادلات صفحه مماس و خط عمود بر آن است:

معادله صفحه: $F: P(x, y) - z = 0$

بردار گرادیان: $\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A \vec{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A \vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_A \vec{k}$

$= \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$

با توجه به تعریف بردار گرادیان این بردار بر خط مماس عمود است و برای صفحه مماس بردار عمود است.

معادله پارامتری خط مماس:
$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

معادله صفحه مماس: $\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0$

مثال: در صفحه مماس به سطح $z = P(x, y)$ در نقطه A را بیابید.

الف) $A(1, 1, 1)$ $z = P(x, y) = x^2y + \cos(py) + \frac{1}{2}y + x$

ب) $A(1, 0, 0)$ $\sqrt{z + xy} + e^{xz} + x^2 - y^2 + z^2 = 3$

Subject

Date

مثال/ معادله صاف $F = x^2y^2 + \cos(xy) + \frac{1}{2}y + x - 2 = 0$

$$(\vec{\nabla} F)_A = (2xy^2 - y \sin(xy) + 1)\vec{i} + (2x^2y - x \sin(xy) - \frac{1}{2}y^2)\vec{j} - \vec{k} =$$

$\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$ بردار ناهمباری

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 + t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

معادله پارامتری خط

معادله صاف: $1(x-0) - \frac{1}{2}(y-1) - 1(2-1) = 0 \rightarrow x - \frac{1}{2}y - 2 + \frac{1}{2} = 0$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{y}{\sqrt{2+xy}} + 2e^{xz} + 1 \right)\vec{i} + \left(\frac{x}{\sqrt{2+xy}} - y \right)\vec{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2+xy}} + xe^{xz} + 1 \right)\vec{k}$$

$$(\vec{\nabla} F)_A = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)\vec{i} + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right)\vec{j} + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)\vec{k}$$

بردار ناهمباری

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)t \\ y = 1 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right)t \\ z = 0 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

معادله پارامتری خط

$$\text{معادله صاف} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)(x-1) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right)(y-1) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right)(z-0) = 0$$

الگوریتم‌های مینی و ماکزیمم در تابع چند متغیره:

تعریف نقطه مینی و ماکزیمم: $z = f(x, y)$ در $A \subseteq \mathbb{R}^2$ نقطه مینی است اگر $f(a, b) \leq f(x, y)$ و $f(a, b) \geq f(x, y)$ برای $(x, y) \in A$.

مقدار مینی و ماکزیمم است هرگاه $f(a, b) \leq f(x, y)$ و $f(a, b) \geq f(x, y)$ برای $(x, y) \in A$.

محدوده بسته $A \subseteq \mathbb{R}^2$

تعریف نقطه مینی و ماکزیمم: $z = f(x, y)$ در $A \subseteq \mathbb{R}^2$ نقطه مینی است هرگاه:

$$\forall (x, y) \in A : f(a, b) \leq f(x, y)$$

توضیح:

اگر نقطه $A \subseteq \mathbb{R}^2$ هر دو مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ صفر باشد و این نقطه

Max مینی و یا Min مینی برای تابع $f(x, y)$ باشد آن گاه:

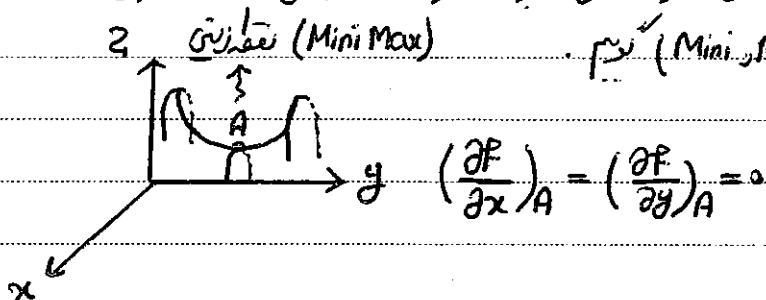
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_A = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_A$$

نکته:

Subject

Date

ولی عکس این مقیم همیشه مشتاق نیست
یعنی: می توان نقطه ای را یافت که در آن هر دو مشتق چیزی غیر از صفر است در جایی که نه Max است نه Min است
به چنین نقطه ای نقطه ای (Mini, Max) می گویند (Mini Max) نقطه ای



برای محاسبه نقطه Max و Min می توان نقطه ای را در صفحه از آزمون زیر استفاده می کنیم.
مشتقات چیزی مرتبه دوم برای محاسبه نقطه ای و رسم نقطه ای:
مرحله ۱: باطل دستگاه $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$ نقطه ای برای رویه را به دست می آوریم.

مرحله ۲: محاسبه $A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

مرحله ۳: محاسبه $S = B^2 - AC$

مرحله ۴: اگر $A|_{x_0, y_0} > 0$ یعنی نقطه ای برای رویه با ت و نه برای آن:
نقطه ای است Max است $\begin{cases} S < 0 \\ A < 0 \end{cases}$
" " Min " " $\begin{cases} S < 0 \\ A > 0 \end{cases}$
" " نقطه ای است $S > 0$
آزمون جوابی نه $S = 0$

Subject

Date

مثال ۱۱ (جواب) $z = F(x, y) = 4x^2 - 12x + 4y^2 + 7xy$ برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x - 12 + 7y = 0 \rightarrow 8x - 7y - 12 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 7x + 8y = 0 \rightarrow y = -x$$

$$\begin{cases} x=0 & y=-x \\ x=1 & y=-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow A|_0, B|_{-1} = 0 \text{ و } 1 \text{ و } -1$$

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 8$$

$$S = B^T - AC = 12 - 7 + 7x = -12 + 7x$$

$$B = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 7$$

$$C = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 8$$

$$A|_0 \rightarrow \begin{cases} S = -12 < 0 \\ A = 8 > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Min } A|_0$$

$$B|_{-1} \rightarrow S = 12 > 0 \rightarrow \text{Max } B|_{-1}$$

مثال ۱۲ (جواب) $z = F(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy$ برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = y \end{cases} \rightarrow 0, 1, -1$$

$$A|_0, B|_1, C|_{-1}$$

$$A = -2x^2, B = 4, C = -2y^2$$

$$S = B^T - AC = 4 - (-2x^2)(-2y^2) = 4 - 4x^2y^2$$

$$A|_0 \rightarrow S = 4 > 0 \rightarrow \text{Min } A|_0$$

$$B|_1 \rightarrow \begin{cases} S < 0 \\ A < 0 \end{cases} \rightarrow \text{Max } B|_1$$

$$C|_{-1} \rightarrow \begin{cases} S < 0 \\ A < 0 \end{cases} \rightarrow \text{Max } C|_{-1}$$

مثال: نقاط بحرانی روی $Z = f(x, y) = (x-1)^2 + (x+y)^2 + 1$ با استفاده از روش آنرا مشخص کنید.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \rightarrow f'(x-1) + f'(x+y) = 0 \rightarrow f'(x-1) = 0 \rightarrow x=1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f'(x+y) = 0 \rightarrow y=-1 \end{cases}$$

نقطه بحرانی $A \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(x-1) + 2(x+y) \quad S = B' - AC = -12f(x-1)(x+y)^2$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(x+y) \quad A \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow S = 0 \rightarrow \text{آزمون بی نتیجه}$$

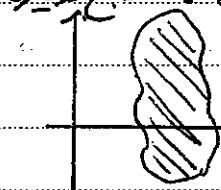
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x+y)$$

با توجه به معادله درجه دوم کمترین مقدار آن برابر با ۰ است که این مقدار در نقطه بحرانی $A \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix}$ نیست پس آن را به عنوان نقطه بحرانی Min نمی‌دانیم.

خاصیتی از استرم‌ها: مناطق در توابع چندمتغیره:

برای خاصیتی از استرم‌ها مناطق تابع $f(x, y)$ در روی ناحیه D

انتخاب بحرانی روی f با استفاده از متغیر تابع را در این نقاط



به دست می‌آوریم. سپس در روی مرزهای ناحیه D تابع را از حالت

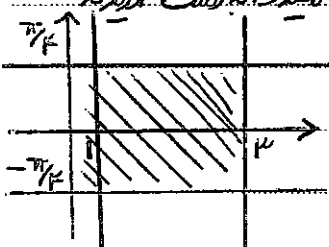
در متغیره به ثابت متغیره تبدیل می‌کنیم و استرم‌ها آن را به دست می‌آوریم

و مقدار تابع را در این نقاط مشخص می‌کنیم.

در نهایت: هر نقطه‌ای که تابع در آن بیشترین مقدار داشته باشد نقطه Max مناطق می‌باشد و برعکس.

مثال: استرم‌ها مناطق روی $Z = f(x, y) = (4x - x^2) \cos(y)$ را در ناحیه D به دست آوریم.

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4, -\pi/4 \leq y \leq \pi/4\}$$



Subject _____

Date _____

نقطة الحد الأدنى $\frac{\partial F}{\partial x} = (F - rx) \cos(y) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = r \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -(rx - x^r) \sin(y) = 0 \rightarrow \begin{cases} rx = 0 \\ rx = r \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{OCE}$

$\rightarrow A|_0^r \in D \rightarrow F(r, 0) = F$

نقطة الحد الأدنى $x=1$ $F(1, y) = r \cos(y) \rightarrow F'(1, y) = -r \sin y = 0 \rightarrow y = 0$

$\rightarrow (1, 0) \text{ نقطة الحد الأدنى} \rightarrow F(1, 0) = r$

نقطة الحد الأدنى $x=r$ $F(r, y) = r \cos(y) \rightarrow F'(r, y) = 0 \rightarrow y = 0$

$\rightarrow (r, 0) \text{ نقطة الحد الأدنى} \rightarrow F(r, 0) = r$

نقطة الحد الأدنى $y = \frac{\pi}{2}$ $F(x, \frac{\pi}{2}) = \sqrt{F_p} (rx - x^r) \rightarrow F'(x, \frac{\pi}{2}) = \sqrt{F_p} (r - rx) = 0 \rightarrow x = r$

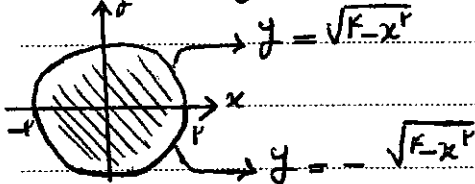
$\rightarrow (r, \frac{\pi}{2}) \text{ نقطة الحد الأدنى} \rightarrow F(r, \frac{\pi}{2}) = r\sqrt{F}$

نقطة الحد الأدنى $y = -\frac{\pi}{2}$ $F(x, -\frac{\pi}{2}) = \sqrt{F_p} (rx - x^r) \rightarrow F'(x, -\frac{\pi}{2}) = \sqrt{F_p} (r - rx) = 0 \rightarrow x = r$

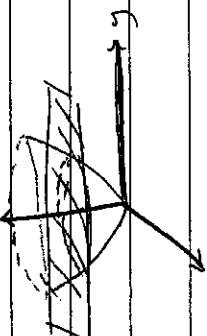
$\rightarrow (r, -\frac{\pi}{2}) \text{ نقطة الحد الأدنى} \rightarrow F(r, -\frac{\pi}{2}) = r\sqrt{F}$

نقطة الحد الأدنى $\text{Min}(r \pm \frac{\pi}{2})$ و $\text{Max}(r, 0)$ و $\text{Max}(r, \frac{\pi}{2})$ و $\text{Max}(r, -\frac{\pi}{2})$

نقطة الحد الأدنى $D = x^r + y^r = F$ و $2 = F(x, y) = x^r + y^r - xy$ و نقطة الحد الأدنى



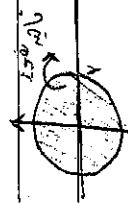
از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد. مطلوب است



$$\iint_D f(x, y, z) d\sigma$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = z$$

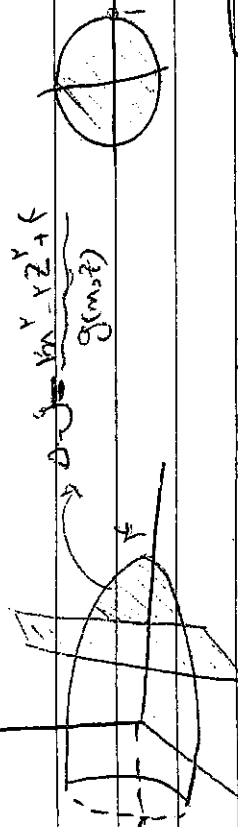
$$r^2 = x^2 + y^2 = z^2$$



$$\iint_D f(x, y, z) d\sigma = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) d\sigma = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}) d\sigma = \iint_D (\sqrt{2(x^2 + y^2)}) d\sigma$$

$$\iint_D (\sqrt{2(x^2 + y^2)}) d\sigma = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مطلوب مساحت Δ قسمی از رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که در طرف $z = 1$ قرار دارد.



$$\iint_D (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D (2x^2 + 2y^2) d\sigma = 2 \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D (r^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

انتقال های روی سطوح:

حالت اول: انتقال روی سطح برای توابع انتقال $f(x, y, z)$
 اگر Δ در فضای 3 بعدی انتقال تابع $f(x, y, z)$ روی Δ را بخواهیم

$\iint_D f(x, y, z) d\sigma$ نشان دهیم. و برای حل آن در مورد معادله Δ حالت حرفه ای

۱- اگر $z = g(x, y)$ و مقصور Δ در صفحه xy باشد.

۲- اگر $x = g(y, z)$ و مقصور Δ در صفحه yz باشد.

$$\iint_D f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(g(x, y), z) d\sigma = \iint_D \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} dA$$

اگر $x = g(y, z)$ و مقصور Δ در صفحه yz باشد.

$$\iint_D f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(g(y, z), y, z) d\sigma = \iint_D \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} dA$$

مثال اگر $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ تابع مساحت است. Δ صفحه

حالت ج) اگر $g(y,z)$ و Δ مقدار

$$\iint_S (F \cdot n) d\sigma = \iint_S \left(x - y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} \right) dA$$

$$\iint_S (F \cdot n) d\sigma = \iint_S \left(-x + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} \right) dA$$

تذکره: اگر $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ باشد

بردار برداری باشد Δ مقدار انتشار

شار موم از سطح Δ می شود

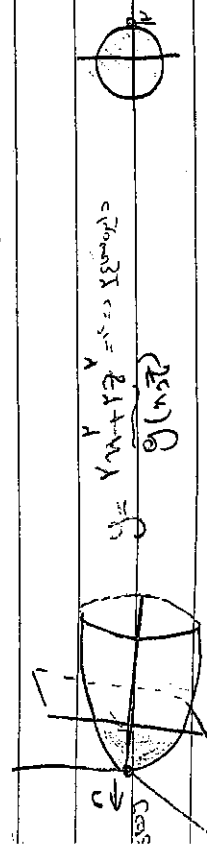
$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) d\sigma$$

$$F = (x, y, z) \Rightarrow \vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

مثال ۱

اگر برداری باشد $F = (x, y, z)$ و Δ مقدار

شار موم از سطح Δ می شود



$$\iint_S (F \cdot n) d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{r} dA$$

sam

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos\theta + \sin\theta) d\theta d\phi = 0$$

حالت ب) اگر $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و Δ مقدار

شار موم از سطح Δ می شود

اگر $F = (x, y, z)$ و Δ مقدار

شار موم از سطح Δ می شود

و صورت زیر محاسب کنیم

چون در جهت $\vec{n}$ می توانیم بنویسیم

$$\vec{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r}$$

sam

$$\{ \nabla \cdot \vec{v} = R(t), \text{ و } \text{تدریج} \} = \{ \text{تدریج} \}$$



$$\vec{R}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$R(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) i + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2}} \right) j + e^t k$$

$$D = (R^{-1}) \cap [-1, 1] \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$$

$$R(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + j + e^{-1} k = V_1$$

$$R(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + j + e^0 k = V_2$$

$$R(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + j + e^1 k = V_3$$

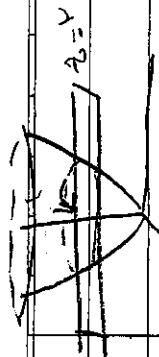
در مساحت فیزیکی:

$$R(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

$$R'(t) = V(t) = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k$$

$$R'(t) = V(t) = a(t)i + b(t)j + c(t)k$$

$$|R'(t)| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$$



$$C: \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (x x' + y y' + z z') dt = \int_0^{2\pi} r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} r^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-10 \sin^2 t) dt = 0$$

$$\int \text{curl}(\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \iint \text{curl}(\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = 0$$

توانع برداری
تایید برداری است که مقدار یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ را نشان می‌دهد

$$R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$R(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

$$D = \{ t \in \mathbb{R} \mid R(t) \in [-1, 1] \}$$

11/11/14

$$\vec{T} = R'(t) = \frac{d}{dt} \cos(yt) \vec{i} + \frac{d}{dt} \sin(yt) \vec{j} = -y \sin(yt) \vec{i} + y \cos(yt) \vec{j}$$

$$|\vec{R}'(t)| = y$$

$$|\vec{T}'(t)| = y^2 \cos^2(yt) + y^2 \sin^2(yt) = y^2$$

$$|\vec{T}'(t)| = y$$

مقدار خطی شتاب
مربع آن

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{T}(\vec{r}) \times \vec{N}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{y}{2} & \frac{y}{2} & 0 \\ \frac{y}{2} & \frac{y}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{y^2}{2} \vec{i} - \frac{y^2}{2} \vec{j} + \frac{y^2}{2} \vec{k}$$

معادله این خط : افازة سرعت خطی لازم برای تغییر جهت در لحظه افازة انرژی
منتهی حرکت را انضواء حرارتی نقطه میزنیم. یا با استخوان دهنم و در کجا و آن در لحظه
معتدل = کل باشد یعنی نقطه ایست که در آن نقطه منتهی حرکت بصورت افراطی است

است فرمول ها

$$K = \frac{|\vec{R}'(t)|}{|\vec{R}(t)|} = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{T}(t)|}$$

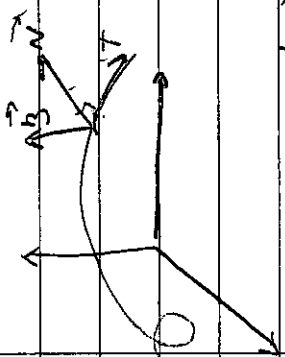
فرمول 3^{ام} $y = f(x)$ یعنی مسطح در صورتی که y و x متغیر مستقل و وابسته است A/B

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

sam

محاسبه بردارهای دیکتی میانی و قائم (کنج فرم) کنج TMB

$$\vec{R}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$



$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} \Rightarrow |\vec{T}(t)| = 1$$

بردار خطی
معمولی در
خطی

$$|\vec{N}(t)| = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{T}(t)|} = 1$$

در راستای بردار
در راستای خطی

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \Rightarrow |\vec{B}(t)| = 1$$

معمولی
معمولی

مسئله امتحانی: اگر $\vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(yt) \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(yt) \vec{j} + t \vec{k}$ در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$ کنج فرم، مقدار انضواء و مقدار تحلی را محاسبه کن.

$$|\vec{R}'(t)| = \cos^2(yt) + \sin^2(yt) + 1 = 2$$

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{\cos^2(yt) + \sin^2(yt) + 1} = \sqrt{2}$$

sam

سؤال امتحاني: ثابت لبر / موهبة انزي طوله مشتق R مقدار

اختصاص وبلر لست

$$x = R \cos(t) \quad y = R \sin(t)$$

$$R(t) = R \cos(t) \hat{i} + R \sin(t) \hat{j}$$

$$R(t) = -R \sin(t) \hat{i} + R \cos(t) \hat{j}$$

$$R''(t) = -R \cos(t) \hat{i} - R \sin(t) \hat{j}$$

$$R'(t) \times R''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin(t) & R \cos(t) & 0 \\ -R \cos(t) & -R \sin(t) & 0 \end{vmatrix} = 0 \hat{i} - 0 \hat{j} + R^2 \hat{k}$$

$$R'(t) \times R''(t) = R^2, \quad R(t) = \sqrt{R^2} = R$$

$$K = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

افضل دقة $k = \frac{|T'(t)|}{|R'(t)|} = \frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0}$

$$R(t) = t \hat{i} + R \cos(t) \hat{j} - R \sin(t) \hat{k}$$

مثال 1: P كفة فنية مقدار انزياح مقدار ثابت P

$$R(t) = \hat{i} - R \sin(t) \hat{j} - R \cos(t) \hat{k}$$

$$R'' = 0 \hat{i} - R \cos(t) \hat{j} + R \sin(t) \hat{k} = -R \hat{j}$$

$$R'(t) \times R''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -R \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix} = R^2 \hat{j} - R \hat{k}$$

$$|R'(t) \times R''(t)| = \sqrt{R^4 + R^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$K = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}}{1^3} = \sqrt{2}$$

مثال 2: $A(t) = e^{t^2} \hat{i} + \ln(t) \hat{j}$

$$A'(t) = 2t e^{t^2} \hat{i} + \frac{1}{t} \hat{j} \Rightarrow A'(0) = 0 \hat{i} + 1 \hat{j}$$

$$A''(t) = 2e^{t^2} \hat{i} + \frac{1}{t^2} \hat{j} \Rightarrow A''(0) = 0 \hat{i} + 1 \hat{j}$$

$$K = \frac{|A'(t) \times A''(t)|}{|A'(t)|^3} = \frac{1}{1^3} = 1$$

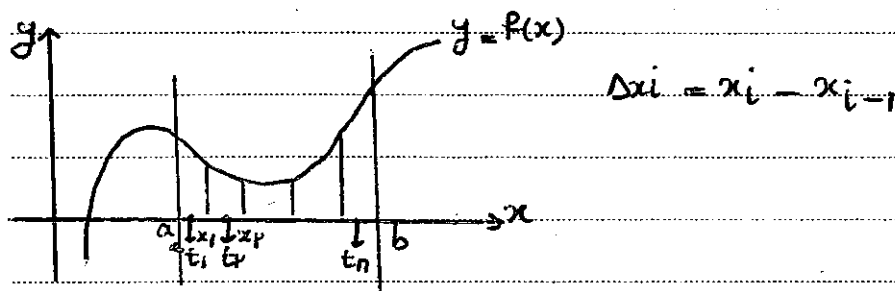
Subject

Date

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

$\Delta x_i \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$

(Handwritten notes in Arabic: "تقسيم المجال إلى n جزء", "نقطة اختيارية في كل جزء", "الحد عندما n تؤول إلى ما لا نهاية")



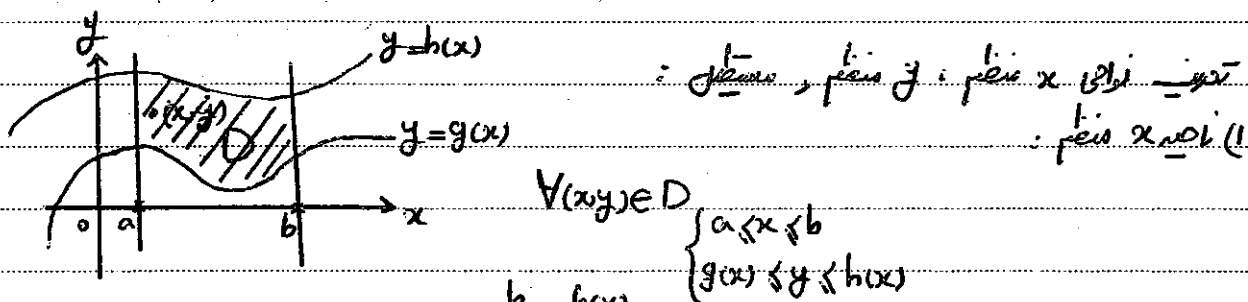
$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta x_k \Delta y_k$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
 $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$
 $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$

$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$

$dA = dx dy$

(Handwritten notes in Arabic: "تقسيم المجال D إلى n جزء", "نقطة اختيارية في كل جزء", "الحد عندما n تؤول إلى ما لا نهاية")



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

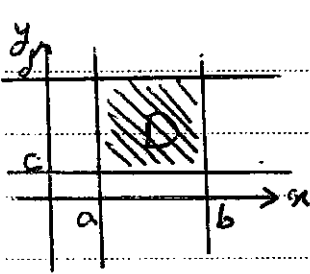
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy$$

$x = g(y)$ $x = h(y)$

(Handwritten notes in Arabic: "تقسيم المجال D إلى n جزء", "نقطة اختيارية في كل جزء", "الحد عندما n تؤول إلى ما لا نهاية")

Subject _____

Date _____



$$\forall (x,y) \in D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

۳. ناحیه مستطیل:

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

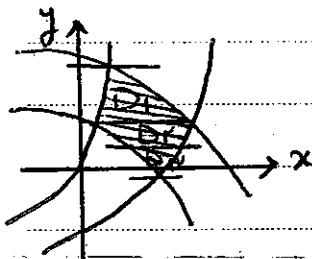
چند خاصیت هم در اشتباه یادگانه:

۱. از لحاظ فیزیکی مقدار $\iint_D f(x,y) dA$ برابر هم می‌باشد که مقداری این جسم ناحیه D است و از آنجا که $f(x,y) = 1$ می‌باشد.

۲. اگر تابع $f(x,y)$ تابع ثابت $f(x,y) = 1$ فقط می‌شود.

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_D 1 dA$$

آن‌گاه مقدار



۴. اگر ناحیه D غیر منظم باشد:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \quad \text{که } y \text{ منظم}$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA + \iint_{D_3} f(x,y) dA$$

۴. اگر ناحیه D منظم $f(x,y)$ و $g(x,y)$ تابع باشد و $\forall (x,y) \in D; f(x,y) \leq g(x,y)$

$$\rightarrow \iint_D f(x,y) dA \leq \iint_D g(x,y) dA$$

۵. اگر در ناحیه D:

$$M = \max_{\text{مقدار}} f(x,y), \quad m = \min_{\text{مقدار}} f(x,y)$$

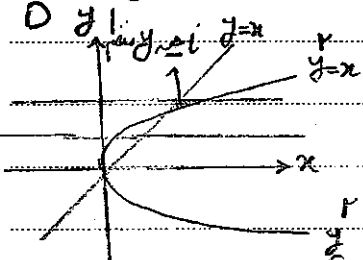
$$m \times S \leq \iint_D f(x,y) dA \leq M \times S$$

در اینصورت:

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{\text{منطقه } D} \frac{f}{(x+y)^2} dA = \int_1^7 \left(\int_0^{7-x} \frac{f}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^7 \left[\frac{f}{(x+y)} \right]_0^{7-x} dx = f \int_1^7 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right] dx =$$

$$f \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right]_0^7 = \left[\frac{f}{x} - \frac{f}{x+y} \right]_0^7 = \frac{f}{x+7} + \frac{f}{x+1}$$

$y = r, y = 1, y = x, y = x$ and $\rho = \sin(\frac{\pi}{4})$ (Diam)
 $\iint_D \rho(x, y) dA$ Dms: $\begin{cases} 1 \leq y \leq r \\ y \leq x \leq y \end{cases}$



$$\iint_D \sin\left(\frac{\pi x}{ry}\right) dA = \int_{-1}^1 \left(\int_{2y}^{4y} \sin\left(\frac{\pi x}{ry}\right) dx \right) dy$$

$$\int_{-y}^y \sin\left(\frac{\pi x}{py}\right) dx = \left. -\frac{py}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{py}\right) \right|_{-y}^y = -\frac{py}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{py}\right) + \frac{py}{\pi} \cos\left(\frac{\pi (-y)}{py}\right)$$

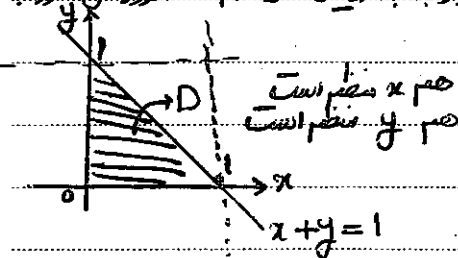
$$\Rightarrow \int_0^1 -\frac{y}{\pi} \cos(\pi y) dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 y \cos(\pi y) dy \rightarrow \text{از جدول جیب}$$

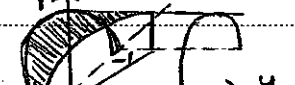
$$\int u = y \quad \xrightarrow{d} \quad du = dy$$

$$\int dV = \cos\left(\frac{\pi}{r}y\right) dy \xrightarrow{f} V = \frac{r}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{r}y\right) = -\frac{r}{\pi} (u \wedge v - \int v \wedge du) = \dots$$

مثال ۱: استفاده از استاندارد دو ضلعی هم‌کاف صوری را به دست آورید که معادله هم‌کاف صوری در آن استاندارد است.

و محصور به ضلع $x=0$ و $y=0$ ، $x+y=1$ می باشد و از رابطه $x+y=1$ محصور می شود.



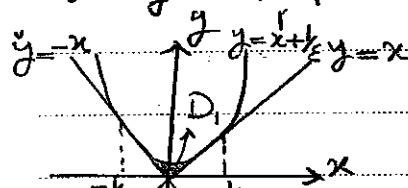


$$\begin{aligned}
 \text{r.m.s.p.} &= \iint_D f(x,y) dA \\
 &= \iint_D (-x^2 + 1) dA \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (-x^2 + 1) dy \right) dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)(1-x) dx = ?
 \end{aligned}$$

Subject _____
Date _____

مثال: به کمک استرال دوگانه مساحت ناحیه‌ی مشخصه‌ی زیر را بیابید. $y = x^2 + \frac{1}{2}$, $|y| = |x|$

هم $y = x^2 + \frac{1}{2}$ $y = \pm x$



$$x^2 + \frac{1}{2} = x$$

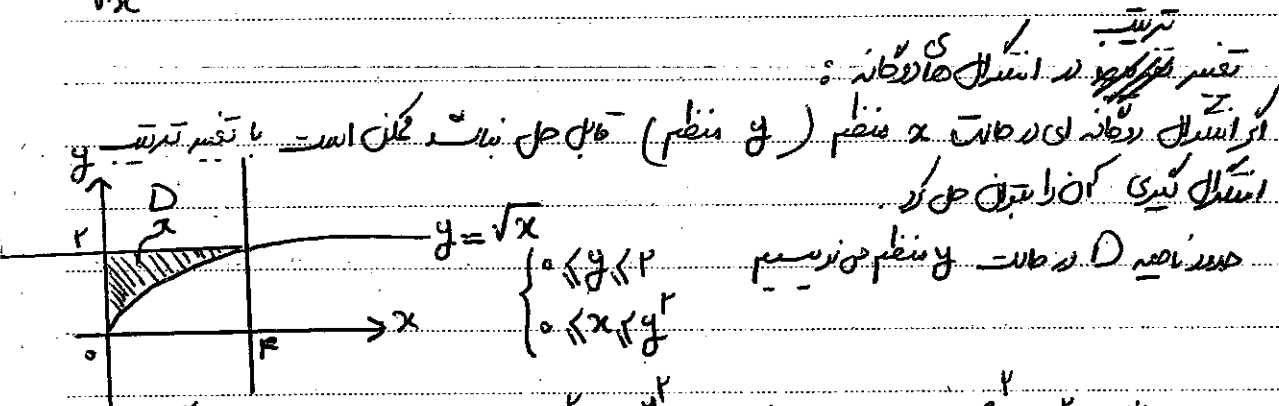
$$x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq y \leq x^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D_1 به دو ناحیه تقسیم است.

$$D_{\text{مساحت}} = \iint_D 1 \, dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{x^2 + \frac{1}{2}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 + \frac{1}{2} - x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

مثال: دوطرفه‌ی $y = \sqrt{x}$ را با تغییر ترتیب $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^4) dy dx \Rightarrow$ $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^4) dy \right) dx$



$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^4) dy \right) dx \rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^y \cos(y^4) dx \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (y^4 \cos(y^4)) dy = \frac{1}{4} \sin(y^4) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \sin(1)$$

Subject

Date

$$\int_{ky}^{\sqrt{\ln r}} e^{x^r} dx \rightarrow \text{...}$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln r}} \left(\int_{ky}^{\sqrt{\ln r}} e^{x^r} dx \right) dy$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln r}} \left(\int_{ky}^{\sqrt{\ln r}} e^{x^r} dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{\ln r}} \left(\int_0^{rx} e^{x^r} dy \right) dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln r}} (rx \cdot e^{x^r}) dx = e^{x^r} \Big|_0^{\sqrt{\ln r}} = e^{\ln r} - e^0 = r - 1 = r$$

$$\int_0^r \left(\int_{1+y}^0 y \cdot e^{(x-1)^r} dx \right) dy$$

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$$

$x+y=1, y=0, x=0$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx \rightarrow$$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dy \rightarrow$$

$$u = x-y$$

$$v = x+y$$

$$x = \frac{1}{2}(u+v)$$

$$y = \frac{1}{2}(v-u)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$|J| = \frac{1}{4} \sin(u)$$

$$dA = \frac{1}{4} dA'$$

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA = \iint_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{4} dA' =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 \int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{4} \int_0^1 2 \sin\left(\frac{u}{v}\right) dv =$$

Subject

Date

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

اگر انتگرال دوگانه $\iint_D P(x,y) dA$ مستقیماً با تغییر ترتیب قاطع حل نباشد یا ناحیه D یکجانبه نباشد، غیر منظم باشند این حالت با عمل تغییر متغیر ناحیه D را از معنی xy به یک نیم منظم مانند D' در معنی uv منتقل می‌کنیم و سپس در معنی uv انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

عمل تغییر متغیر برای ۴ مرحله است:

(۱) انتخاب دو تغییر متغیر

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$$

(۲) معکوس کردن x و y در معنی u و v

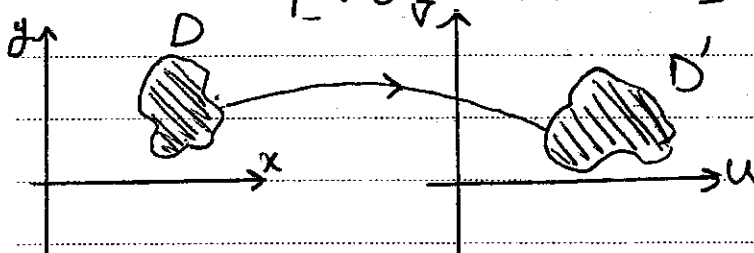
$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = h_1(u,v) \end{cases}$$

(۳) کسب معکوس کردن جهت معکوس x و y به معنی u و v

$|J| = ?$ $\frac{dx dy}{dA} = |J| \frac{du dv}{dA'}$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

(۴) به کمک تغییر متغیر ناحیه D را از معنی xy به ناحیه D' در معنی uv منتقل می‌کنیم



در نهایت

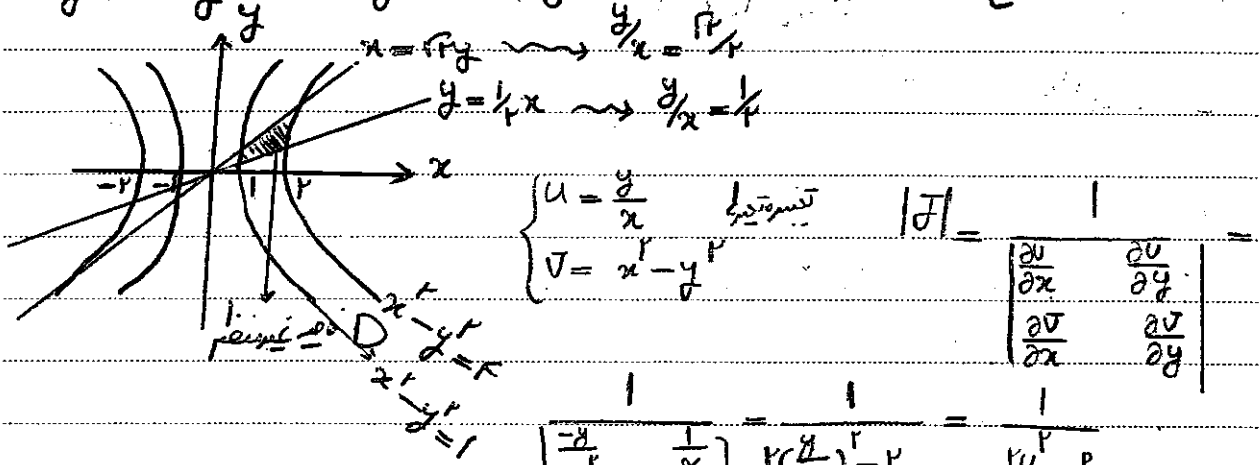
$$\iint_D P(x,y) dA = \iint_{D'} P(g_1(u,v), h_1(u,v)) \cdot |J| dA'$$

Subject

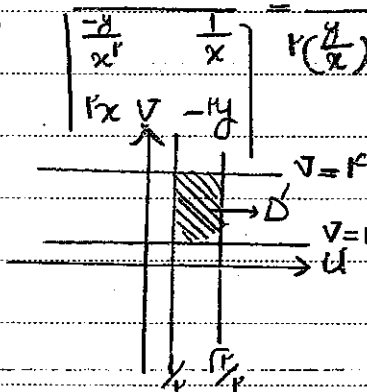
Date

سؤال اول: $\iint_D \frac{y}{x} e^{\frac{x^2-y^2}{2}} dA$

$x = \sqrt{r}y, x = ky$ $x^2 - y^2 = r, x^2 - y^2 = 1$ D $\rightarrow$ $x = \sqrt{r}y \rightarrow y/x = \frac{1}{\sqrt{r}}$



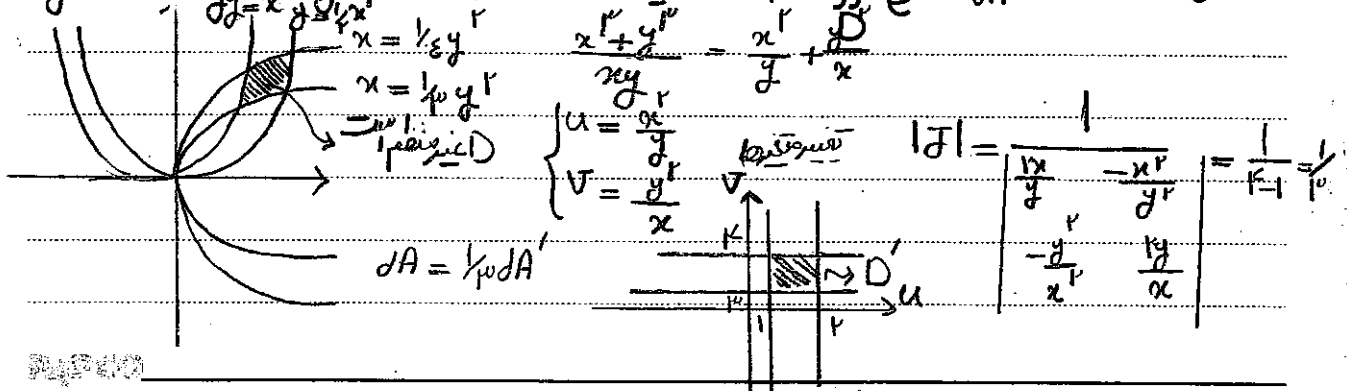
$dA = \frac{1}{ru^2 - r} dA'$



$\iint_D \frac{y}{x} e^{\frac{x^2-y^2}{2}} dA = \iint_{D'} u e^{\frac{v}{2}} \frac{1}{ru^2 - r} dA' = \iint_{D'} \frac{u}{ru^2 - r} e^{\frac{v}{2}} dA' = \int_1^{\sqrt{r}} \left(\int_{1/4}^{1/\sqrt{r}} \frac{u}{ru^2 - r} e^{\frac{v}{2}} du \right) dv$

$= \int_1^{\sqrt{r}} e^{\frac{v}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{u} \right) du = (e^{\frac{\sqrt{r}}{2}} - e^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{2r} (r\sqrt{r} - r)$

سؤال ثان: $\iint_D e^{\frac{x^2+y^2}{2}} dA$ D $\rightarrow$ $x = \sqrt{r}y, x = ky$ $x^2 + y^2 = r, x^2 + y^2 = 1$ D $\rightarrow$ $x = \sqrt{r}y \rightarrow y/x = \frac{1}{\sqrt{r}}$



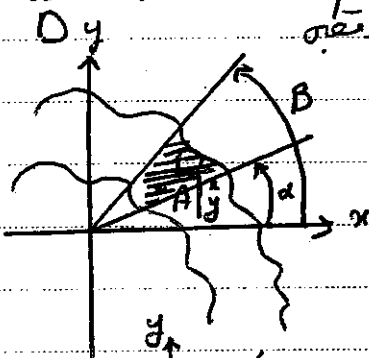
Subject

Date

$$\iint_D e^{\frac{x^r}{y} + \frac{y^r}{x}} dA = \iint_D e^{u+v} \mu dA = \frac{1}{\mu} \int_1^r \left(\int_1^r e^u \cdot e^v du \right) dV = \frac{1}{\mu} \int_1^r e^v dr \times \int_1^r e^u du = \frac{1}{\mu} (e^r - e^1) (e^r - e^1)$$

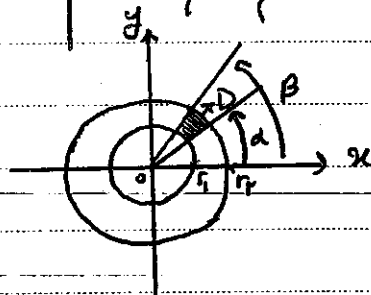
تغییر مختصات در انتگرال دوگانه:

$$\iint_D F(x,y) dA = ?$$



انتگرالی که D به صورتی که از شش ضلعی غیر یارسیه در آن صورت می گیرد. r و θ را به راحتی غیر از این به دست آوریم.

$$\begin{aligned} A \mid \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} &\xrightarrow{\text{تغییر مختصات}} A' \mid \begin{matrix} r \\ \theta \end{matrix} \\ \begin{cases} g(\theta) < r < h(\theta) \\ \alpha < \theta < \beta \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} r_1 < r < r_2 \\ \alpha < \theta < \beta \end{cases}$$

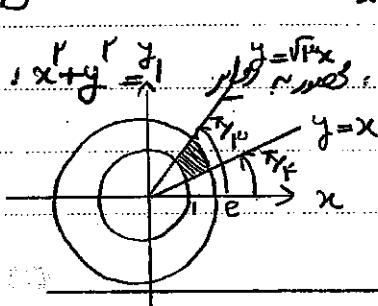
در این حالت می توان انتگرال را در مختصات قطبی حساب کرد.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{\text{تغییر مختصات}}$$

$$|d\vec{r}| = r \quad \text{و اگر این تبدیل را کار نکنیم مختصه}$$

$$\frac{dx dy}{dA} = r \frac{dr d\theta}{dA'} \rightarrow dA = r \cdot dA'$$

$$\iint_D F(x,y) dA \xrightarrow{\text{تغییر مختصات}} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} F(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr \right) d\theta$$



$$\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dA \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = e^2 \\ y = x \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

$$D_{\text{disk}} = \begin{cases} 1 \leq r \leq e \\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

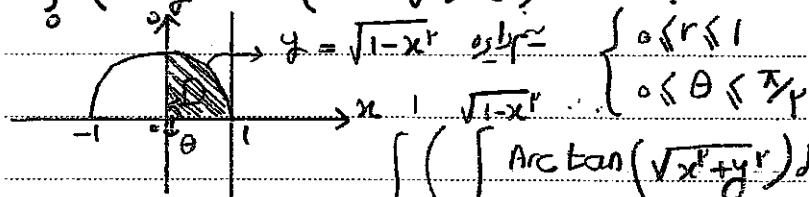
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow |d\mathbf{r}| = r$$

$$\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} dA \stackrel{\text{polar}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_1^e \frac{\ln(r^2)}{r^2} \cdot r dr \right) d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \times \int_1^e \frac{1}{r} \ln(r) dr =$$

$$\frac{\pi}{4} \times \ln(r) \Big|_1^e = \frac{\pi}{4} (1 - 0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \right) dx = ?$$

(Juc)



$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \right) dx \stackrel{\text{polar}}{=} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \text{Arctan}(r) \cdot r dr \right) d\theta$$

$\begin{cases} r \cos \theta = x \\ r \sin \theta = y \end{cases}$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^1 r \cdot \text{Arctan}(r) dr =$$

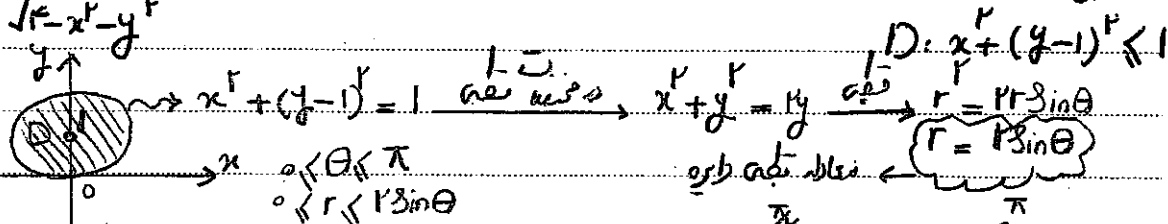
$\begin{cases} u = \text{Arctan}(r) \\ du = \frac{1}{1+r^2} dr \end{cases}$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} r^2 \text{Arctan}(r) - \frac{1}{2} \int \frac{1+r-1}{1+r^2} dr \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} r^2 \text{Arctan}(r) - \frac{1}{2} (r - \frac{1}{2} \text{Arctan}(r)) \right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

جیکو کہ دائرہ D : $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$



$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \sin \theta} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r dr \right) d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos \theta + 1) d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos \theta + 1) d\theta = ?$$

$$-\int_0^{2 \sin \theta} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr = \left(\int \frac{u'}{r \sqrt{u}} dx = \sqrt{u} \right) = -\sqrt{4-r^2} \Big|_0^{2 \sin \theta} = -\sqrt{4-4 \sin^2 \theta} + 2 =$$

$$-\sqrt{4 \cos^2 \theta} + 2 = -2 |\cos \theta| + 2$$

Subject

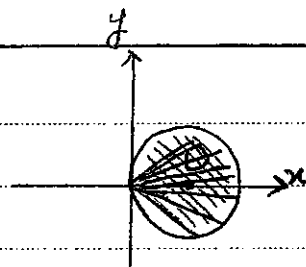
Date

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA$$

$$D: (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

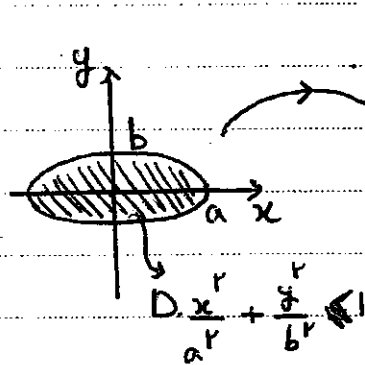
$$x^2 + y^2 \leq 2x$$



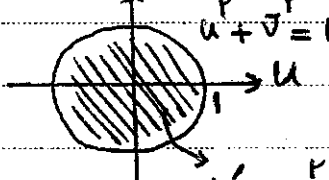
$$\begin{cases} -\pi < \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$$

$$\iint_D P(x, y) dA = ?$$

D → new



$$\text{Circ } \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1 \text{ circle } r \text{ new } \frac{u^r}{a^r} + \frac{v^r}{b^r} = 1$$



$$u^2 + v^2 = 1$$

$$D': u^2 + v^2 \leq 1$$

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

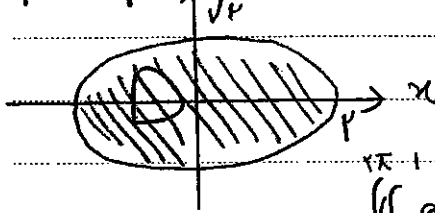
$$|J| = r$$

$$\begin{cases} u = x/a \\ v = y/b \end{cases} \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}$$

$$\iint_D P(x, y) dA = \iint_{D'} P(au, bv) \cdot ab dA' \xrightarrow{\text{new}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 P(a\cos\theta, b\sin\theta) \cdot ab r dr d\theta$$

$$dr) d\theta$$

$$\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1 \text{ circle } r \text{ new } \frac{u^r}{a^r} + \frac{v^r}{b^r} = 1 \quad \iint_D \cos(x^r + y^r) dA = ? \quad (\text{the})$$



$$\begin{cases} x = a\cos\theta = r\cos\theta \\ y = b\sin\theta = r\sin\theta \\ |J| = abr = r^2 \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos(r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta) \cdot r^2 r dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \times \left[\frac{r^3}{3} \cos(\epsilon r^2) \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \times \left[\frac{1}{3} \sin(\epsilon) \right] = \frac{2\pi}{9} \sin(\epsilon)$$

20/10/20

Subject

Date

تمرین: $\iint_D e^{(x^2+y^2)} dA = ?$ D ناحیه‌ای است در ربع اول و محصور به منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta = \sqrt{a} r \cos \theta \\ y = b \sin \theta = \sqrt{b} r \sin \theta \\ |d\mathbf{r}| = ab r = \sqrt{ab} r \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{a} r \cos \theta + \sqrt{b} r \sin \theta} \sqrt{ab} r dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta \times \int_0^1 e^{\sqrt{a} r \cos \theta + \sqrt{b} r \sin \theta} \sqrt{ab} r dr =$$

$$\frac{\pi}{4} \times \sqrt{ab} \int_0^1 r e^{\sqrt{a} r \cos \theta + \sqrt{b} r \sin \theta} dr = \frac{\pi}{4} \times \sqrt{ab} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(e^{\sqrt{a^2+b^2}} - e^0 \right) =$$

$$\frac{\sqrt{ab} \pi}{4} (e^{\sqrt{a^2+b^2}} - 1) = \frac{\sqrt{ab} \pi}{4} (e^{\sqrt{a^2+b^2}} - 1)$$

تمرین: مساحت رابطه به شعاع A را به فرم انتگرال بنویسید.

$$S = \iint_D |d\mathbf{r}| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^A r dr \right) d\theta = 2\pi \times \frac{A^2}{2} = \pi A^2$$

کاربرد: انتگرال برای محاسبه مساحت رابطه‌ها در صفحه.

اگر Δ یک رابطه در صفحه باشد، در مورد معادله Δ می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

حالت اول: اگر Δ برای معادله به صورت $z = g(x, y)$ باشد و تصویر Δ در صفحه xy ناحیه D باشد، آن‌گاه:

مساحت Δ = $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dA$

حالت دوم: اگر Δ برای معادله به صورت $y = g(x, z)$ باشد و تصویر Δ در صفحه xz ناحیه D باشد، آن‌گاه:

مساحت Δ = $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dA$

حالت سوم: اگر Δ برای معادله به صورت $x = g(y, z)$ باشد و تصویر Δ در صفحه yz ناحیه D باشد، آن‌گاه:

$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dA$

Subject

Date

مسئله (1) سطح گویه $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ را در ناحیه $z \geq 0$ و بالای صفحه xy محاسبه کنید. $F = \pi R^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dA = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dA$$

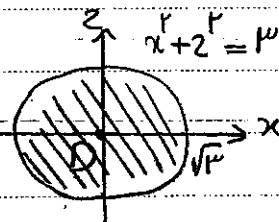
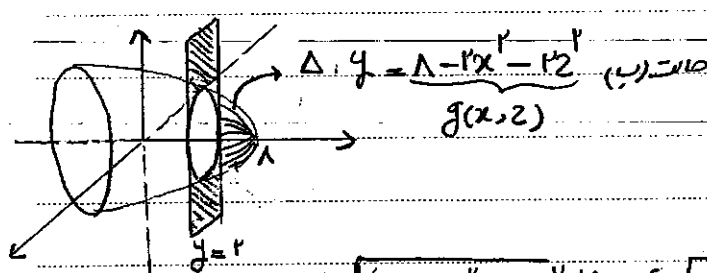
$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot R \int_0^R \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi \cdot R \cdot \left(-\sqrt{R^2 - r^2} \right) \Big|_0^R$$

$$2\pi (0 + R) = 2\pi R$$

$$\rightarrow \text{مساحت کل} = 2(2\pi R) = 4\pi R^2$$

مسئله (2) سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ را در ناحیه $z \geq 0$ محاسبه کنید.

$$z = 1 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 - z \rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = 1 - z$$



$$S = \iint_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\frac{1}{6} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{6} (1 + 4)^{3/2} - \frac{1}{6} (1)^{3/2} \right)$$

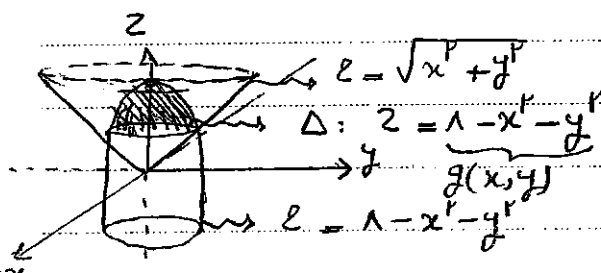
مسئله (3) سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را در ناحیه $z \leq 1$ محاسبه کنید.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

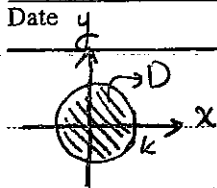
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$k^2 + k - 1 = 0 \rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Subject

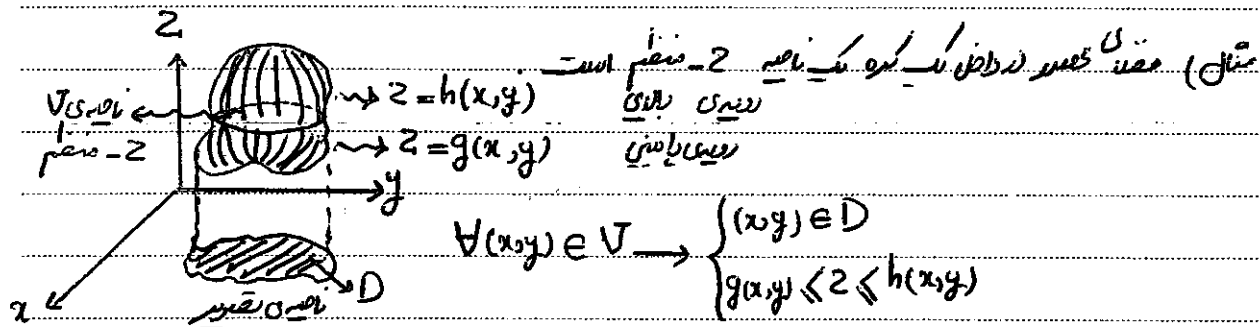
Date



$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^k \sqrt{1 + f_r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k \sqrt{1 + f_r^2} r dr$$

انتگرال ها سه گانه :

تعریف نایه سه بعدی z منظم : نایه سه بعدی V را به نایه z منظم نیم صفاه
اولاً : تغییر آن در نایه xy یک نایه دندوبه باشد
ثانیاً : این نایه در صفا از بالا و از پایین به دو نایه مختص به فرد محصور شده باشد



حال اگر تابع سه متغیره $W = F(x, y, z)$ در نقاط نایه V تعریف شده باشد $(\forall \in D \cap P)$

آن گاه انتگرال سه گانه تابع F در نایه V به صورت زیر تعریف می شود

$$\iiint_V F(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dA$$

$$dV = dz dy dx \quad \text{یا} \quad dz dx dy \quad \text{یا} \quad \dots$$

تذکره : اگر تابع $F(x, y, z)$ در تمام نایه V است به شرط اینکه تابع $F(x, y, z)$

صفاً در نایه V باشد

در صفا خاص : اگر $F(x, y, z) = 1$ فرض شود آن گاه مقدار انتگرال سه گانه برابر حجم نایه V است

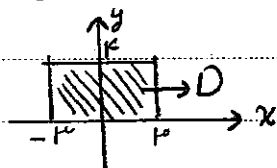
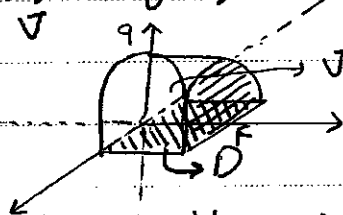
Subject

Date

$x=1, z=0$, $P(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ (جواب)
 در V ، $x^2 + z = 9$ و $y=1, y=0, x=-1$

$$\iiint_V P(x,y,z) dV$$

$$z = -x^2 + 9$$

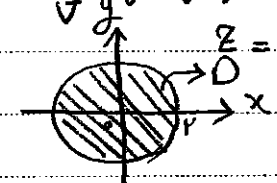
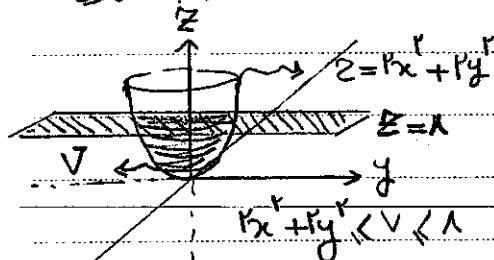


$$\forall (x,y,z) \in V \rightarrow 0 \leq z \leq -x^2 + 9$$

$$\iiint_V (x^2 + y^2 - z^2) dV = \iint_D \left(\int_0^{-x^2+9} (x^2 + y^2 - z^2) dz \right) dA = \iint_D \left((x^2 + y^2)z - \frac{1}{3}z^3 \right) \Big|_0^{-x^2+9} dA$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2)(-x^2 + 9) - \frac{1}{3}(-x^2 + 9)^3 \right) dy dx = \dots$$

در V ، $xy + yz$ (جواب)
 $z = 1$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



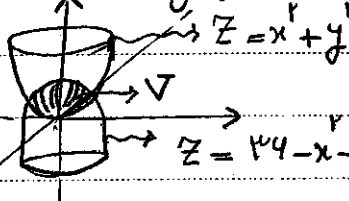
$$\iiint_V (xy + yz) dV = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (xy + yz) dz \right) dA =$$

$$= \iint_D \left(xy(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{2}y(1 - (x^2 + y^2)) \right) dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left((r \cos \theta \sin \theta)(1 - r) + \frac{1}{2} \sin \theta (1 - r^2) \right) r dr d\theta$$

$$= 0$$

$z = 4 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$ (جواب)
 در V ، $x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2$



$$x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2 \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow D$$

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dA \begin{cases} x = a \cos \theta = \sqrt{2} r \cos \theta \\ y = b \sin \theta = \sqrt{2} r \sin \theta \\ |J| = ab = 2\sqrt{2} r \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2) \sqrt{2} r dr d\theta = 2\pi \times \sqrt{2} (4 - 2) = 4\pi\sqrt{2}$$

تغییر متغیر استوانه ای و کره ای در انتگرال سه گانه

$$\iiint_V F(x, y, z) dV = ?$$

۱. تغییر متغیر استوانه ای

کره ای تغییر در فضای xy - راس یا قسمتی از یک راس باشد
آن گاه:

$$\text{تغییر متغیر استوانه ای} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$$

$$dx dy dz = r dr d\theta dz$$

$$h(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\rightarrow \iiint_V F(x, y, z) dV = \int_C \int_C \int_C F(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r dz dr d\theta$$

حداکثر θ از ناحیه تغییر متغیر مشخص شود $g(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\iiint_V F(x, y, z) dV = ?$$

۲. تغییر متغیر کره ای

از تغییر V در فضای xyz که به قسمتی از کره باشد به ρ, θ, φ به راس یا قسمتی از کره باشد

$$\text{تغییر متغیر کره ای} \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \rho^2 \sin \varphi$$

آن گاه:

$$\rightarrow \iiint_V F(x, y, z) dV = \int_C \int_C \int_C F(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} r \cos \theta \cdot 2 \cdot e^{r^2+2} \cdot r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 2e^{2r^2} \cdot \cos \theta \cdot r^2 \cdot e^r dr d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (e^{1-r^2} - 1) \cdot \cos \theta \cdot r^2 \cdot e^r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^1 \frac{1}{4} (r^2 e^r - r^2 e^{-r}) dr = \frac{1}{4} (e - \frac{1}{4}) \int_0^1 r^2 e^r dr$$

Subject

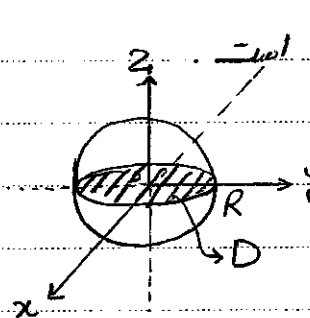
Date

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \rightarrow |d\mathbf{r}| = \rho \sin \phi \rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \sin \phi \cos \theta \cos \theta e^{\rho \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \times \int_0^R \rho^3 e^{\rho \cos \phi} d\rho = 1 \times \frac{1}{4} \times \int_0^R \rho^3 e^{\rho} d\rho$$

$$\begin{cases} u = \rho \\ du = e^{\rho} d\rho \end{cases}$$

مثال: دایره در صفحه xy با شعاع R

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R d\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$


مثال: دایره در صفحه xy با شعاع R و ارتفاع z

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$z' = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$z' = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = R^2 - z^2$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \sin \phi d\phi d\theta$$

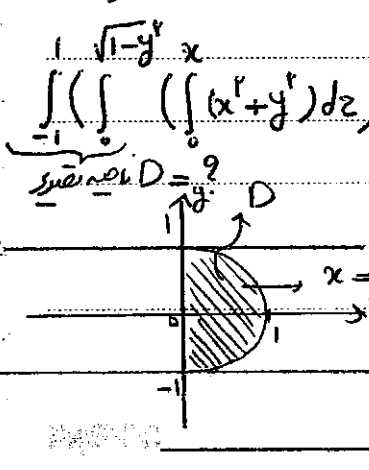
$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}}{3} \sin \phi d\phi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta$$

مثال: دایره در صفحه xy با شعاع R و ارتفاع z

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \sin \phi d\phi d\theta$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}}{3} \sin \phi d\phi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} d\phi d\theta$$


Subject

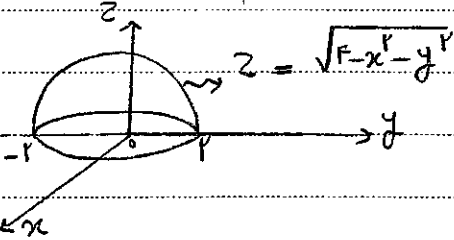
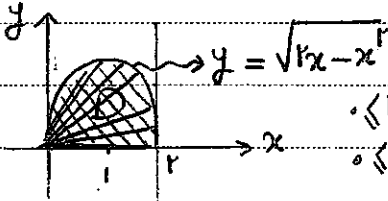
Date

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (xyz) dz dy dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (xyz) dz dy dx =$$

مربعی D = ?

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{-(x-1)^2 - 1} =$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta d\phi$$

کلیه نقطه‌های در انتظامی در یک نقطه و یک خط
 اگر ∇ نقطه‌ای سه بعدی $P(x, y, z)$ باشد و آن مکانی جی تابع $P(x, y, z)$ تعریف شود
 (اگر در ∇ نقطه‌ای ∇ باشد آن ناحیه را ∇ ناحیه می‌نامند)
 در این صورت:

$$M = \iiint_V P(x, y, z) dV$$

(۱) جابجایی حجم ناحیه V :

$$P(x, y, z) \text{ (استاندارد) } \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 P(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 P(x, y, z) dV$$

$$M_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} \times P(x, y, z) dV$$

$$M_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} \times P(x, y, z) dV$$

$$M_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \times P(x, y, z) dV$$

$$M_0 = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times P(x, y, z) dV$$

$$M_{xy} = \iiint_V \sqrt{z^2} \times P(x, y, z) dV$$

$$M_{xz} = \iiint_V y \times P(x, y, z) dV$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \times P(x, y, z) dV$$