پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

www.icivil.ir

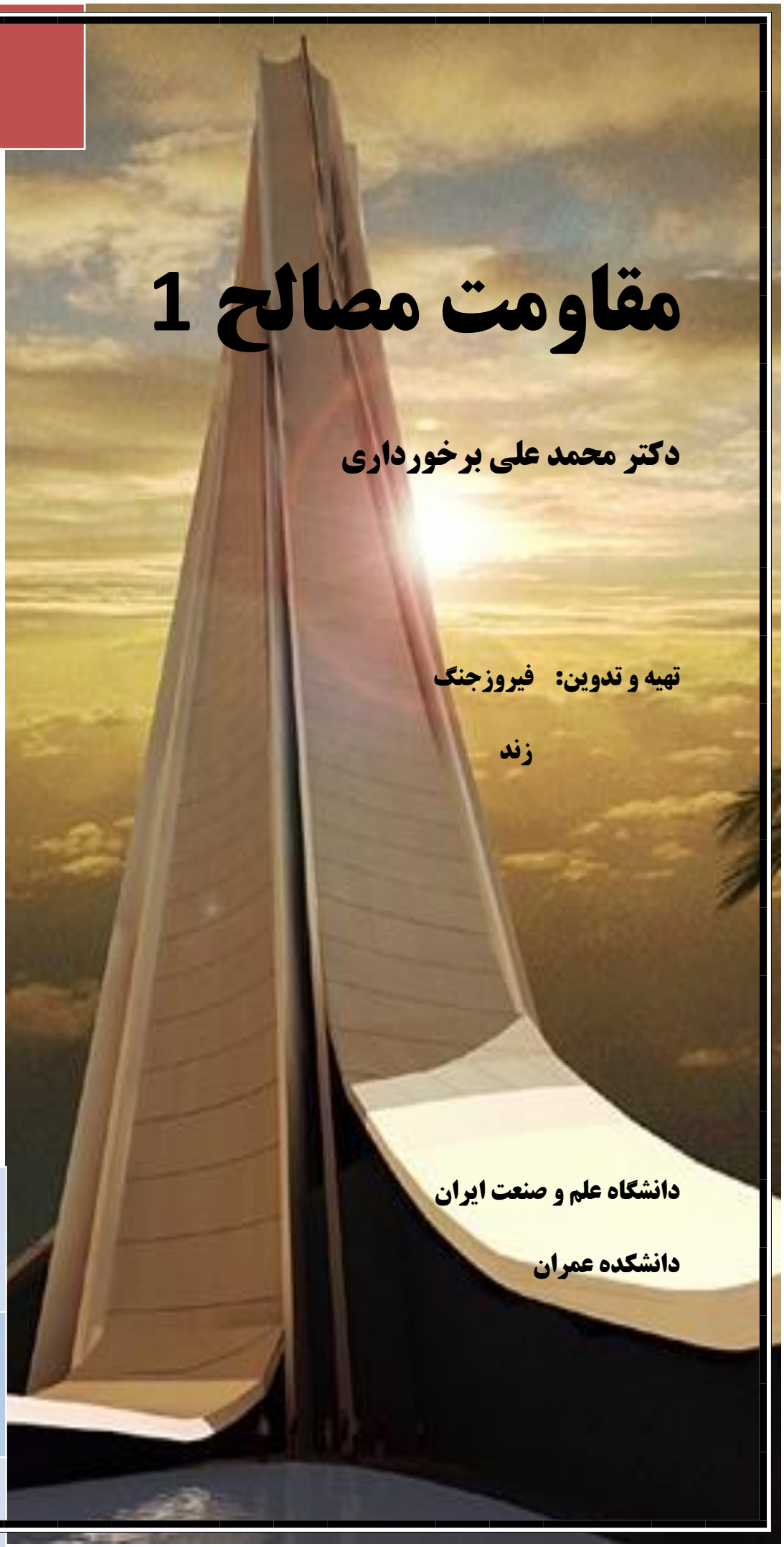
دانلود شده از: پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

پایگاه تخصصی دانشجویان و مهندسین عمران

اتاق گفتگو جامعه مجازی دانشجویان و مهندسین عمران

دانلود رایگان جزوات و نمونه سوالات و کتابها و مقالات روز علم عمران

اولین فروشگاه اینترنتی مهندسی عمران و معماری



مقاومت مصالح 1

دکتر محمد علی برخورداری

تهیه و تدوین: فیروزجنگ

زند

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده عمران

دانشکده عمران

جزوه

مقاومت مصالح ۱

دکتر محمد علی برخورداری

تدوین:

فیروزجنگ

زند

پاییز 88

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

الف)مقاومت مصالح.....5

ب)مروری بر تعاریف اولیه.....5

فصل اول«مفاهیم تنش و کرنش»

نیروهای داخلی.....5

تعاریف تنش و کرنش.....7

نمودار تنش-کرنش.....8

قانون هوک،روابط تنش و کرنش.....11

عامل حرارت.....13

رفتار میله ها در بارگذاری.....16

انواع اتصالات(جوش،پیچ،پرچ).....24

برش های مورب.....26

خستگی.....28

تمرکز تنش.....28

تعمیم قانون هوک.....29

خلاصه فصل اول.....32

فصل دوم«پیچش»

روابط پیچش.....34

زاویه پیچش..... 36

توان..... 42

تغییر شکل های پلاستیک..... 48

پیچش مقاطع مستطیل شکل..... 50

پیچش مقاطع جدار نازک..... 50

زاویه پیچش مقاطع جدار نازک..... 54

خلاصه فصل دوم..... 57

فصل سوم«تبدیلهای تنش و کرنش»

تحلیل تنش ها در صفحه با دایره مور..... 59

خلاصه فصل سوم..... 70

فصل چهارم«خمش»

خمش در تیرها..... 72

خمش عضوهایی که از چند ماده ساخته شده اند..... 76

تنش های برشی در تیرها..... 79

خمش دو محوری..... 84

بارگذاری عضوهای جدار نازک و مرکز برش..... 86

خلاصه فصل چهارم..... 89

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

فصل اول

"مفاهیم تنش و کرنش"

به نام خدا

الف)**مقاومت مصالح Mechanic Of Materials**

موضوعی از علم مکانیک که با استفاده از روشهای تحلیل به بررسی و تعیین مقاومت،صلبیت وپایداری اعضای باربری می پردازد.

ب)**مروری بر تعاریف اولیه!**

نیرو Force عاملی که باعث تغییر در حرکت وشکل جسم می شود. نیرو با نقطه اثر،مقدار،راستا وجهت مشخص شده وآنرا با یک بردار نشان می دهند.واحد نیرو نیوتن(N)است.

هرگاه ازنیرو صحبت می کنیم، بحث عمل و عکس العمل نیز پیش می آید. درواقع دو جسم دریک نقطه، متقابلا به یکدیگرنیرو وارد میکنند.

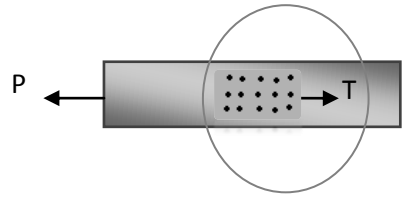
- نیروی وزن weight:نیرویی که ازطریق جاذبه زمین به ذرات جرم جسم واردمیشود. (بنابراین، این تصورکه نیروی وزن تنها برمرکز ثقل جسم وارد می شود، نادرست خواهد بود!)

جسم صلب Bigid Body ماجسم صلب نداریم،زیرا دراثر نیرو تغییر شکل ایجاد میشود.اما وقتی این تغییر شکلها بسیار کوچک باشندواثر محسوسی در شرایط تعادل یا حرکت نداشته باشند،جسم را صلب می نامیم.

تعادل Equilibrium وقتی برآیندتمام نیروهای وارد برجسم صفر باشد،درحالت تعادل است.

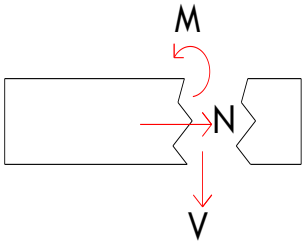
نیروهای داخلی

مجموعه نیروهای خارجی در حال تعادل استاتیکی می باشند.در اثر نیروهای خارجی،در داخل جسم نیروها یا ممان هایی ایجاد می شود. اما ذرات جسم که با فاصله معین از یکدیگر قرار دارند، بهم نمی ریزندو هر ذره با ذره مجاور خود درتعامل بوده ونیروهای جدیدی به آن وارد می کند.این نیروها همان نیروهای داخلی است که باعث تغییر شکل جسم میشوند. (شکل 1)



شکل 1-ذرات سمت چپ به ذرات سمت راست خود نیرو وارد می کنند

برش قسمتی از یک جسم که به آن نیرو وارد می شود:



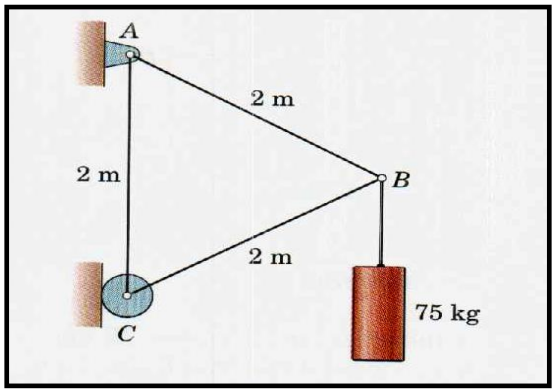
N=نیروی محوری

M=گشتاور خمشی

V=نیروی برشی

وقتی نیروها در امتداد محور میله باشند،اصطلاحا نیروی محوری خوانده شده وبا(N)نشان داده میشوند.نیروی N برآیند نیروهای بین ذرات سطح است. امادرحالت کلی نیروی تک تک ذرات نیست.(جز دربعضی موارد خاص!)

- در عضوهای دونیرویی،فقط نیروهای محوری(N) داریم که برآیند نیروهای وارد برذرات میله است.
- در عضوهای چند نیرویی،علاوه بر کشش یا فشار، برش وخمش هم ایجاد میشود.عامل ایجادخمشها، گشتاور نیروها هستندکه همواره نسبت به یک نقطه معین بدست می آیند...



شکل 2

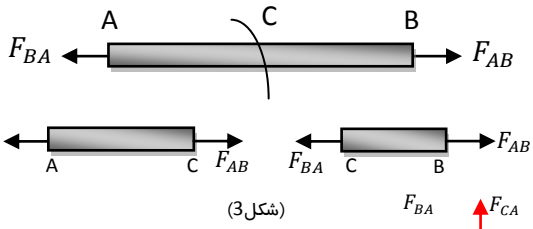
برای درک بهتر نیروهای موجود بین ذرات، یک خرپای ساده مطابق شکل2 را بررسی می کنیم:

با توجه به شکل اولین کاری که باید انجام داد، رسم دیاگرام آزاد خرپا است که دربررسی تعادل ها،برای تعیین نیروهای داخلی به این ترتیب عمل میکنیم:

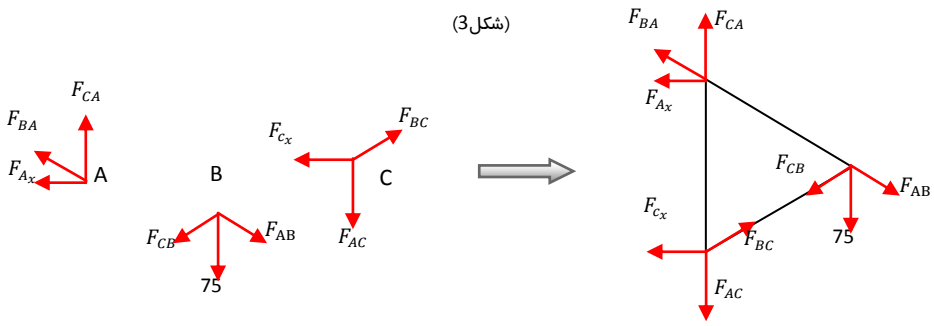
1. ابتدامحدوده و مرز سیستم مورد بررسی را مشخص می کنیم
2. قسمتهای اضافی را قطع می کنیم وسیستم را جدا می کشیم
3. عضوها ومفصلها را ازهم جداکرده وبرای هرکدام جداگانه نمودار جسم آزاد رسم می کنیم
4. نیروهای خارجی وارده را در همان نقطه رسم می کنیم
5. معادلات تعادل را برای بررسی سیستم می نویسیم...

- **نکته!** در عضوهای دونیرویی مانند AB نیروهای قرینه بر دو سر عضو وارد می شوند، یعنی با هم برابرند اما در خلاف جهت یکدیگر می باشند...(شکل3) دلیل آن این است که قسمتهای برش زده شده باید متعادل باشند!

حال با توجه به این نکات،می توان نیروهای خرپا را یافته وبا استفاده از معادلات تعادل، نیرو در هر عضو را براحتی بدست آورد...



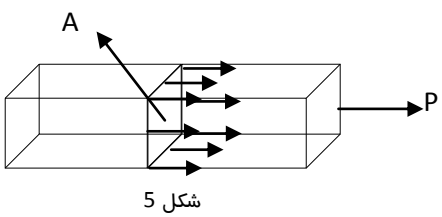
(شکل3)



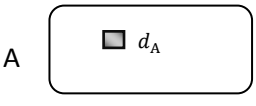
شکل 4- (الف) شکل 4-(ب)

تعاریف تنش وکرنش

در این قسمت تنها عامل کشش یا فشار را بررسی می کنیم. نیروی P باعث بوجود آمدن نیروی محوری N میشودکه چون نیروی محوری N دربین ذرات جسم بطور یکسان پخش نشده است، پس در نقطه معینی در سطح مقطع، المان سطح d_A را درنظر می گیریم .نیروی وارده بر واحد سطح یا شدت نیروهای توزیع شده در یک سطح مقطع معین را **تنش** در آن مقطع می نامند که با حرف σ (سیگما) نشان داده می شود.



شکل 5

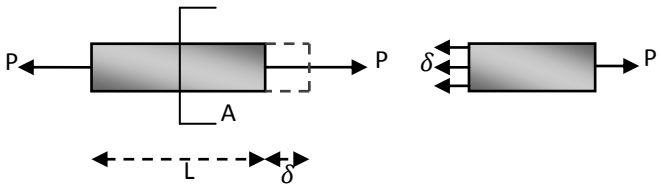


شکل 6

σ =متوسط توزیع نیرو در این مساحت= $\frac{d_F}{d_A}$ $\frac{kg}{cm^2}$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

باز میله ای را در نظر می گیریم که در اثر کشش با نیروی P طولش زیاد می شود(ΔL).این تغییر طول تابعی از عواملی چون جنس میله ، نیروی P، طول میله وحتی مساحت سطح مقطع آن است...



شکل 7

$$\frac{\Delta L}{L_0} = F\left(\frac{N}{A}, \text{میله جنس}\right) \rightarrow \quad \varepsilon = F\left(\sigma, \text{میله جنس}\right) = \frac{\Delta L}{L_0}$$

⟵ "کرنش یا همان تغییر طول نسبی عبارت است از نسبت میزان تغییر طول به طول اولیه"

چون تنها دانستن رفتاربرخی مواد در اثر اعمال نیرو مهم است،تاثیر عامل جنس ،در آزمایشگاه فقط برای مصالح اندکی بررسی می شود.در اینجا ما رفتار فولاد را در اثر کشش یا فشار بررسی می کنیم.

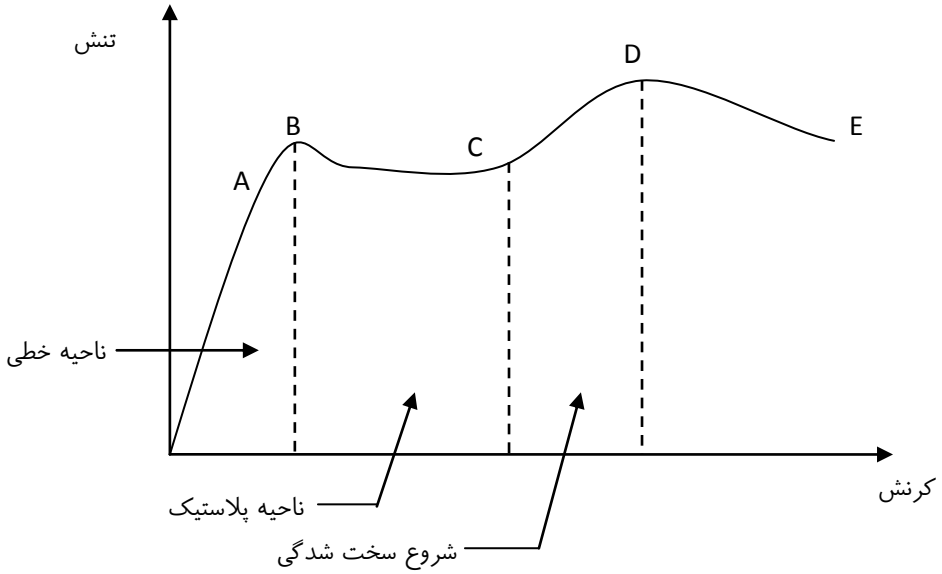
نمودار تنش_کرنش

با اعمال نیرو ومشاهده و اندازه گیری تغییر طول میله، میتوان تنش و کرنش را بدست آورد.در واقع این عملیات در آزمایشگاه با در دست داشتن اطلاعاتی مانند جدول زیربرروی یک جسم انجام می شود تا هنگام تحلیل وطراحی سازه ها،از تغییر شکلهای حاصل از بارهای واردبر سازه آگاه شویم. سپس نوبت به رسم نمودار $\sigma - \varepsilon$ میرسد.این نمودار که نمایانگر خاصیت مکانیکی جسم است،و رفتار ماده راتحت اثر بار نشان میدهد،شامل قسمتهای مختلفی است که در ادامه بررسی خواهد شد. میزان نیروی وارده را با واحد کیلوگرم مشخص کرده و تنش وکرنش را یادداشت می کنیم...εوσ تابعی از هم بوده وبا یکدیگر رابطه مستقیم دارند.

$P_{(kg)}$	ΔL	$\sigma = \frac{P}{A}$	$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$
0	0	0	0
200	a_1		
500	a_2		
1000	a_3		....

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

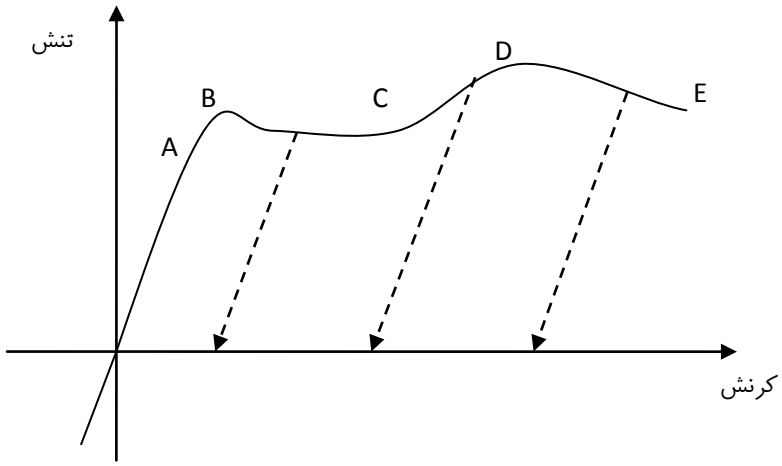
- O-A(ناحیه خطی): در این قسمت طول میله بطور خطی با بار افزایش می یابد. اگر درین ناحیه نیرو را کم کنیم،تنش و کرنش به یک نسبت کم می شوند و میزان کرنش مجددا به صفر می رسد. (رفتار الاستیک)



شکل 8

- B(تنش تسلیم σ_y): پس از اینکه تنش به نقطه بحرانی σy می رسدمیله با افزایش نسبتا کم بار اعمال شده، تغییر شکل زیادی می دهد.(رفتار پلاستیک)یعنی میزان بار وارده به حدی زیاد شده است که میله از حالت عادی خارج شده و رفتاری پلاستیکی نشان میدهدو با ثابت ماندن میزان تنش اضافه طول را شاهد هستیم.(بار را از روی جسم برنداشته ایم)

- B-C (ناحیه خمیری): اگر بعد از عبور از نقطه تسلیم نیرو را کاهش دهیم ، تنش و کرنش بطور خطی ودر امتداد خطی موازی با A-B کم می شوند. یعنی پس از برداشتن بار، ε به صفر نمیرسدو مقداری اضافه طول برای همیشه در میله باقی می ماند.در مورد فولاد، در این ناحیه پس از آغاز تسلیم با افزایش کرنش، مقدار تنش ثابت می ماند. پس این قسمت تقریبا افقی خواهد بود.



شکل 9

- C (شروع سخت شدگی مجدد) :پس از این مرحله وتا رسیدن به تنش ماکزیمم مجددا با اضافه کردن نیرو طول میله افزایش می یابدو رابطه تنش وکرنش بازهم نمودار را به منحنی تبدیل می کنند.
- D (تنش نهایی σ_u) : بالاترین نقطه درنموداراست وتنش درآن متناظرباماکزیمم باروواردشده به نمونه می باشد. با رسیدن به این مرحله حتی با کاهش بار کرنش اضافه می شود،که این حالت غیر عادی بدلیل بهم ریختن ساختار جسم است...
- E (تنش گسیختگی) : نمونه در این مرحله پاره یا به اصطلاح گسیخته می شود.

← در طراحی های ساختمان،میزان σ و ε از حدی که حدودا 0.66 σ است نباید بیشتر شود تا بنا فرو نریزد.این مقدار ضریب اطمینان نامیده می شود وآن را با σ_w نشان می دهند.

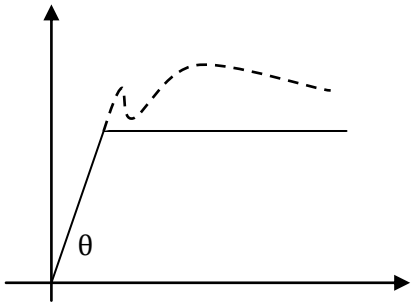
قانون هوک.روابط تنش و کرنش

در مبحث مقاومت مصالح بیشتر قسمت خطی نمودار تنش-کرنش مورد توجه قرار دارد،به این دلیل که بار گذاری پیش بینی شده از طرف مهندسان تنها در این بازه است و برای رسم منحنی باید شیب مرحله خطی را بدست آوریم که رابطه آن با قانون هوک بیان می شود:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

E مدول الاستیسیته یا ارتجاعی نام دارد. ودر واقع شیب قسمت خطی نمودار است.تقریبا تمام اجسامی که ما با آنها سروکار داریم نمودارشان در قسمت ابتدایی با فولاد یکسان است و در واقع به همان صورت خطی است (البته با شیبهای متفاوت)پس این فرمول برای آنها نیز صادق است.

حال که با تغییرات طولی اجسام در اثر اعمال نیرو آشنا شدیم،برای راحتی کار وحل مسائل نمودارها را به شکل زیر رسم می کنیم که مدل "الاستیک – پلاستیک" است و در آن از قسمت سخت شدگی صرفنظر شده است.



شکل 10

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \quad \text{واحد} : \frac{\frac{kg}{cm^2}}{\frac{cm}{cm}}$$

هرچه مصالح محکم تر باشد، ضریب زاویه بیشتر وهرچه ضعیف تر باشد، ضریب زاویه کمتر است

اگر نیرو فشاری باشد،نمودار را نسبت به مبدا قرینه میکنیم...وتمامی رفتار جسم به ویژه قسمت خطی نمودار به همان صورت تکرار می شودو شکل آن در اینبار در ربع سوم دیده می شود...!

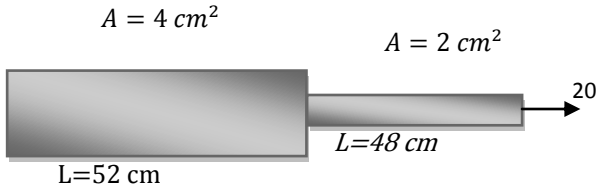
اگر قانون هوک را بازنویسی کنیم به رابطه زیر می رسیم.ازین فرمول زمانی می توانیم استفاده کنیم کهAوN در طول میله ثابت باشند.همچنین جنس میله نیز باید در قسمت مورد بررسی یکنواخت باشد(Eثابت)

$$\sigma = \varepsilon.E \rightarrow \frac{N}{A} = \frac{\Delta L}{L}E \rightarrow \Delta L = \frac{N.L}{E.A}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

مثال 1

در اجسام نشان داده شده(الف-ب) تغییر طول حاصل از نیروی وارده را بیابید (E=200 Gpa)



شکل 11

الف) با توجه به یکسان نبودن سطح مقطع،تغییر طولها را جدا حساب می کنیم

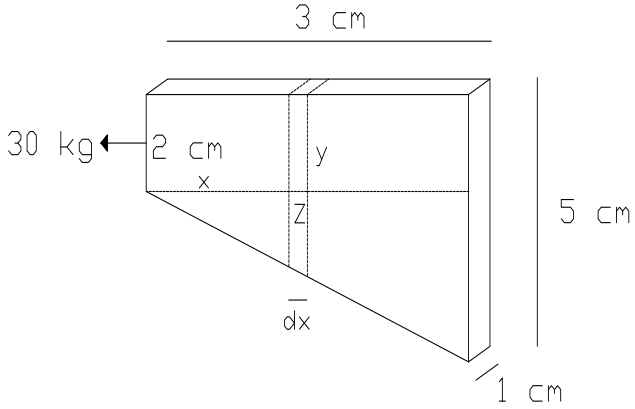
$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \rightarrow \quad \Delta L_1 = \frac{20 \times 10^3 \times 48 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = 2.4 \times 10^{-4}$$

$$\Delta L_2 = \frac{20 \times 10^3 \times 52 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = 1.3 \times 10^{-4} \rightarrow \qquad \text{جمع} \Delta L_T = 3.7 \times 10^{-4}$$

ب) درین مسئله N ثابت است،ولی A در هرنقطه تغییر می کند...پس بهترین راه استفاده از انتگرال است:

$$\rightarrow \quad \frac{z}{3} = \frac{x}{3} \rightarrow z = x \qquad y = 2 + z$$

یک المان عمودی انتخاب شده است



شکل 12

$$\rightarrow \Delta L = \frac{N.L}{E.A} \rightarrow \Delta L = \int_0^3 \frac{30dx}{E.A} = \int_0^3 \frac{30dx}{200.10^9(y)} = \frac{3}{2.10^9} Ln\frac{5}{2}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

عامل حرارت

وقتی دمای میله به اندازه ΔT افزایش می یابد، طول آن به اندازه δ_T زیاد می شود.که این افزایش طول با تغییر دما،طول میله وجنس آن متناسب است وکرنشی را ایجاد می کند.که از رابطه زیر بدست می آید.

(α (ضریب انبساط حرارتی)مقداری ثابت واز مشخصه های جسم است.)

$$\delta_T = \alpha.\Delta T.L \quad \rightarrow \quad \varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha.\Delta T$$

- اصل جمع آثار(super position): اگر چند عامل بریک جسم اثر کنند(فشار،حرارت،...)برای بدست آوردن تغییرات کلی، می توان اثرات آنهارا جداگانه محاسبه و جمع جبری نمود.البته به شرطی که تمام این عامل ها خطی باشند.
- اصل پواسون(poisson): وقتی جسم را در فضای سه بعدی در نظر می گیریم،هرگاه در اثر حرارت دادن به آن در امتداد یک محور کرنشی ایجاد شود، در جهتهای عمود بر آن هم کرنش ایجاد می شودکه عکس کرنش اول وبا یک ضریب مشخص است.(ضریب پواسون :υ)

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon.\varepsilon_x = -\upsilon.\frac{\sigma_x}{E}$$

وقتی نیروی وارد برجسم کششی باشد،طول آن زیادوسطح مقطعش کم می شود. همچنین وقتی نیروی وارده فشاری است،طول جسم کم وسطح مقطعش زیاد خواهد شد.بنابراین بنظر میرسد که تنش آن تغییرمی کند. ولی باید گفت که در واقع دو نوع تنش داریم: حقیقی و قراردادی.که در حالت کلی باهم اختلاف چندانی ندارند، اما ما با تنش قراردادی سروکار داریم.بنابراین:

← برای حل هر مسئله:

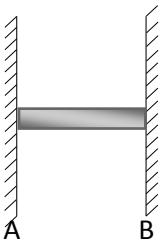
1. مرز مورد نظر را مشخص می کنیم
2. هر چیزی که به آن متصل است(مثلا تکیه گاهها...)را جدا می کنیم
3. نیروهای خارجی معلوم را می کشیم
4. معادلات تعادل را نوشته وآنها را حل می کنیم

مثال 2

اگر میله فولادی را 50درجه حرارت دهیم،چه می شود؟(می دانیم میله خم نمی شود)

ابتدا باید دیاگرام آزاد جسم را رسم کنیم.پس مرزجسم را مشخص کرده آن را جدا می کشیم. سپس نیروهای وارد بر میله را در همان محل قرار می دهیم.

شکل 13



درمرحله بعد باید معادلات تعادل را بنویسیم.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \rightarrow \quad R_A - R_B = 0$$

1معادله داریم و 2 مجهول،پس از نظر استاتیکی یک درجه نامعین است.حال به معادله جدیدی نیاز داریم،چون دیگر از اصل تعادل نمی توان معادله ای بدست آورد.

- اصل سازگاری تغییر شکلها به ما اجازه می دهد که بین تغییر طولهای ایجاد شده رابطه ای بدست آوریم و از آن برای حل مسئله استفاده کنیم.بطور کلی تمام تغییر شکلهای سیستم به هم وابسته اندو باید با یکدیگر هماهنگ باشند.حتی اگرقسمتی از سیستم در اثر اعمال نیرو به حالت پلاستیک درآمده باشد.در حل مسائل با سیستمهای نامعین بدون مراجعه به تغییر شکلها نمی توان تعادلها را بدست آورد.

چون میله خم نمی شود، قطر آن افزایش می یابد.

$$\Delta L = 0 \rightarrow \frac{NL}{EA} + \alpha . L . \Delta T = 0 \rightarrow \frac{-R_A L}{EA} + \alpha L \Delta T = 0 \rightarrow \quad R_A = EA\alpha\Delta T$$

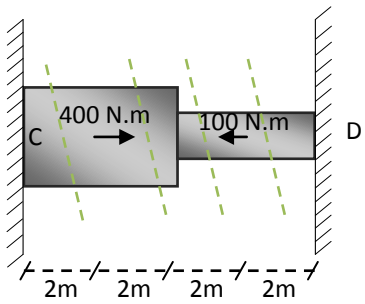
پس جهت انتخابی درست بوده است.برایB هم به همین روش بدست می آوریم.تنش A مانند زیر محاسبه می شود:

تنش منفی یعنی تنش از نوع فشاری

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-EA\alpha\Delta T}{A} = -E\alpha\Delta T$$

مثال3

اگر سیستم 45درجه حرارت داده شود،عکس العملهای تکیه گاهها را بیابید.

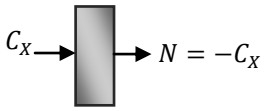


$\sum F_X = 0 \rightarrow C_X + 400 = 100 + D_X$

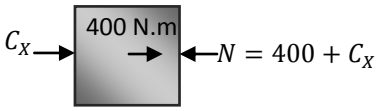
$\rightarrow D_X - C_X = 300$

$\delta_l = 0$ تغییرات طول کلی

4برش می زنیم و در هر 2متر جداگانه تغییرات طول را می نویسیم... برای حرارت نیز،در هر قسمت روابط را با $\alpha l \Delta\theta$ جمع می کنیم!



$$\Delta L_1 = \frac{-C_X \times 200}{EA} + \alpha l \Delta\theta$$



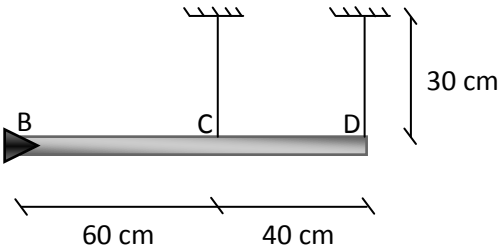
$$\ldots \Delta L_2 = \frac{(400+C_X)\times 200}{EA} + \alpha l \Delta\theta$$

و به همین ترتیب برای همه قسمتها روابط تعادل و تغییر شکلها را می نویسیم.باید توجه کرد که تغییر طول کلی برابر با صفر است.

اگر کل المان یکنواخت باشد،پس از اعمال نیرو و تغییر حرارت،نقاط مختلف آن نسبت به هم تغییر مکان نمی دهند.اما در اجسامی مانند شکل بالا،تغییرات جزئی در طول هر قسمت دیده می شود(برخی کشیده و بعضی دیگر فشرده می شوند).پس اگر در صورت مسئله،تغییر مکان نقطه ای خاص مدنظر باشد،تغییر طول دو طرف آن را محاسبه می کنیم تا مشخص شود به کدام سمت می رود...

رفتار میله ها در بارگذاری

* مثال3



شکل 14

تیرصلبی که تغییر شکل نمی دهد،بوسیله دومیله از سقف آویزان است

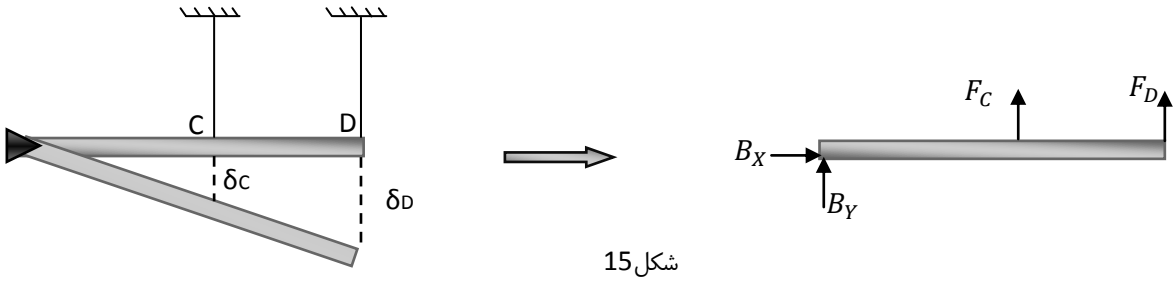
E=200 Gpa $\alpha=11\times 10^{-6}$ $\nu=0.3$

$A_D = A_C = 2cm^2$

☜ **قسمت1)** اگر این مجموعه را 80°C حرارت دهیم،قطر میله ها چقدر تغییر می کند؟

با وجود اینکه شرایط در هر دو میله یکسان است،اما تغییر طولها متفاوت است(شکل پس در این میله نیروهایی ایجاد شده وتغییر طول و قطر تنها ناشی از حرارت نیست. برای حل مسئله ابتدا دیاگرام آزاد را رسم کرده و معادلات تعادل را می نویسیم:

$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$



شکل15

$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + (F_C + F_D) = 0$

$\sum M_B = 0 \rightarrow F_C(60) + F_D(100) = 0$

2معادله داریم و3 مجهول،پس یک درجه نامعین است!

وقتی دیگر رابطه ای برای تعادل نداریم ، طبق اصل سازگاری تغییر طولها،از تشابه مثلثها استفاده می کنیم:

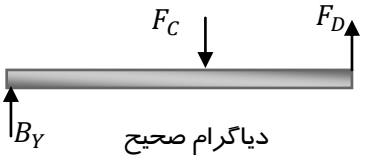
$$\frac{\delta_D}{\delta_C} = \frac{100}{60} \rightarrow \delta_D = \frac{5}{3}\delta_C$$

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} + \alpha L \Delta T \;\rightarrow\; \frac{F_D L_D}{EA_D} + \alpha L_D \Delta T = \frac{5}{3}\left[\frac{F_C L_C}{EA_C} + \alpha L_C \Delta T\right]$$

$$\rightarrow\; F_D + \alpha EA\Delta T = \frac{5}{3}[F_C + \alpha E \Delta T]$$

معادلات را عددگذاری کرده وآنها را حل می کنیم...

$$\alpha EA\Delta T = (11\times10^{-6})(200\times10^{9})(2\times10^{-4})80 = 352\times10^{2}$$



دیاگرام صحیح

$$\rightarrow \begin{cases} F_D = \frac{2}{3}(352\times10^{2}) + \frac{5}{3}F_C \\ F_C(60) + F_D(100) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_C = -10.3 \;\; KN \quad \text{فشاری} \\ F_D = 6.18 \;\; KN \quad \text{کششی} \end{cases}$$

حال نوبت به محاسبه تغییر قطرها می رسد.چون نیروها متفاوت است، پس تغییر قطرها هم یکسان نیست! طبق اصل پواسون $\varepsilon_y = -\upsilon.\varepsilon_x$ ،که در این مسئله اگر راستای میله ها ،محور X باشد،افزایش قطر در جهت محور Yها خواهد بود. بنابراین:

$$\delta_y = \varepsilon_y.d = -\nu.\varepsilon_x.d \qquad \delta_T = \alpha d \Delta T \qquad \delta_C = \delta_T + \delta_Y$$

$$\rightarrow\; \delta_C = \alpha d\Delta T + \nu.\varepsilon_x.d \;\rightarrow\; \delta_C = d\left(11\times10^{-6}\times80 + \frac{10.3\times10^{3}\times0.3}{(200\times10^{9})(2\times10^{-4})}\times0.3\right)$$

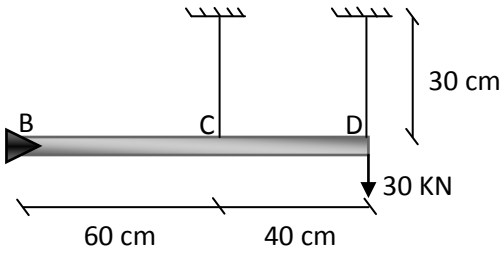
میله C فشرده شده وقطر آن زیاد می شود، پس کرنش قطری در کل مثبت است.

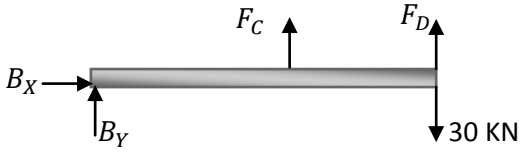
عامل فشار = طول کم= قطر زیاد عامل کشش= طول زیاد= قطر کم

$$\delta_d = \alpha d\Delta T - \nu.\varepsilon_x.d \;\rightarrow\; \delta_C = d\left(11\times10^{-6}\times80 - \frac{6.18\times10^{3}\times0.3}{(200\times10^{9})(2\times10^{-4})}\times0.3\right)$$

$$\rightarrow\; \delta_d = 10.38\times10^{9}$$

☜ **قسمت2**) اگر حرارت نداشته باشیم،اما نیرویی معادل *30 KN* به *D* وارد کنیم،تنش را در دومیله حساب کنید.





شکل 16

باز هم مراحل حل مسئله همانند قسمت قبل است

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + (F_C + F_D) = 30 \times 10^3$$

$$M_B = 0 \rightarrow F_C(60) + F_D(100) = 30 \times 10^3(100)$$

2 معادله و3 مجهول: یک درجه نامعین است.پس نسبت تغییر شکلها را هم بدست می آوریم. تغییر طولها مثل حالت شکل (15) است!پس:

$$\frac{\delta_D}{\delta_C} = \frac{100}{60} \rightarrow \delta_D = \frac{5}{3}\delta_C \rightarrow \frac{F_C.L_C}{E.A_C} = 0.6\frac{F_D.L_D}{E.A_D}$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_C = 22.06 \ \ KN \\ F_D = 13.2 \ \ KN \end{cases}$$

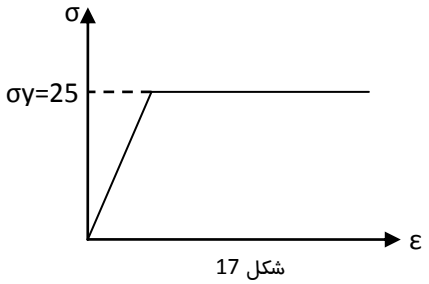
در نهایت تنش ها را نیز حساب می کنیم:

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A_D} = \frac{22.06 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 110 \ Mpa$$

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A_C} = \frac{22.06 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 66 \ Mpa$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

☜ **قسمت3**) نمودار تغییرات تنش وکرنش را برای میله هایی که در سوال بکار رفته بودند همانند شکل17 رسم کرده ایم.چون σy= 250 Mpa بنابراین تا این قبل از این مقدار، نیروی 30 kN وارد شده هر چند برابر که شود، تغییرات با رابطه خطی محاسبه خواهد شد.حال با یک تناسب ساده می توان فهمید که وقتی تنش در میله *D*به حد تسلیم رسیده است،چه نیرویی باید به سیستم وارد شود؟!



شکل 17

$$\sigma_1 = 110 \rightarrow P_1 = 30$$

$$\sigma_2 = 250 \rightarrow P_2 = 68.18$$

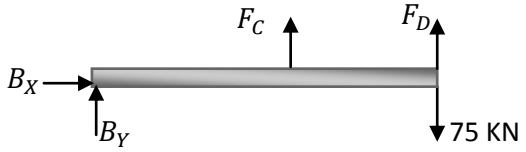
پس با وارد کردن این مقدار نیرو(بجای نیروی 30 KN)میله *D*وارد مرحله پلاستیک می شود.اما میله *C*هنوز در حالت الاستیک است.با تناسبی دیگر میزان تنش بوجود آمده در میله *C* را نیز بدست می آوریم:

$$P_1 = 30 \rightarrow \sigma_1 = 110$$

$$P_2 = 68.18 \rightarrow \sigma_2 = 150$$

که معلوم می شود*C* هنوز تغییرات خطی دارد.

- بطور کلی هرگاه اندازه نیرو طوری باشد که فقط دربخشی از سیستم تنش به حد تسلیم برسد،آن نیرو **بار تسلیم** نامیده می شود.*(Py)*



تنش *D*ثابت وبرابر مقدار *250KN* است،به این دلیل که بار وارده از 68.8KN بیشتر شده و میله به مرحله پلاستیک وارد شده است.

$$\sum M_B = 0 \rightarrow (0.6)F_C + F_D - 75 \times 10^3 = 0$$

$$(0.6)F_C + (250 \times 10^6)(2 \times 10^{-4}) = 75 \times 10^3$$

$$\rightarrow (0.6)\mathrm{F_C} = 25 \rightarrow \quad \mathrm{F_C} = 41.7\ \mathrm{KN}$$

پس تنش در میله *C* هم محاسبه می شود:

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A} = \frac{41.7 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 208.5 \text{ Mpa}$$

بنابراین برای میله C تا اینجا تغییرات بصورت خطی است.اما میله D از وقتی تسلیم شده است،رابطه ریاضی برای تغییر طولش وجود ندارد... ولی رفتارش تابع تغییرات میله *C* می باشد!

$$\sigma_C = 208.5\ Mpa \ \rightarrow\ \delta_C = \frac{F_C \,.\, L_C}{E \,.\, A_C} = \frac{(41.7 \times 10^3)(30 \times 10^{-2})}{(200 \times 10^9)(2 \times 10^{-4})} = 31.3 \times 10^{-5}\ mm$$

افزایش طول میله *D* نیز با تناسب بدست می آید:

$$\delta_D = 0.515 \text{ mm}$$

☜ **قسمت4**) اگر در قسمت قبل بجای بار 75 KN باری معادل 80 KN قرار دهیم خواهیم دید که تنش در هر دو میله به حد تسلیم می رسد.

$$P = 80 \text{ KN} \rightarrow \quad F_C = 50 \text{ KN} \ \rightarrow \quad \sigma_C = 250 \text{ Mpa}$$

پس طول دو میله بدون اضافه کردن نیرو، آنقدر زیاد می شود که **هردو پاره شوند**! این میزان بار،که باعث شد تمام سیستم به حد تسلیم برسد، بار نهایی نامیده می شودو آن را با *Pu* نشان می دهند.

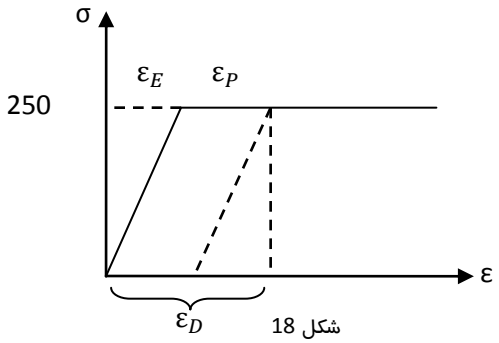
Py :مقدارنیرویی است که در یک قسمت از سیستم(اولین نقطه) تسلیم رخ می دهد.

Pu :بسته به ساختار سیستم، مقدار نیرویی است که موجب انهدام آن می شود.

☜ **قسمت5**) حال می خواهیم ببینیم اگردر قسمت 3 ،بار 75 KN را ناگهای به صفر برسانیم، چه اتفاقی در سیستم می افتد؟

واضح است که میله C می خواهد تغییر طولش را جبران کند اما میله D با همان نسبت و بطور خطی کاهش طول نمی یابد و به طول اولیه نمی رسد.پس اینطور بنظر می رسد که میله D اندکی بالا آمده و باعث می شود میله C اضافه طول پیدا کند...(به تعادل می رسند!)

همانطور که در شکل 18 مشخص است، کرنش نهایی در میله D مجموع کرنش های مرحله الاستیک و پلاستیک آن است...



شکل 18

از رابطه کرنش ها می توان براحتی تغییر طولها را بدست آورد:

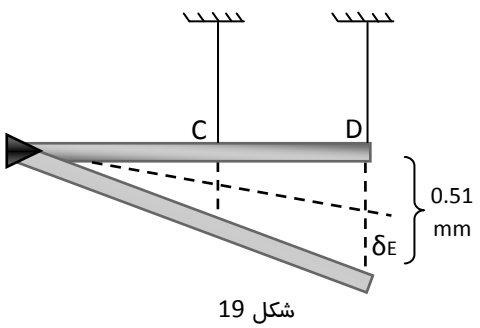
$$\delta_D = \delta_E + \delta_P = 0.51\ mm$$

برای یافتن تغییر طول پلاستیک،رابطه ریاضی نداریم اما با یافتن دو مقدار دیگر آن را بدست می آوریم:

$$\delta_E = \frac{NL}{EA} = (250 \times 10^6)\frac{30 \times 10^2}{E} = 0.375\ mm$$

$$\rightarrow \quad \delta_P = 0.51 - 0.375 = 0.135\ mm$$

δ_E همان تغییر طول میله D در لحظه رسیدن به تسلیم است. در حالی که δ_P مربوط به مرحله پلاستیک می باشد. در این قسمت است که نیروی وارد بر میله، صفر می شود. درواقع میله ابتدا 0.51 میلیمتر پایین می آید، بعد چون در حالت پلاستیک بوده و تغییرات طولی اش تابع C است، با میله C تا خط چین شکل 19 بالا می رود و در این قسمت نیروی وارد بر آن صفر شده است.



شکل 19

با توجه به شکل و یافتن تشابهات موجود ، می توان تغییر طول میله C را نیز بدست آورد:

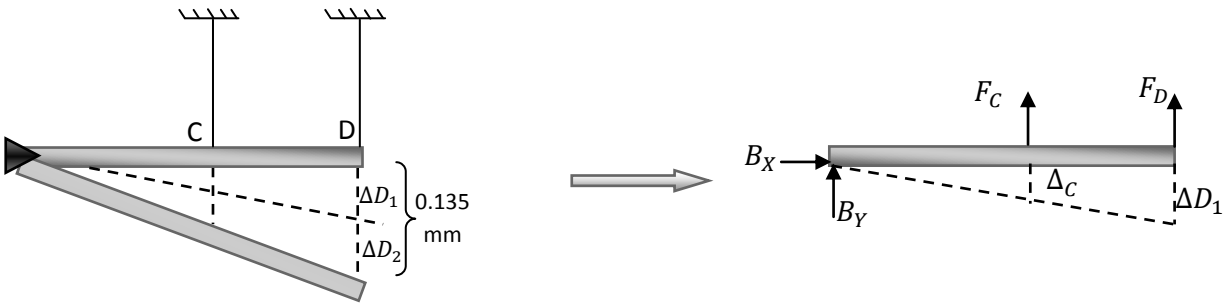
$$\delta_C = 0.6 \times 0.135 = 0.08\, mm$$

چون نیرو در میله c صفر نیست و تغییرات تنش و کرنش آن به صورت خطی می باشد،می توان از قانون هوک برای بدست آوردن نیروی وارد بر آن استفاده کرد:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \rightarrow N = \frac{\Delta L.EA}{L} = 10.76\, KN$$

- در مرحله آخر، باید گفت چون میله C تمایل دارد به حالت اولیه خود برگردد ، نیروی رو به بالا بر میله D وارد می کند . پس در نهایت باز هم D که در حالت $0.135\ mm$ افزایش طول ، ساکن شده بود ، فشرده می شود و با توجه به شکل 20 به اندازه ΔD_2 بالا میرود.(سیستم بازهم نامعین می شود)

در واقع چون طول اولیه و حالت صفر بودن نیروی وارد بر میله ها مبنای اندازه گیریهاست، می توان گفت طول میله C زیاد و طول میله D کم شده است.



شکل 20

بعد از رسم دیاگرام آزاد میله،روابط تعادل را می نویسیم(سیستم یک درجه نامعین است)

$$\sum M_B = 0 \rightarrow \quad F_C(0.6) + F_D(1) = 0$$

$$\Delta C = 0.6\, \Delta D$$

$$\Delta D_1 = 0.135 - \Delta D_2 \rightarrow \quad \frac{F_C L_C}{EA} = 0.6\left(0.135 - \frac{F_D L_D}{EA}\right)$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

(F_D تغییر شکل ΔD_2را ایجاد نموده است)

$$\rightarrow \frac{(0.3)F_C}{(200\times10^9)(2\times10^{-4})} = 0.6([0.135]\oplus\frac{(0.3)F_D}{(200\times10^9)(2\times10^{-4})})$$

چون نیرو کششی است!

در این جا از طول اولیه میله ها استفاده کردیم.چون تغییر طول نسبت به طول اولیه ناچیز بوده وقابل صرفنظرکردن است.

$$\rightarrow \begin{cases} Fc = 7.94\ KN \\ Fd = 4.76\ kN \end{cases}$$

نکته!

- ✓ به اضافه طول میله ها که دیگر به حالت اولیه باز نمی گردد،**تنش پسماند** می گویند.

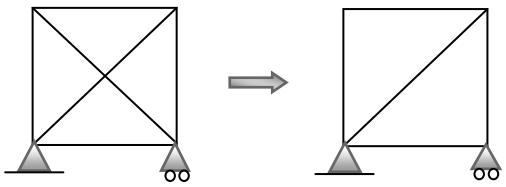
وقتی بارگذاری برای تنش های بالاتر از تنش تسلیم انجام شود،به دلیل فعل وانفعالاتی که در جسم صورت می گیرد،تنش هایی در آن باقی می ماند که چون تغییرشکلها بسیار کوچکند ،گاهی به نظر صفر می آیند. اما در واقع وقتی جسم بدلیل اعمال نیروی زیاد وارد مرحله پلاستیک می شود،پس از برداشتن کامل بار، مقداری تنش در آن باقی مانده و دیگر به طول اولیه باز نخواهد گشت.

- ✓ تعداد معادلات برای سیستم ها همیشه به تعداد کافی است.مثلا اگر سیستم 5 درجه نامعین باشد، دقیقا 5 معادله داریم.

برای درک بهتردرجات نامعینی سیستم ، خرپای شکل 21 را در نظر بگیرید:

در این خرپای نامعین اگر یکی از قطرها را برداریم، معین می شود.یعنی اگر سیستم نامعین باشد به تعداد درجات نامعینی می توانیم عضوهای آن را حذف کنیم تا معین شود.اما توجه با این نکته اهمیت

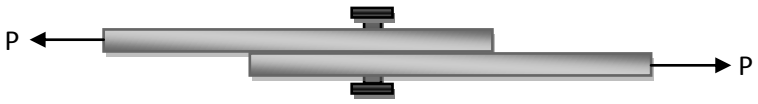
دارد که در سیستم حالی نامعین، به تعداد درجات نامعینی می توان رابطه تعادل نوشت،در حالی که در سیستمهای معین این طور نیست.



شکل21

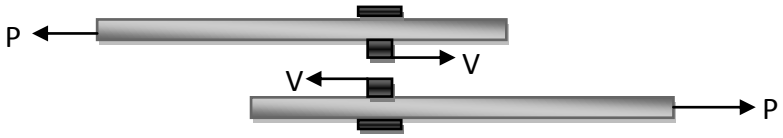
انواع اتصالات(جوش،پیچ،پرچ،میخ...)

در بسیاری از اتصالات سازه های مکانیکی از پرچ،پیچ یا جوش استفاده می شود. در این قسمت یک اتصال با پیچ بررسی می شود. فرض کنید دو میله فلزی را یا یک پیچ به هم متصل کرده و با نیروی *P* آنها را از دو سو می کشیم.(شکل 21) (نیروها در یک امتداد نیستند اما فرض می شود که اتصال تحت نیروی محوری خالص قرار دارد و از ممان حاصل به علت کوچک بودن ابعاد صرفنظر می گردد) حال اگر نیرو را افزایش دهیم چه اتفاقی می افتد؟



شکل 22-الف

در اثر اعمال بیش از اندازه نیرو، پیچ از وسط بریده می شود.برای فهم بهتر،دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر پیچ در حال بریده شدن را می کشیم،نیروهای وارده و نیز نیروهایی که امکان دارد وجود داشته باشند را در جای خود قرار می دهیم، و در نهایت معادلات تعادل را می نویسیم.



شکل 22- ب

با توجه به سطح مقطع،نیروهای عمود برآن *V* و نیروهای مماس بر آن *P* نامیده می شوند.در این جا مقطع ما پیچ است، پس عمود بر سطح آن نیروی *V* است.

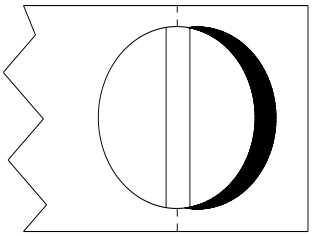
تنش برشی متوسط τ

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A}$$

V را با تعادل استاتیکی می توان محاسبه کردوA همان مساحت سطح مقطع پیچ است. در واقع نیروی v که بر سطح مقطع پیچ وارد شده است تنشی در مساحت آن ایجاد می کند که باعث بریده شدنش می شود.

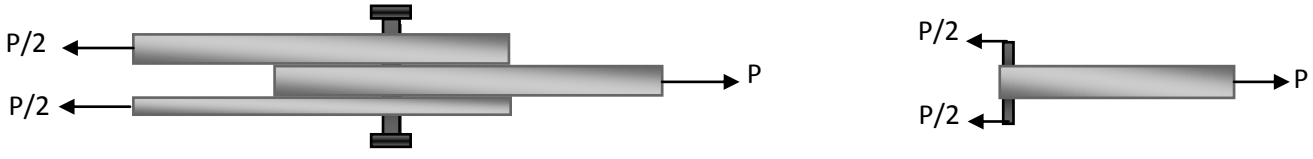
البته در صنعت برای اجسام مثلا همین پیچ، تنش برشی مجاز تعریف شده است که اگر v از آن حد بیشتر شود به تنش برشی تسلیم رسیده و بریده می شود.

درواقع باید گفت که در اثر وارد کردن نیرویP بسته به نوع پیچ حالت های مختلفی ممکن است اتفاق بیفتد.مثلا اگر از پیچی با قطر زیاد استفاده کنیم، میله از در طرف پاره می شود.یا اگر میله به اندازه کافی محکم باشد و پیچ هم بریده نشود، نیروی وارده باعث له شدن میله متناسب با مساحت سر پیچ می شود که تنش بوجود آمده **تنش لهیدگی** نامیده می شود($\frac{V}{A}$).(A مساحت سر پیچ است.)



شکل23

برای کاهش نیروی وارد بر پیچ می توان از یک میله دیگر مانند شکل 24 استفاده کرد تا نیروی P به دو جای پیچ وارد شود. اما در این حالت هم اگر نیروی وارد بر پیچ بسیار زیاد شود ، به علت تقارن و برابر بودن نیروی برشی در هر دو قسمت بریدگی ایجاد می شود.

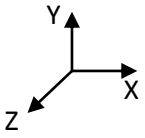


شکل 24

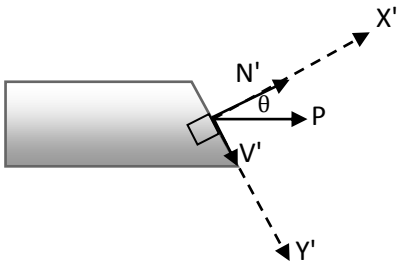
برش های مورب

در بررسی تنش ها ابتدا باید سطح را مشخص کنیم ومثل حالت بریده شدن پیچ، در سطح مورد نظر نیرویی عمود و مماس بر سطح در نظر بگیریم. حال اگر تنش ایجاد شده طوری باشد که برش در جسم به طور مورب صورت بگیرد، باز هم مثل حالتهای قبل،روند حل مسئله تغییر نمی کندو با انتخاب دستگاه مختصات مناسب تعادلها را بدست می آوریم.

بطور قراردادی دستگاه مختصات را به شکل در نظر می گیریم.



توجه کنید که هر سطح با نام محور عمود بر آن شناخته می شود! اگر یک المان کوچک از سطح را در نظر بگیریم ومحورهای مختصات را روی آن مشخص کنیم، می توان به راحتی تنش و کرنش را بدست آورد:



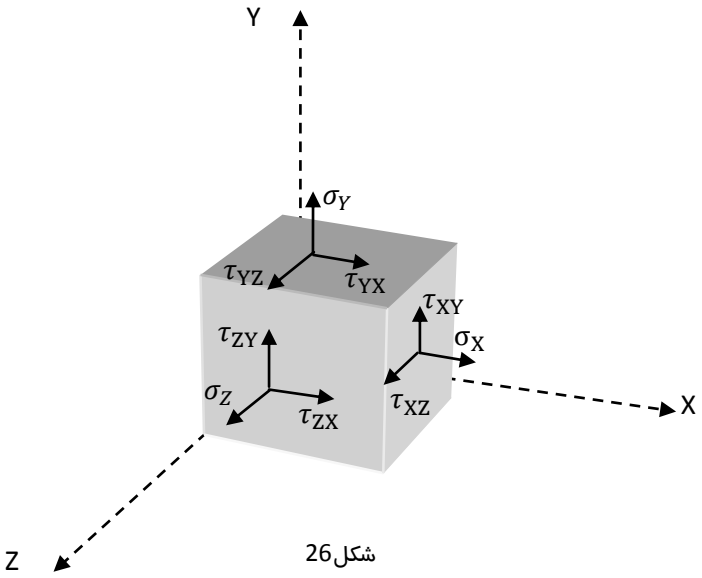
شکل 25

$$\sigma_{x'} = \frac{N'}{A'} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \sigma_x\cos^2\theta$$

در واقع تنش عمودی سطح بدست آمد.

- **نقطه فیزیکی**: هر جسم بی نهایت کوچک و دارای ابعاد را نقطه می نامیم.اگر در جایی نقطه ای در نظر می گیریم، در واقع مرکز نقطه منطبق بر آن مکان موردنظر است.

قبلا تنشها و کرنشهای عمودی ونرمال را بررسی کردیم و فرض می کردیم هیچ اثری از برش وجود ندارد.اما در حالت کلی تر،مانند شکل 26،تنشهای برشی هم ممکن است وجود داشته باشندکه آنها را با τ نشان می دهیم.



شکل26

برای هرکدام ازاین تنش ها اندیسی رادرنظرمی گیریم که مشخص کننده جهتگیری آن تنش درفضا است. برای مثال τ_{xy} نشان دهنده تنشی روی محور *x* ودر امتداد محور *y* است. (τ_{xx} رابا σ_x نشان می دهیم

زیرا همان تنش نرمال در جهت محور *x* است). البته باید توجه کرد که این تنش ها می توانند در جهت منفی محورها نیز وجود داشته باشند که در شکل نشان داده نشده اند. برای نامگذاری این تنشها و به منظور جلوگیری از تشابه نام، از علامت – یا + (بسته به جهت محور)استفاده می کنیم.مثلا $\tau_{x^-z^+}$ نشان دهنده تنشی روی محور *x–* و نیز در جهت *z+* می باشد.

حال که با تنش برشی آشنا شدیم،روابط تعادل در جهت محور *y′* از شکل 25 را می نویسیم:

$$\tau_{x'y'} = \frac{V'}{A'} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \frac{P}{A}\sin\theta.\cos\theta$$

در روابط بدست آمده می بینیم زمانی که $\theta=0$ باشد، تنش نرمالσ بیشترین مقدار خود را دارد.(یعنی وقتی که سطح مقطع عمود بر محور جسم است)و وقتی که $\theta=90$ است، تنش برابر صفر خواهد بود.

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

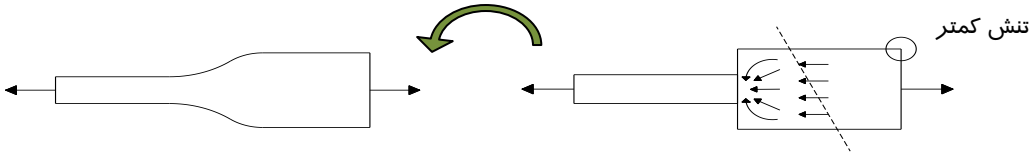
خستگی

وقتی جسم تنش هایی را تحمل می کند،در مدت زمان طولانی افزایش طول می دهد و شکل هندسی آن تغییرمی کند. هنگامی که تنشها را کم وزیاد کنیم،پدیده خستگی رخ می دهد که یعنی **تغییر مکرر در وضعیت نیرو**.با توجه به آنچه گفته شد،اگر بار در محدوده الاستیک وارد شود یا به عبارت دیگر،تنش همواره کوچکتر از تنش تسلیم باشد،در باربرداری به حالت اولیه خود باز می گردد.

بنابراین اگر این حالت در دفعات بسیار زیاد صورت بگیرد(بارگذاری و باربرداری..)جسم دچار خستگی خواهد شد. این اثر در پلها،اجزای برخی موتورها یا محور ها...زیاد دیده می شود.زیرا بطور پی در پی دچار بارگذاری و باربرداری می شوند. پدیده خستگی به تعداد این تناوب ها و تغییرات نیرو وابسته بوده و در طولانی مدت باعث تضعیف قطعات می شود.

تمرکز تنش

وقتی به جسم نیرو وارد می کنیم،در توضیع تنش، ناهمگونی دیده می شود وجریان نیرو در نقاط مرزی شدیدتر است و تنش ها در نزدیکی محل اعمال نیرو متمرکز می شوند که به آن تمرکز تنش می گویند.بطور کلی هرگاه در جسم تغییر شکل داشته باشیم، تمرکز تنش هم داریم.



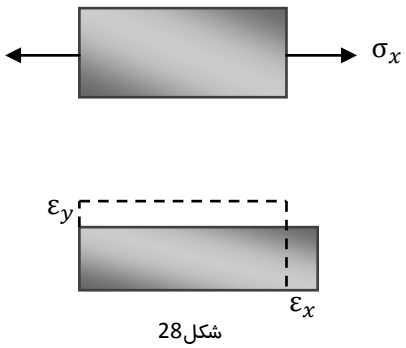
شکل27

معمولا با تغییر شکل می توان تمرکز تنش را کمتر کرده و نیرو به طور تقریبا یکنواخت به جسم وارد شود. البته در برخی اجسام نیرو هم به طور یکنواخت بر سطح مقطع آن وارد می شود ونیازی به این تغییر شکلها نیست.

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

تعمیم قانون هوک

جسمی مانند شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل28

اگرجسم فقط دارای تنشσ باشد، طولش زیاد و عرضش کم خواهد شد.به تغییر شکل در جهت محورx ، ε_x وبه تغییر شکل در جهت محور y، ε_y می گوییم.همچنین در جهت محور z هم ممکن است تغییراتی داشته باشیم که در شکل نشان داده نشده است.تنش موجود در شکل کرنشی را ایجاد کرده است که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_x = E.\varepsilon_x \;\rightarrow\; \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

که با استفاده از رابطه پواسون داریم:

$$\varepsilon_Z = \varepsilon_Y = -\nu\,\varepsilon_X = -\nu\,\frac{\sigma_X}{E}$$

به همین ترتیب اگر در سوال فقط σ_Y داشتیم(یا σ_Z) به نتایج مشابه می رسیدیم...

$$\varepsilon_X = -\nu\,\varepsilon_Y = -\nu\,\frac{\sigma_Y}{E} \qquad \varepsilon_X = -\nu\,\varepsilon_Z = -\nu\,\frac{\sigma_Z}{E}$$

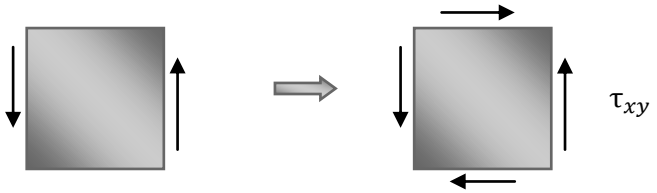
حال اگر هرسه این تنش های نرمال باهم به جسم وارد شوند،(با استفاده از اصل جمع آثار) به رابطه زیر دست خواهیم یافت:

$$\varepsilon_X = \frac{\sigma_X}{E} - \nu\,\frac{\sigma_Y}{E} - \nu\,\frac{\sigma_Z}{E} = \frac{1}{E}\left(\sigma_X - \nu\,(\sigma_Y + \sigma_Z)\right)$$ تعمیم قانون هوک

$$\rightarrow\; \varepsilon_Y = \frac{1}{E}\left(\sigma_Y - \nu\,(\sigma_X + \sigma_Z)\right) \qquad \varepsilon_Z = \frac{1}{E}\left(\sigma_Z - \nu\,(\sigma_X + \sigma_Y)\right)$$

توجه کنید که اگر تغییر دما هم داشته باشیم ، همه روابط با $\alpha L \Delta T$ جمع خواهند شد! این قانون به طول وابسته نیست، یعنی برای تمام طول ها از همین رابطه استفاده میشود. مشخص است که اگر در مسئله، کرنش یا تنش در سه راستا مجهول باشند، نمی توان از رابطه بالا استفاده کرد.

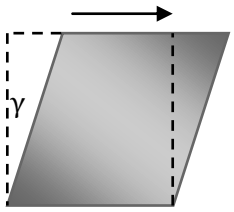
المان شکل (29) را در نظر بگیرید:



شکل29

برای اینکه جسم در تعادل باشد ، باید نیروهایی افقی نیزبه آن واردکنیم تاازگشتاور بوجود آمده جلوگیری شود. درنهایت مجموعی این چهار نیرو τ_{xy} نامیده می شود.(همانند شکل 28 که از یک جفت نیرو برای متعادل بودن σ_x استفاده کردیم)در واقع این تنش های برشی هم کرنشی ایجاد می کنند که **کرنش برشی** نام دارد و معمولا بصورت تغییر در زوایای 90 درجه شکل جسم را عوض می کند.(که البته زوایا را باید بر حسب رادیان بیان نمود)از نیروهای برشی وارده، فقط یکی است که کرنش دارد(نیروی پایین کرنشی ایجاد نمی کند،از کرنش دو نیروی جانبی به دلیل ناچیز بودن می توان صرفنظر کرد)

بنابراین تغییر وضعیتی همانند شکل (30)بوجود می آید:



شکل 30

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

چون تغییر زاویه خیلی کوچک است: $\gamma = tg(\gamma)$

برای تغییر **حجم** نیز به همین ترتیب می توان عمل کرد:

$V_0 = 1 \times 1 \times 1$

$\rightarrow \quad V = (1+\varepsilon_X)(1+\varepsilon_Y)(1+\varepsilon_Z) = V + dV \quad \rightarrow \quad V \cong 1 + \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z$

$\frac{dV}{V} = \frac{\varepsilon_X+\varepsilon_Y+\varepsilon_Z}{V} \quad \overset{V=1}{\longrightarrow} \quad \frac{dV}{V} = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z$ تغییر حجم نسبی

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

خلاصه فصل 1

تنش و کرنش:

$\sigma = \frac{P}{A}, \varepsilon = \frac{\delta}{L}$ ، در مقطع مایل: $\sigma = \frac{P}{A}(\cos\theta)^2$ ، $\tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$

با تغییر دما: $\varepsilon_T = \alpha L \Delta T \rightarrow \delta = \delta_T + \delta_P$

نسبت پواسون: $\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$ ، $\varepsilon_Z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

تعمیم قانون هوک

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_X - \nu\left(\sigma_Y + \sigma_Z\right)\right)$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\left(\sigma_Y - \nu\left(\sigma_X + \sigma_Z\right)\right)$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\left(\sigma_Z - \nu\left(\sigma_X + \sigma_Y\right)\right)$$

برای حل مسائل و یافتن تغییر طول وقتی مساحت ها متفاوتند یا شرایط یکسان نیست،بهتر است از برش های مکرر در عرض جسم استفاده کنیم.

انبساط حجمی:

$V \cong 1 + \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z \rightarrow \frac{dV}{V} = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z = e$ تغییر حجم در واحد حجم

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

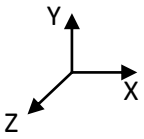
فصل دوم

"پیچش"

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

روابط پیچش

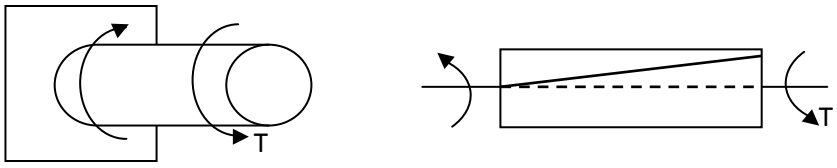
سازه ها در بسیاری از حالت ها تحت کوپل پیچشی قرار می گیرند.در واقع هرگاه جسمی را برش می زنیم، 6نیرو در فضا ایجاد می شود:Vz ,Vy ,Vx ,My ,Mx وMz .(توجه کنید که محورهای مختصات را به صورت زیر در نظر گرفته ایم:



در مسائل استاتیکی معمولا گشتاور را حول محورz در نظر می گرفتیم; اما ازین پس گشتاور حول محور x را نیز داریم که به آن گشتاور پیچشی میگوییم.

در اینجا محورهای استوانه ای یا به عبارت دیگر میله های با مقطع دایره ای رادرنظر می گیریم. وقتی المانی را می پیچانیم ، طولش کم یازیاد نمی شود و سطح مقطع آن نیزتغییر نمی کندو همواره مسطح باقی می ماند. دراین حالت گشتاورT، باعث می شود قسمت های مختلف آن نسبت به هم بلغزند و دوران یابند. پس تغییر شکل میله استوانه ای ، نسبت به زاویه مرکزی بصورت پیچشی تحت زاویه φ می باشد که زاویه پیچش نامیده می شود. **پیچش** دوران یک سطح نسبت به سطحی دیگر است.

اگر خطی موازی با یال روی استوانه رسم کنیم ، پس از اعمال گشتاور، این خط افقی به خطی مورب(شکل 1-ب)تبدیل می شود.



الف ب

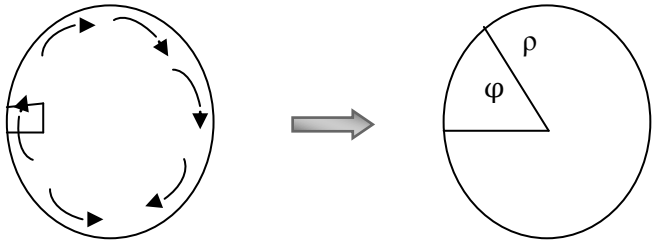
شکل(1)

حال مجددا یک میله استوانه ای بطول L وشعاع مقطع C را که یک طرف آن ثابت است،در نظر بگیرید.وقتی گشتاور پیچشی T به انتهای آن وارد می شود،مقطع آن به اندازه زاویهφ می پیچد و کرنش برشیγ در آن ظاهر می شود: (S طول قوس-C شعاع استوانه-L طول محور استوانه)

$$R = C \qquad S = C.\varphi \quad \rightarrow \gamma = \frac{C\varphi}{L}$$

پیچش،یکی از پیچیده ترین مسائل مقاومت مصالح است و برای بررسی آن،مقاطع جسم مهم است که معمولا دو دسته دایره ای(دایره و مخروط...)و غیر دایره ای می باشند.ما در این جا تمام سطح مقطع ها را دایره ای در نظر می گیریم.

کرنش برشیγ حاصل تنش برشیτ است که به المان وارد می شودو تجسم آن از پهلو مانند شکل است:



شکل(2)

که هرچه به سمت مرکز برویم چون C کوچکتر می شودو φ و l ثابت اند،γ کوچکتر شده و در حالت کلی تغییرات آن به صورت زیر است:

$$\gamma = \frac{\rho\varphi}{l}$$

در حالتی که $\varphi = c$ باشد(یا همان حالت ماکزیمم شعاع)، γ_{max} بدست می آید:

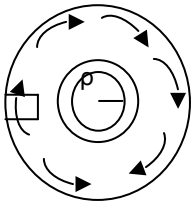
$$\frac{c\varphi}{l} = \gamma_{max} \qquad c = \rho \qquad \tau = G\gamma$$

$$\rightarrow \tau = \frac{G\gamma}{l}\rho \qquad \rightarrow \tau_{max} = \frac{c\varphi}{l}G \quad \rightarrow \tau = \frac{\rho}{C}\tau_{max}$$

زاویه پیچش

برآیند تنش ها در امتداد محور Xو Y صفر است(بدلیل تقارن)پس در امتداد محور طول گشتاوری داریم که آن را بدست می آوریم.(ما فقط با نیروهای داخلی سروکار داریم)بنابراین المان مقابل را در نظر می گیریم:

شکل(3)



اگر تنش را در مساحت المان ضرب کنیم، نیرو بدست می آید و با ضرب نیرو در بازوی المان،گشتاور بدست خواهد آمد:

$$F = \tau . A \qquad T = F . \rho$$

$$\rightarrow \mathrm{T} = \int \tau . d(A\rho) = \int \frac{\mathrm{G}\varphi}{l} \rho^2 (2\pi\rho . d\rho) \rightarrow \quad T = \frac{G\varphi 2\pi}{l} \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{G\varphi\pi c^4}{2l}$$

J برای مقاطع توخالی و توپر از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$J = 2\pi \int_{C_1}^{C_2} \rho^3 \, d\rho = \begin{cases} \dfrac{\pi c^4}{2} & \text{توپر} \\ \dfrac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) & \text{توخالی} \end{cases}$$

پس گشتاورT به صورت زیر بدست می آید:

$$T = \frac{G\varphi}{l} J$$

$$\rightarrow \varphi = \frac{Tl}{GJ}$$

تنها در طولی از میله کهJوG ثابت باشد،برقرار است

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

مثال1

زاویه پیچش را در میله زیر بدست آورید.

C=2 cm T=3 KN

L=120 cm E=200 Gpa

v=0.25 φ=?

در تمام میله GوJوT ثابت است:

$$G = \frac{E}{2(1+v)} = 80\ Gpa \quad \rightarrow \varphi = \frac{(3000)(1.2)}{80 \times 10^9 J}$$

$$J = \frac{1}{2}\pi C^4 = 25 \times 10^8\ m^4 \quad \rightarrow \varphi = 0.18\ Rad = 10^{\circ}$$

-

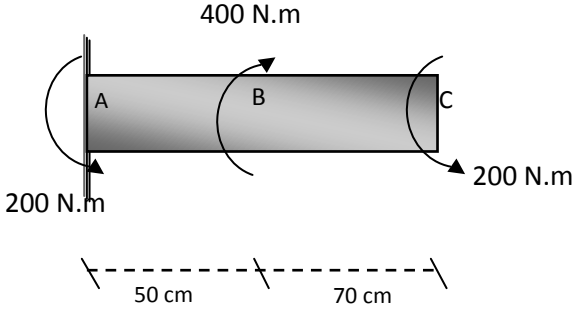
☜ در هر نقطه از سطح مقطع:

$$\begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{T.c}{J} \\ \tau = \dfrac{T\rho}{G} \end{cases}$$

-

مثال2

پیچش میله را بیابید!



C=2 cm

G=80 Gpa

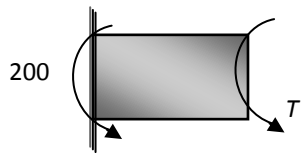
نکته!

- ✓ در میله با سطح های مختلف یاگشتاورهای متفاوت برای بدست آوردن زاویه پیچش، از رابطه زیر استفاده می کنیم که در آن T_i،L_i،J_i برای هر قسمت میله می باشند:

$$\varphi = \sum \frac{T_i L_i}{G J_i}$$

- ✓ برای گشتاور داخلی،جهت پادساعتگرد: مثبت وجهت ساعتگرد: منفی می باشد.جهت زوایای پیچش هم مانند گشتاور داخلی است.

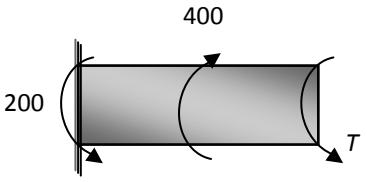
بنابراین برای حل مسئله،آن را به چند قسمت تقسیم می کنیم:



T=-200 N.m

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B}$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{-200 \times 50 \times 10^{-2}}{(80 \times 10^{9})(25 \times 10^{-8})} = -0.005 \text{ Rad}$$



T=200 N.m

$$\varphi_{C-B} = \frac{200 \times 70 \times 10^{-2}}{(80 \times 10^{9})(25 \times 10^{-8})} = -0.007 \text{ Rad}$$

$$\rightarrow \ \varphi_{C-A} = -0.005 + 0.007 = 0.002 \text{ Rad}$$

دراین مسئله فقط گشتاور داخلی مدنظر است.اگر بخواهیم بدانیم که τ_{max} کجاست!باید دقت کنیم که φ از AB تا BC مقدار برابر ولی با جهت مخالف دارد(که جهتش مهم نیست).پس اندازه T در تمام نقاط 200 N.m است.پس τ_{max} در همه جا برابر است.

بطور کلی برای بدست آوردن τ_{max}باید در هر قسمت آن را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم.

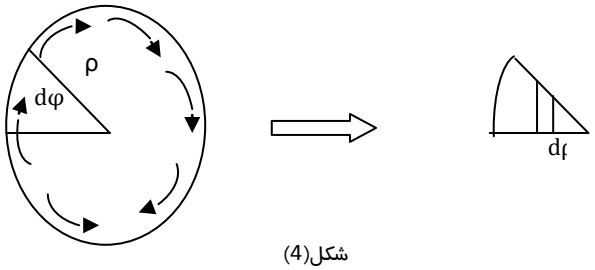
زاویه پیچش را با فرمول گفته شده برای محاسبه آن، زمانی می توانیم بدست آوریم که T وJ وG برای آن

طول از المان یکسان باشند. حال اگر $l=1\ m$ باشد(یعنی برای واحد طول)پیچش نسبی بدست می آیدکه ازآن زمانی میتوانیم استفاده کنیم که برای آن طول از سطح،θ ثابت باشد.

$$\theta = \frac{T}{GJ}$$ پیچش نسبی

$$\varphi = \theta . l$$

$$\gamma = \frac{c\varphi}{l}$$



شکل(4)

وقتی از مرکز بیرون می رویم، c کمتر شده و به جای آن ρ قرار می دهیم وهمچنین یک تنش برشی حتما داریم که عمود بر شعاع است. برآیند این تنشها همان نیروی داخلی است.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \dfrac{\rho\varphi}{l}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \tau = G\gamma = \frac{G\rho\varphi}{l}$$

باتوجه به المان نشان داده شده در شکل-4 می توان گشتاور را محاسبه نمود:

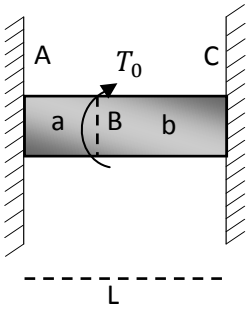
$$T = F.\rho = (\tau . A)\rho$$

$$T = \int \rho d\varphi d\rho \left(\frac{G\rho\varphi}{l}\rho\right) = \frac{G\varphi}{l}\int_0^c \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\rho d\varphi = \frac{2\pi G\varphi}{l}\int_0^c \rho^3\, d\rho$$

$$\rightarrow T = \frac{\pi}{2}\frac{G\varphi}{l}c^4 = \frac{G\varphi J}{l} \rightarrow \quad \varphi = \frac{Tl}{GJ}$$

$$\begin{cases}\theta = \dfrac{T}{GJ} \\ \tau = \dfrac{T\rho}{J}\end{cases}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

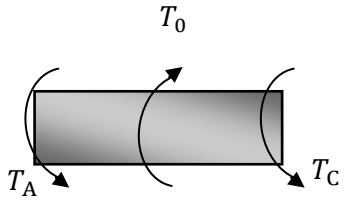


مثال3

تنش ماکزیمم را بدست آورید.

(C=2 cm G=80 Gpa)

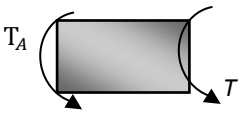
برای رسم دیاگرام آزاد، سطح را آزاد فرض کرده، نیروهای خارجی وارد شده را مشخص می کنیم و سپس سراغ نیروهایی می رویم که از برش سطح تکیه گاهی ایجاد شده اند.



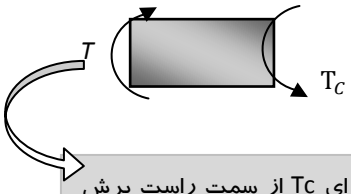
$$\sum M_X = 0 \rightarrow T_A - T_0 + T_C = 0 \rightarrow \quad T_A + T_C = T_0$$

نقاط A و C دورانی ندارند.پس در این میله زاویه پیچش مقطع A وC صفر است. با توجه به معادله بدست آمده(که یک درجه نامعین است) از اصل سازگاری تغییر شکلها استفاده می کنیم که در اینجا ،تغییر شکل بصورت زوایای پیچش می باشد:

$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B}$ $\varphi_{C-A} = 0$ حتما باید برش بزنیم



جهت Tداخلی را نمی دانیم اما به طور قراردادی در جهت مثبت می گذاریم.



برای Tc از سمت راست برش زده ایم. پس باید گشتاور را در خلاف جهت سمت چپ قرار دهیم

$$\rightarrow \begin{cases} T = -T_A \\ T = T_C \end{cases} \quad \rightarrow \quad \varphi_{B-A} = \frac{-T_A a}{GJ}$$

$$\varphi_{C-B}=\frac{T_C\,b}{GJ}\ \rightarrow\ \frac{1}{GJ}(-aT_A+bT_B)=0\qquad\rightarrow T_A=\frac{a}{b}T_C$$

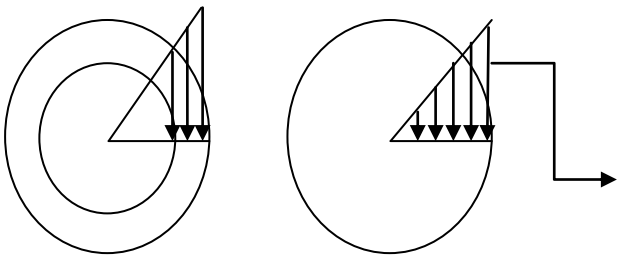
$$\rightarrow\begin{cases}T_A=T\dfrac{b}{l}\\ T_C=T\dfrac{a}{l}\end{cases}$$

طبق فرمول $\tau_{max}=\frac{TC}{J}$ برای بدست آوردن تنش ماکزیمم، باید ببینیم گشتاور در چه محلی بیشترین است که با توجه به مقادیر بدست آمده،T(A) بیشتر است:

$$\tau_{max}=\frac{T_{max}c}{J}=\frac{T_AC}{J}=\frac{Tbc}{lJ}$$

-

❖ با وزنهای برابر می توان لوله های توپرو توخالی رامقایسه کرد. معمولا مقاطعی که برای پیچش طراحی می شوند، توخالی هستند.وقتی لوله توپراست، نیروی واردبرآن صرف قسمتهای داخلی که حرکت کمتری دارند نیزمی شود...پس در لوله توخالی ،مناسبترین و بیشترین بهره برداری با همان نیرو را خواهیم داشت. در لوله های توخالی J (یا همان ممان قطبی مقطع)بیشتر است.



τ_{max}،تنش برشی ماکزیمم،روی خارجی ترین سطح وارد می شود

شکل(5)

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

توان

برای بدست آوردن گشتاور پیچشی یک محور، می توان از رابطه زیر استفاده کرد،که در آن P توان،T گشتاور پیچشی، و f فرکانس(دور بر ثانیه) می باشد.

$$P = 2\pi f T$$

مقدار $2\pi f$یا همان زاویه دوران است. رابطه فوق زمانی برقراراست که سرعت زاویه ای ثابت بوده ودر سیستم، تعادل داشته باشیم.بنابراین کار انجام شده توسط گشتاور در واحد زمان(1ثانیه)همان توان می شود.

مثال5

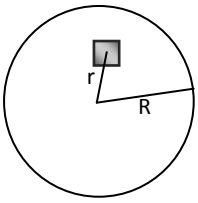
برای انتقال توان 100 Kw با چرخش20Hz ،برای اینکه تنش مجاز از 60 Mpa تجاوز نکند،چه ضخامتی(t) مورد نیاز است؟

$$\mathrm{P} = 100{,}000\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 2\pi(20)\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{T} = 796\mathrm{N.m}$$

$$\sigma = \frac{T\rho}{J} = \frac{796\rho}{J} \rightarrow 60 \times 10^{6} = \frac{796(2.5 \times 10^{-2})}{\frac{\pi}{2}(0.025^{4} - (0.025 - t)^{4})} \rightarrow t \geq 0.44\ cm$$

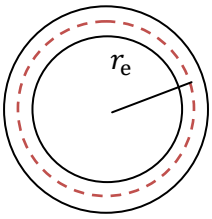
نکته!

☜ J ممان قطبی مقطع است.وقتی میله توپر باشد، با المان گیری در کل سطح مقطع، و با توجه به شعاع(r)، J را بدست می آوریم که از رابطه زیر محاسبه می شود:



شکل 6

$$J = \int r^2 dA$$



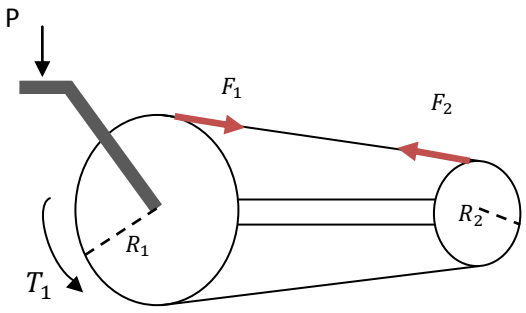
شکل 7

اما وقتی لوله توخالی بوده ،و ضخامت آن بسیار کوچک باشد، می توان به طور تقریبی شعاعی را به آن نسبت داد که در واقع، بین دو شعاع اولیه یا وسط ضخامت لوله است.این شعاع را با r_e نشان می دهیم.

$$J = 2\pi t r_e^2$$

سیستمی مثل شکل(8) در اجسامی همچون دوچرخه دیده می شود که گشتاور T در اثر وارد آمدن نیروی P به رکاب بوجود می آید و از طریق زنجیر به چرخ دیگر منتقل می شود.

شکل(8)



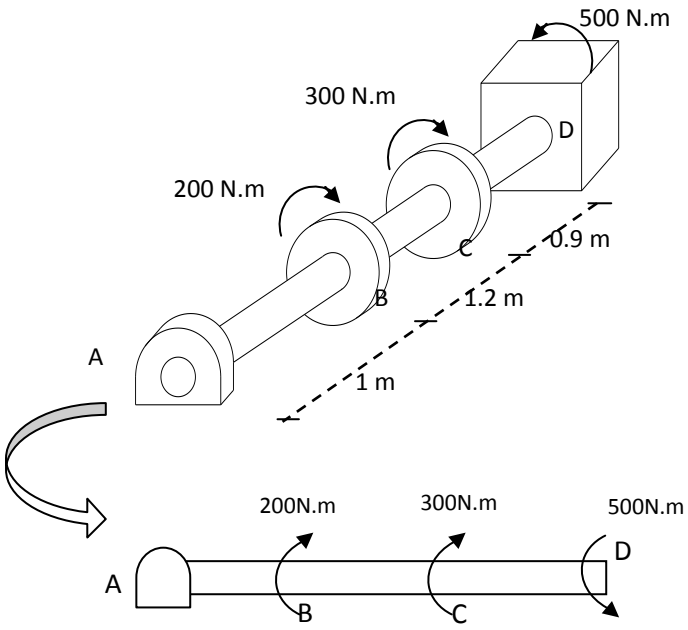
همانطور که ازشکل پیداست ، نیرویF_2 به زنجیرمتصل به چرخ کوچک وارد می شود که هم اندازه F_1 میباشد و در اثر گشتاور T ایجاد شده است.

$$F_1 = F_2 \rightarrow \frac{T_1}{R_1} = \frac{T_2}{R_2} \rightarrow T_2 = \frac{R_2}{R_1} T_1$$

بنابراین وقتی شعاع کوچکتر باشد،گشتاور کمتری وارد می شود.

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

مثال6



موتوری با سرعت ثابت می چرخد و گشتاور 500N.m را به میله وارد می کند.زاویه پیچشB-C و B-D را بدست آورید.

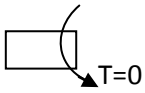
G=27Gpa d_1=40mm

d_2=44mm

d_3=48mm

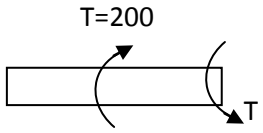
ابتدا دیاگرام آزاد جسم را رسم می کنیم،و بعد روابط تعادلی را می نویسیم. البته با توجه به شکل بهتر است ازچند برش برای هر قسمت مجزا استفاده کنیم:

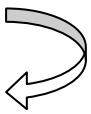
1. برش اول بین B-A



در این فاصله،گشتاور برابر صفر است.پس دوران نداریم.

2. برش دوم بینB-C





T=200N.m

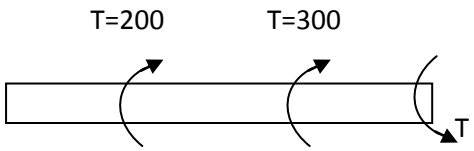
$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{200(1.2)}{27 \times 10^9 \times J}$$

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi(0.022^4)}{2} = 3.68 \times 10^{-7} m^4$$

$$\rightarrow \varphi = 0.024\ Rad$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

3. برش سوم بینC-D



T=500N.m

$$\varphi = \frac{500 \times 0.9}{27 \times 10^9 \times \mathrm{J}}$$

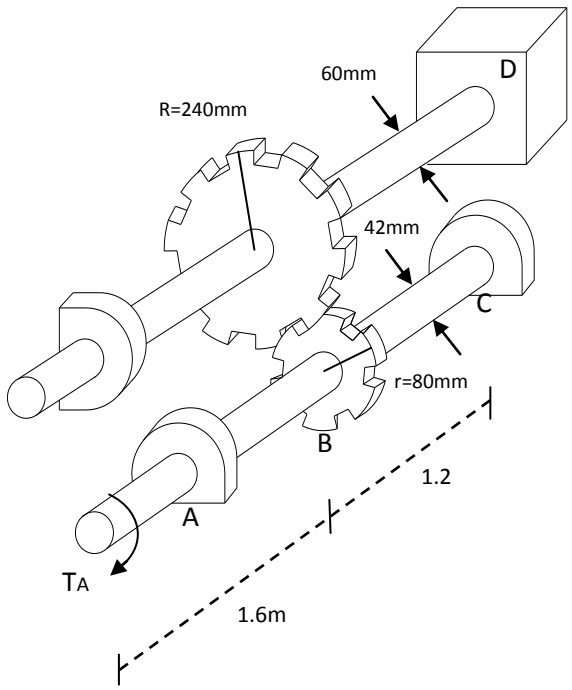
$$J = \frac{\pi R^4}{2} = 5.21 \times 10^{-7} m^4 \qquad \rightarrow \varphi = 0.032\ Rad$$

$$\rightarrow \varphi_{D-B} = 0.024 + 0.032 = 0.056 Rad = 3.2^{\circ}$$

-

مثال7

با توجه به شکل،انتهای A چقدر می چرخد؟

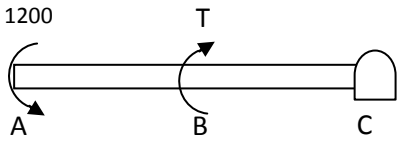


$T_A = 1200 N.m$

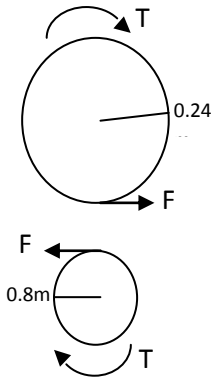
G=77.2Gpa

بتدا دیاگرام آزاد میله AC را رسم می کنیم:

T=1200N.m



نیرویی که چرخ دنده پایینی به چرخ دنده بالایی وارد می کند با F نشان میدهیم:



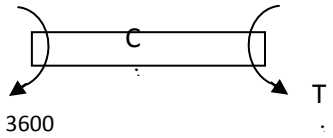
$$T = F.r \rightarrow \quad 1200 = F \times (0.8) \qquad \rightarrow F = 15KN$$

$$\rightarrow T_C = F.R = 15000(0.24) = 3600N.m$$

بنابراین دوران چرخ ها عکس هم است، اما گشتاور آنها هم جهت با یکدیگر می باشد.

حال با مشخص شدن گشتاور هر قسمت، با ایجاد برش در میله ها،زاویه پیچش آنها را بدست می آوریم:

- برش اول بین C-D



T=3600N.m

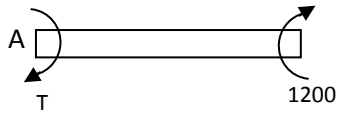
$$\varphi_{C-D} = \frac{TL}{GJ} = \frac{3600(1.2)}{77.2 \times 10^9 J}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.03)^4 = 1.27 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\rightarrow \varphi_{C-D} = 0.044\ rad$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

- برش دوم بینA-B



T=1200N.m

$$\varphi_{A-B} = \frac{TL}{GJ} = \frac{1200(1.6)}{77.2 \times 10^9 J}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.021)^4 = 3.05 \times 10^{-7}\ m^4$$

$$\rightarrow \varphi_{A-B} = 0.0815\, rad$$

از آنجا که انتهای *D* ثابت است، چرخش چرخ دنده بالایی به نسبت شعاع ها باعث چرخش چرخ دنده پایینی میشود(بطوریکه کمان های آنها برابرند)

$S_1 = S_2$ طول کمانها

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$$

$$\varphi_2 = \varphi_B = \frac{240}{80}(0.044) = 3 \times 0.044 = 0.132 \text{ rad}$$

در نهایت زاویه دوران انتهای *A* نیز بدست می آید:

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{A/B}$$

$$\rightarrow \varphi_A = 0.132 + 0.0815 = 0.217\, rad$$

که این مقدار دوران *A* ناشی از پیچش میله *AC* و چرخش چرخ دنده است.

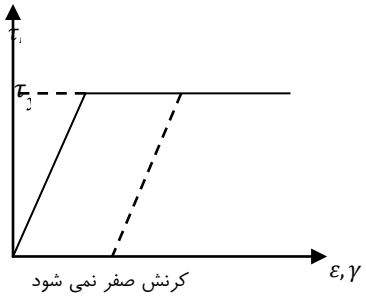
تغییر شکل های پلاستیک

در سیستمهای نامعین، تغییر شکل ها به هم وابسته اند و باید با یکدیگر هماهنگ باشند. حتی وقتی که جسم در اثر اعمال نیرو به حالت پلاستیک در می آید، باز هم بدون مراجعه به تغییر شکل ها، نمی توان از روابط تعادل، مجهولات را بدست آورد.

وقتی گشتاور پیچشی زیاد می شود،تنش هم افزایش یافته و به τ_y می رسد.

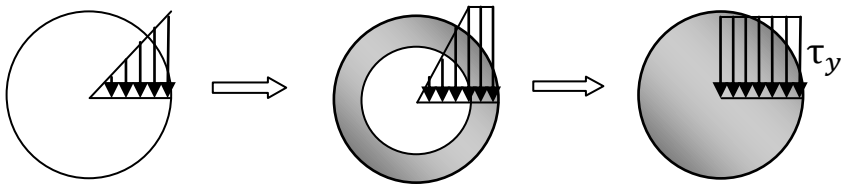
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$$\rightarrow \ T_y = \frac{J}{C}\tau_y$$



شکل 9

با افزایش گشتاور، ناحیه ای که وارد پلاستیک شده است،گسترش می یابد تا درنهایت تمام میله،مومسان شود:

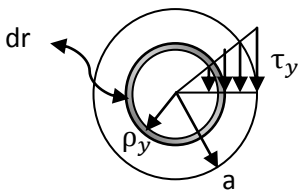


شکل(10)

برای بدست آوردن T_y یعنی گشتاوردر لحظه وقوع تسلیم(الاستیک) المان شکل11 را در نظر می گیریم:

$$T_y = \int_0^a \tau(2\pi r dr)r$$

$$\tau = \frac{r}{a}\tau_y \quad \rightarrow T_y = \int_0^{\rho_y} \frac{2\pi r^3 dr}{a}\tau_y = \frac{2\pi\rho_y^3}{4}\tau_y = \frac{\pi}{2}\rho_y^3\,\tau_y = T_E$$



شکل 11

بنابراین،وقتی گشتاور به مقدار T_y برسد،تسلیم شروع می شود تا جایی که به تنش نهایی برسیم:

$$T_P = \int_{\rho_y}^{a} (2\pi r dr)\tau_y(r) = \frac{2}{3}\pi(a^3 - \rho_y^3)\tau_y$$

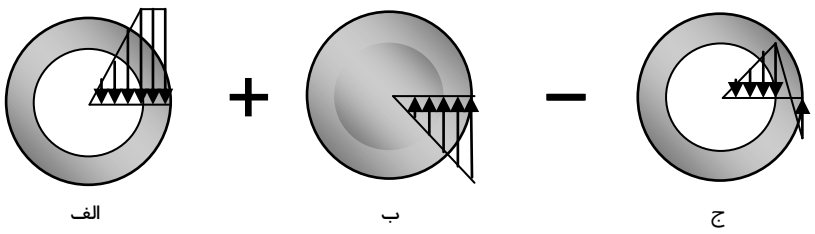
حال گشتاور کل را که مجموع حالات پلاستیک و الاستیک جسم است،بدست می آوریم:

$$T = T_P + T_E = (\frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{\pi}{6}\rho_y^3)\tau_y$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{4}{3}T_y(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_y^3}{a^3})$$

در حالت کلی وقتی قسمتی از المان در حالت پلاستیک باشد و بقیه در حالت الاستیک، هنگام باربرداری، محدوده الاستیک مایل به بازگشت به حالت اولیه خود است.($\varepsilon,\sigma=0$)اما وقتی به حدی از تراکم رسیدند،دو محدوده با یکدیگر درگیر می شوند زیرا ناحیه پلاستیک دارای تنش پسماند است.

توجه کنید که هنگام باربرداری،به جای حذف کردن گشتاورT، گشتاور دیگری در خلاف جهت آن بر المان وارد می کنیم تا برآیندشان صفر باشد.



شکل(12)

در این جا دو دسته تنش داریم

1.تنش های ناشی از گشتاور پیچشی اولیهT

2.تنش های ناشی از گشتاور T' مخالف باT برای باربرداری

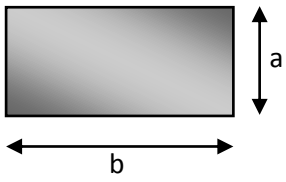
که در حالت اول رفتاری در دو محدوده الاستیک و پلاستیک داریم ودر حالت دوم رفتاری خطی.حال با بررسی جداگانه تنش های هر مرحله، می توان آنها را جمع جبری نمود.در نهایت،تنش هایی که بر روی المان باقی می مانند،تنش های پسماند پیچشی هستند که باعث می شوند زاویه پیچش به صفر نرسد.

پیچش مقاطع مستطیل شکل

☜ تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل شکل،از رابطه زیر بدست می آید:

$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 ab^2}$$

شکل 13



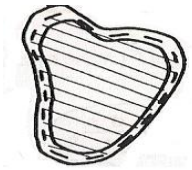
مقادیر C_1 و C_2 بستگی به مقدار $\frac{a}{b}$ دارند. اما در هر حالت، از $\frac{1}{3}$ بیشتر نمی شوند.

a= ضلع بزرگتر b=ضلع کوچکتر

در مقطع نازک و باز زاویه پیچش به این ترتیب محاسبه می شود:

$$\varphi = \frac{TL}{C_2 ab^3 G}$$

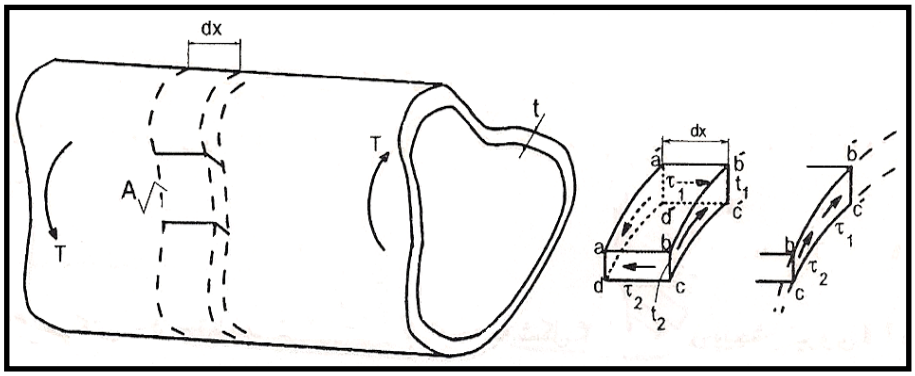
پیچش مقاطع جدار نازک



شکل 14

مقاطعی که در شکل دیده می شود،از نوع جدار نازک می باشند که در آنها،ضخامت جدار را با t نشان می دهیم.به دلیل اینکه،t بسیار کوچک است، معمولا در محاسبات به طور تقریبی قسمت میانی جدار را برای تعیین مساحت داخلی درنظر می گیرند و آن را باAm نشان می دهند.

برای بدست آوردن تنش در مقطع جدار نازک، المان کوچکی از مقطع به طول dx درنظر می گیریم.به طوری که ضخامت لبه های آن t1 وt2 باشد. روی سطح تنش های برشی τ وجود دارد.



شکل 15

حال با توجه به نیروهای موجود روی سطوح a´b´c´d´ و abcd که به ترتیب f1 و f2 می باشند،تعادل استاتیکی را می نویسیم:

$$\sum F_X = 0 \rightarrow dF_1 = dF_2$$

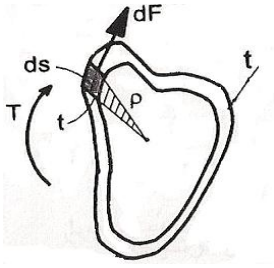
$$\tau_1 t_1 dx - \tau_2 t_2 dx = 0 \rightarrow \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

که در حالت کلی برای همه المان های روی سطح داریم:

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \cdots = \tau_n t_n = f$$

در مقاطع جدا نازک بسته f مقداری ثابت است و **جریان تنش** نامیده می شود.بنابراین هرچه ضخامت بیشتر شود،تنش کمتر می شود و بالعکس.

پس می توان رابطه ای بین تنش برشی و گشتاور پیچشی بدست آورد.برای المان سطحی dA به طول قوس ds و ضخامت t نیروی F را حساب می کنیم:



شکل 16

$$dA = t \times ds \qquad F = \tau . dA \quad \rightarrow \quad F = \tau \times t \times ds$$

$$dT = \rho F \rightarrow dT = (\tau t) ds . \rho$$

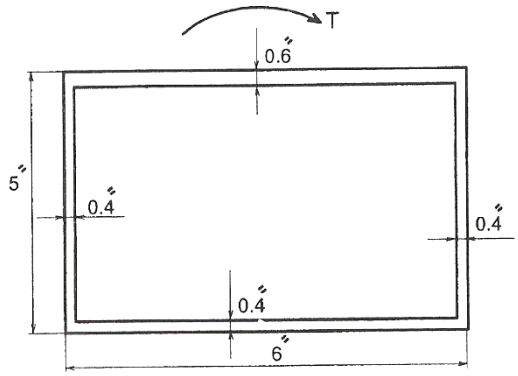
$$dT = F \rho ds \qquad \rho ds = 2\left(\text{مساحت مثلث}\right) = 2A_m$$

$$\rightarrow T = F(2A_m) \rightarrow F = \frac{T}{2A_m}$$

$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

مثال 8



به یک میله با مقطع مستطیل شکل جدار نازک گشتاور پیچشی $T = 18 \times 10^4 lb - in$ وارد می شود.تنش در قسمتهای مختلف را بدست آورید.($G=10^4 Psi$)

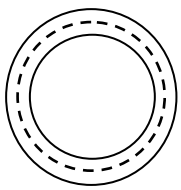
$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \qquad A_m = (6-0.4)(5-0.6) = 24.64$$

$$\tau_1 = \frac{180000}{2 \times 24.64 \times 0.6} = 6088 psi$$

$$\tau_1 = \frac{180000}{2 \times 24.64 \times 0.4} = 9131 psi$$

مثال9

یک لوله با قطر بیرونی 10cm وجداره t=3cm موجود است.اگر تنش مجاز آن 80Mpa باشد،بیشترین گشتاوری را که می توان به لوله وارد کرد،بدست آورید.اگر در لوله جداری ایجاد کنیم،مقاومتش چه تغییری می کند؟



$$A_{\mathrm{M}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{D}^2 = \frac{\pi \times 10 \times 10^{-3}}{4} = 25\pi \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$$

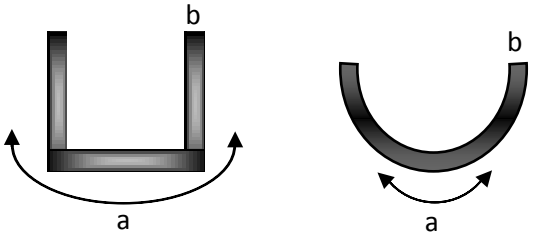
$$f = \tau.t = 80 \times 10^6 (3 \times 10^{-3}) = 24 \times 10^4$$

$$\rightarrow T = f(2A_M) = 2(25\pi \times 10^{-4} m^2) \times 24 \times 10^4 = 1200\pi \cong 3700 N.m$$

اگر در مسئله، چند مقطع مختلف بکار رفته باشد،داریم:

$$c = \sum \frac{a}{b}$$

بنابراین اگر مقاطعی مانند شکل های زیر داشتیم، برای هر قسمت جداشدنی، a و b را یافته، نسبت آنها را محاسبه می کنیم و از آن طریق،ضرایب c را هم بدست می آوریم.



شکل 17

توجه کنید که اگر در مقاطع،حتی به اندازه ε درز یا جداری وجود داشته باشد،آن مقطع را ًباز ًدر نظر میگیریم.حال ادامه حل مسئله در حالتی که لوله، جدار نازک باز است:

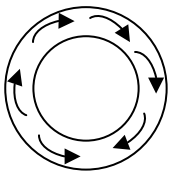
$$a = 2\pi R = 10\pi$$

$$\tau_{max} = \frac{T'}{\frac{1}{3}ab^2} \rightarrow \quad T' = (80 \times 10^6)\frac{1}{3}(10\pi)(0.003)^2 \times 10^{-2}$$

$$\rightarrow T' = 24\pi = 73 \ N.m$$

$$\rightarrow \frac{T}{T'} = \frac{3700}{73} \approx 50$$

بنابراین مقاومت لوله افت می کند!در نتیجه مقاطع جدار نازک باز در پیچش(نسبت به مقاطع جدار نازک بسته)بسیار ضعیف هستند.پس این نکته که لوله ها درز دار باشند یا نه در انتخاب آنها بسیار مهم است.حتی لوله ای که درز آن با جوش بسته شده باشد،تاحدی درز دار محسوب می شود.این تفاوت به دلیل از بین رفتن جریان برش در مقاطع باز است.تنش ها همیشه در مسیری چرخش دارند که وقتی مقطع باز می شود، این جریان بهم می ریزد و قطع می شود.



در مقاطع باز،گشتاورهای ایجاد شده در اثر نیروهای ناشی از تنشها،در دو جهت مخالف هم ایجاد می شوند و برآیندشان،بسیار ضعیف است.مقاطع جدار نازک بسته و بالاخص مقاطع از نوع دایره ای،برای تحمل گشتاورها،بهترین مقاطع می باشند.

زاویه پیچش مقاطع جدار نازک

- **مقاطع مستطیلی**

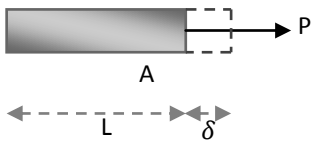
$$\varphi = \frac{TL}{C_2 ab^3 G}$$

زاویه پیش را تنها برای مقاطهی می توانیم حساب کنیم که در آنها گشتاور وسایر مشخصات مقطع، ثابت باشند.بنابراین فرمول بالا،درواقع رابطه ای بین زاویه پیچش و طول میله است.

☜ بحثی درباره انرژی

انرژی مکانیکی شامل انرژی های جنبشی و پتانسیل می باشد که در مقاومت مصالح عموما با انرژی از نوع پتانسیل سروکار داریم.

به ازای هر نیروی خارجی که به جسم وارد می شود،تغییر شکل هایی در آن ایجاد می شود که می گوییم روی آن جسم،کار انجام شده است. این کار به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می شود به طوری که با برداشتن آن نیرو(یا صفر کردن کار)انرژی ذخیره شده نیز تخلیه می گردد.

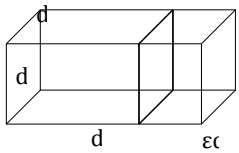


شکل 18

مثلا هنگامی که نیرویی کششی به میله وارد می کنیم،تغییر طولی در آن مشاهده می شود وبه ازای آنها کار داخلی در جسم دیده می شود.پس نیروی p متناسب با δ کار انجام داده است.

اگر جسم را متشکل از بی نهایت مکعب در نظر بگیریم،تنش موثر بدست می آید:

$$\sigma = \frac{p}{A}$$



شکل 19

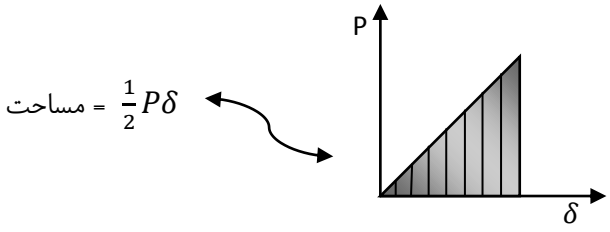
المان مورد نظر در جهت X افزایش طول دارد:

$$\delta_x = \varepsilon dx$$

$$\rightarrow \text{کار} = F.d = (\sigma dydz)\varepsilon dx$$

بنابراین انرژی کرنشی در کل میله بدست می آید:

$$u = \frac{1}{2}\int \sigma_x \varepsilon_x dxdydz$$



شکل 20

$$u = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma_x^2}{E} dxdydz = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}\int dxdydz = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}(AL)$$

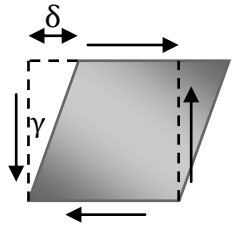
$$\rightarrow u = \frac{1}{2}\frac{P^2}{A^2E}(AL) = \frac{1}{2}P\delta$$

پس با برابر قرار دادن انرژی کرنشی با کار نیروها،تغییر طول میله را بدست می آوریم:

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

حال سراغ یافتن زاویه پیچش می رویم:

از آنجایی که کار،نیرو ضربدر جابجایی است،پس سه تنش پایین کاری انجام نمی دهندودر میله های تحت پیچش،فقط تنش برشی τ_{xy} و کرنش برشی γ_{xy} مطرح است. اگر مربع را با ضلع واحد در نظر بگیریم:



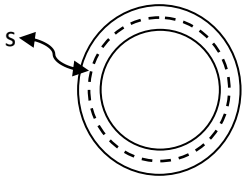
شکل 21

$$\gamma = tg\theta = \frac{\delta}{1} \rightarrow \gamma = \delta$$

پس کاری که بر اثر تنش برشی برروی یک مکعب انجام می شود بدست می آید:

$$du = \frac{1}{2}\tau dxdz(\gamma dy) = \frac{1}{2}\tau\gamma dxdydz = \frac{1}{2G}\tau^2(dxdydz)$$

$$\rightarrow u = \frac{l}{2G}\int \tau^2 dydz = \frac{f^2 l}{2G}\int \frac{1}{t^2} dydz = \frac{f^2 l}{2G}\int \frac{tds}{t^2} = \frac{T^2}{8A_m G}\int \frac{ds}{t}$$



شکل 22

$\rightarrow \varphi = \frac{Tl(L_M)}{4A_M^2 Gt}$

L_M =طول محیط دایره

(اگر t ثابت باشد،رابطه بالا درست می باشد)

کار گشتاور=$T \times \varphi$

$u = \frac{1}{2} T \times \varphi$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

خلاصه فصل 2

پیچش:

$$\gamma = \frac{\rho\varphi}{l} \rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

$$\tau = G\gamma \rightarrow \tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max} \qquad \tau = \frac{T\rho}{GJ} \ , \ J = \frac{\pi C^4}{2}$$

$\varphi = \frac{TL}{GJ}$:زاویه پیچش فقط وقتی که میله همگن باشد و سطح مقطع آن یکنواخت

$\varphi = \sum \frac{T_i L_i}{GJ_i}$:در برش های مکرر

وقتی هر دو انتهای میله ای بچرخند،زاویه پیچش،زاویه چرخش نسبی آنها خواهد بود.

$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$:در چرخ دنده ها

$P=T\omega \rightarrow T = \frac{P}{2\pi f}$:توان

تغییر شکل مومسان:

$T = \frac{4}{3}T_y(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_y^3}{a^3})$:رابطه گشتاور و زاویه پیچش در شروع تسلیم

وقتی ρ_Y صفر شود تمام جسم مومسان شده است.

φ پیچش دائم $\frac{\rho_Y}{C} = \frac{\varphi_Y}{\varphi}$ $\qquad \varphi_P = \varphi - \varphi'$:(در بارگذاری اولیه) φ' ,در باربرداری

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \qquad T = \frac{4}{3}T_y(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_y^3}{a^3})$$

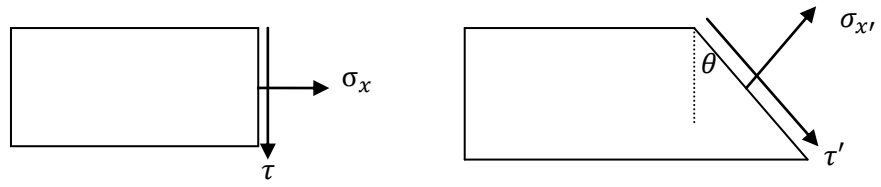
عضو های غیر دایره ای:

مقاطع باز:
$$\begin{cases} \tau = \dfrac{T}{C_1 ab^2} \\ \varphi = \dfrac{TL}{C_2 ab^3 G} \end{cases}$$

مقاطع جدار نازک $\tau = \frac{T}{2tA_m}$, $\varphi = \frac{Tl(L_M)}{4A_M^2 Gt}$

تحلیل تنش ها در صفحه با دایره مور

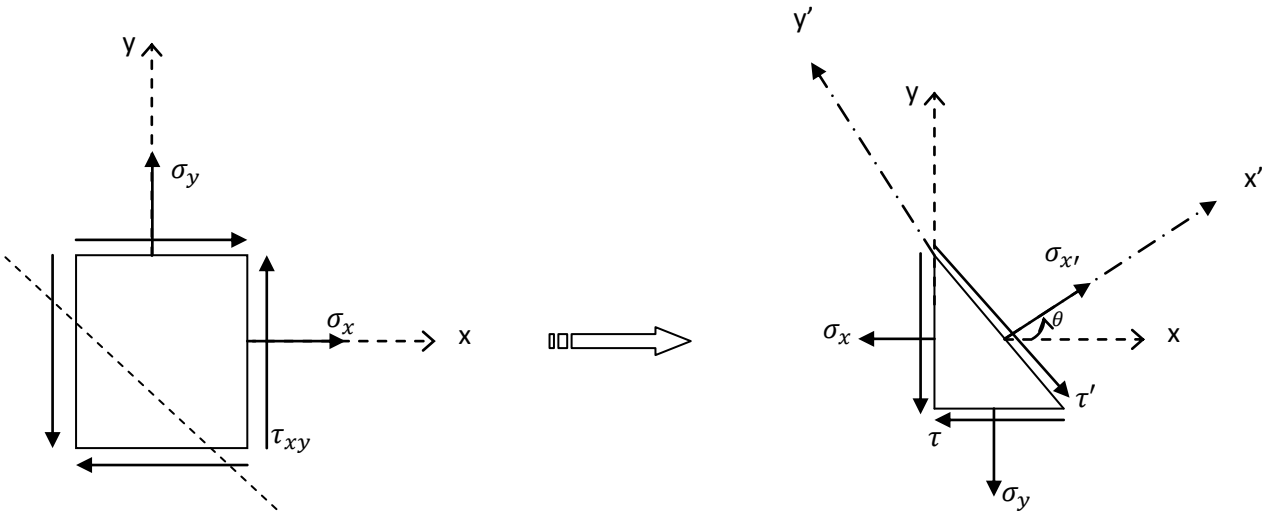
در طراحی ها باید به یک نکته همواره دقت کرد و آن اینکه تنش در هر سطحی که ماکزیمم است،نباید از حد مجاز بیشتر شود.بین تنش ها در سطوح مختلف روابطی برقرار است که به کمک آنها می توان تنش را در هر سطحی محاسبه نمود.



$$\sigma_{x'} = \sigma_x.cos^2\theta \xrightarrow{if} cos\theta = 1 \longrightarrow \theta = 0 \qquad \sigma'_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\tau = \frac{\tau'}{A} = \frac{P.Sin\theta}{\frac{A}{cos\theta}} = \frac{P}{A} sin\theta.cos\theta \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \qquad \tau'_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

- **بررسی تنش های مسطحه (*Plain Stress*)**



Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

معادلات تعادل را در راستای محورها می نویسیم:

$+\nearrow \sum F_{X'} = 0$

$$\sigma_{X'}.A - \sigma_X.(A cos\theta)cos\theta - \sigma_y.(A sin\theta)sin\theta - \tau_{xy}(A cos\theta)sin\theta - \tau_{xy}.(A sin\theta)cos\theta = 0$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{X'} = \sigma_X\, cos^2\theta + \sigma_y sin^2\theta + 2\tau'_{xy} sin\theta cos\theta$$

$+\swarrow \sum F_{y'} = 0$

$$\tau'_A - \sigma_X.(A cos\theta)sin\theta + \sigma_y.(A sin\theta)cos\theta + \tau_{xy}(A cos\theta)cos\theta - \tau_{xy}.(A sin\theta)sin\theta = 0$$

$$\rightarrow \quad \tau' = (\sigma_X - \sigma_y) sin\theta cos\theta + \tau_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

حال رابطه های بالا را بازنویسی می کنیم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Sin2\theta - \tau_{xy} Cos2\theta$$

برای بدست آوردن $\sigma_{y'}$ ، θ را با $\theta + 90°$ جایگزین می کنیم:

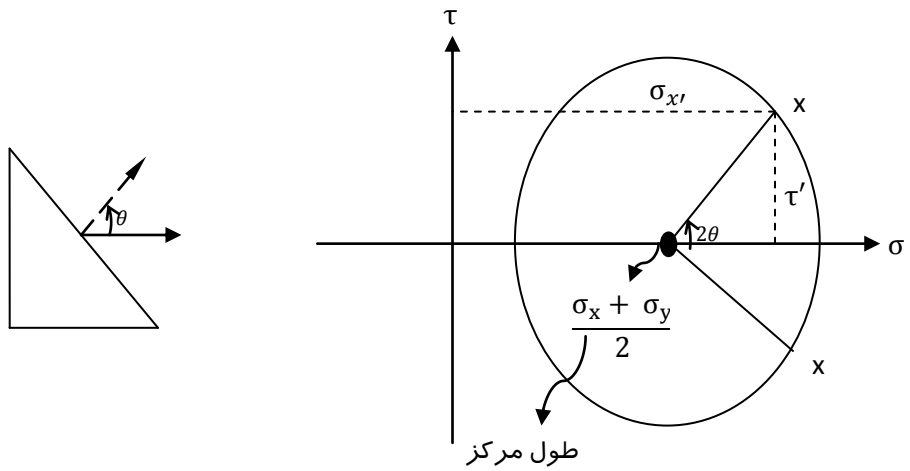
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta - \tau_{xy} Sin2\theta$$

بنابراین برای حالتی که $\tau_{xy} = 0$ است:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Sin2\theta$$

با مقایسه معادلات دایره ،
$$\begin{cases} X = X_C + R Cos\theta \\ Y = Y_C + R Sin\theta \end{cases}$$
میتوان تنش ها را بر روی دایره مور ترسیم کرد.



دقت شود که هر نقطه ای روی دایره نظیر یک سطح است و عرض از مبدا دایره همواره صفر است

$$\sigma_{x\prime} + \sigma_{y\prime} + \sigma_x + \sigma_y$$

با دقت در معادله دایره می توان رابطه ای بین معادله تنش ها و دایره یافت که در نهایت داریم:

$$(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau^2_{x\prime y\prime} = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2_{xy}$$

که با در نظر گرفتن

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad , \qquad R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2_{xy}}$$

رابطه دایره را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau^2_{x\prime y\prime} = R^2$$

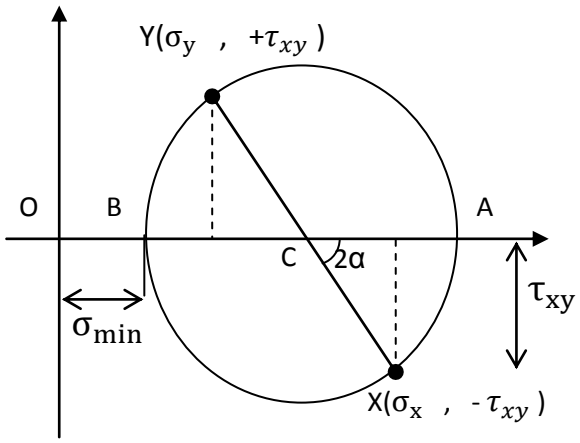
- روابط دیگری که از این فرمول بدست می آیند:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R \qquad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2_{xy}} \qquad \tau_{min} = -\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2_{xy}}$$

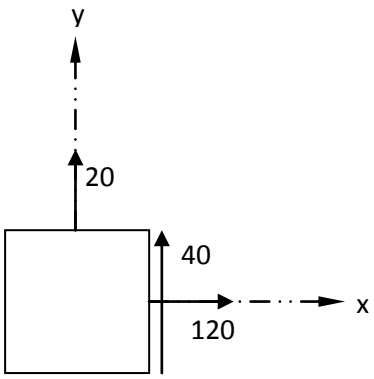
پس ابتدا با داشتن تنش های نرمال و برشی اولیه، به مرکز σ_{ave} و شعاع R دایره ای رسم می کنیم. اگر تنش برشی مثبت باشد نقطه X زیر محور σ و اگر منفی باشد بالای آن قرار می گیرد.سر دیگر

قطری که X روی آن است، محل نقطه Y می باشدزاویه ای که این قطر با محور افقی می سازد 2α یا دوبرابر زاویه دوران المان است.

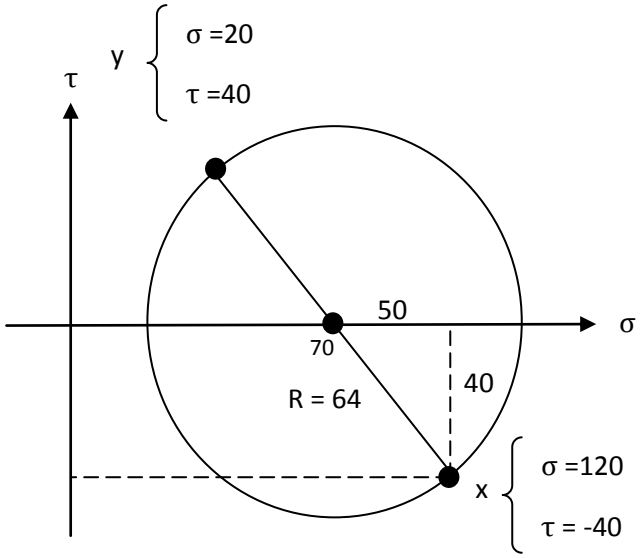


مثال 1

الف) ترسیم دایره مورالمان روبرو:

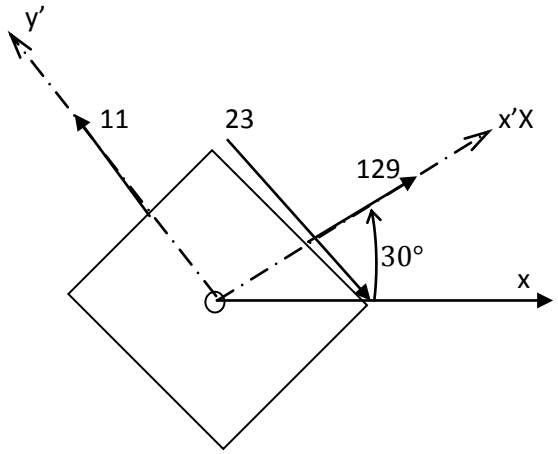


با در دست داشتن تنش های عمودی و برشی،که در این مثال همگی مثبت اند، براحتی دایره را رسم می نماییم:

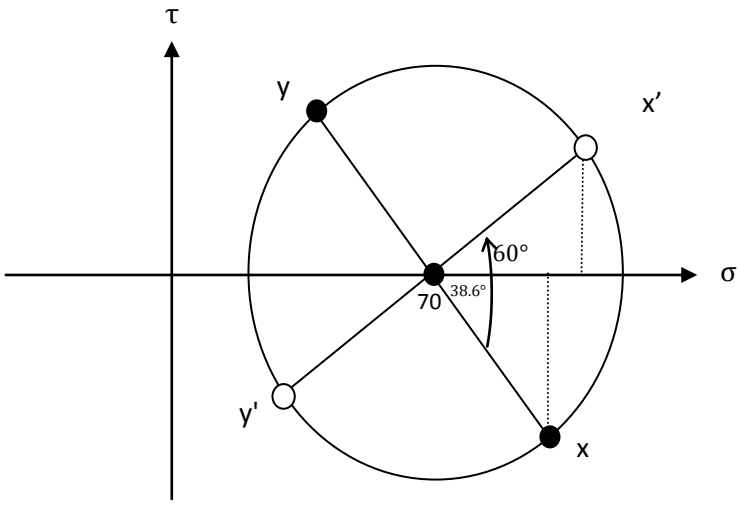


به منظور تعیین علامت τ دقت شود که پاد ساعتگرد نظیر عدد منفی در دایره می باشد و بالعکس.

ب) حال اگر سطح را 30درجه دوران دهیم(مطابق شکل)،تنش ها ی جدید را محاسبه کنید.

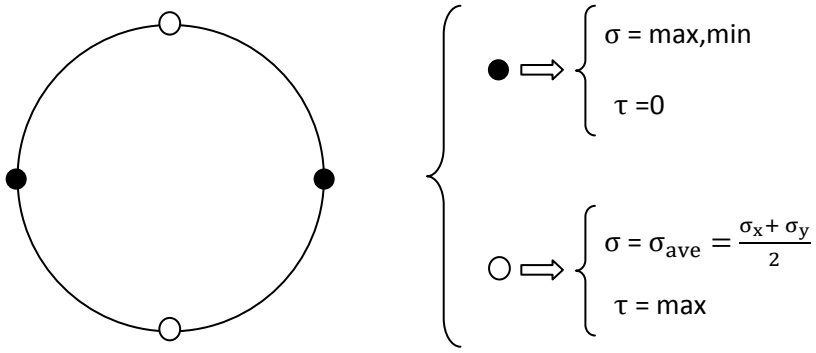


زاویه دوران المان(α)،همان نصف زاویه دوران در دایره است:

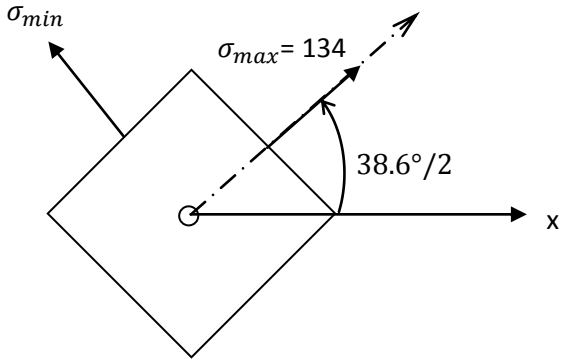


- **سطوح و محور اصلی**

صفحه هایی که در آنها تنش های برشی برابر با صفر می باشند صفحه های اصلی نام دارند.تنش های برشی در بالاترین نقطه دایره بیشترین و در پایینترین نقطه آن کمترین مقدار ممکن را دارند.

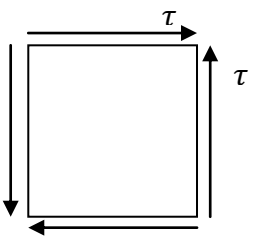


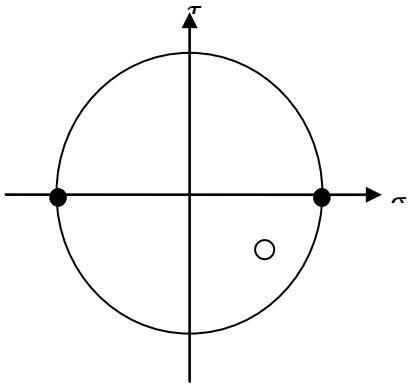
سطوح وتنش های اصلی در مثال قبل :



- بررسی دایره های خاص

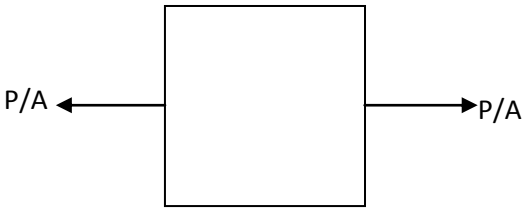
1- **برش خالص** (مرکز دایره روی مبدا)

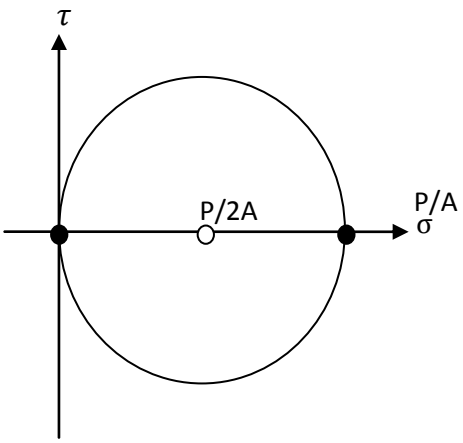




در حالت برش خالص هیچ تنش نرمالی وجود ندارد.

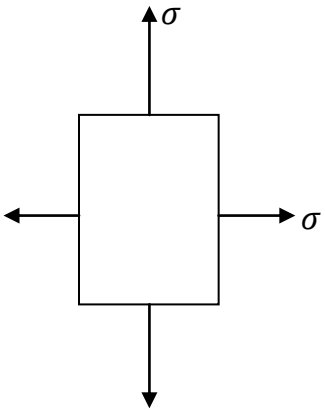
2 -**تنش تک محوری** (در حاتی است که عنصر تحت کشش یا فشار است)

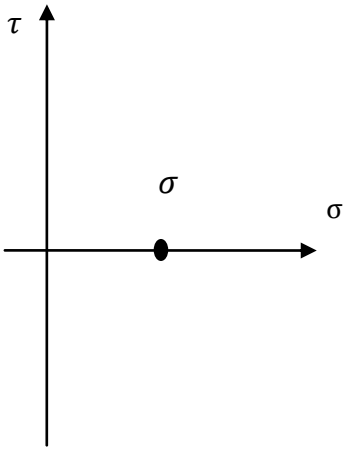


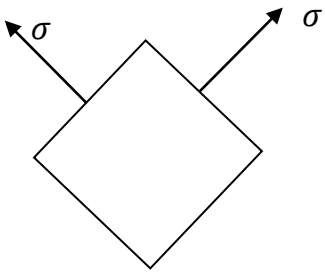


$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{P}{2A} \quad و \quad \tau_{Min} = 0 \\ \sigma_{Max} = \dfrac{P}{A} \quad و \quad \sigma_{Min} = 0 \end{cases}$$

3 -**تنش هیدرواستاتیک** (این حالت مربوط به زمانی است که روی صفحات المان،تنش نرمالی برابر و هم جهت وارد می شود.)(دایره ای که شعاعش صفر است)







به هر میزان که سطوح را دوران دهیم،تنش هایش تفاوتی نمی کند.

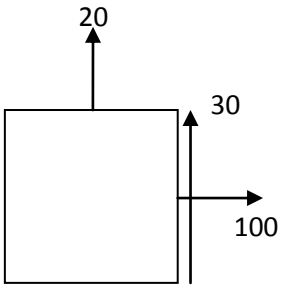
$$R = 0 \rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 0 \rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$

$$R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

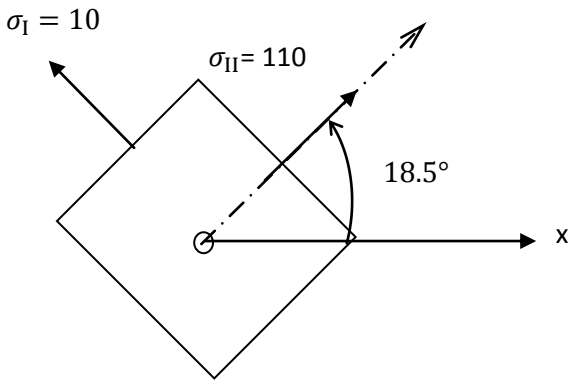
$$2\sigma_C = \sigma_x + \sigma_y$$

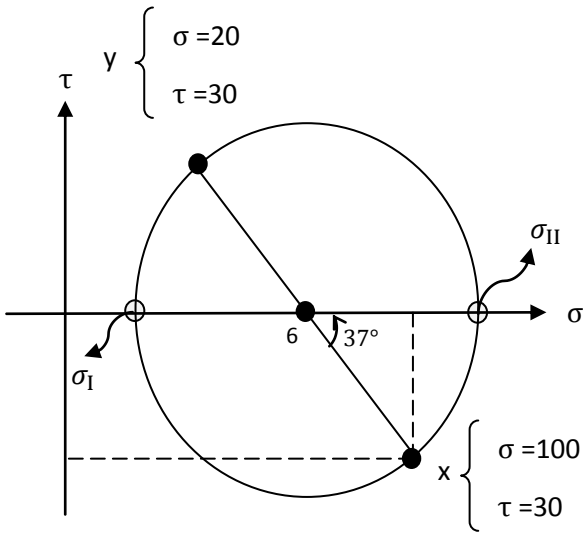
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_C + RCos2\theta \\ \sigma_y = \sigma_C - RSin2\theta \end{cases}$$

مثال 2



تنش های اصلی را برای سطح زیر را بیابید.





برای پاسخ به این پرسش که اگر تنش های چند محوری داشته باشیم یا تنش های عمودی و برشی هم زمان اعمال شوند،چه زمانی تسلیم رخ می دهد؟فرضیه های زیادی وجود دارد:

- فرضیه تنش اصلی ماکزیمم

هرگاه تنش اصلی به میزان تنش مجاز برسد، تسلیم رخ می دهد.

- فرضیه تنش برشی ماکزیمم

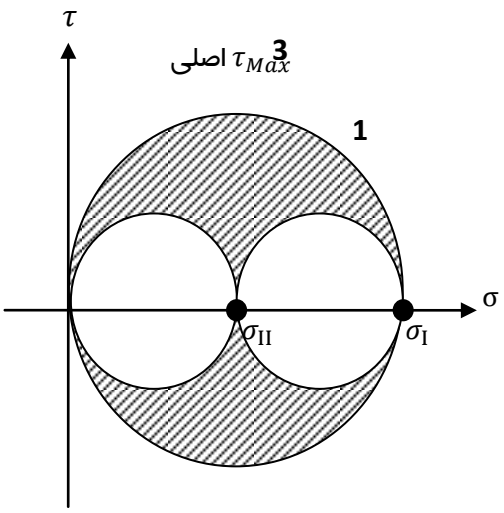
هر گاه تنش برشی به میزان تنش مجاز برسد،تسلیم رخ می دهد.

- فرضیه انرژی

هر گاه انرژی ذخیره شده به حد معینی برسد،تسلیم رخ می دهد.

- معمولا برای مصالح ترد از فرضیه تنش برشی ماکزیمم و برای مصالح نرم از فرضیه انرژی استفاده می شود.

شکل کامل دایره موهر برای بررسی تنش برشی ماکزیمم :



- دایره 1،دایره اصلی است.
- دایره 2،دایره بین نقطه صفرو σ_{II}و دایره3،دایره ی بین نقطه صفر و σ_{I} است.

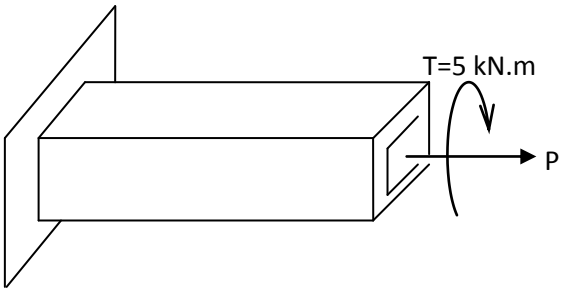
طبق این دایره،هرگاه سطح موردنظر ما حاصل از برش موازی محور ها باشد،روی دایره حرکت می کنیم،ولی نقاط هاشور زده بیانگر مکان هدسی تمام سطوح مورب ممکن که بتوان برش زد،می باشد.

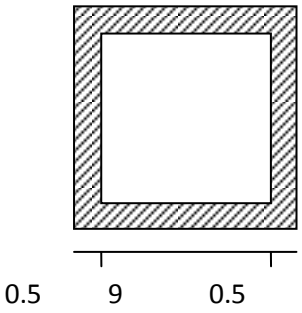
نکات:

1. نقطه صفر دایره بیانگر سطح z است که خود یک سطح اصلی می باشد.دقت شود که هر سطح که تنش برشی در آن صفر باشد،یک سطح اصلی محسوب می شود.
2.
3. دوایر 2 و 3 ،حاصل از دوران حول دو سطح اصلی دیگر است.

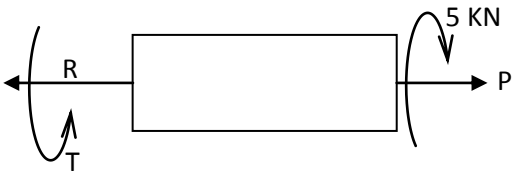
مثال3

بار P را طوری تعیین کنید،که بر اساس فرضیه برش ماکزیمم،تنش برشی ماکزیمم از 80 Mpa تجاوز نکند

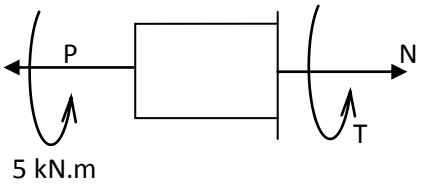




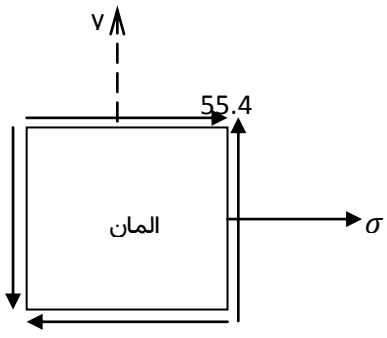
دیاگرام آزاد :



$R=P\ ,\ T=5\ kN.m$



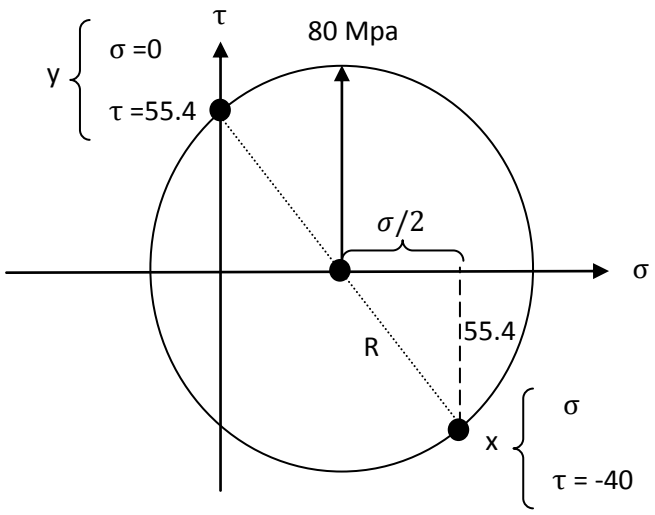
$N=P\ ,\ T=-5\ kN.m$



Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{19 * 10^{-4}}$$

$$f = \tau t \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{T}{2At} = \frac{5 * 10^3}{2.(9.5 * 9.5) * 10^{-4} * 0.5} = 55.4\ Mpa$$



$$R = \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + (55.4)^2} \quad \rightarrow \quad R = \tau_{Max} = 80Mpa \quad \rightarrow \quad \sigma = 115.43Mpa$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \rightarrow \quad P = 219kN$$

خلاصه فصل3

دایره ی مور برای تنش:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,Cos2\theta + \tau_{xy}Sin2\theta$$

$$\tau' = (\sigma_X - \sigma_y)sin\theta cos\theta + \tau_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,Cos2\theta - \tau_{xy}Sin2\theta$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\,, R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \quad \rightarrow \quad (\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

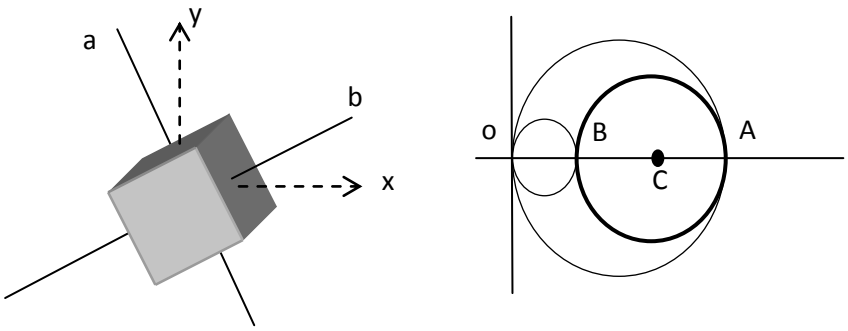
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R \qquad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \tau_{min} = -\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

تنش های اصلی: زاویه دوران المان،نصف زاویه دوران در دایره(θ) است.در صفحه های اصلی تنش برشی صفر است.

$$\tan\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\,, 2\alpha = \theta$$

تحلیل سه بعدی تنش:پس از رسم دایره مور،دایره هایی به قطرOB و OA به ترتیب حاصل دوران حول محور a وb هستند.تنش برشی ماکزیمم،متناظر با بیشترین تنش برشی دربین دایره ها است:



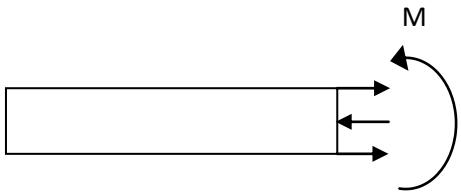
Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

فصل چهارم

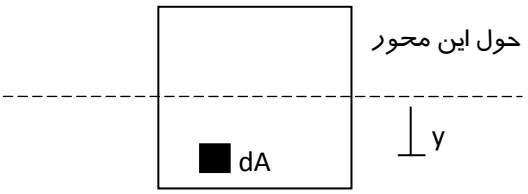
"خمش"

خمش در تیرها

در تیر تنش وجود دارد ولی برآیند بین تنش ها روی سطح مقطع صفر است.



معادلات تعادل :

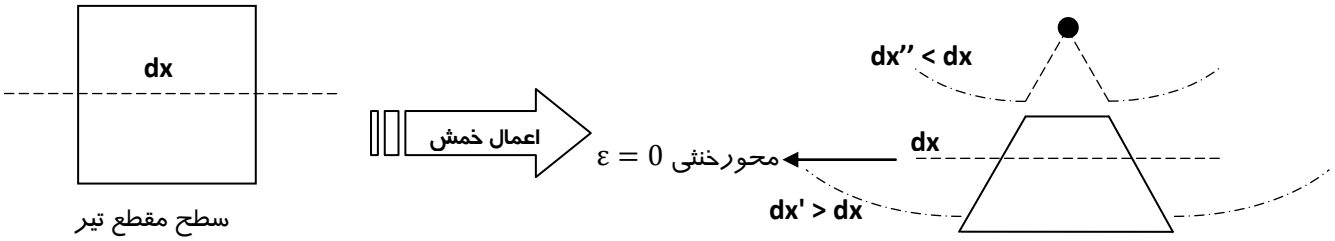


$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

$$M = \int_A (\sigma dA) y$$

حال برای اینکه بتوانیم معادلات بالا را حل کنیم، باید رابطه ی دیگری نوشت که،از تغییر شکل استفاده می کنیم.

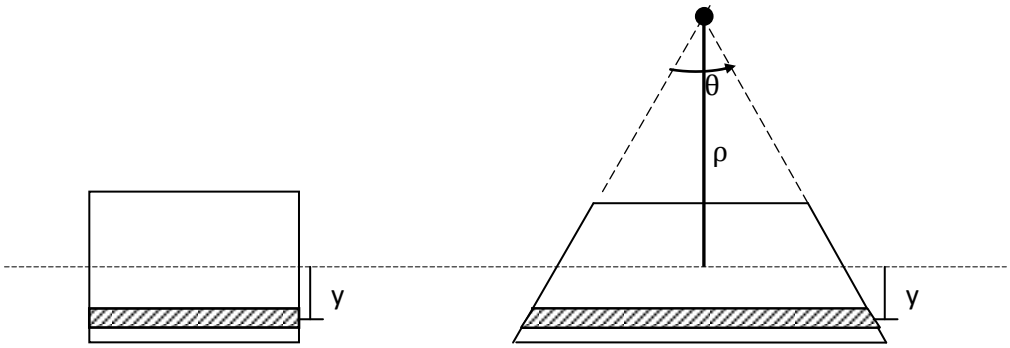
- تغییر شکل



- فرضیات
  - هر سطح مقطعی که مسطح بوده،بعد از اعمال خمش،مسطح باقی می ماند.

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

- هر مقطعی که قبل از تغییرشکل بر محور تیر عمود بوده، بعد از آن هم عمود باقی می ماند.



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{-y}{\rho}$$

y= فاصله تا محور خنثی

ρ= شعاع خمیدگی

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho}$$ قانون هوک

حال معادلات تعادل بدست آمده را حل می کنیم:

$$N = \int_A (\sigma dA)y = \int_A -\frac{Ey}{\rho} dA = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-E}{\rho}\int ydA = 0$$

$\int ydA$ ،بیانگر گشتاور اول سطح است که وقتی صفر شود،نشان می دهد محور از مرکز سطح گذشته است.

$$M = \int_A (\sigma dA)y = \int_A -\frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho}\int y^2 dA$$

$\int y^2 dA$ ، ممان اینرسی سطح مقطع جسم می باشد.

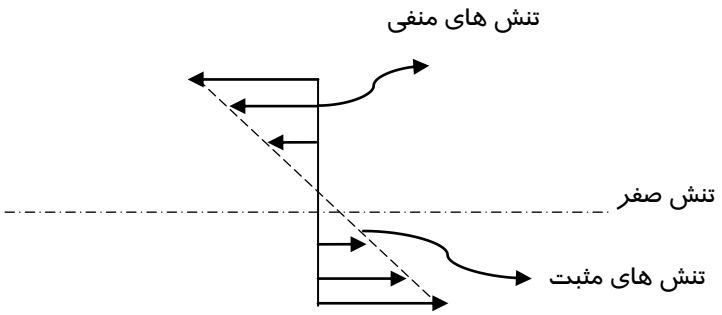
M = ممان روی سطح

y = فاصله ی نقطه ازمحور خنثی

I =ممان اینرسی سطح مقطع

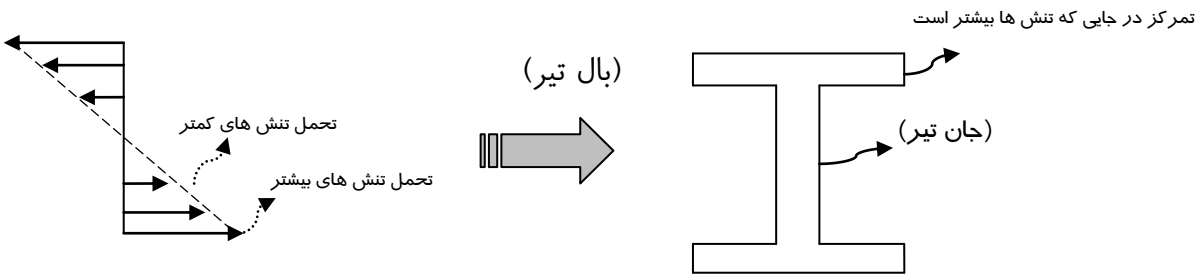
$$M = -\frac{E\,I}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله ی y از محور قرار دارد،از این رابطه محاسبه می شود که با فاصله ی (y)،رابطه خطی دارد.

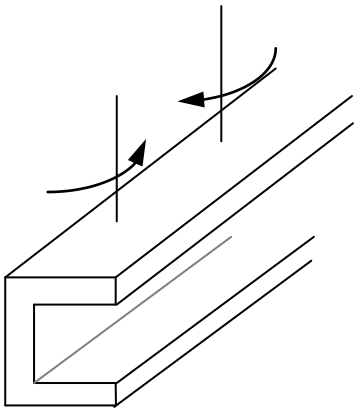


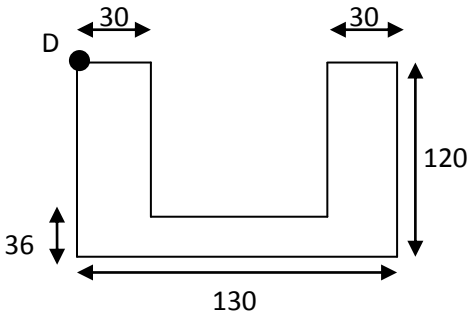
$$\sigma_{Max} = \frac{\mathrm{M_{Max}} * \mathrm{C}}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{M_{Max}}}{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}} = \frac{\mathrm{M_{Max}}}{\mathrm{S}} \rightarrow \sigma_{\mathrm{Max}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{S}} \qquad (S = \frac{I}{C} \text{ مدول خمشی مقطع})$$

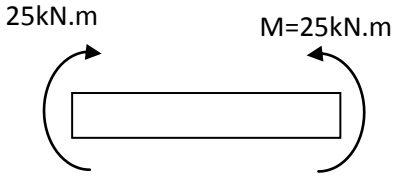
- مناسب ترین حالت مقطع برای خمش



مثال : تنش در نقطه ی D را در تیر مقابل بیابید :







M ،در همه جا یکسان و برابر 25000 است.

$$Ay_C = \sum A\bar{y}$$

$$y_C = \frac{\left(180 * 36 * \left(\frac{36}{2}\right)\right) + 2 * (30 * 84 * \left[\frac{84}{2} + 36\right])}{(180 * 120) - (120 * 84)} = 44.25mm$$

محل محورخنثی

$$\mathrm{I} = \frac{180 * 36^3}{12} + \underbrace{180 * 36 * (26.25)^2}_{Ad^2} + 2 * [\frac{30 * 84^3}{12} + \underbrace{30 * 84 * (33.75)^2}_{Ad^2}]$$

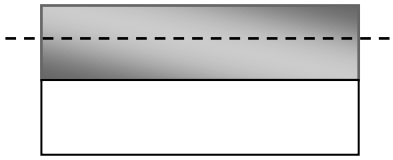
$$\Rightarrow \quad \mathrm{I} = 13869000\ \mathrm{mm}^4$$

$$\sigma_D = \frac{25 * 10^3 * 10^3 * 75.75}{13869000} = 136.5\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_D = 136.5\ Mpa$$

خمش عضوهایی که از چند ماده ساخته شده اند

میله ای را در نظر بگیرید که از دو ماده به هم چسبیده مانند شکل ساخته شده باشد.و مدول الاستیسیته آنها E1وE2 است.چون مکان محور خنثی را نمی دانیم در قدم اول یک محور فرضی در نظر می گیریم.چون جسم در اثر نیروی وارده ممکن است خم شود رابطه کرنش آنها را می نویسیم.این رابطه از اصل سازگاری تغییر شکل ها بدست آمده است و به جنس جسم بستگی ندارد.



$$\varepsilon_X = \frac{-y}{\rho}$$

$$\sigma_X = E\varepsilon_X \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = E_1\varepsilon_X \\ \sigma_1 = E_2\varepsilon_X \end{cases}$$

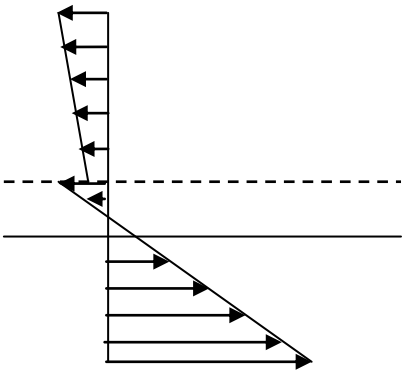
درنهایت باید روابط تعادل را بنویسیم تا مکان دقیق محور خنثی بدست آید:

$$N = \int \sigma_T dA = 0 \rightarrow \int \frac{-E_1 y_1}{\rho} dA + \int \frac{-E_2 y_2}{\rho} dA = 0$$

$$\frac{-E_1}{\rho}\int y_1 dA - \frac{E_1}{\rho}\int y_1 dA = 0 \qquad \text{ازطرفی } \int ydA = Q$$

$$\rightarrow \; E_1 Q_2 + E_1 Q_2 = 0$$

که از حل این معادله ،مکان محور خنثی بدست خواهد آمد.نمودار تنش برای میله ای مرکب از دو جنس مانند شکل بدست می آید:

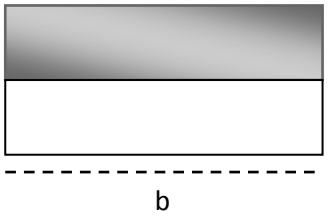


$$M = \int \sigma_1 y_1 \, dA + \int \sigma_2 y_2 \, dA = \frac{-E_1}{\rho} \int {y_1}^2 dA - \frac{E_2}{\rho} \int {y_2}^2 dA$$

$$M = \frac{-E_1}{\rho} I_1 - \frac{E_2}{\rho} I_2$$

در این رابطه I_1 ممان اینرسی سطح اول نسبت به محور خنثی بدست آمده از رابطه بالا است.

- **روش مقطع معادل**

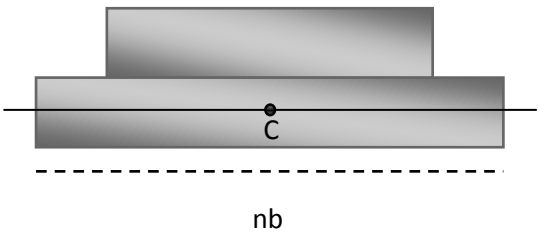


هرگاه مقطع تیر از چند جنس مختلف ساخته شده باشد،یکی از مقاطع را مبنا قرار داده و طول بقیه را نسبت به مدول الاستیسیته آنها تغییر می دهیم.مقطع بدست آمده را **مقطع معادل** می نامند.پس از این کار کافی است محور خنثی و ممان اینرسی مقطع معادل را بیابیم.

$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \;\rightarrow\; Q_1 + \frac{E_2}{E_1} Q_2 = 0 \qquad , \frac{E_2}{E_1} = n$$

$$Q_1 + nQ_2 = 0 \;\rightarrow\; Q_1' + Q_2' = 0 \;\rightarrow\; Q'' = 0$$

نشان دهنده همان محور خنثی گذرنده از مرکز جرم مقطع جدید است



$$\frac{E_1}{E_1} = n_1 \, , \frac{E_2}{E_1} = n_2 \; , \frac{E_3}{E_1} = n_3 \; , \ldots$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{My}{I'} \\ \sigma_2 = n_2 \dfrac{My}{I'} \end{cases}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

'I ممان اینرسی مقطع جدید است.برای بدست آوردن تنش جسم 1 در نقطه ای واقع در بالای سطح مقطع میله اولیه، بطور ساده همان تنش را در همان نقطه مقطع معادل محاسبه می کنیم.اما برای جسم 2 در نقطه ای واقع در پایین جسم اولیه،تنش محاسبه شده در مقطع معادل در نقطه متناظر را در nضرب می کنیم.

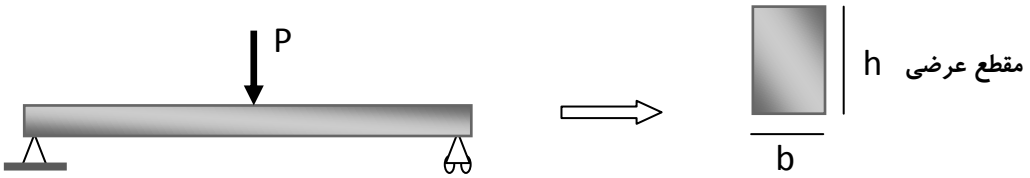
$$\begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{-E_1}{\rho} I_1 - \dfrac{E_2}{\rho} I_2 \;\rightarrow\; M = \dfrac{-E_1}{\rho}(I_1 + n_2 I_2) \\ \sigma_1 = \dfrac{-\mathrm{Ey}}{\rho} \end{cases} \rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{\mathrm{My}}{I_1 + n_2 I_2}$$

$$\sigma_i = n_i \frac{My}{I'}$$

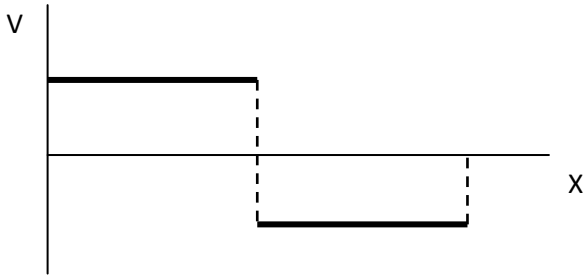
بنابراین با توجه به اینکه نقطه مورد نظر در کجا باشد از روابط خاص خود استفاده می کنیم.

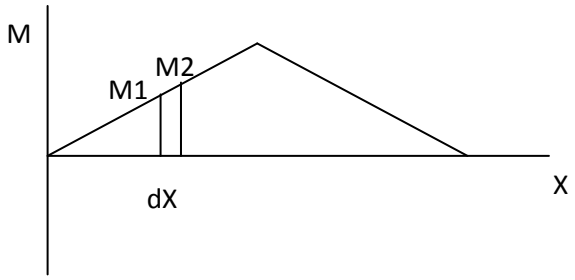
تنش های برشی در تیرها

یک تیر با دو تکیه گاه در نظر بگیرید که نیرویی همانند شکل از بالا به آن وارد می شود:



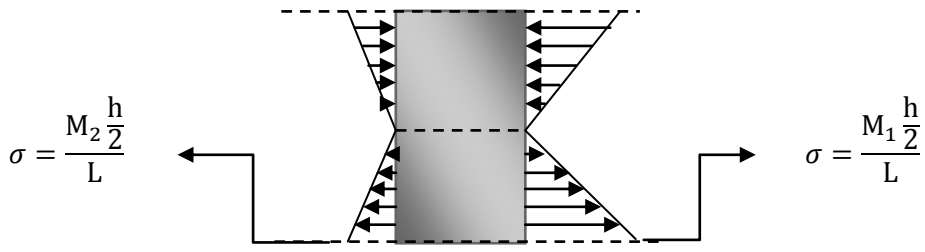
با برش زدن تیر در هر نقطه ای می توان تیروهای برشی و گشتاور خمشی وارد بر آن قسمت را بدست آورد.در نهایت نمودار نیروی برشیV و گشتاور خمشیM بر حسب فاصلهX بدست می آید.





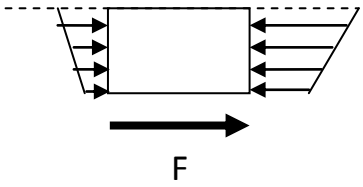
Vبرآیند تنش های برشی روی سطح مقطع

حال اگر جسم خم شود،وقتی جزء کوچک dX از تیر را بررسی کنیم تنش ها به صورت زیر خواهد بود:

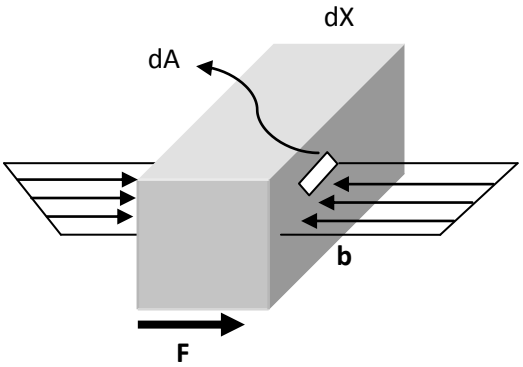


با توجه به نمودار خمش واضح است که $M_1 \neq M_2$ و $M_2 > M_1$.

اما هر دوقسمت باید در حال تعادل باشند($\sum F=0$) پس اگر یک قسمت از المان فوق را جدا کنیم دارای توزیع تنش به شکل زیر می شود:



حال معادله تعادل را می نویسیم:



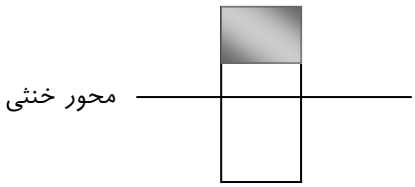
$$\sum F = 0 \;\rightarrow\; \int \sigma_1 dA - \int \sigma_2 dA + F = 0$$

$$\int \frac{My}{I} dA - \int \frac{(M+dM)y}{I} dA + F = 0$$

$$F = \int \frac{y}{I} dA dM$$

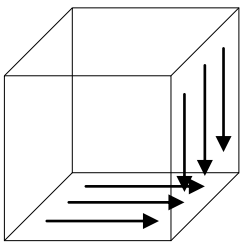
$$F = \frac{dM}{I} \int y dA = \frac{dM}{I} Q$$

Q :گشتاور اول سطح جداشده نسبت به محور خنثی



از طرفی این نیروی F حاصل از تنش برشی موجود در سطح زیرین است:

$$F = \tau A = \tau(bdx)$$



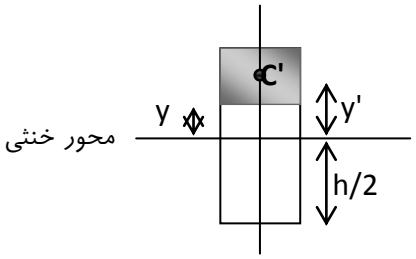
$$\tau = \frac{dMQ}{dXbI}$$

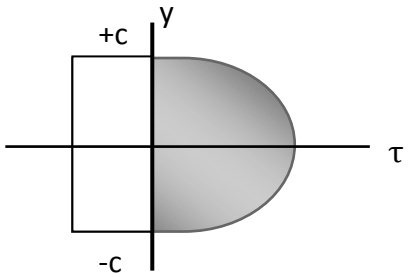
$$VdX = dM \;\rightarrow\; \frac{dM}{dX} = V$$

$$\tau = \frac{VQ}{bI}$$

بنابراین فرمول بدست آمده تنش برشی موجود در سطح زیرین است که در سطح عمود بر آن نیز به همین مقدار تنش برشی جریان دارد.

با توجه به شکل اگر رابطه بین τوy را بدست آوریم، نتیجه می شود که شکل نمودار تنش برشی بصورت سهمی می باشد.*



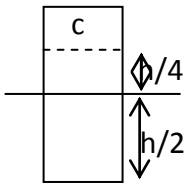


I. مقدار ماکزیمم تنش برشی روی محور خنثی است.

II. تنش برشی در بالاترین و پایینترین نقاط،صفر می باشد.

III. تنش برشی در عرض ثابت بوده و در ارتفاع به طور سهمی شکل تغییر می کند.

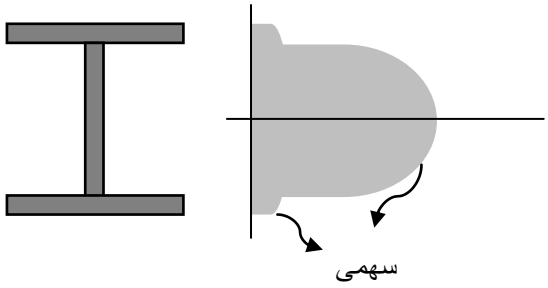
✓ محاسبه تنش ماکزیمم در مستطیل



$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{bI} = \frac{V\left(b\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)}{\frac{bh^3}{12}b}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

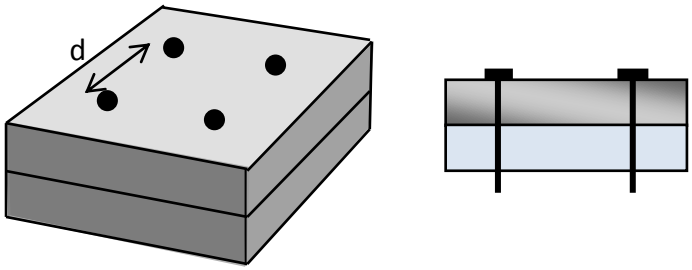
✓ تنش در تیر آهن



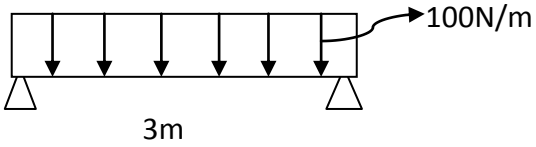
Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

مثال1

دو قطعه الوار توسط میخ هایی به یکدیگر متصل شده اند.اگر مقاومت مجاز برشی برای هر میخ 300 باشد،فاصله d چقدر است؟

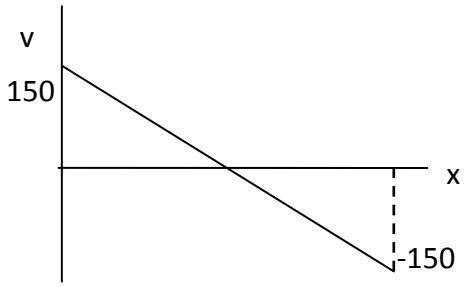


در واقع میله ها تحت بارگذاری زیر قرار گرفته اند:



میخ ها در فصل مشترک دو الوار تحت نیروی برشی قرار می گیرند:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 8^3}{12} \cong 850cm^4$$



$\rightarrow V_{max} = 150N$

$$Q = \int ydA = 2 \times 8 \times 20 = 160$$

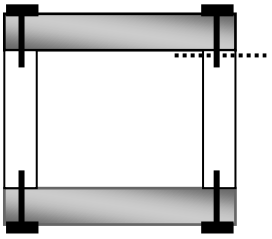
$$\tau = \frac{VQ}{bI} = \frac{150 \times 160}{850 \times 20} = 1.4 \frac{N}{cm^2}$$

$$F = \tau A \rightarrow 2F = \tau bd \quad \rightarrow 2 \times 300 = 1.4 \times 20 \times d \rightarrow d = 21.4$$

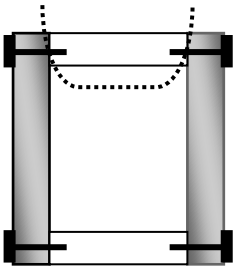
(چون نیرو در هر مقطع بر 2میخ وارد می شود،F را در 2 ضرب کردیم)

بنابراین برای طراحی باید فاصله میخ ها حدودا 22 سانتی متر در نظر گرفته شود.

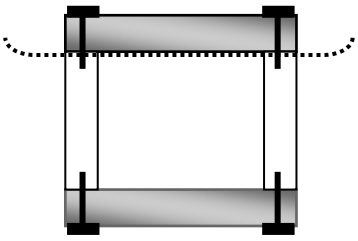
برای بدست آوردن تنش یا نیروی برشی،باید در جسم برشهایی ایجاد کنیم .بنابر این همواره به گونه ای برش می زنیم که سطح ما به دو قسمت مجزا تقسیم شود و قسمتی که نیروی برشی اش را می خواهیم نیز قطع شود.برای مثال برای بدست آوردن نیروی برشی در میخ هابی شکل می توان به شیوه زیر عمل کرد:



a) برای بدست آوردن نیروی برشی در یکی از میخ ها، در راستای افقی برشی در اتصال آن ایجاد کرده ایم. بنابراین، عرض برش (b)، همان عرض بریده شده است.



b) چون نیروی برشی میخ های بالا مدنظر بوده است،همانند شکل اتصالات باید از هم جدا شوند:



c) در این شکل برای یافتن نیروی میخ های بالایی برشی همانند شکل در آنها ایجاد گشته است.

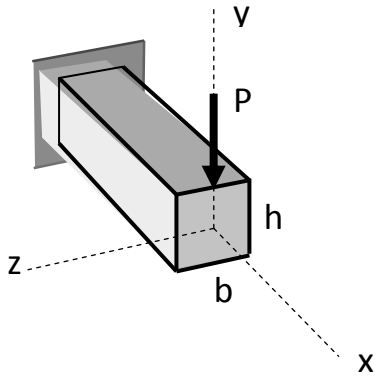
- نکته!

دقت شود که در فرمول $\tau = \frac{VQ}{bI}$، Q گشتاور اول سطح جدا شده نسبت به مرکز جرم کل است. همچنین I ممان اینرسی کل سطح مقطع و b عرضی که برش زده ایم می باشند.

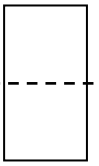
Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

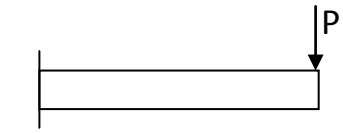
خمش دو محوری

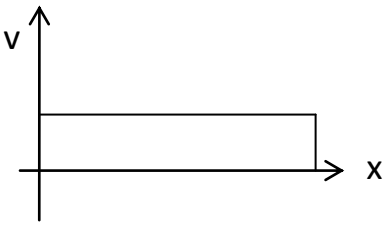
اگر نیروی P همانند شکل بر تیر اثر کند، می توان با رسم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی، تنشهای موجود در آن را بررسی نمود.

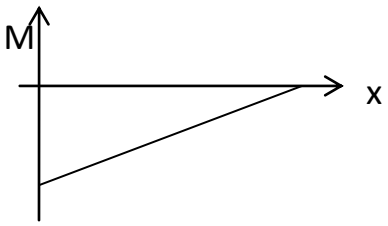


$$\sigma = \frac{-My}{I} \xrightarrow{M<0} \begin{cases} \sigma > 0 & \text{درقسمت بالایی} \\ \sigma < 0 & \text{درقسمت پایینی} \end{cases}$$

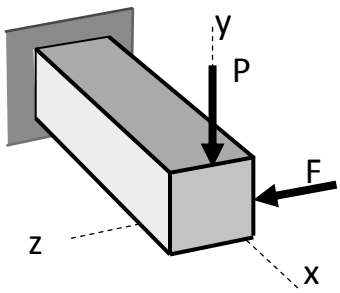








در صورتی که علاوه بر نیروی قبل، در جهت محور Z ها نیز نیروی F را بر میله وارد کنیم،جسمی با بارگذاری مرکب خواهیم داشت که تنش آن، حاصل جمع تنش های حاصل از دو نیروی وارده می باشد.



$$\sigma = \frac{-M_y z}{I_z}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{کل}} = \frac{-M_Z y}{I_Z} + \frac{M_Y z}{I_Y}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

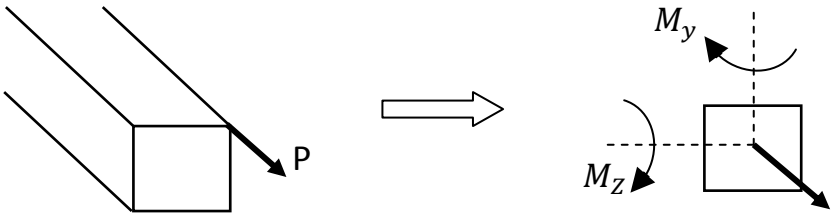
- نکته!

❊ در مرکز مختصات که $y=0$ و $z=0$ تنش مساوی صفر می باشد.

❊برای بدست آوردن محور خنثی، کافیست $\sigma_{کل}$ را برابر صفر قرار دهیم تا معادله خط محور خنثی بدست آید:

$$\frac{-M_Z y}{I_Z}+\frac{M_Y z}{I_Y}=0 \;\rightarrow\; y=\frac{-M_y}{M_z}\times\frac{I_z}{I_y}\times Z$$

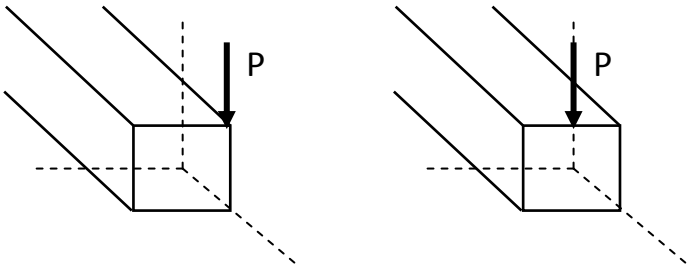
در حالت های دیگر بارگذاری، زمانی که راستای نیروی P از مرکز جسم نمی گذرد، می توان با در نظر گرفتن دستگاه کوپل- نیروی معادل در مرکز C مسئله را برحتی حل کرد.



$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{M_z y}{I_z}+\frac{M_y z}{I_y}$$

$$\mathrm{M_y}=\frac{-\mathrm{Pb}}{2},\quad \mathrm{M_z}=\frac{-\mathrm{Ph}}{2}$$ که در آنها

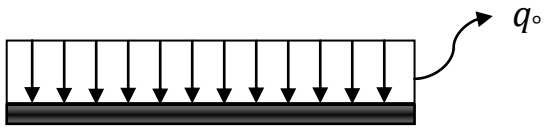
❖ حالت های دیگر:



Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

➢ خیز در تیر ها

$$q = q(x)\ ,\quad v = \frac{\partial M}{\partial x}\ ,\qquad M = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$



$$V = \int q_0 dX = q_0 X + C_1$$

$$M = \int (q_0 X + C_1)\, dX = \frac{1}{2} q_0 X^2 + C_1 X + C_2$$

شیب$=\frac{dY}{dX} = \int M dX = \frac{1}{6} q_0 X^3 + \frac{1}{2} C_1 X + C_2 X + C_3$

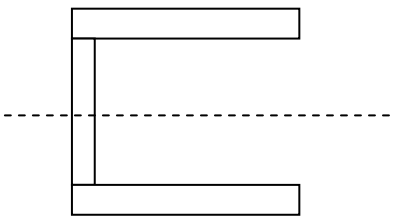
درشرایط مرزی:$\begin{cases} x = 0 \\ V = \frac{ql}{2} \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{ql}{2}$, $\begin{cases} x = 0 \\ M = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = 0$

$$\rightarrow\ y = \frac{-1}{24} q_0 X^4 + \frac{1}{6} C_1 X^3 + \frac{1}{2} C_2 X^2 + C_3 X + C_4 \xrightarrow{y=0\ ,x=L} C_3 = \frac{5}{12} q_0 L^3$$

که y همان خیز تیر ماست.

بارگذاری عضوهای جدار نازک و مرکز برش

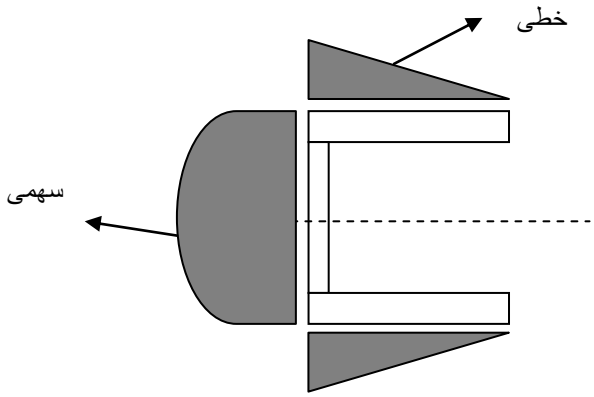
هرگاه عرض برش کم باشد،فرض می کنیم که تنش برشی روی سطح یکنواخت است.بنابراین کمیت q با نام **جریان برش** با رابطه زیر تعریف می شود:



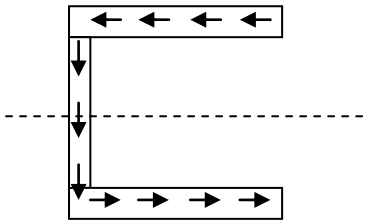
$$q = \tau b = \frac{VQ}{I}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

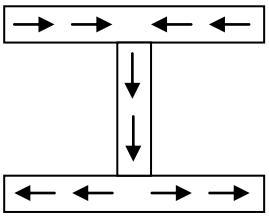
تنش برشی متناسب با Q به صورت خطی در طول تغییر می کند در حالی که این مقدار در ارتفاع رابطه ای سهمی شکل دارد. بنابراین توزیع تنش های برشی روی کل مقطع ناودانی به شکل زیر در می آید:



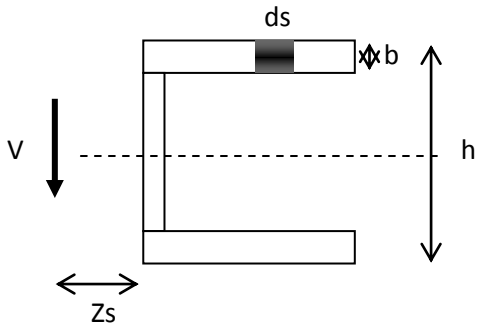
- نمایش جهت تنش برشی در طول و ارتفاع:



اما در خمش جریان برش به گونه ای است که از یک طرف وارد و از طرف دیگر خارج می شود بر خلاف جریان برش در پیچش که همواره دوران وار بود.



در اجسام جدار نازک باید دقت شود که تعادل حول مرکز سطح بررسی می شود و بار به جایی وارد خواهد شد که سطح جدار نازک ما تحت پیچش قرار نگیرد.بنابراین باید بار p را به طریقی وارد کنیم که عضو بدون پیچش خم شود.یعنی نقطه ای را انتخاب می کنیم که حداقل دوتا از نیروهایمان از آن عبور کنند و گشتاورشان صفر شود.این نقطه **مرکز برش** نامیده می شود.(Zs)



$$\int_0^d \tau(\mathrm{bds})\mathrm{h} = \mathrm{VZs}$$

$$\int_0^d \frac{VQ}{Ib} bh(ds) = VZs \quad \rightarrow \frac{h}{I}\int_0^d Qds = Zs$$

از طرفی می دانیم:Q=bsh/2

$$\frac{h^2 b}{2I}\int_0^d sds = Zs \quad \rightarrow \quad Zs = \frac{h^2 bd^2}{4I}$$

خلاصه فصل4

فرمول های خمش کشسان:

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{-y}{c}\varepsilon_{max}$$

$$\sigma_x = \frac{-M}{I}y \rightarrow \sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \qquad \begin{cases} M>0 \rightarrow & y>0\,,\sigma<0 \text{ (فشاری)} \\ M<0 \rightarrow & y<0\,,\sigma>0 \text{ (کششی)} \end{cases}$$

ممان اینرسی , $I = I_C + Ad^2$ مرکزهندسی : $y_c = \frac{\sum A.\overline{y}}{\sum A}$

خمش اجسام با جنسهای مختلف:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon_x = E_1\frac{-y}{\rho}\ , \qquad \sigma_2 = E_2\varepsilon_x = E_1\frac{-y}{\rho}$$

مرکزسطح: $\oint \sigma dA = 0 \rightarrow E_1Q_1 + E_2Q_2 = 0$

روش مقطع معادل:

$$M = \frac{-E_1}{\rho}I_1 + \frac{-E_2}{\rho}I_2 \quad , \quad \frac{E_2}{E_1} = n_2\,, \qquad \frac{E_1}{E_1} = n_1 = 1$$

وقتی عرض جسم را n برابر می کنیم گشتاور آن هم n برابر می شود.محور خنثی جسم مرکب همان مرکز جرم مقطع معادل است.

$$\sigma_i = n_i\frac{My}{I'} \quad \text{و} \quad I' = I_1 + nI_2$$

تغییر ابعاد در جهتی موازی با محور خنثی ایجاد می شود.

برش:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad , \qquad \begin{cases} \text{عرض فصل مشترک} = b \\ \text{گشتاور اول سطح نسبت به محورخنثی} = Q \end{cases} \qquad , \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{Q}$$

خمش دو محوری:

$$y = \frac{-M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} \times Z$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

خمش جدار نازک ها و مرکز برش:

$$q = \tau b = \frac{VQ}{I}$$

Firoozjang - Zand iust.civil@gmail.com

هرگاه عرض برش کم باشد،فرض می کنیم که تنش برشی روی سطح یکنواخت است:

مرکزبرش: $Zs = \frac{h^2 b d^2}{4I}$