...ooni

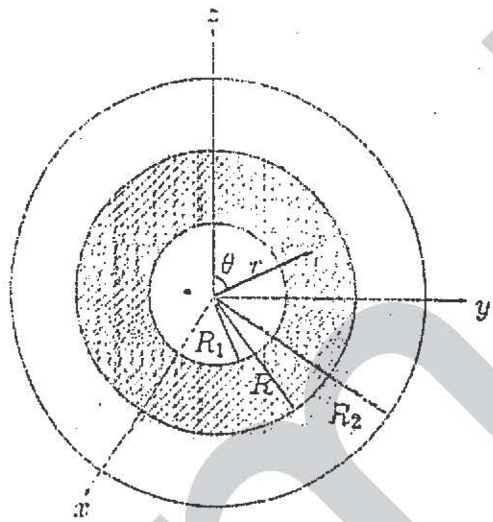
بسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره دانش)

۸۷/۹/۱۲

وقت: ۳:۳۰

۱- یک خازن کروی متشکل از دو پوسته‌ی کروی رسانای، هم‌مرکز به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 که به ترتیب دارای بار $+Q$ و $-Q$ هستند، در نظر بگیرید. ناحیه‌ی $R_1 \le r \le R$ از حجم بین دو پوسته با یک دی الکتریک خطی و همسانگرد پر شده است.



فرض کنید ثابت دی الکتریک به صورت $K(r) = K_0 \frac{R}{r}$ متغیر باشد که در آن r فاصله‌ی یک نقطه داخل دی‌الکتریک تا مرکز خازن و K_0 و R ثابت‌اند:

آ) ظرفیت خازن را به دست آورید.

ب) چگالی بار سطحی آزاد روی دو رسانا چقدر است؟

پ) چگالی بار حجمی و سطحی قطبشی در داخل حجم و روی سطوح دی الکتریک چقدر است؟

فرض کنید ثابت دی الکتریک به صورت $K(\theta) = 1 + K_0 \cos^2\theta$ متغیر باشد که در آن θ زاویه یک نقطه داخل دی‌الکتریک با محور z و K_0 ثابت‌است. با توجه به این که میدان الکتریکی شعاعی است،

ت) ظرفیت خازن را به دست آورید.

ث) چگالی بار سطحی آزاد روی دو رسانا چقدر است؟

ج) چگالی بار حجمی و سطحی قطبشی در داخل حجم و روی سطوح دی الکتریک چقدر است؟

۲- ظرفی به حجم V شامل N ملکول گاز و در حالت تعادل است.

آ) احتمال یافت شدن یک ملکول در حجم v $(v < V)$ چقدر است؟

ب) احتمال این که در هر لحظه، n ملکول در حجم v قرار داشته باشد چقدر است؟

پ) جواب قسمت (ب) در صورتی که $v \ll V$ و $n \ll N$ به چه شکلی در می‌آید، آن را به دست آورید.

ت) جواب قسمت (پ) در صورتی که $n \gg 1$ و $\bar{n} \gg n - \bar{n}$ به چه شکلی در می‌آید، آن را به دست آورید.

ث) اگر ظرف شامل 2 مول گاز باشد، احتمال این که بیش از $0.02 + 10^{-8}$ مول گاز در حجم $v = V/100$ وجود داشته باشد، چقدر است؟

در صورت نیاز:

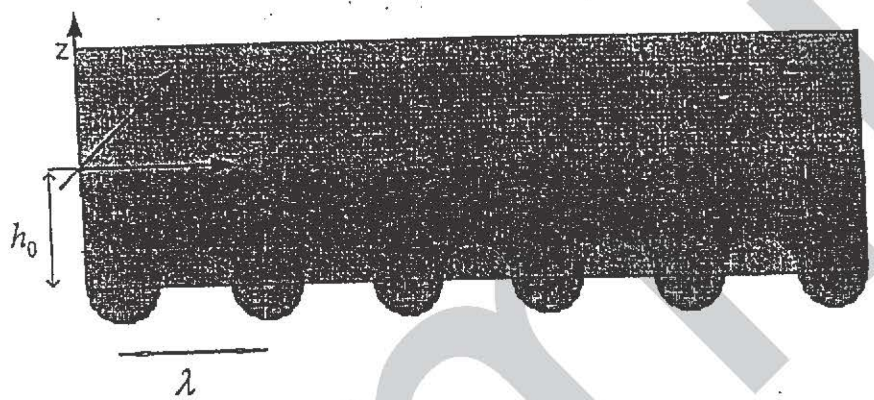
برای $x \gg 1$

$$2x\, e^{x^2} \int_x^\infty dt\, e^{-t^2} \approx 1$$

۳۷

اندازهٔ کمینه قطرات آب، رویِ سقف یخچال

لایه ای از آب که بر سقف داخلی یخچال تشکیل شده است، می‌تواند به قطرات مجزای آب بدل شود. برای رخ دادنِ این پدیده شرایطی لازم است، مثلاً اینکه حاصل جمع انرژی برهمکنش آب با سقف یخچال (γ_{LS}) و کشش سطحیِ آب (γ)، بزرگتر از انرژی برهمکنش سقف یخچال با هوا (γ_{SG}) باشد. ما در این مسئله به بررسی شرایط مزبور نمی‌پردازیم و تنها شرایط اولیهٔ تغییر شکلِ لایهٔ آب را بررسی می‌کنیم. از این بررسی، حد پایینی برای ابعاد قطره ها بدست می‌آید. برای سادگی مدل سه بعدی را با مدلی دوبعدی جایگزین می‌کنیم، بدین ترتیب در راستای محور y تقارن داریم.



لایه بی‌نهایت بزرگی از آب به ضخامتِ یکنواختِ h_0، از پایین برروی سقف داخلی یخچال تشکیل شده است. شتاب میدان گرانش در جهت $-\hat{z}$ است. سطح این لایه را بصورت $h(x) = h_0 + \delta h \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$ مختل می‌کنیم.

الف – تغییر انرژی گرانشی و انرژی سطحی این مجموعه را در یک سلول واحدِ آن (ناحیه ای به طولِ λ در جهت محور x ها) تا مرتبه دوم نسبت به δh محاسبه کنید.

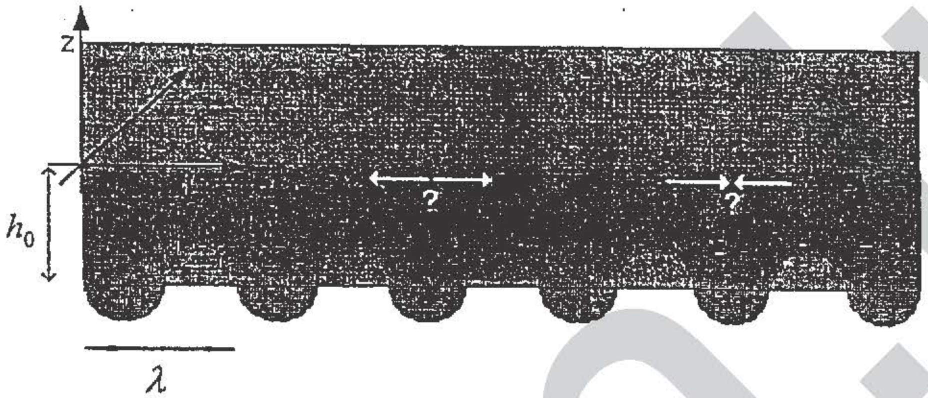
ب – نشان دهید، آستانه ای برای طول موج اختلال (λ) وجود دارد، بطوریکه برای λ های کمتر از آن لایهٔ آب ترجیح می‌دهد به حالت یکنواخت برگردد.

تصویری که در بخش ب بدست آمده، تنها برمبنای ملاحظات انرژی شکل گرفته است. برای بدست آوردن تصویری دقیقتر، به دینامیک مسئله نزدیکتر می شویم. براین مبنا فرض کنید سطح آب با اختلالِ $h(x) = h_0 + \delta h \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$ مختل شده است. اما آب هنوز به حرکت در نیامده و ساکن است. فرض کنید تابعیتِ فشار آب در راستایِ محورِ z ها، همچنان بصورتِ $-\rho g z$ باقی بماند و وجودِ سطحِ پایینیِ لایه، تنها آن را بصورتِ $P = P_0 - \rho g z + \mathrm{F}(x)$ تصحیح کند.

پ – با اعمال دقیقِ شرایطِ تعادلِ نیرو بر رویِ سطح پایینیِ لایه، $\mathrm{F}(x)$ را بیابید.

از آنجایی که $\mathbf{F}(x)$ تابع ثابتی بدست نمی‌آید, و درداخلِ لایهٔ آب نیز هیچ نیروی نیست که اثر آن را خنثی کند, $\mathbf{F}(x)$ موجب حرکتِ آب در جهت افقی میشود.

ت – حال, با فرضِ اینکه آب از ناحیهٔ پرفشار به کم فشار جاری میشود, صحتِ مقدارِ آستانه ای که در بخشِ ب برای λ بدست آوردیم را تحقیق کنید.



مسئله ۴

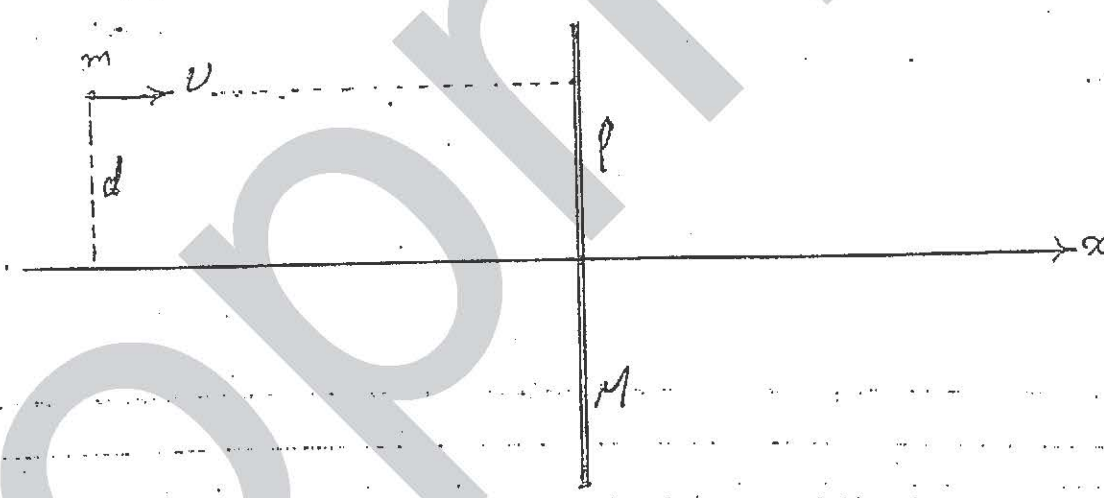
جرم نقطه ای m ضمن حرکت با سرعت ثابت v در صفحه افقی بدون اصطکاک به میله ای به جرم M ، طول $2l$ و لختی دورانی I برخورد کشسان می کند. در ابتدا مرکز میله به فاصله d از راستای حرکت جرم m قرار دارد و امتداد میله بر راستای حرکت m عمود است.

۱- بعد از برخورد سرعت m را v' ، سرعت مرکز جرم میله را V و سرعت زاویه ای میله را Ω بنامید و آنها را به دست آورید.

۲- نشان دهید بعد از برخورد مولفه افقی سرعت نقطه ای از میله که به طور لحظه ای در امتداد مسیر m است از v' بیشتر است. (به عبارت دیگر m دوباره از سمت چپ با میله برخورد نمی کند.)

۳- با فرض $v'>V$ چه شرایطی برقرار باشد تا نیمه پایینی میله بعد از چرخشی کمتر از یک دور از سمت چپ به جرم m ضربه بزند. اگر این اتفاق در چرخش اول نیفتاد، ایا ممکن است در چرخش های بعدی رخ دهد؟ تحت چه شرایطی؟

۴- بخش ۳ رابا فرض $v'<V$ حل کنید.



بسمه تعالی

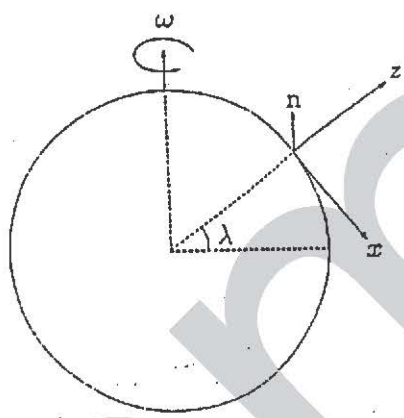
امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفره)

وقت: ۵ ساعت

۸۷/۱۰/۲۲

مسئله‌ي1) اگر جسمی را پرتاب کنیم به خاطرِ نیروي کوریولیس بُردِ آن عوض می‌شود. فرض کنید جسمی را با سرعتِ اولیه‌ي v_0 و زاویه‌ي α نسبت به اُفق و به سمتِ شرق پرتاب می‌کنیم. بُردِ جسم چه‌قدر عوض می‌شود؟ فرض کنید بُرد آن‌قدر زیاد نیست که انحناي زمین مهم باشد. محورهاي x، z و بردارِ $\mathbf{n}$ (جهتِ بردارِ ω) را مطابقِ شکل در یک صفحه بگیرید. محورِ y در راستاي شرق است. مکان و سرعتِ اولیه‌ي پرتابه عبارت‌اند از

$$\mathbf{r}(0)=0,\qquad \dot{\mathbf{r}}(0)=v_0\cos\alpha\mathbf{j}+v_0\sin\alpha\mathbf{k}.$$



می‌خواهیم این مسئله را اختلالی حل کنیم.

a) گلوله‌ای با سرعتِ 300 Km/h پرتاب می‌شود. نسبتِ نیروي کوریولیس به وزن از چه مرتبه‌ای است؟

b) بسطِ زیر را براي بردارِ مکان در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0(t)+\omega\mathbf{r}_1(t)+\omega^2\mathbf{r}_2(t)+\cdots$$

مشابهِ این بسط را براي مکانِ اولیه و سرعتِ اولیه بنویسید. معادله‌هاي دیفرانسیلِ جفت‌شده‌ای براي $\mathbf{r}_0(t)$، $\mathbf{r}_1(t)$، و $\mathbf{r}_2(t)$ به دست آورید.

راه‌نمایی: مکانِ اولیه و سرعتِ اولیه‌ها را هم تا مرتبه‌ي دومِ ω بنویسید.

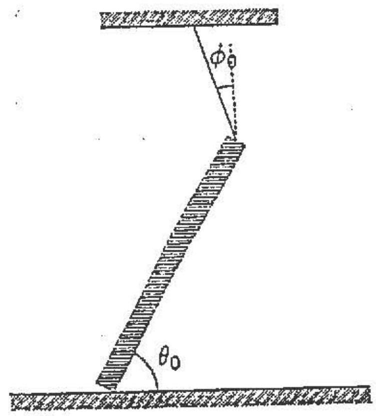
c) با حلِ معادله‌هایی که نوشته‌اید، $\mathbf{r}(t)$ را تا مرتبه‌ي دومِ ω به دست آورید.

d) زمانِ سقوط را تا مرتبه‌ي اولِ ω به دست آورید.

e) مؤلفه‌هاي بُردِ پرتاب R_x و R_y را تا مرتبه‌ي اولِ ω به دست آورید.

f) اگر نیروي کوریولیس را در نظر نگیریم، بُرد R_0 است. با در نظر گرفتنِ نیروي کوریولیس اندازه‌ي بُردِ پرتابه به اندازه‌ي ΔR عوض می‌شود. ΔR را تا مرتبه‌ي اولِ ω به دست آورید.

۲) میله‌ای به جرمِ m و طولِ $2l$ از یک طرف با ریسمانی آویزان است و طرفِ دیگرِ آن رویِ سطحی اُفقی قرار دارد.



a) فرض کنید اصطکاکِ بینِ میله و زمین ناچیز و میله در حالِ تعادل است. زاویه‌ی ϕ_0 چه‌قدر است؟

b) زاویه‌ای که میله با اُفق می‌سازد را θ_0 بگیرید. ریسمان را می‌بریم. آیا امکان دارد که سرِ میله که رویِ زمین است از زمین بلند شود؟ چرا؟

c) زمانی که میله اُفقی می‌شود سرعتِ مرکزِ جرمِ میله و سرعتِ زاویه‌ایِ میله چه‌قدر است؟

می‌خواهیم مسئله را دوباره بررسی کنیم.

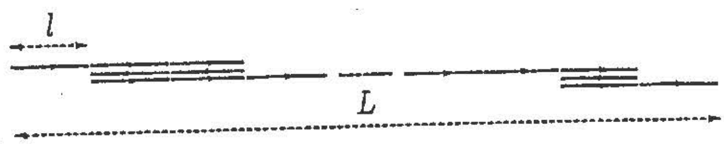
از این پس ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و لغزشیِ بینِ میله و زمین را برابر با μ بگیرید.

d) اگر میله در آستانه‌ی لغزش باشد زاویه‌ی ϕ_0 چه‌قدر است؟

e) فرض کنید ضریبِ اصطکاک آن‌قدر هست که در ابتدا میله نمی‌لغزد. زاویه‌ای که میله با اُفق می‌سازد را θ_0 بگیرید. ریسمان را می‌بریم. آیا امکان دارد قبل از لیز خوردنِ میله، سرِ میله که رویِ زمین است از زمین بلند شود؟ چرا؟

f) ضریبِ اصطکاک چه‌قدر باشد تا در ابتدا میله نلغزد؟ به ازایِ $\theta_0 = \pi/4$، جوابِ خود را ساده کنید.

۳۷) یک مدل بسیار ساده و خام از یک کش، یک زنجیر یک‌بعدی از N حلقه‌ی یکسان هر کدام به طول l است. فرض کنید هر حلقه فقط دو حالت ممکن دارد: به سمت راست یا به سمت چپ. طول کش یعنی L، جابجایی خالص از ابتدای چپ‌ترین حلقه تا انتهای راست‌ترین حلقه است. فرض کنید حلقه‌ها در محل اتصال‌شان آزادانه می‌توانند حرکت و یکی از دو جهت را اختیار کنند.



آ) رابطه‌ای برای انتروپی این دستگاه بر حسب N ($N \gg 1$) و N_R ($N_R \gg 1$) تعداد حلقه‌هایی که جهت‌شان به سمت راست است، به دست آورید.

ب) L را بر حسب N، N_R و l بنویسید.

برای یک چنین دستگاه یک‌بعدی قانون اول ترمودینامیک به صورت

$$dU = T\,dS + F\,dL$$

نوشته می‌شود که که F نیروی کشش کش است. وقتی نیروی F به سمت داخل است یعنی کش تمایل به جمع‌شدن دارد، F مثبت است.

پ) معادله‌ی حالت کش (یعنی رابطه‌ای بین F، L و T و سایر پارامترهای موجود) را به دست آورید.

ت) $\bar{l}$ را بر حسب l، F و T به دست آورید.

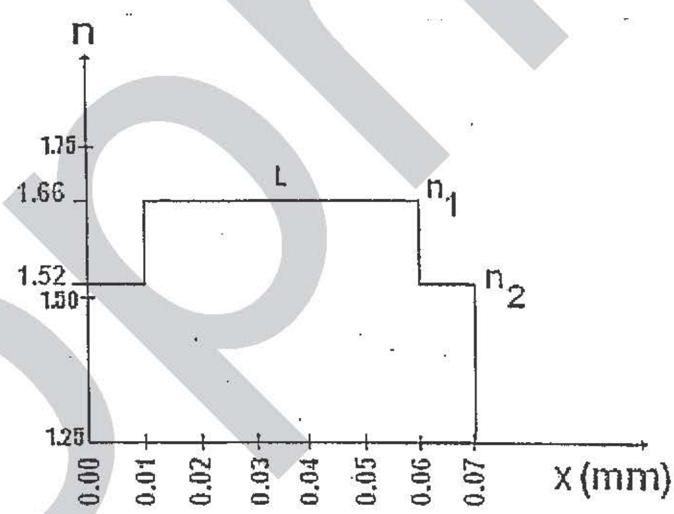
ث) در حد $L \ll Nl$ رابطه‌ی نیروی کشش با طول L را تا اولین جمله‌ی غیر صفر به دست آورید.

ج) به ازای یک نیروی کشش ثابت وقتی دما افزایش می‌یابد، کش تمایل به انبساط دارد یا به انقباض؟ چرا؟

۲۴) یک فیبر نوری با نمایه ضریب شکست پله ای بشکل زیر در نظر بگیرید. با فرض اینکه در صورت خم کردن این فیبر انحنای ایجاد شده از معادله یک دایره پیروی کند، حداقل شعاع انحنایی که بتوان فیبر را خم کرد و هنوز اتلاف قابل ملاحظه ای در شدت نور در حال انتشار در این فیبر ایجاد نشود را محاسبه کنید.

فرض ساده کننده: موج فرودی بر انتهای فیبر را تخت بگیرید.

(یعنی هنوز نور در فیبر منتشر شود)



مسئله‌ي ۲) یک فرفره اسباب بازی به جرم m را با سرعت زاویه ای بزرگ ω_s حول محور تقارن خود به چرخش در آورده و آن را روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار داده ایم. فرفره بدون آن که مرکز جرمش بالا یا پایین برود حول محور قائمی که از مرکز جرم آن می گذرد با سرعت زاویه ای ثابت Ω حرکت تقدیمی می کند به طوری که زاویه محور فرفره با امتداد قائم همواره α بماند. گشتاورهای لختی اصلی فرفره نسبت به محورهایی که از مرکز جرم می گذرند به ترتیب I_s، $I_\perp$ و $I_\perp$ هستند و مرکز جرم فرفره به فاصله l از نوک آن قرار دارد.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) سرعت زاویه ای حرکت تقدیمی را در نخستین تقریب که در آن فرض می شود $\Omega \ll \omega_s$ به دست آورید. نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

b) نخستین تصحیح به سرعت زاویه ای حرکت تقدیمی $\Delta\Omega$ رابه دست آورید. نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

c) برای $\omega \sim 10^2 s^{-1}$ و $l \sim 5cm$ مرتبه بزرگی Ω و $\Delta\Omega/\Omega$ را تخمین بزنید. نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

نسخه نهایی

امتحان سوم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۲۷/۱۱/۸۷

وقت: ۵ ساعت

۱) پوانکاره در سالِ ۱۸۹۶ مسئله‌ي حرکتِ یک ذره که فقط بارِ الکتریکی دارد را در حضورِ ذره‌ي دیگری که فقط بارِ مغناطیسی دارد حل کرد (تا کنون تک‌قطبی‌ي مغناطیسی مشاهده نشده.). فرض کنید تک قطبی‌ي مغناطیسی وجود دارد و ذره‌ای با بارِ الکتریکی‌ي q و جرمِ m در نقطه‌ي $\mathbf{r}_0$ و با سرعتِ اولیه‌ي $\dot{\mathbf{r}}_0$ در حضورِ بارِ مغناطیسی‌ي q_m که در مبدأ ساکن است، حرکت می‌کند. بارِ مغناطیسی را آن‌قدر سنگین فرض کنید که بتوان از حرکتِ آن چشم‌پوشی کرد. میدانِ مغناطیسی‌ي ناشی از بارِ مغناطیسی‌ي q_m، در فاصله‌ي $\mathbf{r}$، عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m \mathbf{r}}{r^3}.$$

راه‌نمایی: روابطِ

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

ممکن است به دردتان بخورد.

a) بردارِ مکانِ بارِ الکتریکی را با $\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از قانونِ نیوتن شتابِ آن را بر حسبِ $q, q_m, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mu_0$ به دست آورید.

b) اندازه‌ي سرعتِ ذره $|\dot{\mathbf{r}}|$ را بر حسبِ شرایطِ اولیه به دست آورید.

c) بردارِ $\mathbf{J} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} - C\frac{\mathbf{r}}{r}$ به ازاي مقدارِ معینی از C، ثابتِ حرکت است. ثابتِ C چه‌قدر است؟ از این پس C را همین مقدار بگیرید. $|\mathbf{J}|$ را بر حسبِ $m, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, q, q_m, \mu_0$ به دست آورید. θ زاویه‌ي بینِ $\mathbf{J}$ و $\mathbf{r}$ است. θ را بر حسبِ $|\mathbf{J}|, q, q_m, \mu_0$ به دست آورید.

d) شتابِ ذره را بر حسبِ $q, q_m, \mathbf{r}, \mathbf{J}, \mu_0, m$ به دست آورید.

e) بردارِ مکان را به دو بخشِ $\mathbf{r}_\parallel$، برداری در راستاي $\mathbf{J}$، و $\mathbf{r}_\perp$، برداری عمود بر $\mathbf{J}$، تجزیه کنید. $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{r}_\perp$ را بر حسبِ $\mathbf{r}, \mathbf{J}$ بنویسید.

f) $\ddot{\mathbf{r}}_\parallel$ را بر حسبِ $q, q_m, \mathbf{r}_\parallel, m, \mathbf{J}, \mu_0$ به دست آورید. $\ddot{\mathbf{r}}_\perp$ را نیز بر حسبِ $q, q_m, \mathbf{r}_\perp, m, \mu_0$ به دست آورید.

g) نشان دهید بردارِ $\mathbf{J}$ را می‌توان به صورتِ زیر نوشت

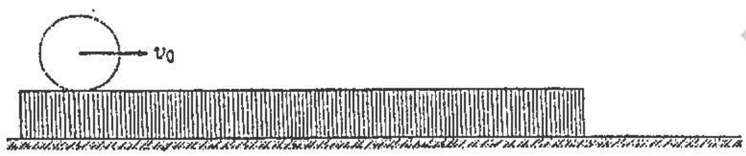
$$M\mathbf{r}_\perp\times\dot{\mathbf{r}}_\perp = \mathbf{J}.$$

ثابتِ M را به دست آورید.

h) محورِ z را $\hat{\mathbf{J}}$ و $\rho\hat{\rho} = \mathbf{r}_\perp$ بگیرید. با استفاده از تعریفِ $u := 1/\rho$، $\rho(\phi)$ را به دست آورید. ϕ زاویه‌ي سمتی در مختصاتِ استوانه‌ای است.

(۲۷

در زمانِ $t = 0$، گلوله‌ای به جرمِ m، شعاعِ R و لختیِ دورانیِ $I = 2mR^2/5$ را با سرعتِ اولیه‌ی v_0 را رویِ یک تخته‌ی بلند به همان جرمِ m پرتاب می‌کنیم. ضریب اصطکاک بینِ گلوله و تخته را μ_1 و بینِ تخته و زمین را μ_2 بگیرید.



a) چه شرطی بینِ پارامترهایِ μ_1, μ_2 برقرار باشد تا تخته ساکن بماند؟

b) اگر شرطِ بندِ a) برقرار باشد چه زمانی غلتشِ گلوله آغاز می‌شود؟ این زمان را با T_1 نمایش دهید.

ازاین پس فرض کنید شرطِ بندِ a) برقرار نیست.

c) چه زمانی غلتشِ گلوله آغاز می‌شود؟ این زمان را با T_2 نمایش دهید. سرعتِ مرکزِ گلوله، v_1، سرعتِ زاویه‌ایِ گلوله، ω_1، و سرعتِ تخته، v_2، پس از مدتِ T_2 چه‌قدر است؟

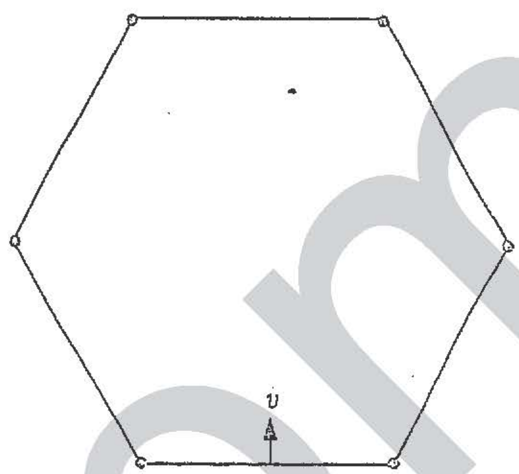
d) بعد از گذشتنِ مدت‌زمانِ T_3 از شروعِ غلتشِ سرعتِ تخته صفر می‌شود. T_3 را به دست آورید. در این زمان سرعتِ مرکزِ گلوله، v'_1، و سرعتِ زاویه‌ایِ گلوله، ω'_1، چه‌قدر است؟

۳) درون مادهٔ رسانایی به رسانندگیِ σ_0، کره‌ای با رسانندگیِ σ_1 قرار داده ایم. محیطِ بیرونی تا بی نهایت ادامه دارد.
تمام این مجموعه را در معرض میدان ثابت الکتریکیِ $\vec{E} = E_0\hat{z}$ قرار می‌دهیم.

الف – با فرضِ اینکه در اثر اختلاف میان رسانندگیِ محیط بیرونی با کرهٔ داخلی، بار سطحی به شکل $\Sigma_0 \cos(\theta)$ برویِ سطحِ کره جمع می‌شود، مقدارِ Σ_0 را بیابید.
(برای سادگی فرض کنید پتانسیلِ تولید شده از توضیع بار $\Sigma_0 \cos(\theta)$ در درون یا بیرونِ کره از شکلِ کلیِ $(ar + b/r^2)\cos(\theta)$ پیروی می کند.)

ب – مقدار تغییری که در اثر وجود کرهٔ مزبور در کل جریان عبوری از این مجموعه ایجاد می شود (ΔI) را محاسبه کنید.

۲) شش میله‌ی همگن و یکسان مطابق شکل به وسیله‌ی محورهای بدون اصطکاک به صورت یک شش‌ضلعی منتظم به هم وصل شده‌اند. این شش‌ضلعی روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار گرفته است. ضربه‌ای به وسط یکی از میله‌ها و عمود بر میله زده می‌شود به طوری که این میله با سرعت v شروع به لغزیدن می‌کند. در این لحظه سرعت میله‌ی روبرویی چقدر است؟



۵)

الف- محل و نوع تصاویر میانی و نهایی را که از یک دستگاه متشکل از دو عدسی همگرا $f_1 = 15\ cm$ و واگرا با $f_2 = 15\ cm$ که در فاصله $60\ cm$ از یکدیگر واقع شده اند را برای حالتی که جسم در فاصله ی $25\ cm$ در سمت چپ عدسی همگرا واقع شده است بدست آورید. عدسی واگرا در سمت راست عدسی همگرا واقع است.

ب- دیاگرام پرتو را با رعایت مقیاس رسم کنید.

پ- بزرگنمایی تک تک عدسی ها و بزرگنمایی کل را بدست آورید.

[illegible]

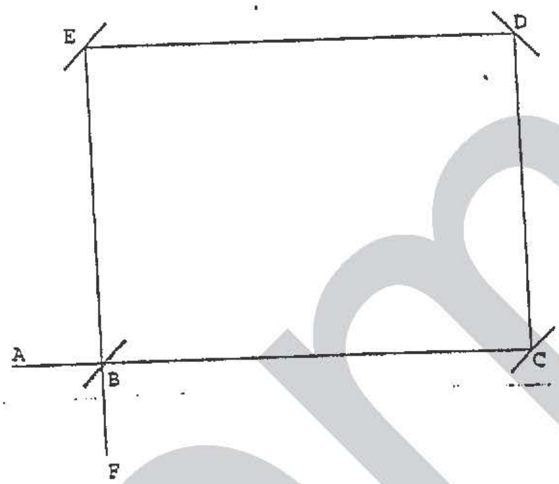
امتحان چهارم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفره)

۱۸/۱۲/۸۷
وقت: ۳٫۵ ساعت

۱- تداخل‌سنج سانیاک

توجه: همه‌ی سرعت‌ها را بسیار کوچک‌تر از سرعت نور بگیرید و مسئله را در چارچوب نسبیّت گالیله‌ای حل کنید.

تداخل‌سنجِ سانیاک از سه آینه و یک تیغه یِ شیشه‌ای، مطابقِ شکل، تشکیل شده است. چشمه یِ نور در نقطه یِ A است. باریکه یِ نور پس از رسیدن به تیغه یِ شیشه‌ای، که در B است، به دو بخش تقسیم می‌شود.



- بخشِ راست‌گرد، با بازتاب از آینه‌هایی که در C و D و E هست، مسیرِ BCDEB را می‌پیماید تا دوباره در B به تیغه‌ی شیشه‌ای برسد. بخش ی از این باریکه از تیغه عبور می‌کند و در F واردِ تلسکپ می‌شود. زمان ی که طول می‌کشد تا این پرتو یِ راست‌گرد مسیرِ BCDEB را بپیماید T_R است.

- بخشِ چپ‌گرد مسیرِ BEDCB را می‌پیماید تا دوباره در B به تیغه برسد. تیغه بخش ی از این باریکه باز می‌تاباند و باریکه در F واردِ تلسکپ می‌شود. زمانی که طول می‌کشد تا این پرتو یِ چپ‌گرد مسیر BEDCB را بپیماید T_L است.

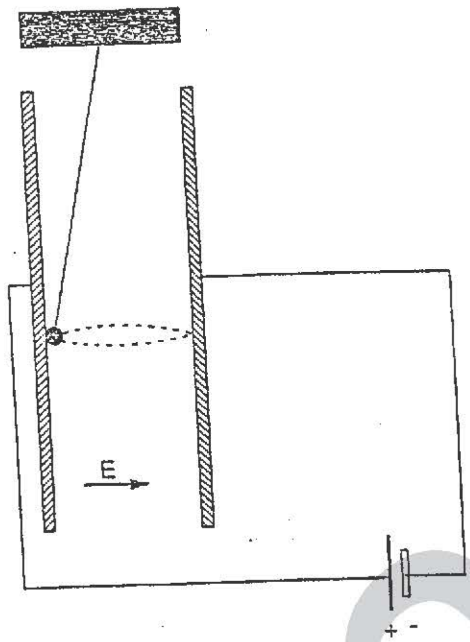
طولِ بازوها یِ کوچک‌تر (بازوها یِ BE و CD) a، و طولِ بازوها یِ بلندتر (بازوها یِ ED و BC) b است.

در آزمایش‌گاه ـ لخت ـ K (آزمایش‌گاه ی که در آن قانون ـ اول ـ نیوتن معتبر است) $T_R = T_L = \frac{2(a+b)}{c}$ است. اکنون فرض کنید در این آزمایش‌گاه، تداخل‌سنج ـ سانیاک را رو ی ـ یک میز ـ چرخان بگذاریم که نسبت به آزمایش‌گاه با سرعت ـ زاویه‌ای ی ـ ω می‌چرخد. صفحه ی ـ میز صفحه ی ـ $z = 0$ است، و محور ـ دوران در مبدا ـ مختصّه‌ها و در امتداد ـ محور ـ z است. اینک پرتو ی ـ راست‌گرد در زمان ـ T'_R مسیر ـ BCDEB را می‌پیماید، و پرتو ی ـ چپ‌گرد در زمان ـ T'_L مسیر ـ BEDCB را می‌پیماید. با استفاده از قاعده ی ـ جمع ـ گالیله‌ای ی ـ سرعت‌ها، و با این فرض که سرعت ـ نور نسبت به آزمایش‌گاه ـ K در همه ی ـ جهت‌ها $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ است، و ω کوچک است، می‌توان اختلاف ـ زمان ـ حرکت ـ پرتوها ی ـ راست‌گرد و چپ‌گرد در مسیرها ی ـ بسته ی ـ BCDEB و BEDCB، یعنی $\Delta T' = T'_R - T'_L$ را حساب کرد.

الف) فرمول ی برا ی ـ $\Delta T'$ بر حسب ـ a و b و ω و c بیابید.

ب) فرض کنید یک تداخل سنج ـ سانیاک با بازوها یی به طول‌ها ی ـ $a = 200\ \mathrm{m}$ و $b = 150\ \mathrm{m}$ بسازیم و آن را در زمینی افقی در تهران نصب کنیم. $\Delta s := c\Delta T'$ برا ی ـ این آزمایش چه قدر خواهد بود؟ هم فرمول بنویسید، و هم عدد را با دو رقم ـ معنی‌دار حساب کنید.

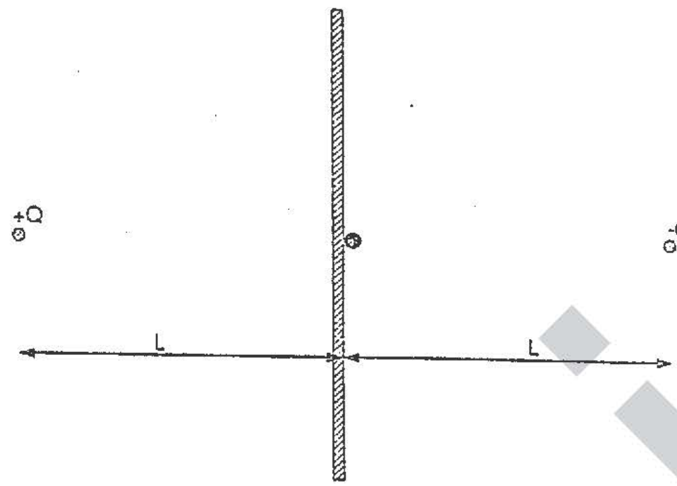
۲۷-



وزنهٔ فلزیِ کوچکی در انتهای طناب یک آونگ میان دو صفحهٔ خازن مقید می‌باشد. این وزنه پیوسته میان دو صفحهٔ خازن رفت و آمد کرده و موجب عبور جریان از آن می‌شود. هدف این مسئله محاسبهٔ مقاومت نوعی این دستگاه است. برخوردهای وزنه به دو صفحهٔ خازن کاملا کشسان و بدون اصطکاک و نیز جرم صفحات به مراتب بیشتر از جرم وزنه است؛ به شکلی که وزنه نیمی از مسیر خود را بصورت آونگ (با طناب کشیده) و نیم دیگر را بصورت حرکت پرتابی طی می کند.

اگر از نیروی الکتریکی که صفحات خازن به وزنه وارد میکنند، بتوان صرفنظر کرد،

الف – مطلوب است سرعت وزنه در پایین‌ترین نقطهٔ مسیرِ آن، به شکلی که وزنه روی مسیر نمایش داده شده در شکل حرکت نماید. در این صورت T (زمان تناوب وزنه) چه مقدار خواهد بود.



در طولِ هربرخورد، وزنه با صفحه‌ای که به آن برخورد کرده هم پتانسیل می‌شود. برای بدست آوردن باری که وزنه بدست می‌آورد، از روش تصویر استفاده می‌کنیم. میدان ثابتِ $\bar{E}$ را بوسیلهٔ دو بار بسیار بزرگِ $\pm Q$، که بی‌نهایت دور ($\pm L$) قرار گرفته‌اند، ایجاد می کنیم. فرض کنید شعاع وزنه(R) از فاصلهٔ میان دو صفحه (D) بسیار بسیار کوچکتر است؛ و در زمان برخورد وزنه با هریک از صفحات، فاصلهٔ سطحِ وزنه با سطحِ آن صفحه مقدارِ کوچک و غیر صفر d_0 است که به خصوصیات ملکولیِ سطح وابسته می‌باشد:

ب – با استفاده از روش تصویر، بار وزنهٔ فلزی را تا اولین مرتبهٔ غیر صفر بیابید. بررسیِ اولین جملهٔ غیر صفر کافی است و نیازی به بررسیی بقیهٔ جملات و رفتار عمومیِ سری نیست.

پ – مقاومت نوعیِ این مجموعه را در حدِ $\bar{E} \to 0$ بیابید.

حالم از سوال بهم خورد.

۳- میله‌ی نازکی به طول L و سطح مقطع A مطابق شکل در نقطه‌ی P به دیوار قائمی لولا شده و در مایعی با چگالی ρ قرار دارد. چگالی میله $\sigma\rho$ $(0 < \sigma < 1)$ و لولا بدون اصطکاک است. مکان نقطه‌ی P از نقطه‌ی O سطح مایع با h مشخص می‌شود. h می‌تواند هر مقداری در بازه‌ی $-L \leq h \leq L$ باشد.

آ) گشتاور وارد بر میله را بر حسب زاویه‌ی α که الزاماً مربوط به حالت تعادل نیست به ازای مقادیر مختلف h، نسبت به نقطه‌ی P بنویسید.

ب) در چه محدوده‌هایی از h برای میله حالت تعادل پایدار وجود دارد؟ αی مربوط به هر محدوده را تعیین کنید.

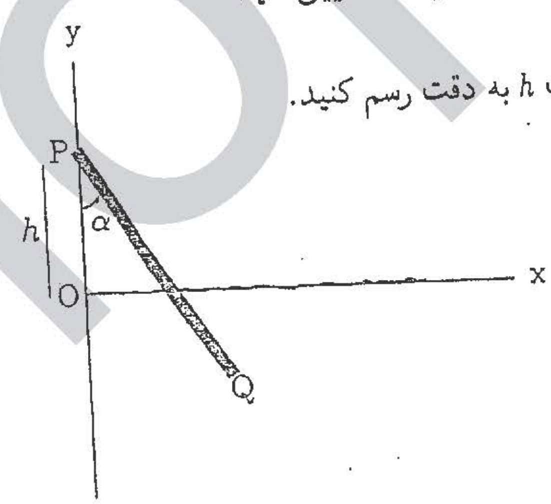
پ) نمودار α بر حسب h را در بازه‌ی تغییرات h به دقت رسم کنید.

ت) معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی Q انتهای میله وقتی h مقادیر ممکن خود را اختیار می‌کند در دستگاه xOy به دست آورید.

اکنون فرض کنید در نقطه‌ی P گشتاور $\frac{1}{2}\epsilon\rho g A L^2$ $(0 < \epsilon \ll 1)$ که تمایل به چرخاندن میله در جهت عکس عقربه‌های ساعت دارد بر میله وارد می‌شود

ث) αی حالت‌های تعادل پایدار را در محدوده‌ی تغییرات h تعیین کنید.

ج) نمودار α بر حسب h را در بازه‌ی تغییرات h به دقت رسم کنید.



بسمه تعالی

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۳۰/۱/۸۸

وقت: ۵ ساعت

۱ـ

a) جسمی به جرمِ m به فنری که ضریبِ سختیِ آن k تابعِ زمان است می‌بندیم. $E(t)$ و $\omega(t)$ را به صورتِ زیر می‌گیریم

$$E(t) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(t)x^2$$
$$\omega(t) := \sqrt{\frac{k(t)}{m}},$$

و تابعِ $J(t)$ را به صورتِ

$$J := \frac{E(t)}{\omega(t)},$$

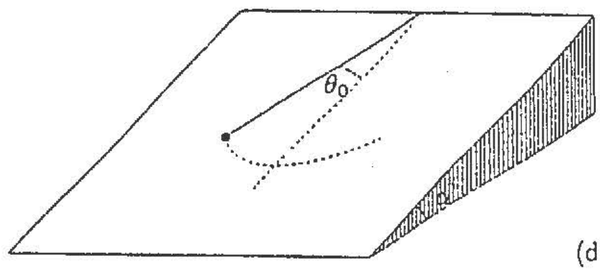
تعریف می‌کنیم. $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$ را بر حسبِ x، $\dot{x}$، m، k، و $\dot{k}$ حساب کنید.

b) فرض کنید تغییراتِ ضریبِ سختیِ فنر نسبت به زمان بسیار کُند است به طوری که تغییرِ ضریبِ سختی در یک دوره بسیار ناچیز است به طوری‌که $T \ll k/\dot{k}$، که T زمانِ تقریبیِ یک دوره است. $\dot{J}$ را تا مرتبه‌ی یکِ $\dot{k}$ حساب کنید و از جمله‌هایِ با توانِ بیش از یکِ $\dot{k}$ و مشتقاتِ بالاترِ آن چشم‌پوشی کنید، یعنی در یک دوره $\dot{k}$ را خیلی کوچک و تقریباً ثابت بگیرید. میان‌گینِ زمانیِ $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$ در یک دوره را محاسبه کنید.

$$\langle\frac{dJ}{dt}\rangle := \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} dt\,\frac{dJ}{dt}.$$

c) دامنه‌ی حرکتِ جسمی به جرمِ m که به فنری با خصوصیاتِ بالا نصب شده و در حالِ نوسان است، A، با چه توانی از k تغییر می‌کند؟

d) جسمی به جرمِ m به هم‌راهِ طنابی به طولِ l که انتهایِ آن در نقطه‌ای رویِ سطحِ شیب‌داری به شیبِ α ثابت‌شده تشکیل آونگی می‌دهند. α را به کندی تغییر می‌دهیم. دامنه‌ی آونگ را کوچک بگیرید. با تغییرِ α انرژیِ آونگ E و دامنه‌ی آونگ θ_0 چه‌گونه تغییر می‌کنند؟



شکلِ مربوط به بخشِ d)

۲۷-

a) دو حبابِ صابون به شکلِ کره‌هایی با شعاع‌هایِ r_1 و r_2 که مجاورِ هم هستند در هم ادغام می‌شوند و حبابِ صابونی به‌شکلِ کره با شعاعِ r_3 می‌سازند. هوایِ داخلِ حباب‌ها را گازِ ایده‌آل و فرآیند را هم‌دما بگیرید. فرض کنید جرمِ هوایی که در حبابِ نهایی است همان مقداری باشد که در دو حبابِ اولیه بوده. کششِ سطحیِ حبابِ صابون را σ و فشارِ هوایِ بیرونِ حباب‌ها را P_0 بگیرید. معادله‌ای بینِ r_3، r_1، r_2، σ، و P_0 به دست آورید.

b) فرض کنید σ خیلی کوچک است. بسطِ

$$r_3 = r_3^{(0)} + \sigma r_3^{(1)} + \cdots, \tag{1}$$

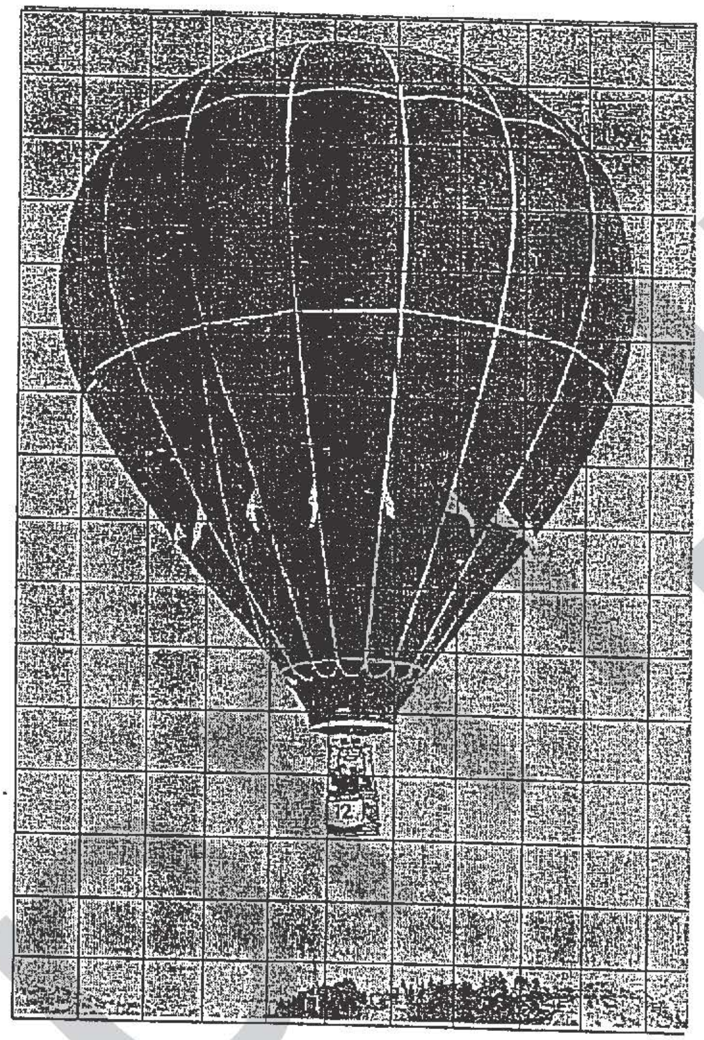
را درنظر بگیرید. تا مرتبه‌یِ اولِ تقریب r_3 را به دست آورید. اختلافِ سطحِ حبابِ نهایی نسبت به مجموعِ سطحِ حباب‌هایِ اولیه تا اولین مرتبه‌یِ غیرِصفرِ تقریب چه‌قدر است؟ اختلافِ حجمِ حبابِ نهایی نسبت به مجموعِ حجمِ حباب‌هایِ اولیه تا اولین مرتبه‌یِ غیرِصفرِ تقریب چه‌قدر است؟

c) فرض کنید σ خیلی بزرگ است. بسطِ

$$r_3 = \bar{r}_3^{(0)} + \frac{1}{\sigma}\bar{r}_3^{(1)} + \cdots, \tag{2}$$

را درنظر بگیرید. تا مرتبه‌یِ اولِ تقریب r_3 را به دست آورید. اختلافِ سطحِ حبابِ نهایی نسبت به مجموعِ سطحِ حباب‌هایِ اولیه تا اولین مرتبه‌یِ غیرِصفرِ تقریب چه‌قدر است؟ اختلافِ حجمِ حبابِ نهایی نسبت به مجموعِ حجمِ حباب‌هایِ اولیه تا اولین مرتبه‌یِ غیرِصفرِ تقریب چه‌قدر است؟

۳ ـ



عکس ی که می‌بینید بالن ی را نشان می‌دهد که با هوا ی ـ گرم پرواز می‌کند. در سبد ـ بالن چهار نفر ایستاده اند.

۱) مساحت و حجم ـ محفظه ی ـ هوا ی ـ گرم را تخمین بزنید.

۲) جرم ـ محفظه ی ـ هوا ی ـ گرم را تخمین بزنید. (منظور جرم ـ پارچه است. چگالی ی ـ پارچه را $100\ \mathrm{gr/m^2}$ بگیرید.)

۳) جرم ـ سبد به علاوه ی ـ مسافران و تجهیزات ـ این بالن را تخمین بزنید.

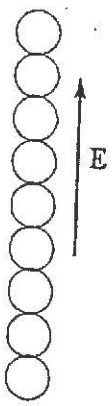
۴) فرض کنید دما ی ـ هوا $0°\mathrm{C}$ باشد. هوا ی ـ بالن را باید تا چه دما یی گرم کنیم تا بالن در هوا معلق شود.

۵) برا ی ـ گرم کردن ـ بالن، تا حدّ ی که به پرواز در آید، چه قدر انرژی لازم است؟

$1\,\text{atm} \simeq 10^5\,\text{Pa}$ $\quad R = 8.3\,\text{J/mol K}$

مدلی ساده برای قطبشگر نور:

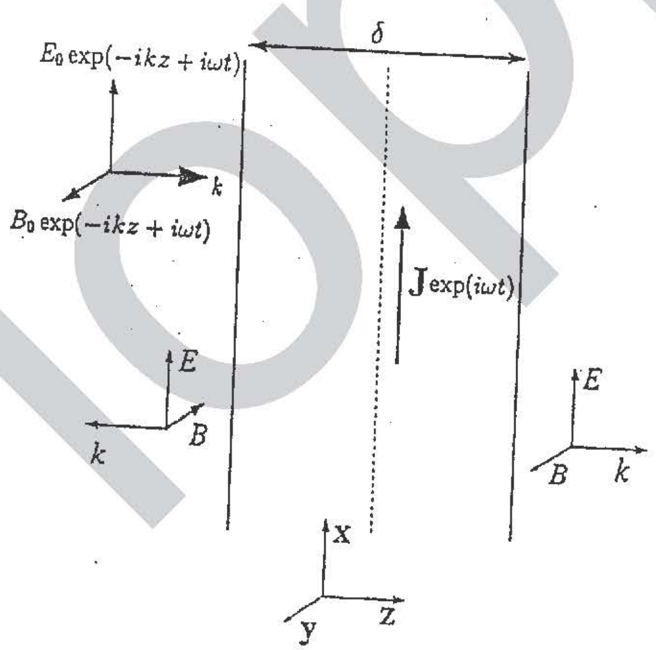
پلیمری استوانه ای شکل دارای یک الکترون (با بار q) است که مقید به حرکت یک بعدی در روی پلیمر می باشد. بار الکتریکی کل این مجموعه، صفر بوده و حرکت الکترون در راستای پلیمر، با اصطکاکی از جنس $\vec{F}_f = -b\vec{V}$ کند می شود. محور طولی پلیمر، در راستای محور x ها قرار گرفته است، اگر این مجموعه در میدان الکتریکی $\vec{E} = E_0\,(\cos(\varphi)\,\hat{x} + \sin(\varphi)\,\hat{y})\,\mathrm{Exp}(i\omega t)$ قرار گیرد:



الف – معادله حرکت الکترون مقید به پلیمر، و نیز دامنهٔ حرکت آن A_0، را بیابید.

فرض کنید طول پلیمر l خیلی خیلی از دامنهٔ حرکت الکترون بزرگتر باشد. تعداد زیادی از این پلیمرها را در لایهٔ نازک شیشه ای قرار می دهیم، بطوریکه چگالی آنها (تعداد در واحد حجم) n می باشد. لایهٔ مزبور موازی صفحهٔ xy قرار گرفته است و ضخامت آن δ می باشد. تمامی پلیمرهای درون آن همچنان در راستای محور xها می باشند. برای سادگی کار ضریب دی الکتریک شیشه را 1 فرض کنید و از خواص مغناطیسی احتمالی شیشه نیز صرفنظر نمایید.

ب – چگالی جریان $\vec{J}$، ناشی از میدان الکتریکی ذکر شده در بالا را بیابید. فرکانس ω چه خصوصیتی باید داشته باشد تا جریان و میدان اختلاف فاز نداشته باشند.



در مرحلهٔ بعد، لایهٔ مورد نظر را تحت تابش یک موج الکترومغناطیسی تخت که در راستای محور z ها منتشر می شود، قرار می دهیم:

$$\begin{cases}\vec{E} = E_0\ \mathrm{Exp}(-ikz + i\omega t)\ \hat{x}\\ \vec{B} = \dfrac{E_0}{C}\ \mathrm{Exp}(-ikz + i\omega t)\ \hat{y}\end{cases}$$

که C سرعت نور در خلا می باشد. با فرض اینکه ω شرط خواسته شده در بخش ب را همچنان ارضا می کند، و نیز ضخامت لایه δ بسیار کوچکتر از طول موج نور تابیده شده باشد ($\delta << 2\pi/k$):

پ – میدانِ مغناطیسیِ تولید شده در رویِ سطحِ این لایهٔ نازک را بیابید. آیا می توانید از قانونِ آمپر استفاده کنید؟ چرا؟

لایهٔ نازک در دو سویِ خود دو جبههٔ موج تخت ایجاد میکند که یکی بسویِ $\hat{z}+$ و دیگری در جهتِ $\hat{z}-$ انتشار میآبند. اگر $\vec{E}$ و $\vec{B}$ میدان هایِ الکتریکی و مغناطیسیِ یک موجِ الکترومغناطیسی در نقطهٔ دلخواهی از فضا باشند، جریانِ انرژی که بوسیلهٔ این موج از این نقطه حمل می شود با بردار پوینتینگِ $\vec{S}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ داده می شود، که μ_0 تراوابی مغناطیسیِ محیط می باشد.

ت – با استفاده از نتیجهٔ بخشِ پ، دو جبههٔ موج تولید شده بوسیلهٔ لایهٔ نازک را بیابید (شمابی کلی از این دو جبههٔ موج در شکل آمده است).

سپس با استفاده از داده های این بخش:

ث – موجِ عبوری و موجِ بازتابی را محاسبه نمایید.

حال فرض کنید موج دلخواهِ:

$$\begin{cases}\vec{E}=E_0\,\mathrm{Exp}(-ikz+i\omega t)\,(\cos(\varphi)\,\hat{x}+\sin(\varphi)\,\hat{y})\\ \vec{B}=\frac{E_0}{C}\,\mathrm{Exp}(-ikz+i\omega t)\,(-\sin(\varphi)\,\hat{x}\pm\cos(\varphi)\,\hat{y})\end{cases}$$

بر لایهٔ نازک تابیده شود.

ج – برای این حالت نیز موجِ عبوری و موجِ بازتابی را محاسبه نمایید.

چ – بقایِ میانگینِ انرژی (میانگین در طول یک سیکل کامل $\Delta t=2\pi/\omega$) را برای این مجموعه تا مرتبهٔ اول نسبتِ به δ تحقیق کنید.

ح – موفق باشید.

۵۷ -

الف- فرض کنید تداخل سنج مایکلسون با نوری که از دو طول موج نزدیک بهم λ_1 و λ_2 تشکیل شده است روشن و فریز تشکیل شود. هنگامیکه آینه بازوی متحرک را حرکت دهیم بصورت دوره ای فریزها از بین می روند و دوباره پدیدار می شوند. از یک پدیداری تا یک پدیداری بعدی را یک طول همسازی یا ناهمسازی گویند. اگر این فاصله را Δd بنامیم و داشته باشیم:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

رابطه ای که Δd را به λ_1 و λ_2 مربوط می کند بدست آورید.

ب- فرض کنید در داخل بازوی ثابت تداخل سنج مایکلسون یک ظرف مکعب مستطیل پر از آب بطول یک سانتی متر قراردهیم. دو وجه این ظرف که پنجره های ورودی و خروجی نور می باشند کاملا" با هم موازی بوده و از ضخامت آنها صرف نظر می کنیم. حال اگر بلوری از جنس نمک طعام در آن قراردهیم بتدریج این بلور حل شده و مشاهده خواهیم کرد که فریزهای تداخل سنج مایکلسون شروع به جابجایی می کنند. پس از پایان حل شدن کامل نمک طعام در آب ۲۰,۰۰۰ فریز جابجا شده است. اختلاف ضریب شکست محلول نهایی را با آب اولیه بدست آورید. طول موج چشمه نور را ۶۰۰ نانومتر درنظر بگیرید.

بسمه تعالی

امتحان ششم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ده نفر)

1388/2/6

وقت: 4 ساعت

1- یک ذره‌ی باردار با انرژی زیاد که با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط حرکت می‌کند، تابش می‌کند که به تابش چرنکوف معروف است. ذره‌ی بارداری با جرم m_0 و سرعت $u = \beta c$ در محیطی با ضریب شکست n حرکت می‌کند. چون $u > \frac{c}{n}$ است فوتونی با ممنتم $p_\gamma = \hbar k$ تابش می‌کند، که در آن $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h ثابت پلانک است) و $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ طول موج فوتون است). انرژی فوتون هم $E_\gamma = h\nu$ است که ν فرکانس فوتون است.

الف) زاویه‌ی θ که زاویه‌ی بین جهت فوتون تابش شده و جهت اولیه‌ی ذره‌ی باردار است را برحسب n ، β ، $\hbar$ ، k ، و ممنتم اولیه‌ی ذره، p، به دست آورید.

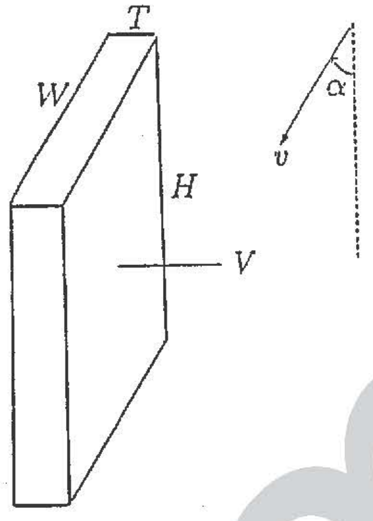
ب) با فرض $\hbar k \ll p$ عبارت به دست آمده در الف را ساده کنید.

از اینجا به بعد، مسئله را با فرض ب حل کنید.

ج) گاز هیدروژن در فشار یک اتمسفر و دمای $20°C$ ، ضریب شکست $n = 1 + 1.35 \times 10^{-4}$ دارد. کمینه‌ی انرژی جنبشی یک الکترون برحسب MeV چه‌قدر باید باشد تا در این محیط تابش چرنکوف کند؟ جرم سکون الکترون $m_0 = 0.5 \, \frac{\text{MeV}}{c^2}$ است.

د) یک آشکارساز تابش چرنکوف از سیستمی ساخته شده که در محیطی با گاز هیدروژن در فشار یک اتمسفر و دمای $20°C$ قرار دارد. سیستم اپتیکی آن فوتون تابش شده در زاویه‌ی θ را با دقت $\delta\theta = 10^{-3}$ رادیان اندازه‌گیری می‌کند. یک باریکه از ذرات باردار با ممنتم $100\frac{GeV}{c}$ از این آشکارساز عبور می‌کند. چون ممنتم معلوم است، اندازه‌گیری زاویه‌ی چرنکوف، در واقع سنجشی از جرم سکون ذره، m_0، را می‌دهد. برای ذراتی با جرم m_0 نزدیک $1 \, \frac{\text{GeV}}{c^2}$ ، تا مرتبه‌ی اول نسبت به کمیت‌های کوچک، خطای کسری $\frac{\delta m_0}{m_0}$ برای تعیین m_0 با این آشکارساز چرنکوف چه‌قدر است؟

۲- شخصی با سرعت V می‌خواهد مسافت مستقیم D را در بارانی که با سرعت v و با زاویه‌ی α نسبت به راستای قائم می‌بارد طی کند. قد شخص را H و مساحت روی سر و شانه‌ها را برابر مساحت مستطیلی به ابعاد T و W بگیرید.

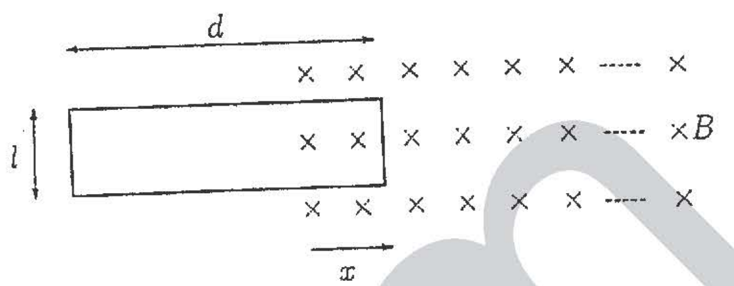


$\vec{V}$ عمود بر صفحه‌ی H-W است و $\vec{v}$ در صفحه‌ی H-T قرار دارد. اگر تعداد قطره‌های باران در واحد حجم محیطی که شخص در آن حرکت می‌کند n باشد

آ) میزان خیس‌شدگی که برابر است با تعداد قطره‌های باران، N، که به این شخص می‌خورد بر حسب زاویه‌ی α ($-30° \leq \alpha \leq 30°$) به دست آورید.

ب) به ازای $H = 180\,\text{cm}$، $T = 20\,\text{cm}$، $W = 50\,\text{cm}$، $D = 100\,\text{m}$ و $n = 5000/\text{m}^3$ نمودار N بر حسب V/v را در بازه‌ی $0 < V/v < 0.5$ و برای $\alpha = -30°$، $\alpha = -15°$، $\alpha = 15°$ و $\alpha = 30°$ به دقت (بر روی یک شکل) رسم کنید.

۴- حلقه‌ی مستطیل شکلی به جرم M، طول d، عرض l، مقاومت الکتریکی R و ضریب خودالقای L با سرعت اولیه‌ی v_0 بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 عمود بر سطح حلقه اعمال می‌شود. لحظه‌ی $t=0$ را وضعیتی بگیرید که انتهای سمت راست حلقه در آستانه ورود به ناحیه‌ای است که در آن میدان مغناطیسی وجود دارد و $x=0$ است. فرض کنید طول حلقه آنقدر طویل هست که همواره فقط انتهای سمت راست حلقه در میدان مغناطیسی قرار دارد و انتهای سمت چپ خارج از میدان مغناطیسی است.



آ) به ازای $L=0$ و $R\neq 0$، $v(t)$ و $x(t)$ را بدست آورید.

ب) به ازای $L\neq 0$ و $R=0$، $v(t)$ و $x(t)$ را بدست آورید.

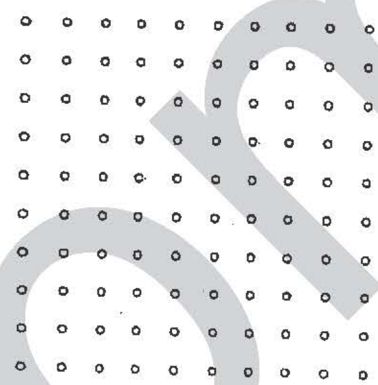
پ) به ازای $L\neq 0$ و $R\neq 0$، $v(t)$ و $x(t)$ را بدست آورید.

اکنون در نظر بگیرید همین حلقه‌ی مستطیل شکل که طول و عرض آن d و l و دارای مقاومت الکتریکی R و ضریب خودالقای L است در میدان مغناطیسی $B(t)=B_0\sin\omega t$ که عمود بر سطح حلقه است به طور ساکن قرار دارد. تمام سطح حلقه در میدان مغناطیسی واقع است.

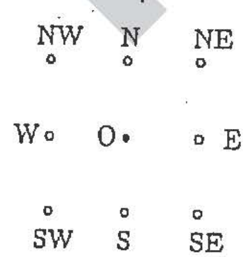
ت) نیروی مغناطیسی لحظه‌ای و نیروی متوسط وارد بر واحد طول حلقه را بدست آورید.

۱۷ ـ برای یافتن ظرفیت یک خازن، باید ابتدا یک مسئله‌ی مقدار مرزی را حل کرد ــ یک صفحه‌ی خازن را به پتانسیل 0 و صفحه‌ی دیگر را به پتانسیل V وصل می‌کنیم و پتانسیل را در فضا پیدا می‌کنیم. اگر این مسئله حل شود، با به دست آوردن انرژی کل (U) یا بار صفحه‌ی مثبت (Q) ظرفیت به دست می‌آید.

یک راه عددی برای حل کردن معادله‌ی لاپلاس در دو بعد این است: یک شبکه‌ی مربعی در نظر می‌گیریم و به جای معادله‌ی لاپلاس، نظیر گسسته‌ی آن را حل می‌کنیم. در حدی که فاصله‌ی نقاط شبکه خیلی کوچک باشد آن چه به دست می‌آید تقریبی از حل معادله‌ی لاپلاس است. منظور از شبکه‌ی مربعی، شبکه‌ای از نقاط است با مختصه‌های (na, ma) که در این جا a طول شبکه نام دارد و n و m دو عدد صحیح اند. در زیر یک شبکه‌ی 10×10 نشان داده شده است.



یک نقطه از یک شبکه‌ی مربعی را در نظر بگیرید، مثل نقطه‌ی O در شکل زیر (که با دایره‌ی سیاه نشان داده شده است). O هشت همسایه دارد که در شکل زیر آن‌ها را با N، S، E، W، NW، NE، SE، و SW نشان داده ایم.



مقدار تابع f در نقطه‌ی O را با f_O، و مقدار آن را در نقطه‌های دیگر با نمادهای مشابه

نشان می‌دهیم (مثلاً f_{SW} یعنی مقدار f در نقطه‌ی SW). با بسط تیلر، می‌توان نشان داد که اگر فاصله‌ی نقاط مجاور شبکه a باشد، داریم

$$\frac{1}{5}(f_N + f_S + f_E + f_W) + \frac{1}{20}(f_{NE} + f_{NW} + f_{SE} + f_{SW}) = f_O + \delta f \qquad (1)$$

که در این جا

$$\delta f = \frac{3a^2}{10}\nabla^2 f + \frac{a^4}{40}\nabla^2(\nabla^2 f) + O(a^6) \qquad (2)$$

در این فرمول همه‌ی مشتق‌ها ($\nabla^2 f$ و $\nabla^2(\nabla^2 f)$) در نقطه‌ی O اند. از این فرمول واضح است که برای یک تابع هم‌آهنگ (یعنی اگر $\nabla^2 f = 0$ باشد) مقدار تابع در هر نقطه از شبکه با میانگینی که فرمول (1) هست داده می‌شود ــ البته مشروط بر این که a به قدر کافی کوچک باشد.

سیم‌هایی که برای انتقال داده‌ها به کار می‌روند از دو رشته‌ی رسانا تشکیل می‌شوند. در سیم‌های هم‌محور، یک رشته در درون رشته‌ی دیگر است، طوری که محور هر دو رشته بر هم منطبق است. معمولاً مقطع هر دو رشته دایره است، که یعنی سیم از دو استوانه‌ی هم‌محور تشکیل شده است. اما سیم هم‌محوری در نظر بگیرید که مقطع رشته‌های درونی و بیرونی آن مربع باشد، یعنی سیمی که تشکیل شده از دو مکعب‌مستطیل بسیار بلند که یکی در درون دیگری قرار گرفته و محور هر دو بر هم منطبق است. مقطع هر دو سیم مربع است. طول ضلع مربع درونی b و طول ضلع مربع بیرونی $2b$ است. طول سیم بسیار بزرگ‌تر از b است. می‌خواهیم ظرفیت بر واحد طول این سیم را حساب کنیم. (این ظرفیت به b بستگی ندارد).

برای این کار رشته‌ی درونی را به پتانسیل 1 و رشته‌ی بیرونی را به پتانسیل 0 وصل می‌کنیم. در فضا یک میدان الکتریکی تولید می‌شود که پتانسیل آن را f می‌نامیم. محور z را محور سیم می‌گیریم. اضلاع دو مربع را به موازات محورهای x و y می‌گیریم. می‌توان نشان داد که f حل معادله‌ی لاپلاس دوبعدی است، یعنی:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

سؤال سود

۵) دو صفحه‌ي تختِ خیلی بزرگِ نزدیک به هم که مطابقِ شکل با هم زاویه‌ي α می‌سازند را درونِ مایعی با کششِ سطحی‌ي σ که سطح صفحه‌ها را تر می‌کند وارد می‌کنیم. چسبندگی‌يِ مایع به صفحه‌ها γ است. مایع مقداری بالا می‌رود به طوری‌که بالاترین نقطه‌ي سطحِ آن از سطحِ آزادِ مایع به اندازه‌ي H بالاتر و پایین‌ترین نقطه‌ي سطحِ آن از سطحِ آزادِ مایع به اندازه‌ي h بالاتر می‌ایستد.

a) زاویه‌ای که مایع با سطحِ صفحه‌ها می‌سازد، φ، بر حسبِ σ و γ چه‌قدر است؟

b) در این بند سطحِ مقطعِ مایعی که بالا آمده را به تقریب ذوزنقه‌ای به ارتفاعِ h بگیرید. قاعده‌ي پایینی‌ي ذوزنقه d و شتابِ ثقل g است. پارامترِ ℓ را به صورتِ

$$\ell := \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

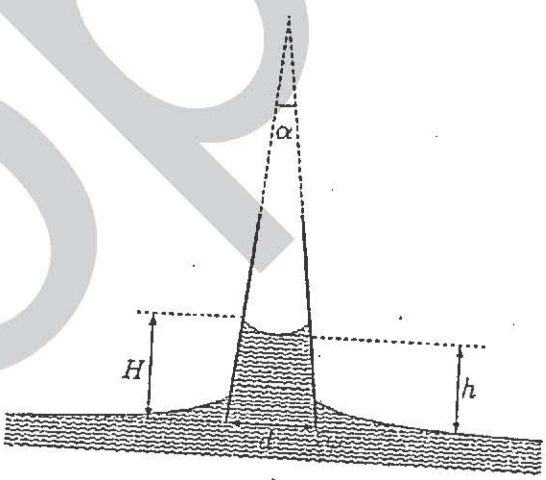
تعریف کنید. معادله‌ای بینِ ℓ، α، φ، d و h به دست آورید. α را کوچک بگیرید و تا مرتبه‌ي اولِ تقریب α را بر حسبِ ℓ، φ، d، و h به دست آورید.

c) در این بند تقریبِ بالا را به کار نبرید. H را برحسبِ ℓ، h، α، و φ به دست آورید.

راه‌نمایی– شعاعِ انحنای خمی مثلِ $z(x)$، عبارت است از

$$R = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''},$$

که z' و z'' مشتقِ اول و دومِ z بر حسبِ x هستند.



لسم تعالی

وقت: ۵ ساعت

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۸۸/۲/۲۰

بررسی تقدیم یک سیاره حولِ ستاره ای مایع

سیاره‌ای صخره‌ای حولِ ستاره‌ای مایع در حالِ گردش است. جرم ستاره بسیار بیشتر از جرم سیاره می‌باشد و بهمین دلیل می‌توان ستاره را در فضا ساکن فرض کرد. بدلیلِ آثار جزرومدی (تغییرات میدانِ گرانشیِ سیاره در نقاطِ مختلفِ ستاره) ستاره کمی از حالتِ کروی شکل خارج می‌شود. بطوریکه اگر در هر لحظه خط واصلِ مرکزهای ستاره و سیاره را در جهت محور z ها فرض کنیم، شعاعِ ستاره از شکلِ کلیِ $r = r_0 + \lambda\cos^2(\theta)$ پیروی می کند؛ که $\lambda << r_0$ می‌باشد. چگالیِ ستاره را ρ و جرمِ آن را M و فاصلهٔ میانِ ستاره و سیاره را R فرض می‌کنیم. اگر به میدانِ گرانشیِ ستاره در فاصله هایِ دور ($r_0 << R$) نگاه کنیم، می‌توانیم آن را بر حسبِ r_0 / R بسط دهیم. در این صورت پتانسیلِ گرانشی شکلِ کلیِ $U(R) = -\frac{GM}{R} + \frac{G\lambda\beta}{R^n}$ را پیدا می کند که $\frac{G\lambda\beta}{R^n}$ اولین تصحیحِ غیر صفر بعد از $\frac{-GM}{R}$ می‌باشد.

نکتهٔ مهم: در بخش‌هایِ مختلفِ این مسئله اطلاعات را تا مرتبهٔ اول نسبت به $\frac{\lambda}{r_0}$ حفظ کنید، و از مراتب بالاتر صرفنظر نمایید.

الف — جرمِ ستارهٔ مورد بحث را (برحسب r_0, λ, ρ) بیابید.

ب — فرض می‌کنیم وشکسانیِ مایعِ تشکیل دهندهٔ ستاره بسیار کم است؛ یعنی همانگونه که ذکر شد، برآمدگیِ سطحِ ستاره همواره در راستایِ خطِ واصلِ ستاره و سیاره باقی می‌ماند. میدانِ گرانشیِ ستاره در محلِ سیاره را تا اولین تصحیحِ غیرِ صفر (بعد از جملهٔ $\frac{-GM}{R}$) پیدا کنید. β و n را بیابید.

بدلیلِ وجودِ تصحیحِ ذکر شده، مدارِ مقیدِ سیارهٔ ما یک دایره یا بیضی نمی‌شود، اما با توجه به کوچک بودنِ جملهٔ تصحیح، هنوز به یک مدار دایره‌ای یا بیضوی نزدیک می‌ماند. یک حالت جالب اینست که مدارِ سیاره نزدیک به یک بیضی است که نقطهٔ حضیضِ آن با آهنگ کوچکی بدورِ ستاره گردش می‌کند. فرض می‌کنیم که سیاره جرمی نقطه‌ای است و از جزئیات شکلِ آن صرفنظر می‌کنیم.

پ — فرض کنید سیاره در مداری دایره‌ای شکل به شعاعِ R_0 حولِ ستاره در حالِ حرکت است. برای پتانسیلی که شکلِ کلیِ $U(R) = -\frac{GM}{R} - \frac{G\lambda\beta}{R^n}$ را داشته باشد، سرعتِ زاویه‌ای این حرکت دایره‌ای را برحسبِ شعاع بیابید.

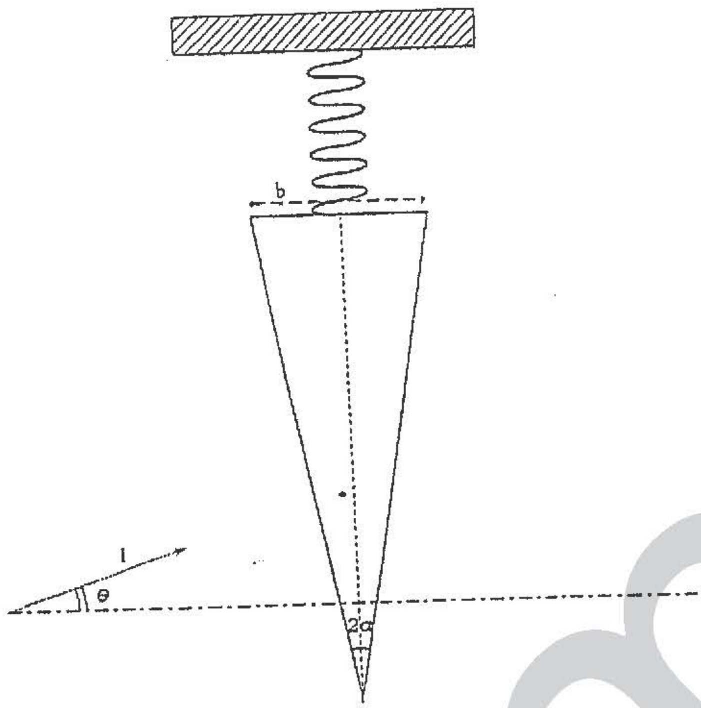
ت — حال حرکتِ دایره‌ایِ سیاره حول ستاره را اندکی مختل می‌کنیم (یعنی $R = R_0 + \Delta R$ که $R_0 >> \Delta R$). معادلهٔ تغییراتِ زمانیِ ΔR را برای شکلِ کلیِ پتانسیل بیابید. فرکانس نوسانِ آن را حساب کنید.

با استفاده از تمامِ بخش‌های بالا سرعتِ تقدیمِ حضیضِ سیاره، حولِ ستارهٔ مورد نظر را پیدا می‌کنیم. حضیض نقطه ایست که سیاره کمترین فاصله از ستاره را اختیار می‌کند.

ث – مشخص کنید، مکانِ دو حضیضِ پی‌درپیِ سیاره چقدر با هم فاصله دارند.

تاثیر اندازه حرکت نور بر حرکت منشور آویزان

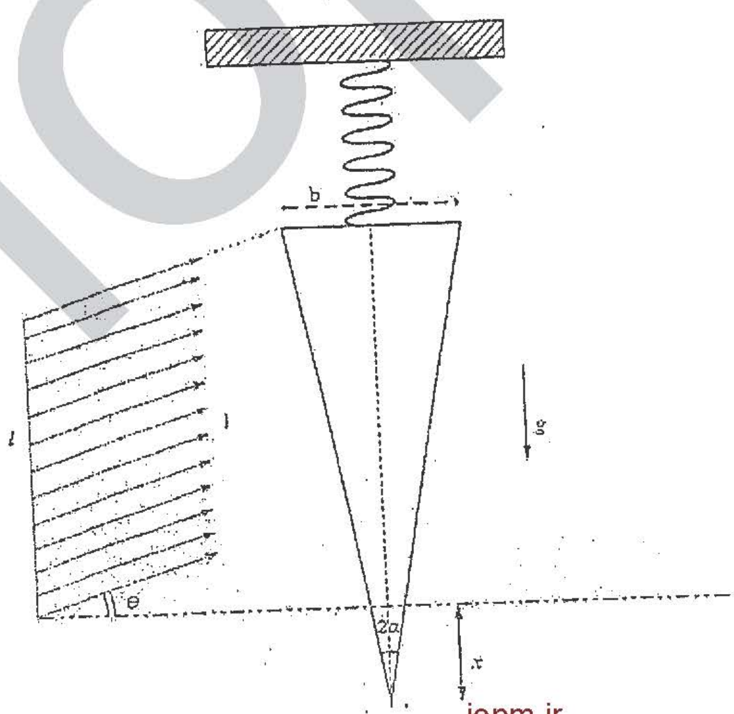
۴۲



منشوری به جرم M بوسیلهٔ یک فنر با ثابت فنری K از سقف آویزان شده‌است. منشور دارای قاعده‌ای به طول b، ضریب شکست $n > 1.5$، و زاویهٔ راسی برابر 2α است. α بسیار کوچکتر از واحد می‌باشد (در تمام این مسئله اطلاعات را تا مرتبهٔ اول نسبت به α در نظر گرفته و از مراتب بالاتر آن صرفنظر می‌کنیم.)

باریکهٔ نوری با شدت I را با زاویهٔ θ نسبت به خط افق به این منشور می‌تابانیم (شدت، میزان انرژی است که در واحد زمان بوسیلهٔ این باریکه به سطح منشور می‌رسد). باریکهٔ نور پس از عبور از منشور از وجه دیگر آن خارج می‌گردد. طول منشور ($\frac{b}{2\tan(\alpha)}$) آنقدر زیاد است که راس پایینی منشور (در تمام مسئله) در معرض نور قرار نمی‌گیرد.

می‌دانیم که باریکهٔ نور با شدت I، اندازه حرکتی معادل با $p = I/c$ را در واحد زمان با خود حمل می‌کند (به بعد دقیق p توجه نمایید.) با فرض اینکه محل ورود باریکه به منشور با قاعدهٔ آن (در بالا) به میزان کافی فاصله دارد و احتمالی برای برخورد باریکه به قاعدهٔ بالایی وجود ندارد:



الف — میزان نیرویی که به منشور در جهت رو به پایین وارد می‌شود را محاسبه نمایید. (اگر زاویهٔ θ قابل مقایسه با α باشد، تا مرتبهٔ اول نگه داشتن اطلاعات نسبت به α دقیق نیست، اما از این مطلب و تبعات آن صرفنظر می‌کنیم.)

ب — با استفاده از قسمت الف، زاویهٔ $\theta_{\min}$ را به گونه ای تعیین کنید که میزان نیروی وارد شده به

منشور (در جهت رو به پایین)، بیشینه شود.

در مرحلهٔ بعد همان باریکه را به جبهه‌ای پهن از نور، با پهنایِ l تبدیل می‌کنیم. توجه کنید که شدتِ کلِ این جبههٔ تخت هنوز I می‌باشد. اما این‌بار بالاترین پرتو خارج شده از این جبهه درست به گوشهٔ سمتِ چپِ منشور برخورد می‌کند. زاویهٔ θ را نیز مساویِ $\theta_{\min}$ قرار داده‌ایم. در اینصورت ممکن است بخشی از پرتوهایِ نور که به اندازهٔ کافی نزدیک به قاعدهٔ منشور واردِ آن شده‌اند در داخلِ منشور به قاعدهٔ آن برخورد کنند.

پ – مشخص کنید چه کسری از کلِ پرتوها از قاعدهٔ بالایی منشور خارج و چه کسری از آنها از آن قاعده بازتاب کلی می‌کنند.

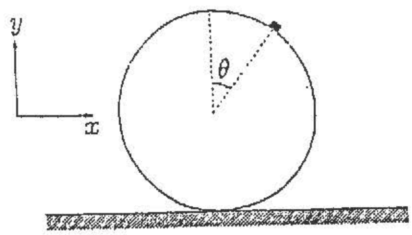
ت – حال، نیرویی که به منشور وارد می‌شود را تعیین نمایید.

ث – اگر منشور را به اندازهٔ x در جهتِ نشان‌داده شده در شکل حرکت دهیم، نیرویِ وارد شده از طرف نور به آن چقدر خواهد بود.

۳ –

جسمِ کوچکی به جرمِ m درست بالاي کره‌ای یک‌نواخت و توپر به جرمِ M و شعاعِ R در حالِ تعادل است. با اختلالِ کوچکی جسم در صفحه‌ي xy روي کره لیز می‌خورد. اصطکاکِ جرمِ m با سطحِ کره ناچیز و اصطکاکِ کره با زمین آن‌قدر زیاد است که اگر حرکت کند حتماً روي زمین می‌غلتند. لختي‌ي دوراني‌ي کره $I = 2MR^2/5$ است.

$x^3+2x=2$



a) مکانِ مرکزِ کره را با x و مکانِ جسم روي کره را با زاویه‌ي θ نمایش دهید. $\ddot{x}$ را بر حسبِ θ، $\dot{\theta}$، و $\ddot{\theta}$ به دست آورید.

b) $\dot{\theta}^2$ را بر حسبِ θ به دست آورید.

c) فرض کنید $M \gg m$. جرمِ m در زاویه‌ي θ_1 از دیسک جدا می‌شود. θ_1 را تا اولین رتبه‌ي m/M به دست آورید

$$\theta_1 \approx \theta_1^{(0)} + \frac{m}{M}\theta_1^{(1)}.$$

I-۴

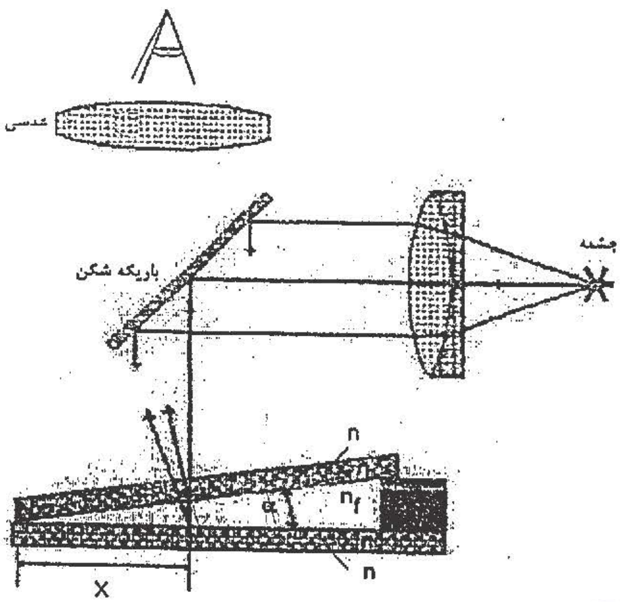
مطابق شکل یک لایه دی الکتریک (n_f) بشکل گوه بین دو تیغه شیشه ای (n) بوجود آمده است و با نور چشمه ای به طول موج خلاء λ_0 روشن شده است.

الف) فاصله بین دو فریز همسایه روشن را بدست آورید.

ب) رابطه ای که ضخامت فیلم در محل mامین ماکزیمم (d_m) را میدهد بدست آورید.

فرض کنید: $n_f < n$

تابش عمودی



۱-۵

فرض کنید که یک عدسی به قطر ۱.۵۹ سانتی متر و فاصله کانونی ۱۰ سانتی متر با نور قرمز به طول موج ۶۰۰ نانومتر روشن شده است. نور فرودی را تخت در نظر بگیرید. اگریک دیسک کدر در مجاورت عدسی قرار دهیم شدت نور در ناحیه محوری در کانون کاهش پیدا می‌کند.

الف- با کمک نظریه پراش توزیع نور در نقطه C را محاسبه کنید و بدست آورید که شعاع این دیسک چقدر باید باشد تا این کاهش شدت نور بر روی محور ۱۰٪ باشد.

ب- نتیجه بدست آمده از راه هندسی را با نتیجه ی قسمت الف مقایسه کنید.

پ- شدت نور در نقطه ای M از صفحه کانونی(xy) که در فاصله یک طول موج از محور قرار دارد را پس از قرار دادن دیسک محاسبه کنید. از جدول روبرو، روابط و شکلهای داده شده کمک بگیرید.

$$\int_0^{2\pi} e^{-jK\alpha\varrho\cos\theta}\, d\theta = 2\pi J_0(K\alpha\varrho)$$

$$\int_0^{Z} J_0(z)\, z\, dz = Z\cdot J_1(Z).$$

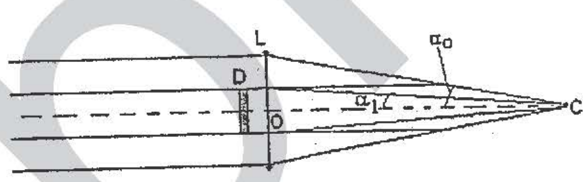
$$K = \frac{2\pi}{\lambda};$$

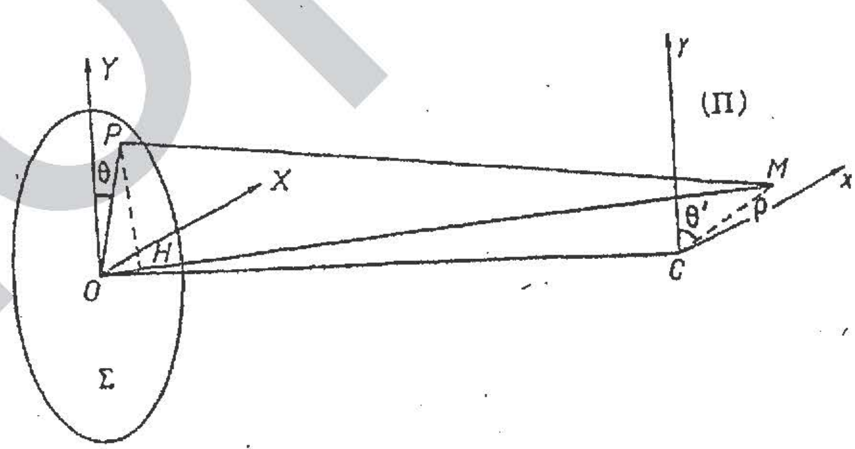
$$Z = K\alpha\rho$$

Table of Numerical Values

Z	$J_0(Z)$	$2\frac{J_1(Z)}{Z}$
0.0	+1.000	+1.000
1.00	+0.765	+0.880
2.00	+0.224	+0.577
3.00	−0.260	+0.226
4.00	−0.397	−0.033
5.00	−0.178	−0.131
6.00	+0.151	−0.092
7.00	+0.300	−0.001
8.00	+0.172	+0.059
9.00	−0.090	+0.054
10.00	−0.246	+0.009

$J_0(Z)$ is zero for $Z = 2.405, 5.52, 8.65, \ldots$
$J_1(Z)/Z$ is zero for $Z = 3.83, 7.02, 10.17, \ldots$





بسمه تعالی

ادامه‌ی امتحان نهایی المپیاد فیزیک (روز ۱۰ نفر)

وقت: ۴ ساعت

۸۸/۲/۲۱

۶ـ سرعت چرخش خورشید به دو مرکز کهکشان راه شیری

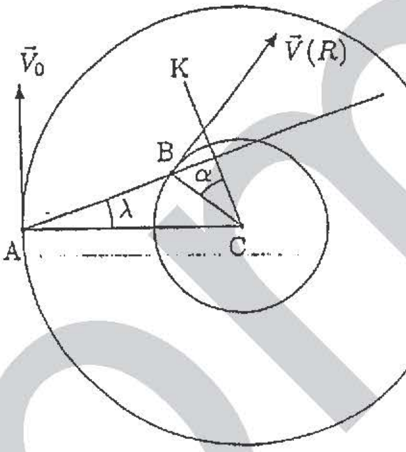
توضیح طراح: بندهای ج و د این مسئله (به خصوص بند د) سخت‌تر از بقیه‌ی قسمت‌ها هستند، اما در حل بقیه‌ی مسئله به کار نمی‌آیند.

معلوم شده است که ستاره‌های کهکشان راه شیری به دور هسته‌ی کهکشان می‌گردند. مدلی که برای حرکت ستاره‌های کهکشان در نظر می‌گیریم این است که ستاره‌های قرص کهکشان، که خورشید هم جزو آن‌ها است، به دور مرکز کهکشان روی دایره‌هایی می‌گردند. سرعت حرکت ستاره‌ای که در نقطه‌ی $\vec{R}$ است، $\vec{V}(R)$ است. سرعت خورشید به دور مرکز کهکشان را V_0، و فاصله‌اش از مرکز کهکشان را R_0 می‌گیریم. نمادهایی که به کار می‌بریم در شکل مشخص شده اند

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{R}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{R}_0$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = D$



شکل ۱: C مرکز کهکشان است. خورشید در نقطه‌ی A است و با سرعت V_0 در امتدادی که نشان داده شده حرکت می‌کند. ستاره‌ی B را در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی λ زاویه‌ای است که پاره‌خط AB با پاره‌خط AC می‌سازد. این زاویه «طول کهکشانی ستاره‌ی B» نام دارد و سنجش‌پذیر است. فاصله‌ی ستاره‌ی B از خورشید را D می‌نامیم. این فاصله هم سنجش‌پذیر است. پاره‌خط CK بر امتداد AB عمود است. دقّت کنید که زاویه‌ی α را نمی‌توان مستقیماً سنجید.

سرعت ستاره‌ی B نسبت به خورشید را $\vec{v}$ می‌نامیم. این سرعت را به دو مؤلفه‌ی شعاعی و عرضی می‌توان تقسیم کرد: $v_r = \hat{r} \cdot \vec{v}$ تصویر $\vec{v}$ در راستای AB است ــ دقت کنید که $\hat{r}$ بردار یکه‌ای از خورشید به سمت ستاره‌ی B است. v_r را می‌توان با سنجش اثر دوپلر طیف

ستاره‌ی B سنجید. منظور از سرعت عرضی $\vec{v}_t := \vec{v} - v_r\,\hat{r}$ است. $v_t = |\vec{v}_t|$ را نیز می‌توان با مطالعه‌ی حرکت ظاهری ستاره در آسمان تعیین کرد.

(الف) v_r بر حسب λ، R، R_0، V، و V_0 چیست؟ فرمول را تا جایی که می‌توانید ساده کنید.

می‌نویسیم $R = R_0 + \Delta R$. فرض کنید D و بنا بر این ΔR بسیار کوچک‌تر از R_0 باشد.

(ب) ΔR بر حسب D و λ چیست؟ فرمول را حتی‌المقدور ساده کنید.

Oort، منجم هلندی، پارمترهای A و B را به این شرح تعریف کرده است:

$$A := -\frac{R_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{V}{R}\right)_{R_0} \qquad \text{(A)}$$

$$B := -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(RV)\right]_{R_0} \qquad \text{(B)}$$

منظور از زیرنویس‌های R_0 این است که مشتق‌ها در نقطه‌ی $R = R_0$ (و بنا بر این $V = V_0$) محاسبه می‌شوند.

(ج) v_r را بر حسب D و λ و A و B به دست آورید.

(د) v_t را بر حسب D و λ و A و B به دست آورید.

(ه) فرض کنید حرکت ستاره‌های قرص کهکشان به دور مرکز کهکشان مثل حرکت سیاره‌های یک منظومه‌ی کپلری باشد — یعنی فقط تحت تاثیر یک جرم بزرگ مرکزی باشد. در این صورت چه قیدی روی A و B هست؟

(و) فرض کنید حرکت ستاره‌های قرص کهکشان به دور مرکز کهکشان چنان باشد که سرعت ستاره مستقل از فاصله‌اش از مرکز کهکشان باشد. در این صورت چه قیدی روی A و B هست؟

(ز) فرض کنید حرکت ستاره‌های قرص کهکشان به دور مرکز کهکشان مثل یک دوران صلب باشد (یعنی $V(R) = R\omega$ برای ω ی ثابت). در این صورت چه قیدی روی A و B هست؟

مقادیر سنجیده شده‌ی A و B عبارت اند از:

$$A = +14\ \mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}, \qquad B = -12\ \mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}},$$

که در این جا

$$1\,\mathrm{kpc} = 1000\,\mathrm{pc}, \qquad 1\,\mathrm{pc} = 3.06 \times 10^{16}\,\mathrm{m}.$$

فاصله‌ی خورشید از مرکز کهکشان 8.5 Mpc است ($1\,\mathrm{Mpc} = 10^6\,\mathrm{pc}$).

(ح) سرعت خورشید به دور مرکز کهکشان چه قدر است؟

(ط) برای ستاره‌های نزدیک به خورشید، نمودار اندازه‌ی سرعت چرخش ستاره‌های قرص کهکشان به دور مرکز کهکشان را بکشید. (محور افقی، فاصله از مرکز کهکشان، محور قائم اندازه‌ی سرعت.)

۷- دینامیک منظومه‌ی کپلری

توضیح طراح: این مسئله دو قسمت دارد که کاملاً مستقل از هم اند.

یادآوری: فرمول‌های زیر از کتاب کلپنر را یادآوری می‌کنیم.

$$U(r) = -G\frac{M\,m}{r} = -\frac{C}{r} \qquad (۱)$$

$$l = \mu\, r^2\,\dot\theta \qquad (۲)$$

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu C} \qquad (۳)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,l^2}{\mu\,C^2}} \qquad (۴)$$

μ جرم کاهش‌یافته و E انرژی کل است.

پارامترهای مداری

دو ستاره به جرم‌های m_1 و m_2 در لحظه‌ی $t_0 = 0$ در دو نقطه‌ی $\vec r_1$ و $\vec r_2$ اند و سرعت آن دو $\vec v_1$ و $\vec v_2$ است.

$$m_1 = 1.12$$
$$m_2 = 0.37$$
$$\vec r_1 = (0.17,\ \ 1.23,\ \ -0.72)$$
$$\vec r_2 = (0.41,\ \ -0.76,\ \ 0.98)$$
$$\vec v_1 = (0.01,\ \ 0.05,\ \ -0.07)$$
$$\vec v_2 = (-0.44,\ \ 0.27,\ \ -0.31)$$

در بالا، همه‌ی جرم‌ها بر حسب جرم خورشید ($M_\odot$)، همه‌ی طول‌ها بر حسب واحد نجومی (AU)، و همه‌ی سرعت‌ها بر حسب v_0 اند که

$$v_0 := \sqrt{\frac{G\,M_\odot}{1\,\mathrm{AU}}}.$$

همه‌ی بردارها با مؤلفه‌هاشان در یک دستگاه دکارتی متعامد راست‌گرد معرفی شده اند.

می‌دانیم که در دستگاه مرکز جرم

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

است که در این جا r فاصله‌ی جسم 2 از جسم 1 است، r_0 نیم‌وتر قائم مدار است، ϵ خروج‌ازمرکز مدار است، و θ زاویه‌ای است در صفحه‌ی مداری که شعاع حامل با امتداد حضیض می‌سازد.

(الف) r_0 را بر حسب واحد نجومی حساب کنید.

(ب) ϵ را حساب کنید.

دنباله‌دار هالی

دنباله‌دار هالی هر 76.2 سال یک بار به دور خورشید می‌گردد و کم‌ترین فاصله‌اش از خورشید 0.587 AU است. (AU واحد نجومی است که برابر است با فاصله‌ی متوسط زمین از خورشید).

(ج) خروج‌ازمرکز هالی چه قدر است؟

(د) بیش‌ترین فاصله‌ی هالی از خورشید چه قدر است؟

۸- گاز کاملی متشکل از ذراتی به جرم m در ظرفی به حجم V که رسانای گرما است در مجاورت منبعی با دمای T در نظر بگیرید. در دیواره‌ی ظرف روزنه‌ی کوچکی به مساحت a ایجاد می‌کنیم. کوچک بودن روزنه باعث می‌شود که در هر لحظه گاز داخل ظرف را در حالت تعادل فرض کنیم.

آ) ذراتی که از روزنه بیرون می‌آیند محتمل‌ترین تندی‌شان چقدر است؟

ب) تندی متوسط ذرات گازی که از روزنه بیرون می‌آیند چقدر است؟

پ) اگر در لحظه‌ی $t = 0$ که روزنه را ایجاد می‌کنیم فشار گاز داخل ظرف P_0 باشد، در لحظه‌ی t فشار گاز داخل ظرف، $P(t)$، را بدست آورید.

ت) فرض کنید $V = 1\ \mathrm{L}$، $T = 300\ \mathrm{K}$ و $a = 10^{-6}\ \mathrm{cm}^2$. اگر در مدت $3\ \mathrm{h}$ فشار گاز داخل ظرف به نود درصد مقدار اولیه‌اش برسد جرم ذرات گاز بر حسب گرم چقدر است؟

• دو مایع با حجم‌های ثابت و ظرفیت‌های گرمایی ثابت C_1 و C_2 که دمای اولیه‌ی آن‌ها به ترتیب T_1 و T_2 $(T_1 > T_2)$است به وسیله عایقی از هم ایزوله شده‌اند. یک ماشین کارنو در هر لحظه بین این دو مایع و تا وقتی مجموعه به دمای تعادل T_0 برسد کار می‌کند.

آ) دمای تعادل T_0 را بدست آورید.

ب) کار کل انجام شده به وسیله‌ی این ماشین چقدر است؟

• در یک آزمایش برای سردکردن 5 g هلیوم مایع که دمای آن 0.5 K است آن را در تماس با 100 g از یک نمک پارامغناطیس که در دمای پایین‌تر T_s است قرار می‌دهیم. این مجموعه از محیط بیرون ایزوله است. گرمای ویژه‌ی هلیوم مایع و نمک به ترتیب $c_L(T) = aT^3$ و $c_S(T) = bT^{-2}$ است که $a = 20\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-4}}$ و $b = 0.1\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K}$. اگر دمای تعادل نهایی هلیوم مایع و نمک 0.4 K باشد

پ) دمای اولیه‌ی نمک چقدر است؟

ت) تغییر آنتروپی کل چقدر است؟

√ ۱۰ – از سیم مستقیم و بسیار طویلی جریان الکتریکی I می‌گذرد. توزیع جریان در سطح مقطع سیم یکنواخت است. سیم دارای مقاومت ویژه‌ی الکتریکی ρ و ضریب رسانندگی گرمایی K است. این سیم در مایعی به دمای T_b قرار دارد. گرما به وسیله‌ی ترکیبی از رسانش از طریق فیلم نازکی از مایع اطراف سیم و سپس همرفت در داخل مایع از سیم به مایع منتقل می‌شود. ضریب همرفت h است و شامل اثر رسانش از طریق فیلم و همرفت در سیال است. از تابش گرمایی صرفنظر کنید و حالت پایا را در نظر بگیرید. در ضمن مایعی که سیم در آن قرار دارد آنقدر زیاد هست که دمای آن تغییر نکند.

اگر سیم استوانه‌ی توپُری به شعاع b باشد

آ) دمای سطح سیم چقدر است؟

ب) دما را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r $(r < b)$ از محور سیم (استوانه) بدست آورید.

اکنون سیم را به صورت پوسته‌ای استوانه‌ای بگیرید به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که (سطح خارجی آن) در همان مایع با دمای T_b قرار دارد. گرما فقط از سطح بیرونی سیم به مایع منتقل می‌شود.

پ) دمای سطح بیرونی سیم چقدر است؟

ت) دما را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r $(a < r < b)$ از محور سیم (استوانه) بدست آورید.

ث) دمای سطح داخلی سیم چقدر است؟

حالا فرض کنید گرما هم از سطح بیرونی و هم از سطح داخلی منتقل می‌شود. در ضمن فرض کنید سیالی با ضریب همرفت بسیار بزرگ $(h \to \infty)$ فضای داخل و خارج سیم را پُر کرده است. دمای سیال داخلی T_a و دمای سیال خارجی T_b است.

ج) در چه فاصله‌ای از محور سیم دما بیشینه است؟

چ) این دمای بیشینه چقدر است؟