بسمه تعالی

سری سوم: # انتگرال و کاربرد آن

تهیه و تنظیم: **محمدحسین مشتاق**

گروه‌های: **۱۶، ۱۷ و ۱۸**

۱− انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \operatorname{sech} x dx$

ب) $\int \operatorname{csch} x dx$

پ) $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$

ت) $\int x^{4x}(1+\ln x) dx$

ث) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

ج) $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x+1}{e^x+2} dx$

چ) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$

ح) $\int x^{x+1}(\ln^2 x+\ln x) dx$

خ) $\int x^n e^x dx$

د) $\int x^n \ln^m x dx$

ذ) $\int x^{2n+1} e^{x^2} dx$

ر) $\int \operatorname{Arcsin} x dx$

ز) $\int e^{ax}\sin(bx) dx$

ژ) $\int e^{ax}\cos(bx) dx$

س) $\int \sin(\ln x) dx$

ش) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

ص) $\int \sqrt{1+\sin x} dx$

ض) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$

ط) $\int \tan^{2n} x dx$

ظ) $\int \tan^{2n-1} x dx$

ع) $\int \sin^n x dx$

غ) $\int \cos^n x dx$

ف) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

ق) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

ک) $\int \frac{x^3 dx}{x^3-a^3}$

گ) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ل) $\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$

م) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a>0)$

ن) $\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx$

و) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$

ه) $\int (x^3+x^2+x+1)e^{2x} dx$

ی) $\int \tanh x dx$

۲- انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{۰}^{۱} x^{۲} \operatorname{Arctan}(x)dx$

ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{n} x dx$

پ) $\int_{۰}^{۱} x^{n} \ln^{m} x dx$

ت) $\int_{۰}^{۲} x\sqrt{۱۶ - x^{۴}}dx$

۳- حد عبارت‌های زیر را در $n \to +\infty$ محاسبه کنید.

الف) $\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{۲n+k}$

ب) $\frac{۲^{\alpha} + ۴^{\alpha} + \cdots + (۲n)^{\alpha}}{n^{۱+\alpha}} \qquad (\alpha > -۱)$

پ) $\left((۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})\cdots(۱+\frac{n}{n})\right)^{\frac{۱}{n}}$

ت) $\frac{۱}{n^{۴}} \prod_{k=۰}^{۲n} (n^{۲}+k^{۲})^{\frac{۱}{n}}$

ث) $\sum_{k=۰}^{n} \frac{k۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}(\sqrt[n]{۲}-۱)}{n}$

ج) $\sum_{k=۰}^{n} \frac{۲k+۱}{(۲n^{۲}+n)}$

۴- همگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.

الف) $\int_{۰}^{۱} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$

ب) $\int_{۰}^{+\infty} xe^{-x^{۲}}dx$

پ) $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[۵]{۱-x^{۳}}}dx$

ت) $\int_{۰}^{+\infty} P(x)e^{-x^{۲}}dx$ ، $P(x)$ یک چندجمله‌ایست.

۵- با استفاده از سوال قبل مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int_{۰}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^{۲}}dx$

۶- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^{۶}} \int_{۰}^{x^{۲}} \sin t^{۲} dt$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^{۲}} \int_{۰}^{x} \left((t-x)\sqrt{\cos t}\right)dt$

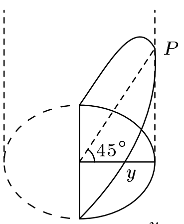
۷- اگر توابع f و g روی $[a,b]$ دارای مشتق دوم باشند و داشته باشیم $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=۰$ آنگاه:

$$\int_{a}^{b} f(x)g''(x)dx = \int_{a}^{b} f''(x)g(x)dx$$

۸- طول قوس منحنی $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ را از نقطه $(۰,a)$ تا نقطه (x,y) به‌دست آورید.

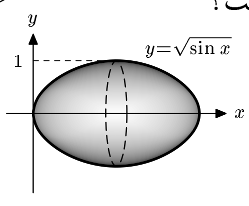
۹- طول قوس منحنی به معادله $۹x^{۲} = ۴y^{۳}$ از $(۰,۰)$ تا $(۲\sqrt{۳},۳)$ را به‌دست آورید.

۱۰- طول قوس منحنی به معادله $x = \sqrt{۱۰۰ - y^{۲}}$ از $x = ۱۰$ تا $y = ۱۰$ را به‌دست آورید.



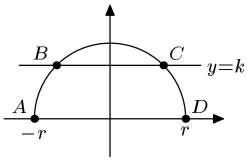
۱۱- جسم مقابل (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعده نیم‌دایره به شعاع واحد بوده و زاویه صفحه P و صفحه قاعده جسم ۴۵° می‌باشد. حجم این جسم را به‌دست آورید.

۱۲- مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع $y = |x|$ و $x = ۲ - y^{۲}$ چقدر است؟



۱۳- حجم جسم دوار مقابل را به دست آورید.

۱۴– اگر $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ خط $y=k$ را طوری بیابید که طول منحنی از A تا B برابر طول منحنی از B تا C باشد.



۱۵– یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a حول یک محور موازی با قاعده آن که فاصله‌اش از قاعده برابر b است دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را به‌دست آورید.

۱۶– نشان دهید اگر $e \le a < b$ آنگاه $a^b > b^a$.

۱۷– برای چه مقادیر مثبتی از a داریم $a^x \ge 1+x$.

۱۸– برای چه مقادیر مثبتی از a توابع $y=a^x$ و $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۹– فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر روی فاصله I بوده و $a,b\in I$ و $a<b$. اگر $f(a)=f(b)=0$ نشان دهید وجود دارد $c\in(a,b)$ به‌طوری که $f'(c)+g'(c)f(c)=0$.

۲۰– حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

ب) $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$

ت) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

ث) $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

ج) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

چ) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

ح) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

خ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (a,b,c>0)$

د) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (a,b>0)$

ذ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}$

ر) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cosh x)}{\sqrt[m]{\cosh x}-\sqrt[n]{\cosh x}}$ $\quad (n\neq m)$

ز) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

ژ) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

س) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

ش) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

ص) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $\quad (a>0)$

ض) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

۲۱– مقادیر p را طوری بیابید که سری‌های زیر همگرا باشند.

الف) $\sum\frac{1}{n\ln^p n}$

ب) $\sum\frac{1}{n\ln n\ln^p(\ln n)}$

پ) $\sum\frac{1}{n\ln^p(\ln n)}$

ت) $\sum\frac{1}{n\ln n\ln(\ln^p n)}$

۲۲– همگرایی سری‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$

ب) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

پ) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^{en}}{e^{\pi n}}$

ت) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n|}{n}$

بسمه تعالی

حل سری سوم: **انتگرال و کاربرد آن**

تهیه و تنظیم: **محمدحسین مشتاق**

گروه‌های: **۱۶، ۱۷ و ۱۸**

۱ ـ الف)

$$\begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sech} x dx = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x}+1}$$
$$= \int \frac{2du}{u^2+1} = 2 \operatorname{Arctan} u + c = 2 \operatorname{Arctan} e^x + c$$

۱ ـ ب)

$$\begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$$

$$\int \operatorname{csch} x dx = \int \frac{2dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x}-1}$$
$$= \int \frac{2du}{u^2-1} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$$

۱ ـ پ)

$$\begin{cases} 1 + \ln x = u \\ \dfrac{dx}{x} = du \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$$
$$= \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln|u| + c$$
$$= 1 + \ln x - \ln|1+\ln x| + c = \ln\left|\frac{x}{1+\ln x}\right| + c' \qquad c' = c+1$$

۱ ـ ت)

$$\begin{cases} x^{4x} = u \\ 4x^{4x}(1+\ln x)dx = du \end{cases}$$

$$\int x^{4x}(1+\ln x)dx$$
$$= \int \frac{2du}{u^2-1} = \int \frac{du}{4} = \frac{u}{4} + c = \frac{1}{4}x^{4x} + c$$

۱ ـ ث)

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \ln(1+e^x) + c = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + c$$

۱ ـ ج)

$$\int \frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x+1}{e^x+2} dx = \int \left(\frac{e^{3x}+2e^{2x}-e^{2x}-2e^x+\frac{1}{2}e^x+1+\frac{5}{2}e^x}{e^x+2}\right) dx$$
$$= \int \left(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}e^x}{e^x+2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\ln(e^x+2) + c$$

۱ ـ چ)

$$\begin{cases} x^2 + 1 = u^3 \\ 2xdx = 3u^2 du \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{(u^3-1)u^2 du}{u} = \frac{3}{2}\int (u^4 - u) du = \frac{3}{10}u^5 - \frac{3}{4}u^2 + c$$
$$= \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

۱ ـ ح)

$$\int x^{x+۱}(\ln^۲ x+\ln x)dx=\int x^x(۱+\ln x)(x\ln x)dx$$

$$\begin{cases}u=x\ln x\\ dv=x^x(۱+\ln x)dx\end{cases}\implies\begin{cases}du=(۱+\ln x)dx\\ v=x^x\end{cases}$$

$$=x^{x+۱}\ln x-\int x^x(۱+\ln x)dx=x^{x+۱}\ln x-x^x+c$$

۱ ـ خ)

$$\int x^n e^x dx=I_n \qquad \begin{cases}u=x^n\\ dv=e^x dx\end{cases}\implies\begin{cases}du=nx^{n-۱}dx\\ v=e^x\end{cases}$$

$$\implies\quad I_n=x^n e^x-nI_{n-۱}\quad \text{و}\quad I_\circ=e^x+c_\circ$$

$$\implies\quad I_n=\sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^k\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}e^x+c$$

۱ ـ د)

$$\int x^n\ln^m x dx \qquad \begin{cases}x^{n+۱}=e^u\\ (n+۱)x^n dx=e^u du\end{cases}$$

$$=\int\Big(\frac{u}{n+۱}\Big)^m\frac{e^u du}{n+۱}=\frac{۱}{(n+۱)^{m+۱}}\int u^m e^u du$$

با استفاده از (۱ ـ خ)

$$=\sum_{k=\circ}^{m}\frac{(-۱)^k}{(n+۱)^{m+۱}}\frac{m!}{(m-k)!}u^{m-k}e^u+c$$

$$=\sum_{k=\circ}^{m}\frac{(-۱)^k}{(n+۱)^{m+۱}}\frac{m!}{(m-k)!}\big((n+۱)\ln x\big)^{m-k}x^{n+۱}+c$$

$$=\sum_{k=\circ}^{m}\frac{(-۱)^k}{(n+۱)^{k+۱}}\frac{m!}{(m-k)!}x^{n+۱}\ln^{m-k}x+c$$

۱ ـ ذ)

$$\int x^{۲n+۱}e^{x^۲} \qquad \begin{cases}u=x^۲\\ du=۲xdx\end{cases}$$

با استفاده از (۱ ـ خ)

$$=\frac{۱}{۲}\int u^n e^u du$$

$$=\frac{۱}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^k\frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k}e^u+c=\frac{۱}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^k\frac{n!}{(n-k)!}x^{۲(n-k)}e^{x^۲}+c$$

۱ ـ ر)

$$\int \operatorname{Arcsin} x dx \qquad \begin{cases}u=\operatorname{Arcsin} x\\ dv=dx\end{cases}\implies\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}\\ v=x\end{cases}$$

$$=x\operatorname{Arcsin} x-\int\frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۲}} \qquad \begin{cases}u=۱-x^۲\\ du=-۲xdx\end{cases}$$

$$=x\operatorname{Arcsin} x+\int\frac{du}{۲\sqrt{u}}=x\operatorname{Arcsin} x+\sqrt{u}+c=x\operatorname{Arcsin} x+\sqrt{۱-x^۲}+c$$

۱ ـ ز)

$$I=\int e^{ax}\sin(bx)dx \qquad \begin{cases}u=\sin(bx)\\ dv=e^{ax}dx\end{cases}\implies\begin{cases}du=b\cos(bx)dx\\ v=\frac{۱}{a}e^{ax}\end{cases}$$

$$=\frac{۱}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx \qquad \begin{cases}u=\cos(bx)\\ dv=e^{ax}dx\end{cases}\implies\begin{cases}du=-b\sin(bx)dx\\ v=\frac{۱}{a}e^{ax}\end{cases}$$

$$=\frac{۱}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a}\Big(\frac{۱}{a}e^{ax}\cos(bx)+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx\Big)$$

$$=\frac{۱}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a^۲}e^{ax}\cos(bx)-\frac{b^۲}{a^۲}I$$

$$\implies\quad\int e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}\big(a\sin(bx)-b\cos(bx)\big)+c$$

۱ ـ ژ) مشابه فوق

$$\implies\quad\int e^{ax}\cos(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}\big(a\cos(bx)+b\sin(bx)\big)+c$$

۱ ـ س) $\begin{cases} x = e^u \\ dx = e^u du \end{cases}$

$$\int \sin(\ln x)dx$$

با استفاده از (۱ ـ ز)

$$= \int e^u \sin u du$$

$$= \frac{e^u}{۲}(\sin u - \cos u) + c = \frac{x}{۲}(\sin \ln x - \cos \ln x) + c$$

۱ ـ ش)

$$\int \cos^{۴} x \sin^{۲} x dx = \int \frac{۱ + \cos(۲x)}{۲} \times \frac{۱}{۴} \sin^{۲}(۲x)dx$$

$$= \frac{۱}{۸}\Big(\underbrace{\int \sin^{۲}(۲x)dx}_{I_۱} + \underbrace{\int \sin^{۲}(۲x)\cos(۲x)dx}_{I_۲}\Big)$$

$$I_۱ = \int \Big(\frac{۱ - \cos(۴x)}{۲}\Big)dx = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۸}\sin(۴x) + c_۱$$

$$I_۲ = \int u^{۲} \frac{du}{۲} = \frac{u^{۳}}{۶} + c_۲ = \frac{۱}{۶}\sin^{۳}(۲x) + c_۲$$

۱ ـ ص)

$$\int \sqrt{۱ + \sin x}dx = \int \sqrt{\sin^{۲}\big(\frac{x}{۲}\big) + \cos^{۲}\big(\frac{x}{۲}\big) + ۲\sin\big(\frac{x}{۲}\big)\cos\big(\frac{x}{۲}\big)}dx = \int \Big|\sin\big(\frac{x}{۲}\big) + \cos\big(\frac{x}{۲}\big)\Big|dx$$

$$= \operatorname{sgn}\Big(\sin\big(\frac{x}{۲}\big) + \cos\big(\frac{x}{۲}\big)\Big)\int \Big(\sin\big(\frac{x}{۲}\big) + \cos\big(\frac{x}{۲}\big)\Big)dx$$

$$= \operatorname{sgn}\Big(\sin\big(\frac{x}{۲}\big) + \cos\big(\frac{x}{۲}\big)\Big)\Big(-۲\cos\big(\frac{x}{۲}\big) + ۲\sin\big(\frac{x}{۲}\big)\Big) + c$$

۱ ـ ض) $\begin{cases} u = \cot x \\ du = -\csc^{۲} x dx \end{cases}$

$$\int \frac{\cos^{۵} x}{\sin^{۳} x}dx = \int \cot^{۵} x \sin^{۲} x dx = \int \cot^{۵} x \csc^{-۴} x \csc^{۲} x dx$$

$\begin{cases} v = ۱ + u^{۲} \\ dv = ۲u du \end{cases}$

$$= -\int u^{۵}(۱ + u^{۲})^{-۲}du = -\int \frac{u^{۵}du}{(۱ + u^{۲})^{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\int \frac{(v - ۱)^{۲}dv}{v^{۲}} = -\frac{۱}{۲}\int \Big(۱ - \frac{۲}{v} + \frac{۱}{v^{۲}}\Big)dv = -\frac{۱}{۲}v + \ln|v| + \frac{۱}{۲v} + c$$

$$= -\frac{۱ + u^{۲}}{۲} + \ln(۱ + u^{۲}) + \frac{۱}{۲ + ۲u^{۲}} + c$$

$$= -\frac{۱ + \cot^{۲} x}{۲} + \ln(۱ + \cot^{۲} x) + \frac{۱}{۲ + ۲\cot^{۲} x} + c$$

۱ ـ ط)

$$\int \tan^{۲n} x dx = \int \big((\tan^{۲n} x + \tan^{۲n-۲} x) - (\tan^{۲n-۲} x + \tan^{۲n-۴} x) + \cdots$$

$$+ (-۱)^{n-۱}(\tan^{۲} x + ۱) + (-۱)^n\big)dx$$

$$= \underbrace{\int (-۱)^n dx}_{I_۱} + \underbrace{\int \Big(\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{k-۱}\tan^{۲(n-k)} x\Big)(\tan^{۲} x + ۱)dx}_{I_۲}$$

$$I_۱ = (-۱)^n x + c_۱$$

$\begin{cases} \tan x = u \\ (۱ + \tan^{۲} x)dx = du \end{cases}$

$$I_۲ = \int \Big(\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{k-۱}u^{۲(n-k)}\Big)du$$

$$= \sum_{k=۱}^{n}\frac{(-۱)^{k-۱}}{۲(n-k)+۱}u^{۲(n-k)+۱} + c_۲ = \sum_{k=۱}^{n}\frac{(-۱)^{k-۱}}{۲(n-k)+۱}\tan^{۲(n-k)+۱} x + c_۲$$

۱ ـ ظ) مشابه فوق

$$\int \tan^{۲n-۱} x dx = (-۱)^n \ln|\cos x| + \sum_{k=۱}^{n-۱}\frac{(-۱)^{k-۱}}{۲(n-k)}\tan^{۲(n-k)} x + c$$

۱ ـ ع)

$$I_n=\int \sin^n x dx \qquad \begin{cases} u=\sin^{n-1}x \\ dv=\sin x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx \\ v=-\cos x \end{cases}$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2}x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\Longrightarrow \quad I_n=\frac{-1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_1=-\cos x+c_1 \quad \text{و} \quad I_2=\int \sin^2 x dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c_2$$

۱ ـ غ) مشابه فوق

$$I_n=\int \cos^n x dx$$

$$\Longrightarrow \quad I_n=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_1=\sin x+c_1 \quad \text{و} \quad I_2=\int \cos^2 x dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c_2$$

۱ ـ ف)

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}=\int (1+\tan^2 x)^3 dx \qquad \begin{cases} \tan x=u \\ (1+\tan^2 x)dx=du \end{cases}$$

$$=\int (1+u^2)^2 du=u+\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+c=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+c$$

۱ ـ ق)

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x}=\int \frac{\sin x dx}{\sin^6 x} \qquad \begin{cases} \cos x=u \\ -\sin x dx=du \end{cases}$$

$$=-\int \frac{du}{(1-u^2)^3}$$

$$=\int \Big(\frac{-\frac{1}{8}}{(1-u)^3}+\frac{-\frac{3}{16}}{(1-u)^2}+\frac{-\frac{3}{16}}{1-u}+\frac{-\frac{1}{8}}{(1+u)^3}+\frac{-\frac{3}{16}}{(1+u)^2}+\frac{-\frac{3}{16}}{1+u}\Big)du$$

$$=\frac{-\frac{1}{16}}{(1-u)^2}+\frac{-\frac{3}{16}}{1-u}+\frac{3}{16}\ln|1-u|+\frac{\frac{1}{16}}{(1+u)^2}+\frac{\frac{3}{16}}{1+u}-\frac{3}{16}\ln|1+u|+c$$

$$=\frac{-5u+3u^3}{8(1-u^2)^2}+\frac{3}{16}\ln\Big|\frac{1-u}{1+u}\Big|+c=\frac{-5\cos x+3\cos^3 x}{8\sin^4 x}+\frac{3}{16}\ln\Big(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\Big)+c$$

۱ ـ ک)

$$\int \frac{x^3 dx}{x^3-a^3}=\int \Big(1+\frac{a^3}{x^3-a^3}\Big)dx \qquad \Big(\frac{3a^3}{x^3-a^3}=\frac{a}{x-a}-\frac{ax+2a^2}{x^2+ax+a^2}\Big)$$

$$=x+\frac{a}{3}\int \frac{dx}{x-a}-\frac{a}{6}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+a^2}dx-\frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}dx$$

$$=x+\frac{a}{3}\ln|x-a|-\frac{a}{6}\ln(x^2+ax+a^2)-\frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{2x+a}{\sqrt{3}a}\Big)+c$$

۱ ـ گ)

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \begin{cases} 1+x^2=u^2 \\ 2xdx=2udu \end{cases}$$

$$=\int \frac{du}{(u^2-1)u^2}=\int \Big(\frac{2}{u-1}-\frac{2}{u+1}-\frac{1}{u^2}\Big)du=2\ln\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|+\frac{1}{u}+c$$

$$=2\ln\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\Big)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

۱ ـ ل)

$$\int \frac{d\theta}{۱+\cos\theta+\sin\theta} \qquad \begin{cases} \tan(\frac{\theta}{۲}) = u \\ \frac{۱}{۲}(۱+\tan^۲(\frac{\theta}{۲}))d\theta = du \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{۱-\tan^۲(\frac{\theta}{۲})}{۱+\tan^۲(\frac{\theta}{۲})} \\ \sin\theta = \frac{۲\tan(\frac{\theta}{۲})}{۱+\tan^۲(\frac{\theta}{۲})} \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{۱+u} = \ln|u+۱| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right| + c$$

۱ ـ م)

$$\int \sqrt{a^۲-x^۲}dx \qquad \begin{cases} x = a\sin\theta \\ dx = a\cos\theta d\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= a^۲\int \cos^۲\theta d\theta = \frac{a^۲}{۲}(\theta + \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta) + c \\ &= \frac{a^۲}{۲}\operatorname{Arcsin}(\frac{x}{a}) + \frac{ax}{۲}\cos\Big(\operatorname{Arcsin}(\frac{x}{a})\Big) + c \\ &= \frac{a^۲}{۲}\operatorname{Arcsin}(\frac{x}{a}) + \frac{x}{۲}\sqrt{a^۲-x^۲} + c \end{aligned}$$

۱ ـ ن)

$$\int \frac{x\sqrt{۲-x^۲}}{\sqrt{x^۲+۱}}dx \qquad \begin{cases} x = \sinh\theta \\ dx = \cosh\theta d\theta \end{cases}$$

$$= \int \sinh\theta\sqrt{۳-\cosh^۲\theta}d\theta \qquad \begin{cases} \cosh\theta = u \\ \sinh\theta d\theta = du \end{cases}$$

با استفاده از (۱ ـ م)

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{۳-u^۲}du \\ &= \frac{۳}{۲}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{\sqrt{۳}}\right) + \frac{u}{۲}\sqrt{۳-u^۲} + c \\ &= \frac{۳}{۲}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\cosh\theta}{\sqrt{۳}}\right) + \frac{\cosh\theta}{۲}\sqrt{۳-\cosh^۲\theta} + c \end{aligned}$$

با توجه به $\theta = \sinh^{-۱}x = \ln\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)$ داریم $\cosh\theta = \frac{(x+\sqrt{x^۲+۱})^۲+۱}{۲(x+\sqrt{x^۲+۱})}$ و با جایگذاری حاصل انتگرال به‌دست می‌آید.

۱ ـ و)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۴+\sqrt[۳]{x})} \qquad \begin{cases} x = u^٦ \\ dx = ٦u^۵du \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{٦u^۵du}{u^۳(۴+u^۲)} = ٦\int \frac{u^۲du}{۴+u^۲} = ٦\int \Big(۱-\frac{۴}{۴+u^۲}\Big)du \\ &= ٦u - ۱۲\operatorname{Arctan}\frac{u}{۲} + c = ٦\sqrt[٦]{x} - ۱۲\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt[٦]{x}}{۲} + c \end{aligned}$$

۱ ـ هـ)

$$\int (x^۳+x^۲+x+۱)e^{۲x}dx \qquad \begin{cases} u = x^۳+x^۲+x+۱ \\ dv = e^{۲x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = ۳x^۲+۲x+۱ \\ v = \frac{۱}{۲}e^{۲x} \end{cases}$$

$$= \frac{x^۳+x^۲+x+۱}{۲}e^{۲x} - \frac{۱}{۲}\int(۳x^۲+۲x+۱)e^{۲x}dx$$

$$\begin{cases} u = ۳x^۲+۲x+۱ \\ dv = e^{۲x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = ٦x+۲ \\ v = \frac{۱}{۲}e^{۲x} \end{cases}$$

$$= \frac{۲x^۳-x^۲+۱}{۴}e^{۲x} + \frac{۱}{۲}\int(۳x+۱)e^{۲x}dx$$

$$\begin{cases} u = ۳x+۱ \\ dv = e^{۲x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = ۳ \\ v = \frac{۱}{۲}e^{۲x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{۲x^۳-x^۲+۳x+۲}{۴}e^{۲x} - \frac{۳}{۴}\int e^{۲x}dx \\ &= \frac{۴x^۳-۲x^۲+٦x+۱}{۸}e^{۲x} + c \end{aligned}$$

۱ ـ ی) $\begin{cases} e^x + e^{-x} = u \\ (e^x - e^{-x})dx = du \end{cases}$

$$\int \tanh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln(e^x + e^{-x}) + c = \ln(\cosh x) + c'$$

۲ ـ الف) $\begin{cases} u = \operatorname{Arctan}(x) \\ dv = x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{Arctan}(x) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{Arctan}(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(x - \frac{x}{x^2+1}\Big)dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\big(x^2 - \ln(x^2+1)\big)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}(\ln 2 - 1)$$

۲ ـ ب) با استفاده از (۱ ـ غ) داریم $I_0 = \frac{\pi}{2}$ و $I_1 = 1$ و اینکه $\frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$$\implies \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\implies \quad I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\binom{2k}{k}}{2^{2k+1}}$$

$$\implies \quad I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times I_1 = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$

۲ ـ پ) با استفاده (۱ ـ د)

$$\int_0^1 x^n \ln^m x dx = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} \frac{m!}{(m-k)!} x^{n+1} \ln^{m-k} x\Big|_0^1 = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$$

۲ ـ ت) $\begin{cases} x^2 = u \\ 2x dx = du \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \to 0 \\ 2 \to 4 \end{cases}$

$$\int_0^2 x\sqrt{16 - x^4} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{16 - u^2} du$$

که $\sqrt{16-u^2}$ معادله یک نیم‌دایره به شعاع ۴ است و انتگرال آن روی $[0,4]$ مساحت ربع دایره می‌باشد. پس جواب نهایی $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(\pi 4^2) = 2\pi$ است.

۳ ـ الف) $\begin{cases} x_k = 2 + \dfrac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \dfrac{1}{n} \\ a = 2 \text{ و } b = 3 \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} = \int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_2^3 = \ln\big(\frac{3}{2}\big)$$

۳ ـ ب) $\begin{cases} x_k = \dfrac{2k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \dfrac{2}{n} \\ a = 0 \text{ و } b = 2 \end{cases}$

$$\frac{2^\alpha + 4^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{2k}{n}\Big)^\alpha \frac{1}{n}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{2^\alpha + 4^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^\alpha dx = \frac{1}{2(\alpha+1)} x^{\alpha+1}\Big|_0^2 = \frac{2^\alpha}{\alpha+1}$$

۳ ـ پ)

$$\Big((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\Big)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\big(1+\frac{k}{n}\big)^{\frac{1}{n}} = a_n$$

$\begin{cases} x_k = 1 + \dfrac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \dfrac{1}{n} \\ a = 1 \text{ و } b = 2 \end{cases}$

$$\implies \ln a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\big(1 + \frac{k}{n}\big)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \int_۱^۲ \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_۱^۲ = ۲\ln ۲ - ۱$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{۲\ln ۲ - ۱} = \frac{۴}{e}$$

۳ ـ ت)

$$a_n = \frac{۱}{n^۴}\prod_{k=۰}^{۲n}(n^۲+k^۲)^{\frac{۱}{n}} = \prod_{k=۰}^{۲n}\left(\frac{۱}{n^۴}\right)^{\frac{۱}{۲n}}(n^۲+k^۲)^{\frac{۱}{n}} = \prod_{k=۰}^{۲n}\left(۱+\left(\frac{k}{n}\right)^۲\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$\begin{cases} x_k = \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{۱}{n} \\ a = ۰ \text{ و } b = ۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ln a_n = \sum_{k=۰}^{۲n}\frac{۱}{n}\ln\left(۱+(\frac{k}{n})^۲\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_۰^۲ \ln(۱+x^۲)dx \qquad \begin{cases} u = \ln(۱+x^۲) \\ dv = dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \frac{۲x}{۱+x^۲} \\ v = x \end{cases}$$

$$= x\ln(۱+x^۲)\Big|_۰^۲ - \int_۰^۲ \frac{۲x^۲dx}{۱+x^۲} = x\ln(۱+x^۲) - ۲x + ۲\operatorname{Arctan} x\Big|_۰^۲$$

$$= ۲\ln ۵ - ۴ + ۲\operatorname{Arctan} ۲$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\left(۲\ln ۵ - ۴ + ۲\operatorname{Arctan}(۲)\right)} = \frac{۲۵}{e^۴}e^{۲\operatorname{Arctan}(۲)}$$

۳ ـ ث) قرار دهید $x_k = ۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}$ و از آن $\Delta x_k = x_{k+۱} - x_k = ۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}(\sqrt[n]{۲} - ۱)$، $a = x_۰ = ۱$ و $b = x_n = ۲$، و چون $\frac{k}{n}$ در سری ظاهر شده از رابطه $\frac{k}{n}\ln ۲ = \ln ۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{k=۰}^{n}\frac{k۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}(\sqrt[n]{۲}-۱)}{n} = \frac{۱}{\ln ۲}\sum_{k=۰}^{n}\ln(x_k)\Delta x_k$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۰}^{n}\frac{k۲^{\left(\frac{k}{n}\right)}(\sqrt[n]{۲}-۱)}{n} = \frac{۱}{\ln ۲}\int_۱^۲ \ln x dx = \frac{۱}{\ln ۲}(۲\ln ۲ - ۱) = ۲ - \log_۲ e$$

۳ ـ ج) قرار دهید $x_k = \frac{۲k+۱}{۲n+۱}$ و از آن $\Delta x_k = x_{k+۱} - x_k = \frac{۲}{۲n+۱}$، $a = ۰$ و $b = ۱$،

$$\sum_{k=۰}^{n}\frac{۲k+۱}{۲n^۲+n} = \frac{۲n+۱}{۲n}\sum_{k=۰}^{n}\frac{۲k+۱}{۲n+۱}\cdot\frac{۲}{۲n+۱}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۰}^{n}\frac{۲k+۱}{۲n^۲+n} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{۲n}\right)\int_۰^۱ x dx = \frac{۱}{۲}$$

۴ ـ الف) در بازه $(۰, ۱]$ داریم $۱ \leq x^۲$ و از آن $۴ \leq (۱+x^۲)^۲ < ۰$ و نیز تابع $x\ln x$ در این بازه نامثبت است و مینیمم آن در $x = \frac{۱}{e}$ رخ می‌دهد و برابر $\frac{-۱}{e}$، پس $۰ \leq \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲} < \frac{-۱}{۴e}$ و از آن نتیجه می‌شود $۰ \leq \int_۰^۱ \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲} < \frac{-۱}{۴e}$ پس انتگرال مورد نظر همگراست.

۴ ـ ب)

$$\int_۰^{+\infty} xe^{-x^۲}dx = -\frac{۱}{۲}e^{-x^۲}\Big|_۰^{+\infty} = -\frac{۱}{۲}\left((\lim_{x\to+\infty}e^{-x^۲}) - ۱\right) = \frac{۱}{۲}$$

۴ ـ پ)

$$I = \int_۰^۱ \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[۵]{۱-x^۳}}dx \qquad \text{و} \qquad ۰ < \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[۵]{۱-x}\sqrt[۵]{۱+x+x^۳}} < \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۵]{۱-x}}$$

$$\Longrightarrow \quad ۰ < I < \int_۰^۱ \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۵]{۱-x}}dx = -\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}(۱-x)^{\frac{۴}{۵}}\Big|_۰^۱ = \frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$$

۴ ـ ت) برای هر $A > \circ$ تابع $P(x)e^{-x^{۲}}$ پیوسته و درنتیجه کراندار است پس انتگرال‌پذیر است. فرض کنید $\deg(P) = n$ و قرار دهید $P(x) = \sum_{k=\circ}^{n} a_k x^k$. فرض کنید $a_n > \circ$ داریم $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^{۲n+۱}} = \circ$. پس وجود دارد $A > \circ$ که اگر $x \geq A$ آنگاه $\circ < P(x) < x^{۲n+۱}$ پس اگر $x \geq A$ داریم $\circ < P(x)e^{-x^{۲}} < x^{۲n+۱}e^{-x^{۲}}$ پس

$$\circ < \int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^{۲}}dx < \int_A^{+\infty} x^{۲n+۱}e^{-x^{۲}}dx \qquad \begin{cases} -x^{۲} = u \\ -۲xdx = du \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A \to -A^{۲} \\ +\infty \to -\infty \end{cases}$$

$$\int_A^{+\infty} x^{۲n+۱}e^{-x^{۲}}dx = \int_{-A^{۲}}^{-\infty} (-u)^n e^u dx = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲}\int_{-A^{۲}}^{-\infty} u^n e^u dx$$

با استفاده از (۱ ـ خ)

$$= \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^k \frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k}e^u\Big|_{-A^{۲}}^{-\infty}$$

$$= \frac{-۱}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{۲n-۲k}e^{-x^{۲}}\Big|_{A}^{+\infty}$$

$$= \frac{-۱}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\underbrace{\Big(\lim_{x\to+\infty} x^{۲n-۲k}e^{-x^{۲}}\Big)}_{\circ}+\frac{۱}{۲}\sum_{k=\circ}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}A^{۲n-۲k}e^{-A^{۲}}$$

پس $\int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^{۲}}dx$ همگراست یعنی $\int_{\circ}^{+\infty} P(x)e^{-x^{۲}}dx$ همگراست.

۵ ـ الف) $\begin{cases} x = \frac{۱}{u} \\ dx = -\frac{du}{u^{۲}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۱ \to ۱ \\ +\infty \to \circ \end{cases}$ $\qquad \int_{۱}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$

$$= \int_{۱}^{\circ} \frac{u\ln u}{(۱+u^{۲})^{۲}}du = -\int_{\circ}^{۱} \frac{u\ln u}{(۱+u^{۲})^{۲}}du$$

بنابر قسمت (الف) سوال قبل انتگرال فوق همگراست پس:

$$\int_{\circ}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx = \int_{\circ}^{۱} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx + \int_{۱}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$$

$$= \int_{\circ}^{۱} \frac{x\ln x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx - \int_{\circ}^{۱} \frac{u\ln u}{(۱+u^{۲})^{۲}}du = \circ$$

۵ ـ ب) تابع $xe^{-x^{۲}}$ تابعی فرد است و بنابر قسمت (ب) سوال قبل انتگرال این تابع روی $[\circ,+\infty)$ همگراست پس روی بازه $(-\infty,\circ]$ نیز همگرا و قرینه مقدار انتگرال در $[\circ,+\infty)$ است پس انتگرال روی $\mathbb{R}$ صفر خواهد بود.

۶ ـ الف) حد به صورت $\frac{\circ}{\circ}$ مبهم است، با استفاده از هوپیتال داریم: $\lim_{x\to\circ} \frac{۲x\sin x^{۴}}{۶x^{۵}} = \frac{۱}{۳}$

۶ ـ ب) حد به صورت $\frac{\circ}{\circ}$ مبهم است، قبل از هوپیتال گرفتن باید تابع تحت انتگرال را تفکیک کنیم:

$$\int_{\circ}^{x} \big((t-x)\sqrt{\cos t}\big)dt = \int_{\circ}^{x} t\sqrt{\cos t}dt - x\int_{\circ}^{x}\sqrt{\cos t}dt$$

$$\lim_{x\to\circ}\frac{۱}{x^{۲}}\int_{\circ}^{x}\big((t-x)\sqrt{\cos t}\big)dt \overset{\text{Hop}}{=\!=}$$

$$\lim_{x\to\circ}\frac{۱}{۲x}\Big(x\sqrt{\cos x} - \int_{\circ}^{x}\sqrt{\cos t}dt - x\sqrt{\cos x}\Big) \overset{\text{Hop}}{=\!=} -\lim_{x\to\circ}\frac{۱}{۲}\sqrt{\cos x} = -\frac{۱}{۲}$$

۷) $$\int_a^b f(x)g''(x)dx \qquad \begin{cases} u=f(x) \\ dv=g''(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=f'(x) \\ v=g'(x) \end{cases}$$

$$= \underbrace{\big(f(x)g'(x)\big)\Big|_a^b}_{\circ} - \int_a^b f'(x)g'(x)dx \qquad \begin{cases} u=f'(x) \\ dv=g'(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=f''(x) \\ v=g(x) \end{cases}$$

$$= \underbrace{\big(-f'(x)g(x)\big)\Big|_a^b}_{\circ} + \int_a^b f''(x)g(x)dx$$

دقت شود که چون f'' و g'' روی $[a,b]$ وجود دارد پس f' و g' روی $[a,b]$ پیوسته‌اند و درنتیجه کران‌دار هستند و fg' و $f'g$ در نقاط a و b صفر می‌شوند.

۸) $$f'(x)=\sinh\big(\frac{x}{a}\big)$$

$$\Longrightarrow s(x)=\int_\circ^x \sqrt{۱+\sinh^۲\big(\frac{t}{a}\big)}dt=\int_\circ^x \cosh\big(\frac{t}{a}\big)dt = a\sinh\big(\frac{x}{a}\big)\Big|_\circ^x = a\sinh\big(\frac{x}{a}\big)$$

۹) بهتر است منحنی را به صورت $x=\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}$ در نظر بگیریم (با توجه به $x>\circ$).

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{طول قوس} = \int_\circ^۳ \sqrt{۱+y}dy = \frac{۲}{۳}(۱+y)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_\circ^۳ = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۰) منحنی یک نیم‌دایره به شعاع ۱۰ می‌باشد و طول خواسته شده ربع محیط دایره است که برابر ۵π می‌باشد.

۱۱) دایره مقطع را $x^۲+y^۲=۱$ و قطر آن‌را محور x ها می‌گیریم. اگر صفحه عمود بر محور x ها را در نظر بگیریم، قاعده جسم را در پاره‌خطی به طول y قطع می‌کند و چون زاویه ۴۵° است پس مقطع صفحه موردنظر با جسم، مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین است. بنابراین مساحت سطح مقطع برابر $A(x)=\frac{۱}{۲}y^۲=\frac{۱}{۲}(۱-x^۲)$ است و

$$\text{حجم} = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)dx=\int_\circ^۱(۱-x^۲)dx=\frac{۲}{۳}$$

۱۲) نقطه برخورد دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$y=|x| \quad \Longrightarrow \quad x=۲-x^۲ \quad \Longrightarrow \quad x^۲+x-۲=\circ \quad \Longrightarrow \quad x=۱,-۲$$

$$\text{مساحت} = \int_{-۲}^{۱}\big(\sqrt{۲-x}-|x|\big)dx=\int_{-۲}^{\circ}\big(\sqrt{۲-x}+x\big)dx+\int_\circ^۱\big(\sqrt{۲-x}-x\big)dx$$

$$=\Big(-\frac{۲}{۳}(۲-x)^{\frac{۳}{۲}}+\frac{x^۲}{۲}\Big)\Big|_{-۲}^{\circ}+\Big(-\frac{۲}{۳}(۲-x)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{x^۲}{۲}\Big)\Big|_\circ^۱$$

$$=\Big(-\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}+\frac{۱۶}{۳}-۲\Big)+\Big(-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}\Big)=\frac{۱۳}{۶}$$

۱۳) جسم از دوران $y=\sqrt{\sin x}$ برای $\circ \le x \le \pi$ حول محور x ها ایجاد می‌شود

$$\text{حجم} = \pi\int_\circ^\pi y^۲dx=\pi\int_\circ^\pi \sin x dx = ۲\pi$$

۱۴) دقت کنید که منحنی مورد نظر یک نیم‌دایره است و بنابر تقارن موجود در شکل طول کمان AB برابر CD خواهد بود، پس k را طوری باید بیابیم که کمان‌های AB، BC و CD با هم برابر باشند از طرفی کمان AD نیم دایره است و طول آن برابر πr است پس طول قوس‌های مورد نظر برابر $\frac{\pi}{۳}r$ خواهند بود و $k = r\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r$.

۱۵) فرض کنید مختصات رئوس مثلث به‌ترتیب $(۰,b)$، (a,b) و $(\frac{a}{۲}, b+\frac{\sqrt{۳}a}{۲})$ باشد و محور دوران محور x ها خواهد بود. بنابر تقارن کافی است حجم حاصل از دوران نیمه چپ مثلث را به‌دست آوریم. معادله ضلع مثلث به‌صورت $y = b+\sqrt{۳}x$ است.

$$\text{حجم} = ۲\pi\int_{۰}^{\frac{a}{۲}}(y^{۲}-b^{۲})dx = ۲\pi\int_{۰}^{\frac{a}{۲}}(۳x^{۲}+۲\sqrt{۳}bx)dx = ۲\pi\left(x^{۳}+\sqrt{۳}bx^{۲}\right)\Big|_{۰}^{\frac{a}{۲}}$$
$$= \frac{\pi}{۴}(a^{۳}+۲\sqrt{۳}ba^{۲})$$

۱۶) قرار دهید $f(x) = x^{(\frac{۱}{x})}$ و $f'(x) = x^{(\frac{۱}{x}-x^{۲})}(۱-\ln x)$ پس $f(x)$ در $[e,+\infty)$ نزولی و در $(۰,e]$ صعودی است. پس اگر $e \le a < b$ داریم $a^{\frac{۱}{a}} = f(a) > f(b) = b^{\frac{۱}{b}}$ و از آن $a^b > b^a$. همچنین اگر $۰ < a < b \le e$ داریم $a^{\frac{۱}{a}} = f(a) < f(b) = b^{\frac{۱}{b}}$ و از آن $a^b < b^a$.

۱۷) قرار دهید $f(x) = a^x - x - ۱$ باید نشان دهیم $f(x) \ge ۰$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر $a \le ۱$ آنگاه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ پس $a > ۱$ شرط لازم است. $f(۰) = ۰$ و $f'(x) = a^x\ln a - ۱$ برای برقراری نامساوی موردنظر باید داشته باشیم برای $x > ۰$، $f'(x) \ge ۰$ و برای $x < ۰$، $f'(x) \le ۰$.

چون $a > ۱$ پس $f'(x)$ تابعی است اکیداً صعودی بنابراین نامساوی‌ها برقرارند اگر و تنها اگر در $x = ۰$ برقرار باشند(!). بنابراین $f'(۰) = ۰$ یعنی $\ln a - ۱ = ۰$ پس $a = e$.

۱۸) اگر $۰ < a \le ۱$ به سادگی دیده می‌شود که این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند(؟) پس فرض کنید $a > ۱$. به‌وضوح این دو منحنی در $(-\infty,۰]$ تلاقی ندارند(؟). قرار دهید $f(x) = a^x - x$ اگر $f(x)$ در $(۰,+\infty)$ دارای ریشه باشد آنگاه $f'(x)$ نیز دارای ریشه خواهد بود(؟) که در این ریشه مقدار f نامثبت است(؟). $f'(c) = a^c\ln a - ۱ = ۰$ پس $c = \log_a\log_a e$ و $f(c) = \log_a e - \log_a\log_a e \le ۰$ از اینکه $a > ۱$ داریم $\log_a x$ تابعی صعودی است پس $e \le \log_a e$ و از آن $a \le e^{(\frac{۱}{e})}$.

در مجموع جواب مسئله $۰ < a \le e^{(\frac{۱}{e})}$ می‌باشد.

۱۹) قرار دهید $h(x) = f(x)e^{g(x)}$، $h(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر روی I است و نیز $h(a) = h(b) = ۰$ از قضیه رول وجود دارد $c \in (a,b)$ که $h'(c) = ۰$ یعنی $f'(c)e^{g(c)} + g'(c)f(c)e^{g(c)} = ۰$ پس $e^{g(c)}\left(f'(c) + g'(c)f(c)\right) = ۰$، چون $g(x)$ روی بازه I مشتق‌پذیر است و $a,b \in I$ پس روی $[a,b]$ پیوسته است و بنابر قضیه‌ای کران‌دار است پس $e^{g(c)} \ne ۰$ و حکم به‌دست می‌آید.

۲۰) قبل از محاسبه حدود توجه کنید که اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=\infty$ آنگاه

$$\lim_{x\to x_۰}\big(۱+f(x)\big)^{g(x)}=\lim_{x\to x_۰} e^{g(x)\ln\big(۱+f(x)\big)}=\lim_{x\to x_۰} e^{g(x)f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_۰}\big(g(x)f(x)\big)}$$

که در آن تساوی اول از رابطه $a=e^{\ln a}$ و این که وقتی $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ پس اگر به مقدار کافی به $x_۰$ نزدیک شویم $۱+f(x)>۰$، به‌دست می‌آید. و تساوی دوم از هم‌ارزی $\ln(۱+x)\sim x$ وقتی $x\to ۰$ به‌دست می‌آید.

تذکر: دو تابع $\big(۱+f(x)\big)^{g(x)}$ و $e^{g(x)f(x)}$ در $x_۰$ لزوماً هم‌ارز نیستند. (به سوال (۲۰ ـ س) مراجعه نمایید.)

۲۰ ـ الف)
$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱+x}{۲+x}\right)^{\frac{۱-\sqrt{x}}{۱-x}}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱+x}{۲+x}\right)^{\frac{۱-x}{(۱+\sqrt{x})(۱-x)}}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱+x}{۲+x}\right)^{\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۰ ـ ب)
$$\lim_{x\to ۰}\sqrt[x]{۱-۲x}=\lim_{x\to ۰}(۱-۲x)^{\frac{۱}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(-۲x)}=e^{-۲}$$

۲۰ ـ پ)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+۲}{۲x-۱}\right)^{x^۲}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{\frac{۵}{۲}}{۲x-۱}\right)^{x^۲}$$

اگر $x>۱۰$ پس $۲x-۱>۱۹$ پس $\frac{۱}{۶}>\frac{۵}{۳۸}>\frac{\frac{۵}{۲}}{۲x-۱}>۰$ پس $\frac{۲}{۳}>\frac{x+۲}{۲x-۱}>\frac{۱}{۲}$ و چون $x^۲>۰$ $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{x^۲}>\left(\frac{x+۲}{۲x-۱}\right)^{x^۲}>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x^۲}$ و اگر $x\to +\infty$ داریم: $۰\le \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۲}{۲x-۱}\right)^{x^۲}\le ۰$

۲۰ ـ ت)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^۲+۱}{x^۲-۲}\right)^{x^۲}=\lim_{x\to +\infty}\left(۱+\frac{۳}{x^۲-۲}\right)^{x^۲}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲\left(\frac{۳}{x^۲-۲}\right)}=e^۳$$

۲۰ ـ ث)
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{۱}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{x-a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}-۱\right)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{x-a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{x-a}\left(\frac{۲\cos(\frac{x+a}{۲})\sin(\frac{x-a}{۲})}{\sin a}\right)}=e^{\cot a}$$

۲۰ ـ ج)
$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sin x}\left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}-۱\right)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{\sin x}\left(\frac{\tan x-\sin x}{۱+\sin x}\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\cos x(۱+\sin x)}}=e^{۰}=۱$$

۲۰ ـ چ)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sin\frac{۱}{x}+\cos\frac{۱}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{۱}{x}+\cos\frac{۱}{x}-۱\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۲x^۲}\right)}=e$$

۲۰ ـ ح)
$$\lim_{x\to ۰}(x+e^x)^{\frac{۱}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(x+e^x-۱)}\stackrel{\text{Hop}}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱+e^x}{۱}}=e^۲$$

۲۰ ـ خ)
$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{۳}-۱\right)}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a^x+b^x+c^x-۳}{۳x}}$$
$$\stackrel{\text{Hop}}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{۳}}=e^{\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{۳}}=\sqrt[۳]{abc}$$

۲۰ ـ د)
$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}}{a^x+b^x}-۱\right)}=e^{\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}-a^x-b^x}{x}\times\frac{۱}{a^x+b^x}\right)}$$

کافی است حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}-a^x-b^x}{x}$ را به‌دست آوریم که با هوپیتال داریم،

$$\lim_{x\to ۰}\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}-a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۲x)(a^{x^۲}\ln a+b^{x^۲}\ln b)-a^x\ln a-b^x\ln b}{۱}=-\ln a-\ln b$$

و با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{a^x+b^x}=\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$=e^{\frac{-\ln a-\ln b}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{ab}}$$

۲۰ ـ ذ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(۱+e^{-x})}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}(e^x+۱)\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\ln(e^x+۱)}{x}=-۱$

۲۰ ـ ر) قرار دهید $\cosh x=u$، چون $x\to ۰$ پس $u\to ۱^+$ و حد مورد سوال به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lim_{u\to ۱^+}\frac{\ln u}{\sqrt[m]{u}-\sqrt[n]{u}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{u\to ۱^+}\frac{\frac{۱}{u}}{\frac{۱}{m}u^{\frac{۱-m}{m}}-\frac{۱}{n}u^{\frac{۱-n}{n}}}=\frac{nm}{n-m}$$

۲۰ ـ ز)
$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}}=e^{\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}\left(\frac{\sin x}{x}-۱\right)}=e^{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-x}{x^۳}}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}e^{\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-۱}{۳x^۲}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}e^{\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{۶x}}=e^{-\frac{۱}{۶}}$$

۲۰ ـ ژ)
$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}-e}{x}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}\left(\frac{۱}{x(۱+x)}-\frac{\ln(۱+x)}{x^۲}\right)}{۱}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{x+۱}\times\lim_{x\to ۰}\frac{x-(۱+x)\ln(۱+x)}{x^۲}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}e\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\ln(۱+x)-۱}{۲x}\overset{\text{Hop}}{=\!=}e\times\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{۱+x}}{۲}=-\frac{e}{۲}$$

۲۰ ـ س) با استفاده از سوال قبل

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{e}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{e}-۱\right)}=e^{\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{e}\left(\frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}}-e}{x}\right)}=e^{-\frac{۱}{۲}}$$

۲۰ ـ ش)
$$\lim_{x\to ۱}(۲-x)^{\tan\frac{\pi x}{۲}}=e^{\lim_{x\to ۱}\tan\left(\frac{\pi x}{۲}\right)(۱-x)}=e^{\lim_{x\to ۱}\sin(\frac{\pi x}{۲})\frac{(۱-x)}{\cos\frac{\pi x}{۲}}}=e^{\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)}{\cos\frac{\pi x}{۲}}}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}e^{\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{-\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲}}}=e^{\frac{۲}{\pi}}$$

۲۰ ـ ص)
$$\lim_{x\to ۰}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^۳}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{a^x\ln a-\cos x a^{\sin x}\ln a}{۳x^۲}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{a^x\ln^۲ a-\cos^۲ x a^{\sin x}\ln^۲ a+\sin x a^{\sin x}\ln a}{۶x}$$
$$=\frac{\ln^۲ a}{۶}\lim_{x\to ۰}\frac{a^x-\cos^۲ x a^{\sin x}}{x}+\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x a^{\sin x}\ln a}{۶x}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\frac{\ln a}{۶}+\frac{\ln^۲ a}{۶}\lim_{x\to ۰}\frac{a^x\ln a-\cos^۳ x a^{\sin x}\ln a+۲\cos x\sin x a^{\sin x}}{۱}=\frac{\ln^۲ a}{۶}$$

۲۰ ـ ض)
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{\sqrt{۱-e^{-x^۲}}}=\sqrt{\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲}{۱-e^{-x^۲}}}\qquad\begin{cases}x^۲=u\\ x\to ۰^+\Rightarrow u\to ۰^+\end{cases}$$
$$=\sqrt{\lim_{u\to ۰^+}\frac{u}{۱-e^{-u}}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\sqrt{\lim_{u\to ۰^+}\frac{۱}{e^{-u}}}=۱$$

۲۱ ـ الف) با استفاده از آزمون انتگرال کافیست همگرایی $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$ بررسی شود (برای a مناسب) اگر $u=\ln x$ داریم $du=\frac{dx}{x}$ و انتگرال فوق برابر $\int_{e^a}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$ که این انتگرال همگراست اگر و تنها اگر $p>۱$.

۲۱ ـ ب) انتگرال متناظر به‌صورت $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln^p(\ln x)}$ است. قرار دهید $u=\ln(\ln x)$، $du=\frac{dx}{x\ln x}$ و انتگرال فوق برابر $\int_{e^a}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$ که این انتگرال همگراست اگر و تنها اگر $p>۱$.

۲۱ ـ پ) با استفاده از آزمون مقایسه داریم

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{n\ln^p(\ln n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^p(\ln n)}{\ln n} = 0 \ (?)$$

و با توجه به واگرایی $\sum \frac{1}{n\ln n}$ سری مذکور برای هر p واگراست.

۲۱ ـ ت)
$$\sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln^p n)} = \sum \frac{1}{pn\ln n\ln(\ln n)} = \frac{1}{p}\sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$$

و با توجه به واگرایی $\sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ سری مذکور برای هر p واگراست.

۲۲ ـ الف) داریم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{(1+\frac{1}{n})}}{n} =$ از واگرایی $\sum \frac{1}{n}$ واگرایی سری مذکور نتیجه می‌شود.

۲۲ ـ ب) از آنجاکه $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ پس وجود دارد N که اگر $n > N$ آنگاه $\ln n > e^2$ پس $(\ln n)^{\ln n} > (e^2)^{\ln n} = n^2$ و $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$ و از همگرایی $\sum \frac{1}{n^2}$، همگرایی سری مذکور نتیجه می‌شود.

۲۲ ـ پ) با استفاده از سوال ۱۶ داریم $\pi^e < e^\pi$ پس $\frac{\pi^e}{e^\pi} < 1$ پس قدرنسبت سری هندسی کوچک‌تر از ۱ است و همگراست.

۲۲ ـ ت) با استفاده از آزمون انتگرال باید همگرایی انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ بررسی شود.

تابع $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ در بازه‌های $[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{5\pi}{6}]$ نزولی است(؟). پس اگر $x \in [k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{5\pi}{6}]$، $f(x) \geq \frac{3}{6k\pi + 5\pi}$،

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}} \frac{3}{6k\pi + 5\pi}dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{6k\pi + 5\pi}$$

و از آنجا که $\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{6k\pi+5\pi}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{6}$ و از واگرایی $\sum \frac{1}{k}$ واگرایی سری $\sum \frac{\pi}{6k\pi + 5\pi}$ و از آن واگرایی انتگرال $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ و از آن واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ حاصل می‌شود.