سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران

به همراه راه حل، از سال ۸۰ تا کنون

وبگاه المپیاد ریاضی ایران

کمیته ملی المپیاد
ریاضی ایران- پاییز ۹۲

به نام او
که دانش آفریده است...

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران به همراه راه‌حل
از سال ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۲

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران به همراه راه‌حل از سال ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱.۰ مقدمه

خواننده‌ی عزیز سلام
جمع‌آوری، تولید، تدوین و انتشار محتوای علمی مفید و با کیفیت، نیازمند پشت سرگذاشتن سختی‌های بسیاری است. این کتاب و کتاب مجموعه سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول حاصل زحمات عزیزانی است که در کمیته‌ی ملی المپیاد ریاضی ایران در باش‌گاه دانش‌پژوهان جوان ساعات زیادی را صرف جمع‌آوری سؤالات آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم، نوشتن راه‌حل‌ها، ویرایش محتوا و... کرده‌اند. جا دارد که از این عزیزان که نام آن‌ها را در زیر می‌بینید، صمیمانه تشکر کنیم:
ماهد آب‌روشن، سید احسان آزرم‌سا، احسان اسدی، صدرا بریری، مهران بهمنی، ماهان تجربه‌کار، سید علی‌رضا توکلی، مرتضی ثقفیان، خشایار خسروی، حسام‌الدین رجب‌زاده، سینا رضایی، عارف صادقی، عرفان صلواتی، جواد عابدی، علی‌رضا علی‌آبادیان، علی‌رضا عموزاد، مجید فرهادی، سپهر قاضی‌نظامی، پارسا مرادی، امیرعلی معین‌فر، روح‌الله مهکام، امیرحسین نوید ادهم.
ضمناً قسمتی از راه‌حل‌های سؤالات مرحله‌ی دوم با ترجمه و استفاده از راه‌حل‌هایی که در کتاب‌چه‌های سؤالات ایران (که بنا به رسم هر ساله‌ی المپیاد جهانی ریاضی جهت رد و بدل کردن با کشورهای دیگر در زمان برگزاری این مسابقات، به زبان انگلیسی تهیه می‌شود) نوشته شده است. به علاوه در مورد آزمون‌ها بعضی سال‌ها از مجموعه‌ی نشریه‌های دانش‌پژوه که حدود ده سال قبل توسط انتشارات باش‌گاه دانش‌پژوهان به چاپ می‌رسید استفاده شده است. بنابراین لازم است از همه‌ی کسانی که در سالیان مختلف در تهیه‌ی این کتاب‌چه‌ها و نشریه‌ها هم‌کاری کرده‌اند هم کمال تشکر را داشته باشیم.
در پایان امیدواریم که محتوای این کتاب برای شما عزیزان مفید باشد.

مهرماه ۱۳۹۲

بخش اول

سؤالات

۲.۰ سؤالات مرحله دوم نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۰

۱. فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به طوری که $np + ۱$ مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n + ۱$ را به صورت مجموع pتا مربع کامل نوشت.

۲. مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = ۳۰^\circ$$

$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳. تمام nهایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل، حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

۴. تمام چندجمله‌ای‌های P با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$P(۲P(x)) = ۲P(P(x)) + ۲P(x)^۲$$

۵. در مثلث ABC $(AB > AC)$ نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. هم‌چنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی $\angle A$ چند درجه است؟

۶. جدولی با یک سطر و تعداد نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد(نظیر شکل زیر)

							....

در این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده‌ایم به گونه‌ای که در بعضی از خانه‌ها تعدادی مهره قرار گرفته است (در یک خانه می‌تواند بیش از یک مهره باشد.) دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.

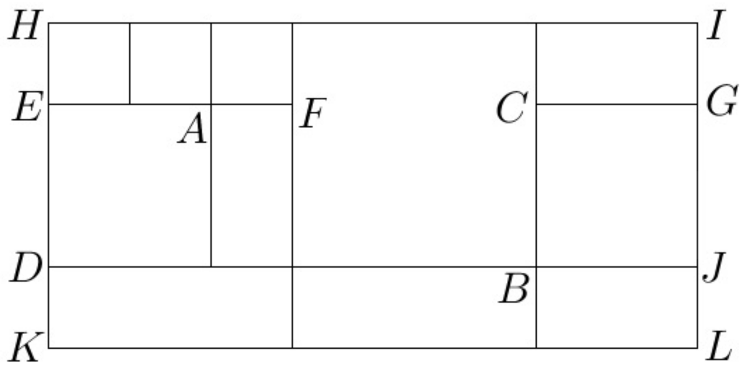
۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه به سمت چپ برد.

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا nام یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکرشده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$ام جلوتر نخواهد رفت.

۱. $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را یک جای‌گشت از اعداد ۱، ۲، ...، n می‌نامیم هرگاه $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\} = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ (یعنی $a_۱$ تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آن‌ها تغییر کرده است). تمام جای‌گشت‌های ۱ تا n مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را بیابید که برای $۱ \leq i \leq n$، $۲(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_i)$ بر $i + ۱$ بخش‌پذیر باشد. برای مثال $a_۱ = ۳$، $a_۲ = ۱$، $a_۳ = ۴$ و $a_۴ = ۲$ یک جای‌گشت از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

۲. یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل(کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم‌چنین هیچ قسمتی از مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابرای هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط(پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک ((چهارراه)) می‌گوییم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم‌چنین در این شکل ۵ خط افقی و (KL, DJ, CG, EF, HI) و ۶ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.
نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها در نظر بگیریم. و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = ۹۰^\circ$، هم‌چنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴. A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهارضلعی محدب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = ۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a+b\delta$ هستند که $a,b\in R$. (R نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.)

قرارداد می‌کنیم که $a+b\delta=a'+b'\delta$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$.

δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^{۲}=۰$!

روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a+b\delta)+(a'+b'\delta)=(a+a')+(b+b')\delta$$

$$(a+b\delta)(a'+b'\delta)=aa'+ab'\delta+ba'\delta'+bb'\delta^{۲}=aa'+(ab'+ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که این چندجمله‌ای در R ریشه‌ی مضاعف دارد، اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشهای غیر حقیقی داشته باشد.(ریشه‌ی غیرحقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a+b\delta$ که $b\neq ۰$).

توضیح می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x-a)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد.

۶. در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

۱. عدد طبیعی n را سه‌لایه‌ای می‌نامیم، هرگاه بتوان مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف. عددی سه‌لایه‌ای مثال بزنید.
ب. ثابت کنید بی‌نهایت عدد سه‌لایه‌ای وجود دارد.

۲. در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq ۳$) به طوری که همه‌ی آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه‌ی A مناسب‌تر از نقطه‌ی B است اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها کم‌تر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد.
نقطه‌ای را ایده‌آل می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب‌تر از آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه‌ی ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳. n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند. برای هر دو تیم متمایز A و B دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A و B باخته‌اند. ثابت کنید $n = ۴t + ۳$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

۴. برای هر سه عدد حقیقی x ، y و z با شرط $xyz = -۱$، نامساوی زیر را ثابت کنید:
$$x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) \geq \frac{x^۲}{y} + \frac{x^۲}{z} + \frac{y^۲}{z} + \frac{y^۲}{x} + \frac{z^۲}{x} + \frac{z^۲}{y}$$

۵. زاویه‌ی $\angle A$ کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع است.
عمود منصف‌های AB، AC با خط AD به ترتیب در نقطه‌های M و N برخورد می‌نمایند. نقطه‌ی T محل برخورد BM و CN است. ثابت کنید
$$BT + CT \leq ۲R$$
که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

۶. یک روبات از یک رأس دل‌خواه روی صفحه‌ی شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت‌های اصلی روی اضلاع صفحه‌ی شطرنجی حرکت می‌کند. این روبات دارای دو خانه‌ی حافظه‌ی A و B است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.

در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب به خانه‌ی A یکی اضافه می‌شود، از خانه‌ی A یکی کم می‌شود، به خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A اضافه می‌شود یا از خانه‌ی B به اندازه‌ی عدد خانه‌ی A واحد کم می‌شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه‌ی حافظه‌ی B، برابر با مساحت درونی شکلی است که روبات پیموده.

۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\angle A = ۹۰^\circ$)، نقطه‌ی D محل برخورد نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر زاویه‌ی A است. (I_a محل برخورد نیم‌سازهای زوایای خارجی B و C است.) ثابت کنید:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{۲} - ۱$$

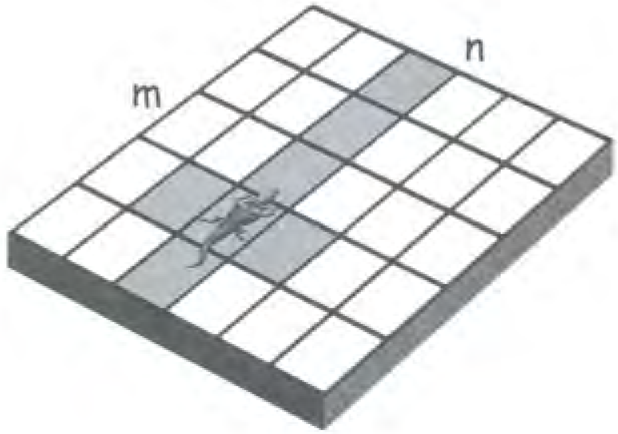
۲. فرض کنید $f : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x) - ۳x$ و $f(x) - x^۳$ توابعی صعودی‌اند. نشان دهید $f(x) - x^۲ - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوییم هرگاه اگر $x \leq y$ آن‌گاه $g(x) \leq g(y)$)

۳. وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یک‌دیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

۴. همه‌ی توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر m و n طبیعی، $f(m) + f(n)$ بر $m + n$ بخش‌پذیر باشد.

۵. نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی $\angle A$ از مثلث ABC، ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه‌ی D دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است.
ثابت کنید خط AD زاویه‌ی $\angle XAY$ را نصف می‌کند.

۶. مهره‌ی تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq ۴$) می‌تواند همه‌ی خانه‌های هم‌ستون خودش و همین طور خانه‌های مجاور هم‌سطرش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهره‌ی تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست‌کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که تمساح‌ها باید عمودی باشند.)

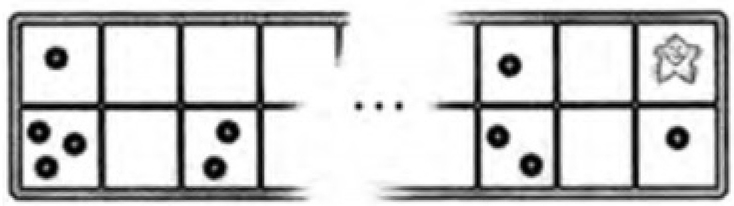


۱. n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n|p-۱$ و $p|n^۳-۱$. نشان دهید $۴p-۳$ مربع کامل است.

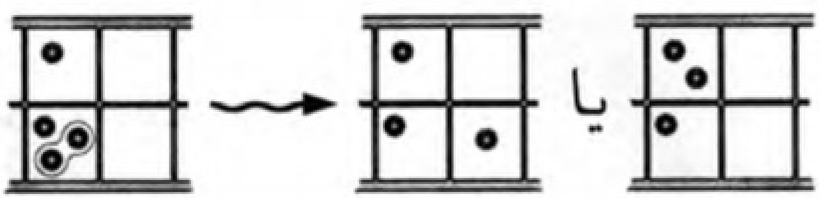
۲. در مثلث ABC، $\angle A = ۶۰^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و $O_۲$ مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع $BO_۱$ و $CO_۲$ را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $DO_۱O_۲$ را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی(!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)

۴. در برخی خانه‌های یک جدول $۲ \times n$ تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم ۲^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵. BC یک قطر دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $CY \parallel PB$ و $CX \parallel MP$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $PB \perp MK$.

۶. تمام توابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^۲ f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست.)

۱. فرض کنید دایره‌ی C_2 از مرکز دایره‌ی C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دل‌خواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره‌ی C_1 است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x+y, x-y) = 2P(x,y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k > 1$) دست‌کم دو تایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-1$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی iام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی $[a_i, b_i]$ بنامید که در آن $a_i < b_i$.)

۴. الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+1$ بر $m+n$ بخش‌پذیر است.

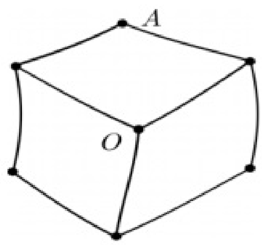
ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنباله‌ی $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از دو موجود است که $a_0 = m$، $a_k = n$ و برای هر $i = 0, 1, \ldots, k-1$ داریم:

$$a_i + a_{i+1} | a_i a_{i+1} + 1$$

۵. نقاط A، B، C و D با همین ترتیب روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$ چهارتاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

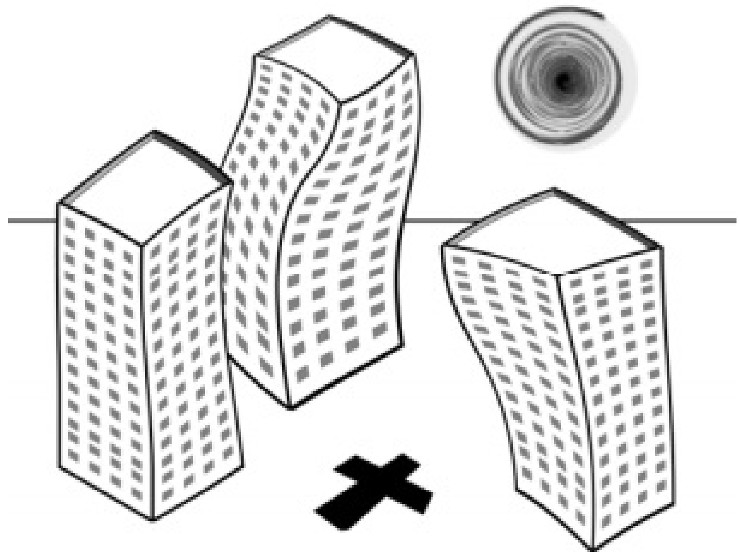
۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضعیت اول برمی‌گردند.

۱. در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



۲. دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+۱$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)

۳. در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از ۴۵ درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند، می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به ذیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ی افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمود بر روی صفحه در نظر بگیرید.



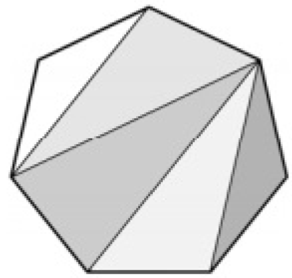
۴. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

۵. دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی $C_۱$ است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی $C_۲$ رسم می‌کنیم(M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی $C_۱$ را به ترتیب Nو N' می‌نامیم. نشان دهید:

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

۶. فرهاد برای جشنواره‌ی خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n، دقیقاً یکی از سه عدد n، $۲n$ و $۳n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.

۱. به چند طریق می‌توان $n-۳$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟



۲. فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳. a، b، c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x، $f(x)\neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a، $f^{۱۳۸۷}(a)=a$، آن‌گاه برای هر x در دامنه‌ی $f^{۱۳۸۷}$، $f^{۱۳۸۷}(x)=x$. (f^n یعنی n بار ترکیب تابع f)

راهنمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x)=\frac{sx+t}{ux+v}$، اگر معادله‌ی $g(x)=x$ بیش از دو جواب داشته باشد آن‌گاه برای هر x، $g(x)=x$.

۴. نشان دهید تنها عدد طبیعی a، که برای هر n طبیعی $۴(a^n+۱)$ مکعب کامل باشد، یک است.

۵. می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره‌ها ده‌رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیش‌ترین تعداد شماره که می‌تواند استفاده شود چند تاست؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

۶. فرض کنید در مثلث ABC، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC=۲OT$، آن‌گاه $AB=۲OT'$.

۱. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است که قدر مطلق آن در سه نقطه‌ی ۱−، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-۱, ۱]$،

$$|p(x)| \leq \frac{۵}{۴}$$

۲. یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰ × ۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار است و یک درخت سیب وجود دارد. به علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطع را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)
نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰تا بیش‌تر نیست.

۳. فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $\angle PAQ \geq \angle A$.

۴. $n(n+۲)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم برمی‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+۲$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵. اعداد طبیعی $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و jمتمایز، $a_j - a_i$ بر a_i بخش‌پذیر است. نشان دهید که برای هر $i < j$ ،

$$ia_j \leq ja_i$$

۶. ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده است؛ ممکن است برخی کارت نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-۱$، i و $i+۱$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند.(منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲، کارت شماره‌ی ۱ است!)
فرض کنید که در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

۱. a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و $ab + ۱$ و $a - b$ هم نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + ۱)^۲ + (a - b)^۲$ مربع کامل نیست.

۲. n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{۲}{۳}(n^۲ - n)$ بیش‌تر نیست.

۳. دایره‌های $W_۱$ و $W_۲$ در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی $W_۱$ و $W_۲$ هستند به طوری‌که AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی $W_۲$ را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$\angle DPM = \angle BDC$$

۴. ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ عددهای حقیقی‌اند و

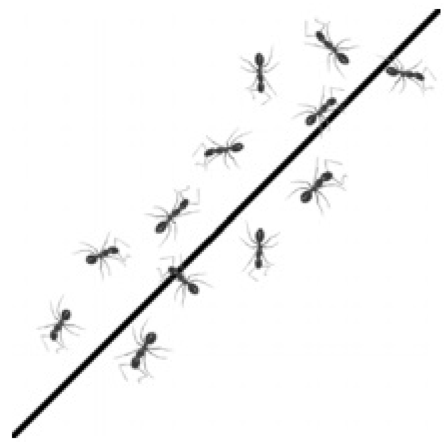
$$\min\{d, b + d\} > \max\{|c|, |a + c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = ۰$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ جواب ندارد.

۵. در مثلث ABC، $\angle A = ۶۰^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶. مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n - ۱)^۲$ بیش‌تر نیست.

۱. ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصله‌ی سر هر دو مورچه بیش‌تر از دو سانتی‌متر باشد فاصله‌ی سر دست‌کم دو مورچه بیش‌تر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)



۲. در مثلث ABC داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ را در نقطه‌ی D قطع کند. هم‌چنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle ABC$ را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq ۳۰^\circ$.

۳. همه‌ی دنباله‌های صعودی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i + j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آن‌گاه $a_i \leq a_j$.)

۴. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها صفر و مجموع مربع‌های آن‌ها ۲۰ باشد.

۵. رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کم‌یاب است. این پرنده‌ی زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی درباره‌ی این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای iاُم، jاُم، kاُم و lاُم، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای iاُم و kاُم هم‌رنگ باشد و در روزهای jاُم و lاُم نیز هم‌رنگ به رنگی متفاوت از روزهای iاُم و kاُم باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب n چند روز است؟

۶. اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

۱. دایره‌ی C_1 و نقطه‌ی O روی آن مفروض است. دایره‌ی C_2 به مرکز O، C_1 را در دو نقطه‌ی P و Q قطع می‌کند. C_3 دایره‌ای است که در نقطه‌ی R بر C_2 مماس خارج و در نقطه‌ی S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطه‌ی Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳ و... n را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیهی از مجموعِ دو عدد مجاورش باشد؟

۳. ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > ۱$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعداد

$$n + t, n^۲ + t, n^۳ + t, \cdots$$

توان کامل نیستند.

(دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $m \geq ۲$ و $a = b^m$.)

۴. الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n + ۱۳۹۱$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n^۲ + ۱۳۹۱$ باشد؟

۵. چندجمله‌ایِ درجه‌ی دوی $x^۲ + ax + b$، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این‌که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^۲ - ۴b$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیرهای a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ایِ چهار متغیره‌ی $P(a, b, c, d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:
چندجمله‌ای درجه‌ی چهار $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل‌ضرب چهار چندجمله‌ایِ درجه‌ی یک باشد اگر و تنها اگر $P(a, b, c, d) \geq ۰$.

۶.) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. قرینه‌ی نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

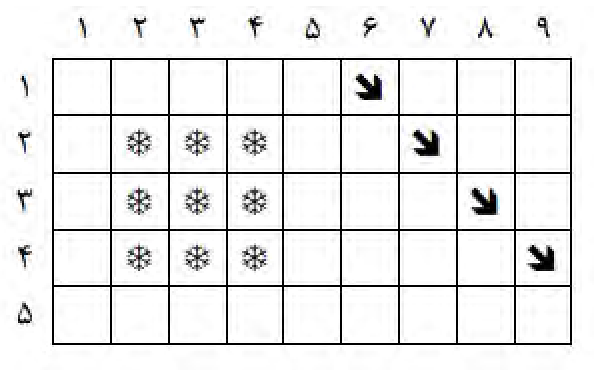
۱. همه‌ی a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که $\frac{a}{b} = b/a$.
(توضیح: اگر $a = ۹۲$ و $b = ۱۳$، آن‌گاه b/a برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲. فرض کنید اعداد طبیعی $w_۱, w_۲, \dots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه‌ی کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه‌ی وزنه‌های باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان $\widehat{BC}$ از دایره‌ی محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطه‌ی O ، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایره‌ی محیطی در نقطه‌ی N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطه‌ی K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ی محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. قرینه‌ی P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره‌ی ستون و شماره‌ی سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول ۳ × ۳ را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همه‌ی اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول ۹ × ۵ زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های ۳ × ۳ مشخص شده‌اند. توجه کنید که خانه‌ی گوشه‌ی راست-بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.



۶. دنباله‌ی $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+۲} = \left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right] + \left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = ۴$ و $a_{m+۱} \in \{۳, ۴\}$.

بخش دوم

راه‌حل‌ها

۱. فرض کنید x عدد صحیحی باشد که $np + ۱ = x^۲$. پس $p|x^۲ - ۱$ و در نتیجه $p|(x-۱)(x+۱)$. با توجه به این که p یک عدد اول است، $p|x - ۱$ و یا $p|x + ۱$. بنابراین عدد طبیعی k یافت می‌شود که $x = kp + ۱$ و یا $x = kp - ۱$. از این‌جا مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

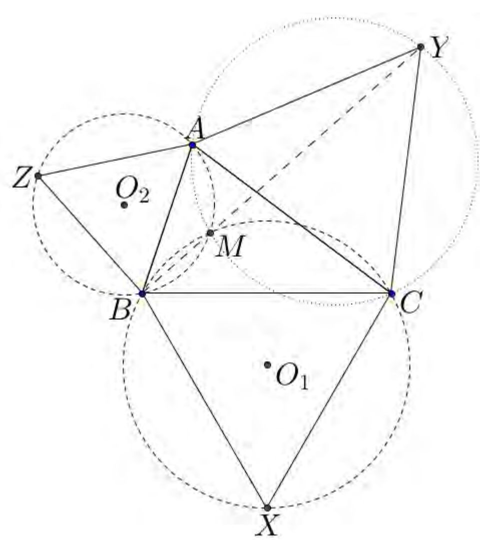
$$\begin{aligned} x = kp + ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp+۱)^۲ = k^۲p^۲ + ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p + ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ + ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k+۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k+۱)^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = kp - ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp-۱)^۲ = k^۲p^۲ - ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p - ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ - ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k-۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k-۱)^۲ \end{aligned}$$

پس در هر صورت $np + ۱$ مجموع p مربع کامل است.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. اگر بر روی اضلاع مثلث حاده‌الزاویه ABC و در خارج از آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCX، CAY و ABZ را بنا کنیم و $O_۱$ و $O_۲$ به ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BCX و ABZ باشند، در این صورت $BY \perp O_۱O_۲$.

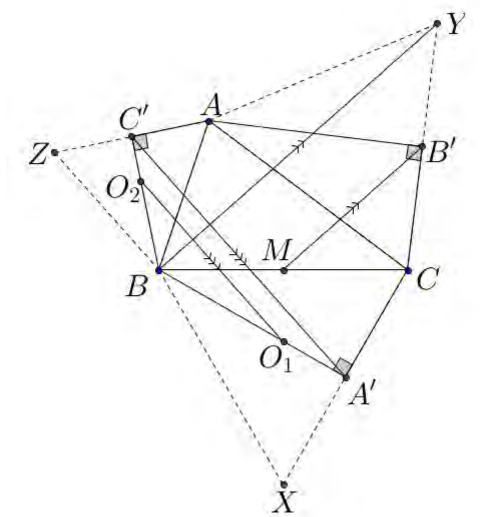


اثبات. فرض کنید M نقطه‌ی برخورد این دو دایره غیر از B باشد. در این صورت روشن است که $\angle BMC = \angle AMB = ۱۲۰^\circ$ و در نتیجه $\angle CMA = ۱۲۰^\circ$. حال با توجه به این‌که $\angle AYC = ۶۰^\circ$، چهارضلعی $AMCY$ محاطی است. پس:

$$\angle AMY = \angle ACY = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle AMB + \angle AMY = ۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین نقطه‌های B، M و Y هم‌خط هستند. از طرفی BM وتر مشترک دو دایره به مرکز $O_۱$ و $O_۲$ است و بنابراین بر خط‌المرکزین دو دایره یعنی $O_۱O_۲$ عمود است. در نتیجه $BY \perp O_۱O_۲$. □

حال با در نظر داشتن لم فوق به حل مسئله می‌پردازیم.
مثلث‌های ساخته‌شده روی اضلاع مثلث ABC را طبق شکل زیر کامل می‌کنیم تا به مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع تبدیل شوند. در این صورت به وضوح نقطه‌های A'، B' و C' وسط‌های سه ضلع از ضلع‌های این مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند.



حال دقت کنید که اگر $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی BCX و $O_۲$ مرکز دایره‌ی محیطی ABZ باشد، $O_۱$ روی BA' و $O_۲$ روی BC' واقع است و به علاوه:

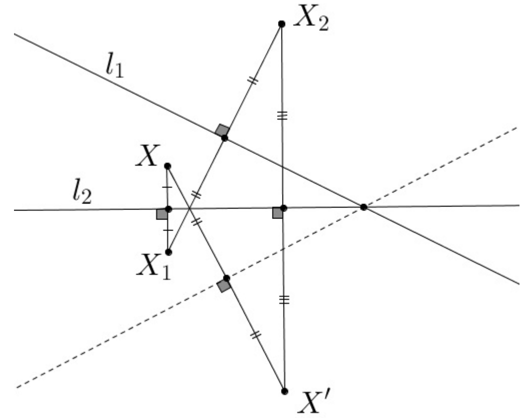
$$\frac{BO_۱}{O_۱A'} = \frac{BO_۲}{O_۲C'} = ۲$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $O_۱O_۲ \parallel A'C'$.
همچنین از آن‌جایی که M وسط ضلع BC است و B' وسط YC، $MB' \parallel BY$. اما طبق لم می‌دانیم که $O_۱O_۲ \perp BY$، بنابراین $A'C' \perp MB'$.

۳. ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم:
لم. اگر $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن از شکلی باشند، آن‌گاه قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ نیز محور تقارنی از شکل خواهد بود.

اثبات. چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی X نسبت به $l_۲$ که آن را با $X_۱$ نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است و چون $l_۱$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۱$ نسبت به $l_۱$ که آن را با $X_۲$ نمایش می‌دهیم

هم متعلق به شکل است. در نهایت چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۲$ نسبت به $l_۲$ که از X' برای نمایشش استفاده می‌کنیم هم نیز متعلق به شکل است. اما به سادگی می‌توان دید که X' قرینه‌ی X نسبت به خطی است که از قرینه کردن $l_۱$ نسبت به $l_۲$ به دست آمده است. پس در کل برای هر نقطه‌ی X در شکل، قرینه‌ی X نسبت به این خط هم در شکل قرار دارد و بنابراین این خط هم محور تقارنی از شکل است.



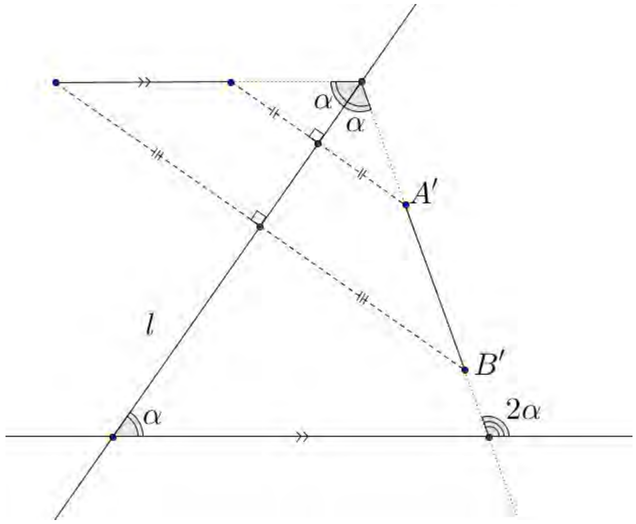
□

لم. هر مجموعه از اشکال که در ناحیه‌ای کران‌دار از صفحه(یعنی ناحیه‌ای که بتوان برای آن دایره‌ای با شعاع هر چند بزرگ یافت که به تمامی درون آن دایره قرار بگیرد.) باشد، نمی‌تواند دو محور تقارن موازی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن موازی برای مجموعه باشند. طبق لم ۱ قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ که آن را $l_۳$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب قرینه‌ی $l_۲$ نسبت به $l_۳$ که آن را $l_۴$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب نامتناهی خط موازی باید محور تقارن شکل باشند. اما به وضوح از جایی به بعد مجموعه‌ی ما در یک طرف این خطوط واقع خواهد شد و لذا این خط‌ها از جایی به بعد امکان ندارد که محور تقارن ما باشند. بنابراین چنین مجموعه‌ای دو محور تقارن موازی نمی‌تواند داشته باشد. □

لم. محور تقارن تعدادی مربع با اضلاع عمودی و افقی، خطی است افقی، عمودی و یا با زاویه‌ی ۴۵ درجه یا ۱۳۵ درجه نسبت به محور افقی.

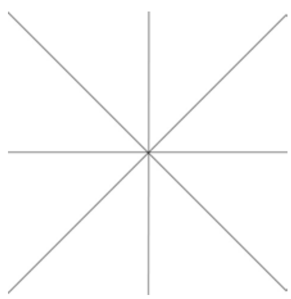
اثبات. فرض کنید خط l محور تقارنی از این شکل باشد و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی α بسازد. در این صورت اگر $A'B'$ قرینه‌ی یکی از اضلاع افقی یکی از مربع‌ها نسبت به l باشد، می‌توان به سادگی دید که باید با محور x زاویه‌ی ۲α بسازد. اما چون ضلع مربع‌ها عمودی و یا افقی است، $A'B'$ هم باید عمودی و یا افقی باشد. پس $۲\alpha \in \{۰, ۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ\}$ و در نتیجه $\alpha \in \{۰, ۴۵^\circ, ۹۰^\circ, ۱۳۵^\circ\}$.



□

حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

طبق لم‌های دوم و سوم، سه محور تقارن ما باید دارای سه زاویه‌ی مختلف از چهار زاویه‌ی معرفی شده در بالا باشند. حال با یک بررسی ساده می‌توان دید که در هر کدام از این حالت‌ها می‌توان دو خط یافت که زاویه‌ی آن‌های نسبت به هم برابر ۴۵ درجه باشد. حال از لم اول استفاده کنید، با قرینه کردن این دو محور نسبت به هم‌دیگر شکل ما چهار محور تقارن هم‌رس به صورت زیر پیدا می‌کند.



بنابراین مجموعه‌ی مطرح‌شده در صورت سؤال حتماً ۴ محور تقارن به این صورت دارد. حال وضعیت مربع‌ها را نسبت به این چهار محور بررسی می‌کنیم.

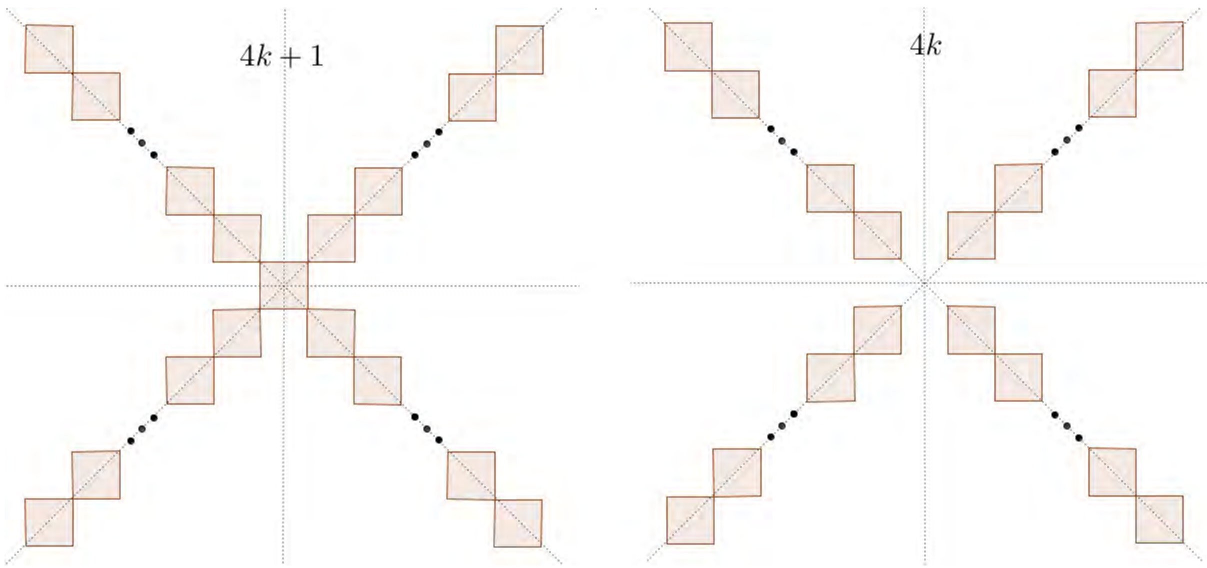
مرکز هر مربع یا در ناحیه‌های بین محورها است یا روی محورها و نه در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها و یا در نقطه‌ی تقاطع است.

اگر مرکز مربع در ناحیه‌های بین محورها باشد، قرینه‌کردن این مربع نسبت به محورها، ۸ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر روی محورها (و نه نقطه‌ی تقاطع آن‌ها) باشد، قرینه کردن این مربع نسبت به محورها، ۴ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر به این ترتیب با کنار گذاشتن مربع‌های به مرکز نقطه‌ی تقاطع، بقیه‌ی مربع‌ها را می‌توان به دسته‌هایی

با تعداد اعضای ۴ یا ۸ تقسیم کرد. به مرکز نقطه‌ی تقاطع هم صفر یا یک مربع وجود دارد. لذا اگر بتوان n مربع یکسان با اضلاع افقی و عمودی در صفحه قرار داد که حداقل سه محور تقارن داشته باشد، n باید به یکی از دو صورت $۴k$ و یا $۴k+۱$ باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که برای همه‌ی مقدارهای k می‌توان $۴k$ و یا $۴k+۱$ مربع با این خاصیت یافت.



۴. فرض کنید n درجه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ باشد. در این صورت P به فرم زیر است.

$$P(x) = a_n x^x + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ \quad (a_n \neq ۰)$$

حال ضریب بزرگ‌ترین توان x را در دو طرف عبارت داده‌شده در صورت مسئله محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(۲P(x)) &= P(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)) \\ &= a_n(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰))^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن $x^{n^۲}$ است و ضریب این جمله برابر $۲^n a_n^{n+۱}$ است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} ۲P(P(x)) &= ۲P(a_n x^n + \cdots + a_۰) \\ &= ۲a_n(a_n x^n + \cdots + a_۰)^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در این‌جا هم همان $x^{n^۲}$ است که ضریب آن برابر $۲a_n^{n+۱}$ است. در نهایت

$$۲P(x)^۲ = ۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)^۲$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن برابر $x^{۲n}$ بوده و ضریب این جمله $۲a_n^۲$ است.

حال اگر $n > ۲$ باشد، $n^۲ > ۲n$ و لذا بزرگ‌ترین توان x در دو سمت عبارت $x^{n^۲}$ خواهد بود. از برابر قرار دادن ضریب این جمله در دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $۲^n a_n^{n+۱} = ۲a_n^{n+۱}$ که با فرض $a_n \neq ۰$ و $n > ۲$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. به این ترتیب سه حالت برای درجه‌ی $P(x)$ محتمل است.

حالت اول. $n = ۰$. در این صورت $P(x) = a_۰$ است و باید داشته باشیم:

$$a_۰ = ۲a_۰ + ۲a_۰^۲ \Rightarrow ۲a_۰^۲ + a_۰ = ۰ \Rightarrow a_۰(۲a_۰ + ۱) = ۰$$

پس $a_\circ = \circ$ و یا $a_\circ = -\frac{۱}{۲}$ و بنابراین تنها جواب‌های آن $P(x) \equiv \circ$ و $P(x) \equiv -\frac{۱}{۲}$ هستند.
حالت دوم. $n = ۱$. در این صورت $P(x) = ax + b$ که $a \neq \circ$، و باید داشته باشیم:

$$a(۲(ax+b)) + b = ۲a(ax+b) + ۲b + ۲(ax+b)^۲$$

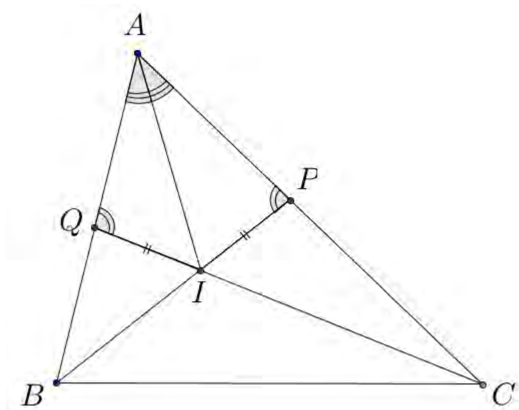
ضریب $x^۲$ در طرف چپ صفر است، در حالی‌که در سمت راست ضریب $x^۲$ برابر $۲a^۲$ است. پس باید a برابر صفر باشد که در این حالت فرض کرده‌ایم این طور نیست.
حالت سوم. $n = ۲$. در این صورت $P(x) = ax^۲ + bx + c$ که $a \neq \circ$، و باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & P(۲P(x)) = ۲P(P(x)) + ۲P(x)^۲ \\ \Rightarrow\ & ۴aP(x)^۲ + ۲bP(x) + c = ۲aP(x)^۲ + ۲bP(x) + c + ۲P(x)^۲ \\ \Rightarrow\ & ۲aP(x)^۲ = c + ۲P(x)^۲ \end{aligned}$$

از برابر قرار دادن ضریب $x^۴$ در دو طرف نتیجه می‌شود که $۲a^۳ = ۲a^۴$ و که چون $a \neq \circ$ باید $a = ۱$ باشد. حال تساوی بالا نشان می‌دهد که $c = \circ$. بنابراین جواب این قسمت به صورت $x^۲ + bx$ است که می‌توان دید در شرط مسئله صدق می‌کند.
بنابراین همه‌ی جواب‌های مسئله به دست آمد.

۵. در دو مثلث AIP و AIQ از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{IP}{\sin(\frac{\angle A}{۲})} = \frac{AI}{\sin(\angle P)}, \quad \frac{IQ}{\sin(\frac{\angle A}{۲})} = \frac{AI}{\sin(\angle Q)}$$



بنابراین اگر $IP = IQ$، آن‌گاه $\sin(\angle P) = \sin(\angle Q)$. پس یا این دو زاویه با هم برابر هستند و یا مکمل یک‌دیگرند. اما $\angle P = \angle C + \frac{۱}{۲}\angle B$ و $\angle Q = B + \frac{۱}{۲}\angle C$. بنابراین اگر $\angle P = \angle Q$ آن‌گاه $\angle B = \angle C$ که خلاف فرض $AB > AC$ است. پس $\angle P + \angle Q = ۱۸۰^\circ$. در نتیجه

$$\angle C + \frac{۱}{۲}\angle B + \angle B + \frac{۱}{۲}\angle C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{۲}{۳}۱۸۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \angle A = ۶۰^\circ$$

۶. الف) خانه‌های این جدول را از چپ به راست با عددهای ۱، ۲، ۳،... شماره‌گذاری می‌کنیم. در هر حالت تعداد مهره‌های موجود در خانه‌ی kام را با a_k نمایش می‌دهیم. در هر گام از فرآیند مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{k=۱}^{+\infty} ka_k + \text{تفاضل تعداد مهره‌ها}$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هر عمل (چه از نوع یک و چه از نوع دو) حداقل یک واحد کاهش می‌یابد. زیرا:

اگر عمل از نوع یک باشد، و این دو خانه، خانه‌های iام و $i+1$ام باشند، از S به اندازه‌ی $i+(i+1)$ واحد کم‌شده و $i+2$تا به S اضافه می‌شود. بنابراین S به $S-i$ تبدیل می‌شود و در نتیجه حداقل یک واحد کاهش می‌یابد.

اگر عمل از نوع دو باشد، و این خانه، خانه‌ی iام باشد، از S به اندازه‌ی $2i$ کم‌شده و $(i-2)+(i+1)$ جای‌گزین آن می‌شود. پس S به $S-1$ تبدیل شده و یک واحد کاهش می‌یابد.

اما دقت کنید که هم‌واره باید $S \geq 0$. بنابراین اگر مقدار S را در ابتدای کار S_0 بنامیم.(دقت کنید که چون تعداد مهره‌ها در آغاز کار متناهی است، لذا مقدار S_0 نیز متناهی است) ما قادر به انجام بیش‌تر از S_0 عملیات نیستم و بنابراین حداکثر بعد از انجام S_0 عمل، عملیات به پایان می‌رسد.

ب) دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی را که به شکل زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ n \geq 0$$

ابتدا دقت کنید که به راحتی می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n،

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

حال برای حل مسئله، مجموع S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هیچ‌یک از دو عمل ذکرشده در صورت مسئله تغییر نمی‌کند. زیرا اگر عمل نوع ۱ باشد و روی خانه‌های n و $n+1$ام انجام شود، تغییرات S برابر است با $f_{n+2}-f_n-f_{n+1}=0$.

و اگر عمل از نوع ۲ باشد و روی خانه‌ی nام انجام شود، تغییرات S برابر است با

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_{n-2} - 2f_n &= f_n + f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_n \\ &= f_{n-1} + f_{n-2} - f_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

مقدار S در ابتدای کار برابر با $S_0 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ است و طبق آن‌چه گفته شد، مقدار S در همه‌ی مرحله‌ها همین مقدار $f_{n+2} - 1$ باقی خواهد ماند. بنابراین اگر در مرحله‌ای، مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$ام جلوتر برود، مقدار S باید حداقل f_{n+2} بشود که این‌گونه نخواهد بود.

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq ۳$، اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ جای‌گشتی با خاصیت مورد نظر باشد، آن‌گاه $a_n = n$. برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف. اگر n فرد باشد. آن‌گاه بنابه فرض مسئله،

$$n|۲(a_۱ + \cdots + a_{n-۱}) = ۲(۱ + ۲ + \cdots + n - a_n) = n(n+۱) - ۲a_n$$

در نتیجه $n|۲a_n$ و چون n فرد است، $n|a_n$ که با توجه به این‌که $a_n \leq n$ نتیجه می‌گیریم $a_n = n$.

ب. اگر n زوج باشد($n = ۲k$)، آن‌گاه همانند قسمت قبل $n|۲a_n$، لذا $k|a_n$ و $a_n \leq n$، بنابراین $a_n = ۲k$ یا $a_n = k$.

اگر $a_n \neq n$، آن‌گاه باید $a_n = k$. اما بنابه فرض مسئله ($i = n - ۲$) می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n-۱|۲(a_۱ + \cdots + a_{n-۲}) &= ۲(۱ + ۲ + \cdots + n - a_n - a_{n-۱}) \\ &= n(n+۱) - ۲a_n - ۲_{n-۱} \\ &= n(n-۱) + ۲n - ۲k - ۲a_{n-۱} \\ &= n(n-۱) + n - ۲a_{n-۱} \end{aligned}$$

پس $n-۱|n-۲a_{n-۱}$ و یا معادلاً $۲k-۱|۲k-۲a_{n-۱}$ و در نتیجه $۲k-۱|k-a_{n-۱}$، اما به وضوح $|k-a_{n-۱}| < ۲k-۱$ و بنابراین $k - a_{n-۱} = ۰$ و یا $a_{n-۱} = k$ که تناقض است (چون a_n هم برابر k بود). بنابر مطالب بالا در هر جای‌گشت با شرایط مسئله $a_n = n$. حال a_n را از دنباله حذف می‌کنیم. دنباله‌ی به دست آمده نیز جای‌گشتی از ۱ تا $n-۱$ با خاصیت مورد نظر مسئله است، در نتیجه جمله‌ی آخر این دنباله یعنی $a_{n-۱}$ هم باید برابر $n-۱$ باشد. به همین ترتیب مشخص است که برای هر $۳ \leq k \leq n$ باید داشته باشیم $a_k = k$. برای $a_۱$ و $a_۲$ هم به وضوح می‌توان دو حالت ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ را در نظر گرفت. به این ترتیب تنها دو جای‌گشت $(۱, ۲, \dots, n)$ و $(۲, ۱, ۳, \dots, n)$ خاصیت مورد نظر مسئله را دارند.

۲. قرار دهید

R : تعداد مستطیل‌ها، H : تعداد خطوط افقی

V : تعداد خطوط عمودی، X : تعداد چهارراه‌ها

می‌خواهیم ثابت کنیم $H + V + X = R + ۳$. برای کار مجموع زاویه‌های مستطیل‌های پوشاننده را از دو روش محاسبه می‌کنیم. اولاً چون تعداد مستطیل‌ها R و جمع زوایای هر مستطیل ۳۶۰° است، پس این مقدار برابر است با $R \times ۳۶۰^\circ$. ثانیاً گره‌های شکل به صورت یکی از انواعی است که در شکل ۱ (ابتدای صفحه‌ی بعد) می‌بینید.

تعداد گره‌های نوع (۱) یعنی رأس‌های مستطیل بزرگ فقط ۴تا است. تعداد گره‌های نوع (۳) هم که Xتا است. اما تعداد گره‌های نوع (۲) چندتا است؟ اگر به شکل دقت کنید متوجه خواهید شد که هر یک از دو سر یک پاره‌خط افقی و عمودی به غیر از چهار ضلع مستطیل بزرگ به گره از نوع (۲) ختم می‌شود. بنابراین تعداد گره‌های نوع (۲) برابر است با $۲ \times (H + V - ۴)$. حال توجه کنید که گره‌های نوع

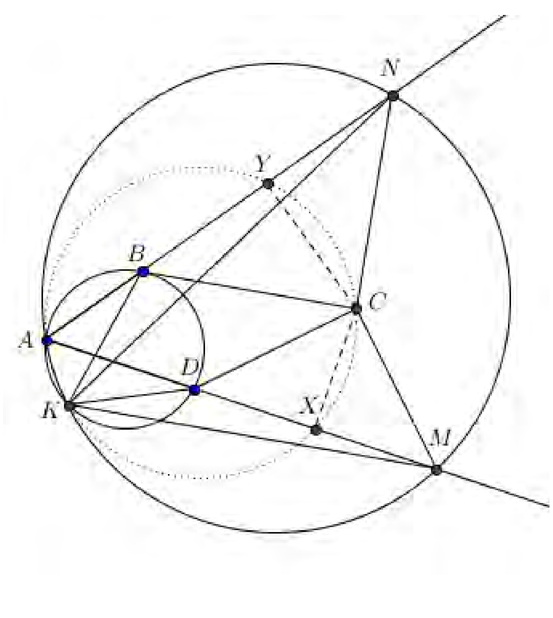
شکل ۱: انوع مختلف گره‌های موجود در شکل

(۱)، (۲) و (۳) به ترتیب زوایای ۹۰°، ۱۸۰° و ۳۶۰° تولید می‌کنند. پس مجموع زاویه‌های مستطیل برابر است با:

$$۴ \times ۹۰^\circ + ۲ \times (H + V - ۴) \times ۱۸۰^\circ + X \times ۳۶۰^\circ = (H + V + X - ۳) \times ۳۶۰^\circ$$

از مقایسه‌ی این مقدار با مقداری که در ابتدا به دست آوردیم حکم مسئله نتیجه می‌شود.

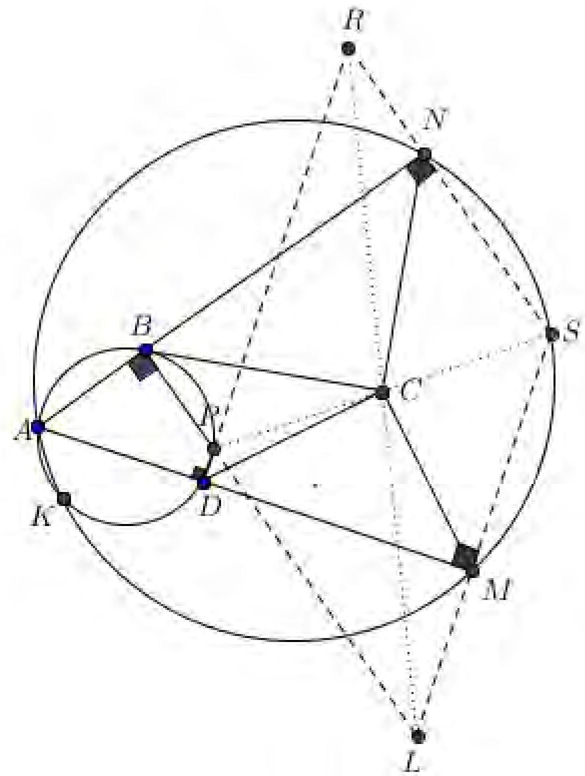
۳. راه‌حل اول. نقطه‌های X و Y را به ترتیب وسط DM و BN بگیرید. با توجه به این که دو دایره در نقطه‌ی K متقاطع هستند، زاویه‌های $\angle KNB$ و $\angle KMD$ در دایره‌ی محیطی AMN روبه‌رو به کمان AK هستند و در نتیجه با هم برابرند. به همین ترتیب زاویه‌های $\angle KBA$ و $\angle KDA$ در دایره‌ی محیطی ABD روبه‌رو به کمان AK هستند و لذا با هم برابر هستند. برابری این زاویه‌ها نتیجه می‌دهد که دو مثلث KMD و KNB با هم متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌های $\angle KYB$ و $\angle KXD$ که زاویه‌های بین میانه و ضلع متناظر در این دو مثلث هستند با هم برابر می‌شوند. این برابری نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی A، K، Y و X روی یک دایره قرار دارند.



از طرف دیگر با توجه به این‌که $\angle ABC = ۱۳۵^\circ$ و $\angle BCN = ۹۰^\circ$ نتیجه می‌شود که مثلث BCN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و لذا میانه‌ی آن یعنی YC ارتفاع هم هست و این یعنی $\angle AYC = ۹۰^\circ$

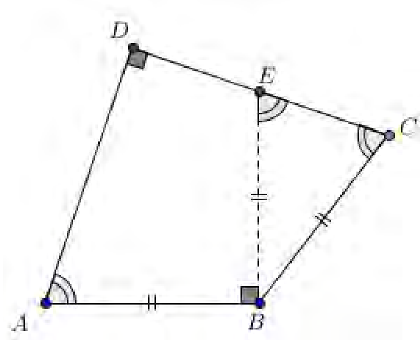
. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $\angle AXC$ هم قائمه است. پس چهارنقطه‌ی A، Y، X و C هم روی یک دایره قرار دارند. بنابراین در کل پنج نقطه‌ی A، K، Y، C و X هم‌دایره هستند و در نتیجه $\angle AKC = \angle AYC = ۹۰^\circ$. بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

راه‌حل دوم. باید ثابت کنیم دایره‌ی محیطی مثلث ABD، دایره‌ی محیطی مثلث AMN و دایره‌ی به قطر AC، غیر از A در نقطه‌ی دیگری (K) هم‌رس هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم مرکزهای این سه دایره هم‌خط هستند. (چرا؟)



برای اثبات هم‌خطی مرکزهای این سه دایره، کافی است ثابت کنیم متجانس این مرکزها نسبت به A و به نسبت تجانس ۲ هم‌خط هستند. متجانس مرکز دایره به قطر AC، C می‌باشد. متجانس مرکزهای دایره‌های محیطی ABD و AMN را که البته نقطه‌ی مقابل قطری A در این دایره‌ها می‌باشند، به ترتیب P و S می‌گیریم. پس کافی است نشان دهیم سه نقطه‌ی P، S و C هم‌خط هستند. از آن‌جایی که زاویه‌های $\angle SMA$، $\angle PBA$، $\angle SNA$ و $\angle PDA$ قائمه هستند، لذا $SN \parallel PB$ و $SM \parallel PD$. بنابراین اگر محل برخورد PB با SM را L و محل برخورد PD و SN را R بنامیم، چهارضلعی $PRSL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. حال به موقعیت نقطه‌ی C توجه کنید. فاصله‌ی C تا SL برابر فاصله‌ی C تا PD و همچنین فاصله‌ی C تا SRوبرابر با فاصله‌ی C تا PL است. بنابراین C محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، و در نتیجه نقطه‌های P، C و S هم‌خط هستند و حکم ثابت می‌شود.

۴. مطابق شکل در نقطه‌ی B عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. چون $\angle B = \angle D = 90^\circ$، بنابراین $ADEB$ محاطی است و لذا $\angle BEC = \angle DAB$. از طرفی با توجه به فرضیات مسئله در مورد چهارضلعی $ABCD$، $\angle DAB = \angle BCD$، بنابراین $\angle BEC = \angle BCD$ و در نتیجه $BE = BC = AB$ بنابراین نقطه‌ی E روی CD نقطه‌ای ثابت در صفحه است، که مکان آن تنها به A و B بستگی دارد.



۵. فرض کنید $a + b\delta$ ($\delta \neq 0$)، یک ریشه‌ی $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ باشد. پس

$$0 = P(a+b\delta) = a_0 + a_1(a+b\delta) + \cdots + a_n(a+b\delta)^n$$

اما با توجه به این که $\delta^2 = 0$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$(a+b\delta)^k = a^k + ka^{k-1}b\delta$$

بنابراین

$$0 = (a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_n a^n) + b\delta(a_1 + 2a_2 a + \cdots + na_n a^{n-1})$$

توجه کنید که اگر $u + \delta v = 0$، آن‌گاه با توجه به قرارداد ذکر شده در صورت مسئله $u = 0$ و $v = 0$. پس

$$a_0 + a_a + \cdots + a_n a^n = P(a) = 0$$

و می‌توان نوشت $P(x) = (x-a)Q(x)$. حال باید نشان دهیم که a ریشه‌ی $Q(x)$ هم می‌باشد. برای این کار Q را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم، $Q(x) = (x-a)R(x) + c$ و

$$\begin{aligned} & P(x) = (x-a)((x-a)R(x)+c) \\ \Rightarrow \quad & 0 = P(a+b\delta) = b\delta(b\delta R(a+b\delta)+c) \\ & = b(b\delta^2 R(a+b\delta) + c\delta) = bc\delta \end{aligned}$$

پس $bc\delta = 0$، و در نتیجه $bc = 0$ و چون $b \neq 0$، پس $c = 0$. بنابراین $P(x) = (x-a)^2 R(x)$.
برای اثبات طرف دیگر چون a ریشه‌ی مضاعف $P(x)$ است، پس $P(x) = (x-a)^2 R(x)$. در این صورت برای هر $x = a + b\delta$ ($b \neq 0$) خواهیم داشت،

$$P(a+b\delta) = (b\delta)^2 R(a+b\delta) = 0$$

۶. فرض کنید این ۲۰ نفر به ترتیب x_1، x_2، ...، x_{20} بازی انجام داده باشند. چود در مجموع ۱۰۰ بازی انجام شده است، لذا $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 200$.

تعداد راه‌های انتخاب دو تیم دو نفره با شرایط مسئله برابر است با $\binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2}$. زیرا برای انتخاب دو تیم دو نفره، که دو نفر هم‌تیمی با هم بازی کرده باشند، باید دو تا از ۱۰۰ بازی انجام‌شده را انتخاب کنیم (به $\binom{100}{2}$ روش) و دو نفر شرکت‌کننده در هر بازی را به عنوان یک تیم بگیریم. اما از این تعداد، باید حالاتی را که دو تیم عضو مشترک پیدا می‌کنند کم کنیم. تعداد حالت‌ها برابر $\sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2}$ است، زیرا اگر عضو مشترک دو تیم، نفر k باشد، دو عضو دیگر تیم‌ها باید از بین x_k نفری انتخاب شوند که با نفر k بازی کرده‌اند. پس،

$$4050 = \binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2} = 4950 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} x_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} x_k$$

بنابراین $\sum_{k=1}^{20} x_k^2 = 2000$. پس

$$\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20} x_k^2 = \left(\frac{\sum_{k=1}^{20} x_k}{20}\right)^2$$

اما می‌دانیم که برای هر n عدد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)^2$$

و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. بنابراین در مسئله‌ی فوق هم باید $x_1 = x_2 = \cdots = x_{20}$ باشند.

۱۷.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۲

۱. الف. با اندکی محاسبه و در نظر گرفتن حالت‌های مختلف می‌توان مشاهده کرد که اگر عددی حداکثر دو عامل اول داشته باشد، نمی‌تواند سه‌لایه‌ای باشد. به علاوه با تلاش بیش‌تر می‌توان دید که ۱۲۰ عددی سه لایه‌ای است، زیرا $\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ است و $1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+24+30 = 20+40+60 = 120$.

ب. فرض کنید p عددی اول بزرگ‌تر از ۵ باشد. در این صورت هر مقسوم‌علیه $120p$ یا مقسوم‌علیهی از ۱۲۰ است و یا p برابر یک مقسوم‌علیه ۱۲۰. پس می‌توان با استفاده از استدلال بالا و اضافه کردن p برابر اعضای هر دسته(که در سه‌لایه‌ای بودن ۱۲۰، مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ را به آن‌ها افراز کردیم) به آن دسته، نشان داد که $120p$ هم سه لایه‌ای است. حال چون تعداد چنین اعداد اولی نامتناهی است، نامتناهی عدد سه لایه‌ای داریم.

۲. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید A، B و C سه نقطه در صفحه باشند و Mنقطه وسط BC باشد. در این صورت $AM \leq \frac{AB+AC}{2}$.

اثبات. اگر سه نقطه هم‌خط باشند که به سادگی می‌توان دید که تساوی برقرار است. حال اگر این سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند، فرض کنید نقطه‌ی A_1 قرینه‌ی A نسبت به M باشد. در این صورت در چهارضلعی ABA_1C قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند و بنابراین یک متوازی‌الاضلاع است. به علاوه دقت کنید که $AA_1 = 2AM$ و $AB = CA_1$. حال با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AA_1C، $AA_1 < AC + CA_1$ و در نتیجه $2AM < AB + AC$ که همان چیزی است که می‌خواستیم. □

حال فرض کنید خانه‌های روستا را با A_1، A_2، $\cdots$ و A_n نمایش دهیم. به برهان خلف فرض کنید X و Y دو نقطه‌ی ایده‌آل باشند و M وسط XY. حال با استفاده از لم بالا در مثلث‌های A_1XY، A_2XY، $\cdots$ و A_nXY(البته ممکن است در بعضی حالت‌ها سه نقطه هم‌خط باشند که باز هم لم درست است) داریم:

$$A_1M \leq \frac{A_1X+A_1Y}{2}, A_2M \leq \frac{A_2X+A_2Y}{2}, \ldots, A_nM \leq \frac{A_nX+A_nY}{2}$$
$$\Rightarrow \quad A_1M + A_2M + \cdots A_nM \leq \frac{1}{2}(A_1X + \cdots + A_nX + A_1Y + \cdots + A_nY)$$

اما دقت کنید که از آن‌جایی که همه‌ی خانه‌های روستا نمی‌توانند روی یک خط و در نتیجه روی خط واصل بین X و Y واقع باشند. پس حداقل یکی از نامساوی‌ها اکید است و لذا مجموعه‌ی فاصله‌ی خانه‌های روستا تا M کم‌تر از مجموع فاصله‌ی آن‌ها تا X و یا Y است که این با ایده‌آل بودن آن‌ها تناقض دارد.

۳. برای این مسابقه‌ها به این صورت یک گراف جهت‌دار درست می‌کنیم که به ازای هر تیم یک رأس قرار می‌دهیم و اگر تیم A از B برده باشد، یالی جهت‌دار از A به B رسم می‌کنیم. حال فرض کنید

مجموعه‌ی تیم‌هایی که از تیم خاصی مثل A باخته‌اند(متناظراً به زبان گراف یعنی رأس‌هایی که یال بین آن‌ها و رأس A، از یال A خارج شده باشد) را با نماد S_A نمایش می‌دهیم. حال برای هر تیم B در S_A باید دقیقاً t تیم موجود باشند که از هر دوی A و B باخته‌اند. بنابراین رأس متناظر با این تیم‌ها باید در S_A باشد. در نتیجه از بین یال‌هایی که یک سر آن‌ها به B متصل است و یک سر دیگرشان در S_A قرار دارد دقیقاً t یال از B خارج می‌شوند. از آن‌جا که B رأس دل‌خواهی از S_A بود، برای هر تیم دیگری در این مجموعه وضعیت مشابه است. بنابراین تعداد یال‌هایی که هر دو سر آن‌ها در S_A است، برابر $|S_A|t$ است که منظور از $|S_A|$ تعداد تیم‌های موجود در S_A است. از طرف دیگر تعداد کل این یال‌ها برابر $\frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲} = \binom{|S_A|}{۲}$ است. (بین هر دو یالی در S_A یک یال وجود دارد.) پس $t|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲}$ و در نتیجه $|S_A| = ۲t+۱$. این استدلال نشان می‌دهد که تعداد تیم‌هایی که به هر تیم باخته‌اند مساوی $۲t+۱$ است. بنابراین از هر رأس در گراف دقیقاً $۲t+۱$ یال خارج می‌شود. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n(۲t+۱)$ است. از طرف دیگر با توجه به این که هر دو تیمی با هم بازی کرده‌اند، بین هر دو رأسی یک یال قرار دارد. بنابراین از طرف دیگر تعداد کل یال‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$. پس $n(۲t+۱) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و در نتیجه $n = ۲(۲t+۱)+۱ = ۴t+۳$ است.

.۴

$$\begin{aligned}
&x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)-(\tfrac{x^۲}{y}+\tfrac{x^۲}{z}+\tfrac{y^۲}{z}+\tfrac{y^۲}{x}+\tfrac{z^۲}{x}+\tfrac{z^۲}{y})\\
&=x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)+(xyz)(\tfrac{x^۲}{y}+\tfrac{x^۲}{z}+\tfrac{y^۲}{z}+\tfrac{y^۲}{x}+\tfrac{z^۲}{x}+\tfrac{z^۲}{y})\\
&=x^۴+y^۴+z^۴+۳(x+y+z)+x^۳z+x^۳y+y^۳x+y^۳z+z^۳y+z^۳x\\
&=x^۳(x+y+z)+y^۳(x+y+z)+z^۳(x+y+z)+۳(x+y+z)\\
&=(x+y+z)(x^۳+y^۳+z^۳+۳)\\
&=(x+y+z)(x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz)\\
&=(x+y+z)^۲(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx)\\
&=\tfrac{۱}{۲}(x+y+z)^۲((x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲)\geq ۰
\end{aligned}$$

دقت کنید که در خط اول به دوم و خط پنجم به ششم از فرض مسئله($xyz=-۱$) و در خط ششم به هفتم از اتحاد اویلر استفاده کرده‌ایم. ضمناً نامساوی آخر نشان می‌دهد که حالت تساوی زمانی است که یا مجموع متغیرها صفر باشد و یا هر سه برابر باشند که با توجه به $xyz=-۱$ نتیجه می‌شود هر سه باید برابر -۱ باشند.

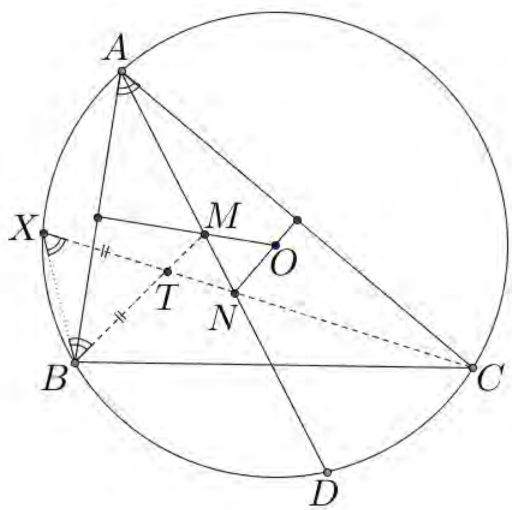
۵. CT را امتداد می‌دهیم تا دایره را برای بار دوم در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت:

$$\angle XBT = \angle XBA + \angle ABM = \angle XBA + \angle ABM = \angle NCA + \angle ABM$$

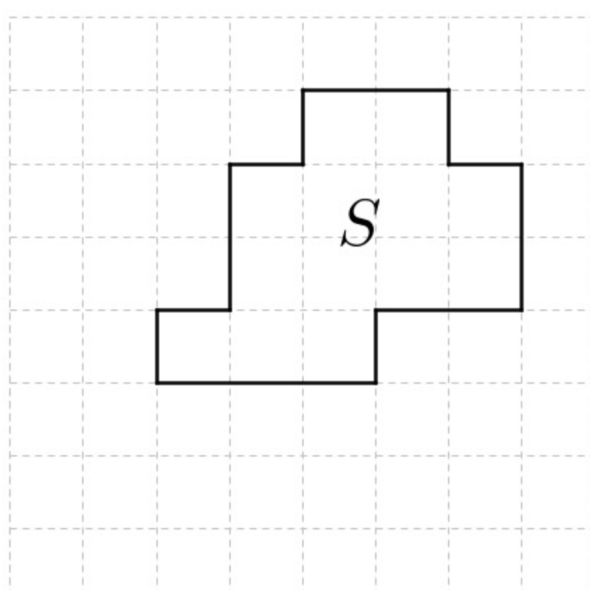
با توجه به این که M روی عمود منصف AB و N روی عمود منصف AC قرار دارد، $\angle MBA = \angle MAB$ و $\angle ACN = \angle CAN$. بنابراین

$$\angle XBT = \angle CAN + \angle MAB = \angle BAC = \angle CXB$$

پس مثلث TXB متساوی‌الساقین است و لذا $XT = TB$. در نهایت
$$BT + CT = XT + TC = CX = ۲R.\sin(\angle XBC) \leq ۲R$$
بنابراین اثبات حکم به پایان رسید.



۶. نقطهٔ شروع حرکت روبات را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و شکلی که محیط آن را پیموده S می‌نامیم. عدد خانه‌یA هم‌واره مؤلفه‌ی دوم مختصات روبات را نشان می‌دهد زیرا در ابتدا صفر است و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی اضافه می‌شود، A نیز یکی اضافه می‌شود و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی کم می‌شود، A نیز یکی کم می‌شود . بنابر این می‌توان تغییرات عدد خانه‌ی B را این طور بیان کرد که هرگاه روبات به سمت شرق حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه به B اضافه می‌شود و هرگاه روبات به سمت غرب حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه از B کم می‌شود.



ابتدا فرض می‌کنیم ربات مسیر طی‌شده را در جهت ساعت‌گرد طی کرده باشد. همه‌ی مربع‌های شبکه‌ای که درون S قرار دارند را در نظر بگیرید و آن‌ها را $M_1, M_2, \ldots, M_k$ بنامید. فرض کنید مختصات رأس پایین سمت چپ M_i، (x_i, y_i) باشد. به ازای هر مربع M_i به هر یک از دو ضلعِ آن یک عدد نسبت می‌دهیم. به ضلع پایینیِ مربع M_i، عدد $-y_i$ را نسبت دهید و به ضلع بالاییِ M_i، عدد $y_i + 1$ را نسبت دهید. دقت کنید که چون بعضی از ضلع‌های افقی در دو مربع حضور دارند به آن‌ها دو بار عدد نسبت داده می‌شود.

اکنون اعداد نسبت داده شده به همه‌ی ضلع‌های مذکور را با هم جمع می‌کنیم و مجموع آن‌ها را D می‌نامیم. اکنون D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم.

اولاً دقت کنید که مجموع دو عددی که به ضلع‌های هر مربع نسبت داده‌ایم برابر یک است. پس D برابر می‌شود با تعداد مربع‌ها که همان مساحت S است.

از طرف دیگر ضلع‌های افقی‌ای که روی مرز S قرار ندارند، در دو مربع حضور دارند، در یکی با علامت مثبت و در دیگری با علامت منفی و مجموع این دو عدد صفر می‌شود. در نتیجه تنها جملاتی باقی می‌مانند که مربوط به یال‌های افقی روی مسیر روبات هستند. که این مقادیر دقیقاً همان مقادیری هستند که هنگام حرکت روبات روی مسیر به عدد خانهٔ B اضافه می‌شوند. بنابراین مجموعِ این مقادیر دقیقاً همان عدد نهایی خانهٔ B است. پس حکم ثابت شد.

در حالتی که ربات در جهت پادساعت‌گرد حرکت کند، مقادیر نسبت داده شده به اضلاع مرزی، منفیِ مقادیری هستند که با B جمع می‌شوند، پس در این حالت B برابر است با منفیِ $D-$ و در نتیجه قدر مطلق آن همان D می‌شود که برابر با مساحت S است.

۱۸.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۳

۱. BI نیم‌ساز زاویه‌ی B است، بنابر قضیه‌ی نیم‌سازها داریم:
$$\frac{DI}{IA}=\frac{BD}{AB},\quad \frac{DI}{IA}=\frac{I_aD}{I_aA}$$
در نتیجه داریم:
$$\frac{AB}{BD}=\frac{I_aA}{I_aD}=\frac{AD}{I_aD}+۱$$
بنابرای کافی است نشان دهیم $\frac{BD}{AB}\geq\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، داریم
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(۴۵^\circ)=\frac{BH}{AB}\leq\frac{BD}{AB}$$
که در آن H پای عمود وارد از B بر AD می‌باشد و در نتیجه طول آن از طول BD بیش‌تر نیست، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۲. فرض کنید $x\leq y$، باید نشان دهیم $f(x)-x^{۲}-x\leq f(y)-y^{۲}-y$. بنابر فرضیات مسئله داریم:
$$f(x)-۳x\leq f(y)-۳y,\quad f(x)-x^{۳}\leq f(y)-y^{۳}$$
پس
$$f(y)-f(x)\geq ۳y-۳x,\quad f(y)-f(x)\geq y^{۳}-x^{۳}$$
حال اگر نشان دهیم $f(y)-f(x)\geq y^{۲}+y-x-x^{۲}$، حکم ثابت می‌شود. برای این کار کافی است نشان دهیم $y^{۲}+y-x-x^{۲}$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y-۳x$ و $y^{۳}-x^{۳}$ کوچک‌تر یا مساوی است، فرض کنید مطلب اخیر درست نباشد، در این صورت
$$y^{۲}+y-x^{۲}-x>۳y-۳x,\quad y^{۲}+y-x^{۲}-x>y^{۳}-x^{۳}$$
پس
$$(y-x)(y+x+۱)>۳(y-x),\quad (y-x)(y+x+۱)>(y-x)(y^{+}xy+x^{۲})$$
که با توجه به مثبت بودن $y-x$ داریم:
$$x+y+۱>۳,\quad y+x+۱>y^{۲}+xy+x^{۲}$$
اگر بگیریم $S=x+y$ و $P=xy$، نتایج بالا به شکل زیر در می‌آیند:
$$S>۲,\quad S+۱>S^{۲}-P$$
از طرفی با استفاده از نامساوی حسابی‌هندسی می‌توان دید که $P\leq\frac{S^{۲}}{۴}$، با استفاده از این رابطه و دو رابطه‌ی بالا داریم:
$$S+\frac{S^{۲}}{۴}+۱>S+P+۱>S^{۲}$$

در نتیجه $۳S^۲ - ۴S - ۴ < ۰$ که این مطلب با توجه به این‌که $S > ۲$ غلط می‌باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد $y^۲ + y - x^۲ - x$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y - ۳x$ و یا $y^۳ - x^۳$ کم‌تر یا مساوی است و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

۳. در صورت مسئله باید یک تصحیح به این شکل انجام شود که ((هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است.)) حال به حل مسئله می‌پردازیم. اگر فرض کنیم یک شرکت در n شهر نمایندگی دارد، آن‌گاه حداکثر $\binom{n}{۲}$ جاده را می‌تواند مرمت کند. بنابراین باید داشته باشیم $\binom{n}{۲} \geq ۳۰$، که این رابطه نشان می‌دهد $n \geq ۹$، یعنی هر شرکت حداقل در ۹ شهر نمایندگی دارد.
بنابراین حداقل $۹ \times ۸۰ = ۷۲۰$ نمایندگی در شهرها وجود دارد، پس شهری وجود دارد که در آن حداقل

$$\left\lceil \frac{۷۲۰}{۱۰۰} \right\rceil = ۸$$

نمایندگی وجود دارد.

۴. اگر قرار دهیم $m = n$، داریم $۲f(n)|۲n$ پس $f(n)|n$. در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n باید $f(n) \leq n$. حال فرض کنید m عدد طبیعی دل‌خواهی باشد، در این صورت چون تعداد اعداد اول نامتناهی است پس عدد اول $P > m$ وجود دارد، حال به جای n در رابطه‌ی اصلی $P - m$ را قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$f(m) + f(P - m)|P \Rightarrow f(m) + f(P - m) = P$$

اما چون $f(m) \leq m$ و $f(P - m) \leq P - m$ پس با توجه به رابطه‌ی بالا در هر دو نامساوی اخیر تساوی برقرار است. پس $f(m) = m$ برای هر عدد طبیعی برقرار است. این مطلب نشان می‌دهد که تنها تابع مورد نظر تابع همانی است.

۵. در مسئله چهار نقطه‌ی B، C، X و Y روی یک دایره قرار دارند.(توجه کنید که چون AD نیم‌ساز است، پس دو کمان MB و MC روی دایره‌ی محیطی با هم برابر هستند، در نتیجه $MB = MC$. پس دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB از C هم می‌گذرد.) پس داریم:

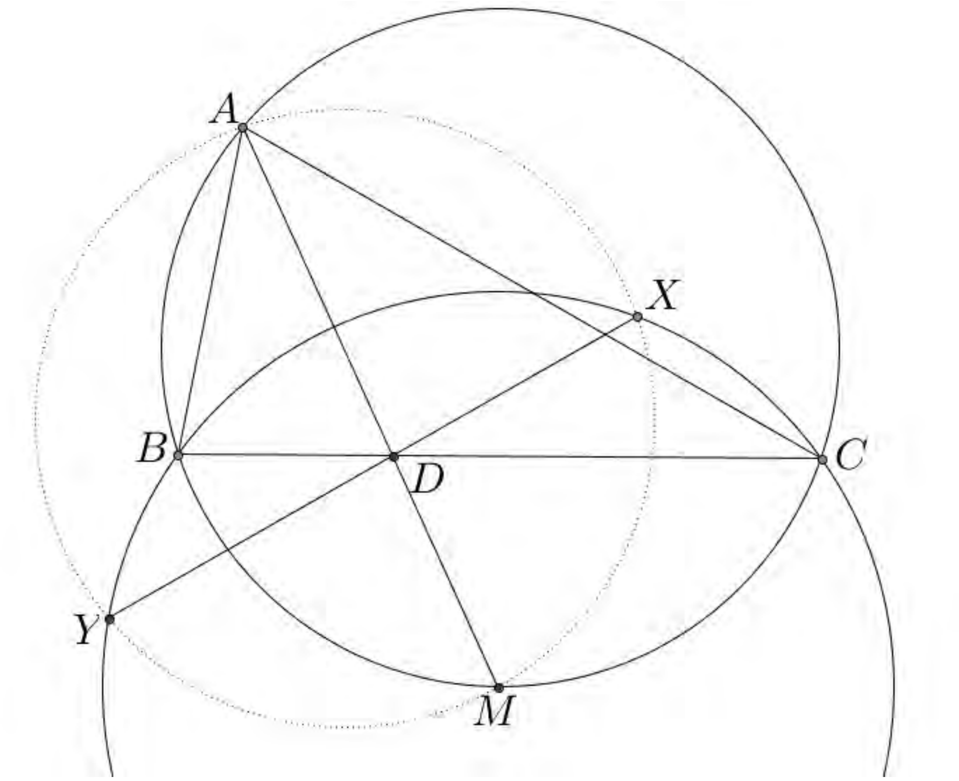
$$BD \times DC = DX \times DY$$

از طرفی چهار نقطه‌ی A، B، C و M نیز روی دایره‌ی محیطی قرار دارند. پس

$$AD \times DM = BD \times DC$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$AD \times DM = DX \times DY$$



پس چهارضلعی $AXMY$ محاطی است، در نتیجه $\angle YXM = \angle YAM$ ، $\angle XYM = \angle XAM$. با توجه به روابط اخیر و این که مثلث XYM متساوی‌الساقین است(M مرکز دایره‌ای است که از X و Y می‌گذرد). داریم $\angle YAM = \angle MAX$ که همان حکم مسئله می‌باشد.

۶. اگر در هر ستون یک مهره‌ی تمساح قرار دهیم تمام خانه‌ها تهدید می‌شوند، یعنی با n تمساح تمام صفحه تهدید می‌شود. نشان می‌دهیم که این کار با کم‌تر از n تمساح امکان‌پذیر نیست. فرض کنید α_i $(۱ \leq i \leq n)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد تمساح‌ها در ستون iام باشد. اگر تعداد مهره‌ها در ستون‌های $i_۱$، $i_۲$، ... و i_k صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha_{i_۱-۱} + \alpha_{i_۱+۱} \geq m$$
$$\alpha_{i_۲-۱} + \alpha_{i_۲+۱} \geq m$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{i_k-۱} + \alpha_{i_k+۱} \geq m$$

دلیل این مطلب این است که اگر در یک ستون تعداد مهره‌ها صفر باشد چون هر کدام از خانه‌های این ستون باید تهدید شود، باید در دو ستون مجاور آن حداقل m تمساح وجود داشته باشد.(اگر ستون اول و یا آخر مهره نداشته باشد تنها یک ستون مجاور دارد و باید در همه‌ی خانه‌های آن ستون تمساح باشد.) اگر همه‌ی این نامساوی‌ها را جمع کنیم، نتیجه می‌شود جمع همه‌ی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی mk است. پس حداقل یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\sum_{j=۱}^{k} \alpha_{i_j-۱} \geq \frac{mk}{۲}, \quad \sum_{j=۱}^{k} \alpha_{i_j+۱} \geq \frac{mk}{۲}$$

(منظور از $\alpha_۰$ و یا $\alpha_{n+۱}$ در صورت نیاز صفر است.)

بنابراین k تا از α_iها موجود هستند که مجموع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{۲}$ است. (توجه کنید که اگر ستون اول یا آخر تعداد مهره‌هایش صفر باشد، آن‌گاه ممکن است که $k-۱$تا از α_iها مجموع‌شان بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{۲}$ باشد که این مطلب در تخمین ما به‌تر خواهد بود.)

حال در عبارت $\sum_{i=۱}^{n}\alpha_i$ که نشان‌دهنده‌ی تعداد مهره‌ها است، k جمله برابر صفر است و مجموع حداکثر k جمله‌ی دیگر حداقل $\frac{mk}{۲}$ است و $n-۲k$ جمله‌ی دیگر هم هر کدام حداقل یک هستند. پس

$$\sum_{i=۱}^{n}\alpha_i \geq \frac{mk}{۲} + (n-۲k)$$

چون $m \geq ۴$، داریم $\frac{mk}{۲} \geq ۲k$ پس

$$\frac{mk}{۲} + (n-۲k) \geq n$$

بنابراین حداقل به m تمساح نیاز داریم و این مطب اثبات را تمام می‌کند.

۱۹.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۴

۱. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که از آن‌جا که p عددی اول است و $p|(n-1)(n^2+n+1)$، پس $p|n-1$ و یا $p|n^2+n+1$. اگر $p|n-1$، باید $p \leq n-1$ و از طرف دیگر طبق فرض مسئله $n|p-1$ و بنابراین $n \leq p-1$. پس این حالت امکان ندارد و در نتیجه $p|n^2+n+1$.
$n|p-1$، پس عدد طبیعی t وجود دارد که $p = tn+1$. ادعا می‌کنیم $t = n+1$. می‌دانیم:

$$p|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1|n^2+n+1-tn-1$$

$$\Rightarrow tn+1|(n+1-t)n \Rightarrow tn+1|n+1-t$$

که آخرین نتیجه‌گیری با استفاده از لم اقلیدس و به این دلیل است که $(tn+1,n) = (n,1) = 1$.
حال اگر $t \neq n+1$، $n+1-t$ صفر نیست و لذا $tn+1 \leq |n+1-t|$. برای $|n+1-t|$ دو حالت داریم:

$$n+1-t > 0 \quad \Rightarrow \quad n+1 \leq tn+1 \leq n+1-t < n+1$$
$$n+1-t < 0 \quad \Rightarrow \quad t < tn+1 \leq t-(n+1) < t$$

که هر دو تناقض است. پس $t = n+1$. حال داریم:

$$t = n+1 \Rightarrow p = tn+1 = n^2+n+1 \Rightarrow 4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

پس $4p-3$ مربع کامل است.

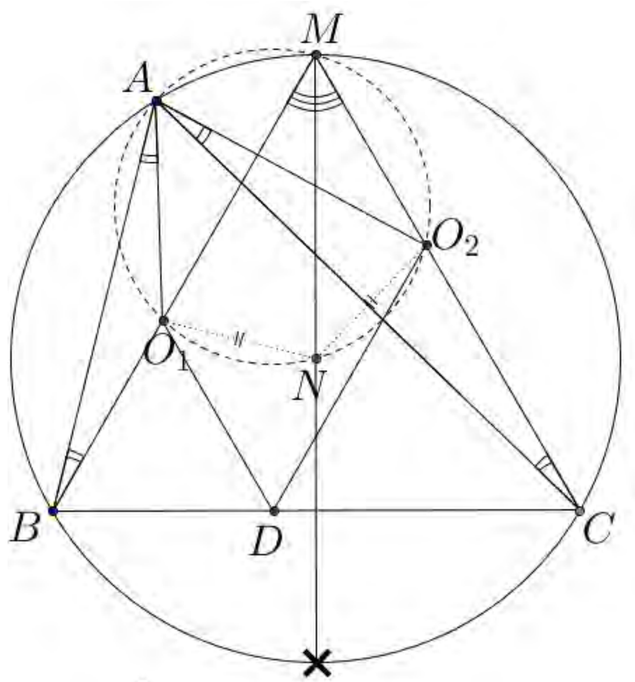
راه‌حل دوم. ابتدای راه‌حل مشابه راه‌حل اول است. حال فرض کنید که $p|n^2+n+1$. از آن‌جا که $n|p-1$ عدد طبیعی k یافت می‌شود که $p = kn+1$. پس باید عدد طبیعی t موجود باشد که $(kn+1)t = n^2+n+1$. با در نظر گرفتن دو طرف عبارت اخیر به پیمانه‌ی n نتیجه می‌گیریم (به پیمانه‌ی n) $t \equiv 1$، پس عدد صحیح نامنفی s یافت می‌شود که $t = sn+1$. اگر $s > 0$ باشد، آن‌گاه $(sn+1)(tn+1) > n^2+n+1$ که تناقض است، پس $s = 0$ و لذا $t = 1$. بنابراین $p = n^2+n+1$. قسمت آخر راه‌حل هم مشابه است.

۲. دقت کنید که در بین زاویه‌های $\angle ADB$ و $\angle ADC$ یکی کم‌تر یا مساوی 90° و دیگری بیش‌تر یا مساوی 90° است که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله و به دلیل تقارن می‌توان فرض کرد $\angle ADC \geq 90^\circ$. در این صورت با توجه به خواص مرکز دایره‌ی محیطی داریم:

$$\angle ABO_1 = 90^\circ - \angle ADB = \angle ADC - 90^\circ = \angle ACO_2$$

پس BO_1 و CO_2 یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند. با استدلال مشابه بالا می‌توان نشان داد که $\angle BAO_1 = \angle CAO_2$ و بنابراین $\angle O_1AO_2 = \angle BAC = 60^\circ$.
نقطه‌ی D قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به O_1O_2(عمود منصف AD) است. پس $\angle O_1DO_2 = 60^\circ$ لذا $\angle O_1NO_2 = 120^\circ$ و با توجه به این‌که M روی دایره‌ی محیطی ABC قرار دارد $\angle O_1MO_2 = 60^\circ$ است و

این نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی M، N، $O_۱$ و $O_۲$ روی یک دایره قرار دارند. از طرفی $O_۱N = O_۲N$ پس MN نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle O_۱MO_۲ = \angle BMC$ است. می‌دانیم که نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BMC$ از وسط کمان BC در دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد که یک نقطه‌ی ثابت است.



۳. فرض کنید $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ همه‌ی فاصله‌های ظاهر شده در بین این سیارات باشند. به برهان خلف فرض کنید که $r \leq ۷۸$. یکی از ستاره‌های فضا را به دل‌خواه انتخاب کنید و کره‌های به مرکز این ستاره و شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ را در نظر بگیرید. طبق فرض ما هر کدام از ستاره‌های دیگر باید روی یکی از این r کره باشند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری روی یکی از این کره‌ها باید حداقل $\lceil \frac{۱۰^۶-۱}{r} \rceil \geq \lceil \frac{۱۰^۶-۱}{۷۸} \rceil = ۱۲۸۲۱$ ستاره باشد. حال تنها این کره را در نظر بگیرید و یکی از ستاره‌های روی آن را به دل‌خواه انتخاب کنید. مجدداً به مرکز این ستاره‌ی جدید r کره با شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ در نظر بگیرید. تمام ستاره‌های آسمان غیر از ستاره‌ای که مرکز این کره‌هاست روی این r کره قرار دارند، پس باید طبق اصل لانه کبوتری یکی از این کره‌ها باشد که از بین ۱۲۸۲۱ ستاره‌ای که روی کره‌ی اول قرار داشتند شامل حداقل $\lceil \frac{۱۲۸۲۰}{r} \rceil \geq \lceil \frac{۱۲۸۲۰}{۷۸} \rceil = ۱۶۵$ تا از ستاره‌ها باشد. حال دقت کنید که این ۱۶۵ ستاره روی دو کره‌ی غیرهم‌مرکز قرار گرفته‌اند، پس باید روی اشتراک آن‌ها که یک دایره است باشند. در نهایت تنها این ۱۶۵ ستاره را در نظر بگیرید. اگر یکی از این ۱۶۵تا را به دل‌خواه انتخاب کنیم برای هر $۱ \leq i \leq r$ حداکثر دو ستاره از بین ۱۶۴ ستاره‌ی باقی‌مانده دارای فاصله‌ی d_i با این ستاره هستند. پس تعداد این ستاره‌ها روی این دایره باید حداکثر $۲ \times ۷۸ + ۱ = ۱۵۷$ باشد که این طور نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما اشتباه است و حداقل ۷۹عدد متمایز در بین فواصل دوبه‌دوی این یک میلیون سیاره وجود دارد.

۴. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر حداقل $۲^{n-۱}$ مهره در یک جدول $n \times ۱$ داشته باشیم و حرکات

مجاز ما این باشد که اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره قرار داشت بتوانیم دو مهره از آن خارج کنیم و یک مهره در خانه‌ی سمت راستش قرار دهیم، می‌توانیم با جابه‌جایی مهره‌ها در نهایت مهره‌ای را به آخرین خانه‌ی سمت راست برسانیم. این حکم برای $n = ۱$ بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای k درست باشد و ما ۲^k مهره در یک جدول $(k + ۱) \times ۱$ داریم. اگر از ابتدا مهره‌ای در آخرین خانه‌ی سمت راست باشد، چیزی برای ثابت کردن باقی نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم که این خانه خالی باشد. حال ۲^k مهره را که همگی در یک جدول $k \times ۱$ قرار دارند به دو دسته‌ی $۲^{k-۱}$ تایی تقسیم می‌کنیم. حال طبق فرض استقرا می‌توان با جابه‌جایی مهره‌ها در هر دسته یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست رساند. پس در نهایت حداقل دو مهره به این خانه می‌رسد و با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی سمت راست برد.

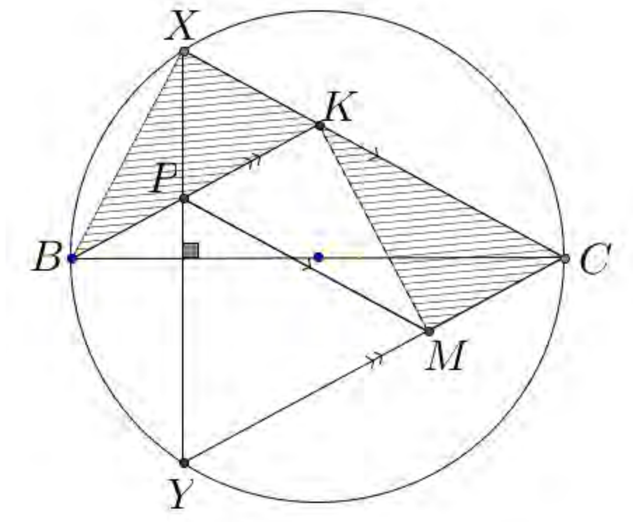
حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

حکم مسئله‌ی اصلی را هم شبیه به بالا به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. باز هم حالت $n = ۱$ به سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنید که حکم برای k برقرار باشد و ما $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $(k + ۱) \times ۲$ داشته باشیم. مشابه بالا اگر در ابتدا مهره‌ای در خانه‌ی بالا سمت راست(خانه‌ی ستاره‌ای) باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. این بار اگر حداقل دو مهره در خانه‌ی پایین سمت راست باشد می‌توان دو مهره از این خانه برداشت و یک مهره به خانه‌ی بالا راست منتقل کرد که باز مسئله حل است. پس باید فرض کنیم که در خانه‌ی پایین راست حداکثر یک مهره قرار دارد. حال بر حسب تعداد مهره‌های این خانه مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

اگر در خانه‌ی پایین راست مهره‌ای نباشد، همه‌ی $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $k \times ۲$ قرار دارند. حال اگر مشابه بالا $۲^{k+۱}$ مهره را به دو دسته‌ی ۲^kتایی به دل‌خواه تقسیم کنیم، طبق فرض استقرا می‌توان با هر کدام از این دسته‌ها یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست از ردیف بالایی رساند. حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست یک مهره قرار داشته باشد. $۲^{k+۱} - ۱$ مهره در بقیه‌ی جدول قرار دارند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری یا ۲^k در ردیف بالایی قرار دارد که طبق استدلال قسمت اول راه‌حل می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند و یا ۲^k مهره در ردیف پایینی غیر از خانه‌ی سمت راست آن قرار دارد. در این جا باز با استفاده حکمی که در ابتدای راه‌حل ثابت شد می‌توان یک مهره‌ی دیگر به خانه‌ی پایین راست اضافه کرد که در این صورت ۲ مهره در این خانه قرار می‌گیرد و حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی بالا راست رساند.

۵. راه‌حل اول. دقت کنید که BC قطر دایره و لذا عمود منصف XY است، پس $\angle BCY = \angle BCX$، و $\angle YBC = \angle XBC$. از آن‌جا که $BK \parallel CY$، $\angle KBC = \angle BCY = \angle BCK$ و بنابراین $BK = KC$. هم‌چنین $\angle XPK = \angle XYC = \angle YXC$ و لذا $KX = KP$. از آن‌جا که $KCPM$ متوازی‌الاضلاع است، $KP = CM$. از طرف دیگر $\angle BKX = \angle MCK$ و لذا دو مثلث XKB و CMK هم‌نهشت هستند. از آن‌جا که BC قطر دایره است، $\angle BXC = ۹۰^\circ$ و با توجه به هم‌نهشتی این دو مثلث $\angle KMC$ قائمه است و $KM \perp YC$. در نهایت باز با توجه به موازی بودن PB و CY حکم مورد نظر ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. برای اثبات حکم از قضیه‌ی کارنو استفاده می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم تحت شرایط مسئله $BM^۲ - PM^۲ = BK^۲ - PK^۲$. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BYM، $BM^۲ = BY^۲ + YM^۲$. دقت کنید که $PM \parallel XC$ و لذا $\angle YPM = \angle YXM = \angle CYP$. پس مثلث PMY متساوی‌الساقین است و $PM = MY$. در راه‌حل اول هم نشان دادیم که $KP = XK$ و $BK = KC$. در نهایت با ترکیب این روابط و استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BXK داریم:

$$BM^۲ - PM^۲ = (BY^۲ + YM^۲) - YM^۲ = BY^۲ = BX^۲ = BK^۲ - KX^۲ = BK^۲ - KP^۲$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶. ابتدا نشان می‌دهیم f تابعی یک به یک است. اگر $f(a) = f(b)$ باشد، با قرار دادن $y = ۱$ در معادله و یک بار جای‌گذاری a و بار دیگر b به جای x داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a+۱)f(f(a)) = a^۲ f(f(a)+f(۱))\\(b+۱)f(f(b)) = b^۲ f(f(b)+f(۱))\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^۲}{a+۱} = \frac{b^۲}{b+۱} \Rightarrow \cdots \Rightarrow (a-b)(ab+a+b) = ۰$$

حال با توجه به این که a و b و در نتیجه $ab+a+b$ مثبت است، نتیجه می‌گیریم $a = b$ و بنابراین تابع یک به یک است. اگر برای یک $x > ۱$ در رابطه‌ی اصلی به جای y، $x^۲ - x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

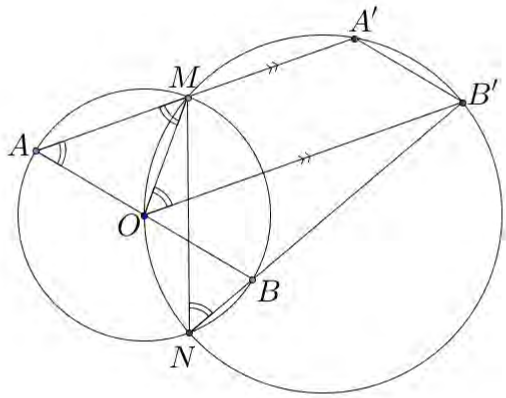
$$\begin{array}{rc}
 & (x+(x^۲-x))f(f(x)(x^۲-x)) = x^۲ f(f(x)+f(x^۲-x))\\
\Rightarrow & f(f(x)(x^۲-x)) = f(f(x)+f(x^۲-x))\\
\Rightarrow & f(x)(x^۲-x) = f(x)+f(x^۲-x)\\
\Rightarrow & f(x)(x^۲-x-۱) = f(x^۲-x)
\end{array}$$

در خط دوم به سوم از یک به یکی تابع f استفاده شده است. در نهایت دقت کنید که معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - x - ۱$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. حال اگر این ریشه را α بنامیم، با قرار دادن $x = \alpha$ در معادله‌ی آخر به $f(۱) = ۰$ می‌رسیم که با فرض این که مقادیر F مثبت هستند تناقض دارد. پس چنین تابعی اصلاً وجود ندارد.

۲۰.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۵

۱. مرکز دایره‌ی $C_۱$ را O نام‌گذاری کنید. کافی است نشان دهیم $MA' \parallel OB'$. زیرا در این صورت چهارضلعی محاطی با رئوس M، O، A' و B' یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود و در نتیجه‌ی آن $MO = A'B'$ و حکم ثابت می‌شود. برای اثبات توازی MA' و OB' هم داریم:

$$\angle OMA = \angle OAM = \angle BAM = \angle BNM = \angle B'NM = \angle B'OM \Rightarrow B'O \parallel MA'$$



۲. با دو مرتبه استفاده از فرض مسئله داریم:

$$P(x,y) = ۲P(\frac{x+y}{۲}, \frac{x-y}{۲}) = ۴P(\frac{\frac{x+y}{۲}+\frac{x-y}{۲}}{۲}, \frac{\frac{x+y}{۲}-\frac{x-y}{۲}}{۲}) = ۴P(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲})$$

حال دقت کنید که اگر ضریب جمله‌ی x^iy^j در $P(x,y)$ برابر A باشد، ضریب آن در $۴P(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲})$ برابر $۴A \times ۲^{-i-j}$ است و بنابراین در جملات با ضریب ناصفر باید $i+j = ۲$ باشد، یعنی $P(x,y)$ می‌تواند شامل سه جمله‌ی $x^۲$، $y^۲$ و xy باشد.

اگر $P(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲$، با توجه به رابطه‌ی صورت مسئله خواهیم داشت:

$$۲P(x,y) = ۲ax^۲ + ۲bxy + ۲cy^۲ = P(x+y, x-y) = (a+b+c)x^۲ + ۲(a-c)xy + (a+c-b)y^۲$$

پس $a+b+c = ۲a$، $۲(a-c) = ۲b$ و $a+c-b = ۲c$ که از هر سه نتیجه می‌شود $a = b+c$ پس چندجمله‌ای جواب باید به فرم $P(x,y) = (b+c)x^۲ + bxy + cy^۲$ باشد که به راحتی می‌توان چک کرد که این چندجمله‌ای در صورت مسئله صرق می‌کند.

۳. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا در پایان ثابت می‌کنیم. برای گام استقرا فرض کنید $b_۱$ کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. ادعا می‌کنیم اگر ستاره‌ی مربوط به بازه‌ی $[a_۱, b_۱]$(که آن را در طول راه‌حل ستاره‌ی ۱ می‌نامیم) و همه‌ی ستاره‌هایی که با آن لحظه‌ای در آسمان دیده شده اند را در نظر نگیریم، فرض مسئله برای ستاره‌های باقی‌مانده و $k - ۱$ برقرار است. برای این منظور $k - ۱$ ستاره‌ی دل‌خواه را از بین ستاره‌هایی در نظر بگیرید که در هیچ لحظه‌ای با ستاره‌ی ۱ در آسمان نبوده‌اند. این $k - ۱$ ستاره به هم‌راه ستاره‌ی ۱، k ستاره هستند، پس طبق فرض مسئله لحظه‌ای وجود دارد که دو تا از

آن‌ها در آسمان با هم دیده می‌شوند. دقت کنید که ستاره‌ی ۱ نمی‌تواند در بین این دو ستاره باشد، پس در نهایت در بین $k-1$ ستاره‌ی اولیه دو ستاره یافت می‌شدند که در یک زمان در آسمان ظاهر بودند و فرض مسئله برای $k-1$ برقرار است. حال طبق استقرا می‌توان $k-2$ عکس گرفت به طوری که همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ در آسمان دیده نشده‌اند دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شوند. حال اگر در لحظه‌ی b_1 هم عکسی بگیریم، همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ اشتراک دارند در این عکس دیده می‌شوند، چرا که b_1 کوچک‌ترین مقدار در بین b_iها فرض شده بود و لذا هر بازه‌ی دیگری که با $[a_1, b_1]$ اشتراک دارد، باید شامل b_1 باشد.

در مورد پایه‌ی استقرا، استدلال قسمت پایانی بند بالا کار می‌کند. در این حالت هم فرض کنید b_1 کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. از آن‌جا که طبق فرض استقرا در این حالت بازه‌ی حضور هر دو ستاره در آسمان با هم اشتراک دارند، پس باید بازه‌ی حضور هر ستاره‌ی دیگری شامل b_1 باشد و بنابراین اگر در این لحظه (b_1) عکسی بگیریم همه‌ی ستاره‌ها در آن دیده می‌شوند.

۴. الف.

$$\left.\begin{array}{l} m+n \,|mn+1 \\ m+n \,|m^2+nm \end{array}\right\} \Rightarrow m+n\,|m^2-1$$

پس $m+n$ باید مقسوم‌علیه m^2-1 باشد. اما m^2-1 تنها متناهی مقسوم‌علیه دارد و لذا متناهی عدد این‌چنینی یافت می‌شوند.

ب. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که اگر m و n دو عدد فرد متوالی باشند، آن‌گاه $m+n|mn+1$. با توجه به متقارن بودن رابطه می‌توان فرض کرد $n > m$. در این صورت به راحتی می‌توان چک کرد که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, 2m+1, 2m+3, \ldots, 2n+1, n^2-n-1, n)$$

شرط مسئله را برآورده می‌کند.

راه‌حل دوم. این راه‌حل هم کاملاً مشابه راه‌حل قبلی است. تنها دقت کنید که اگر $3 \leq m < n$، آن‌گاه $m^2-m-1 < n^2-n-1$. پس می‌توان به راحتی دید که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, m^2-m+1, m^2+m+3, \ldots, n^2-n-3, n^2-n-1, n)$$

هم شرایط مسئله را دارد.

۵. برای حل این مسئله ابتدا یک لم معروف را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید مثلثی با اضلاع به طول a، b و c، دارای مساحت S بوده و شعاع دایره‌ی محیطی آن برابر R باشد. نشان دهید که $4RS = abc$.

اثبات. فرض کنید A زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع a باشد، در این صورت با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} \Rightarrow 4RS = abc$$

□

حال در مسئله‌ی اصلی فرض کنید L محل تقاطع AC و BD باشد. M را نقطه‌ای دل‌خواه روی دایره بگیرید. طبق لم بالا در مثلث‌های AMC و BMD داریم: (شعاع دایره را برابر R گرفتیم و مساحت مثلث‌ها را با S نمایش می‌دهیم.)

$$MA.MC.AC = ۴R.S_{AMC},\ MB.MD.BD = ۴R.S_{BMD}$$

اگر نقطه‌ی M در شرط مسئله صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت:

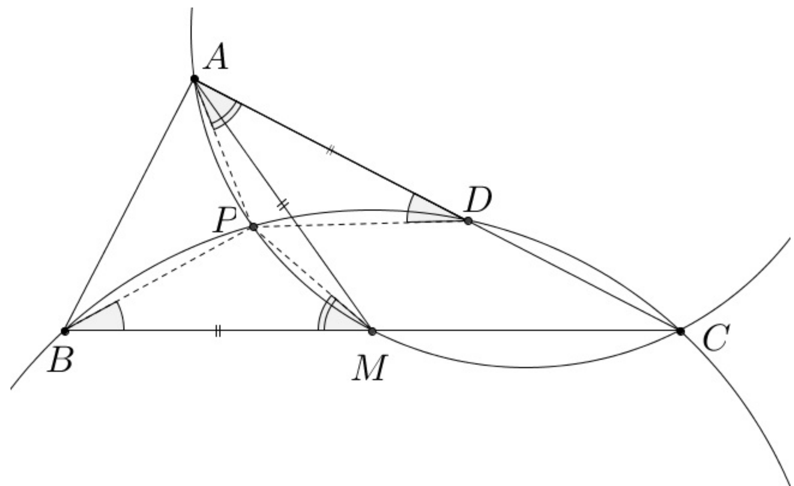
$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{AC}{BD}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو پاره‌خط AC و BD باید برابر باشد و در نتیجه باید روی نیم‌ساز یکی از چهار زاویه‌ای که دو خط AC و BD با ایجاد می‌کنند، واقع است. حال دقت کنید که این چهار نیم‌ساز دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند که به راحتی با توجه به نتایج بالا می‌توان چک کرد این چهار نقطه، همان ۴ نقطه‌ی خواسته شده در صورت مسئله هستند.

۶. تعداد کتاب‌ها را برابر n بگیرید. دقت کنید که ترتیب کتاب‌ها حداکثر $n!$ حالت مختلف می‌تواند به خود بگیرد. به علاوه با توجه به این که هر کتاب دو وضعیت می‌تواند داشته باشد حداکثر $۲^n n!$ آرایش مختلف برای کتاب‌ها محتمل است. بعد از n، $۲n$، $۳n$ و ... جابه‌جایی وضعیت کتاب‌ها را نگاه کنید. چون تعداد این مرحله‌ها نامتناهی است و تعداد آرایش‌های ممکن کتاب‌ها متناهی دو مرحله‌ی مختلف هستند که آرایش کتاب‌ها در آن‌ها یکسان است. توجه کنید که اگر در آرایش کتاب‌ها را در یک مرحله بدانیم، آرایش کتاب‌ها در n مرحله قبل با برعکس انجام دادن عمل‌ها تعیین می‌شود. پس با توجه به دو مرحله‌ای که وضعیت کتاب‌ها یکسان است و با برگشت به عقب می‌توان به مرحله‌ای رسید که وضعیت کتاب‌ها همان وضعیت اولیه‌شان باشد.

۲۱.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۶

۱. از آن‌جا که نقطه‌های B، P، D و C روی یک دایره قرار دارند نتیجه می‌گیریم $\angle PBC = \angle ADP$. هم‌چنین نقطه‌های A، P، M و C هم‌دایره هستند، درنتیجه $\angle CAP = \angle PMB$. از آن‌جایی که مثلث ABC قائم‌الزاویه است، میانه‌ی وارد بر وتر (AM) نصف وتر است. پس $AM = MB$ و لذا $BM = AD$. از نتایج بالا به دست می‌آید که دو مثلث PMB و PAD با یک‌دیگر هم‌نهشت هستند. پس طول ارتفاع رسم‌شده از P در این دو مثلث برابر است که نتیجه می‌دهد نقطه‌ی P از دو ضلع زاویه‌ی $\angle ACB$ به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز این زاویه قرار دارد.



۲. راه‌حل اول. فرض کنید a_n تعداد مسیرهای به طول n از O به خودش(یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به خودش)، و b_n تعداد مسیرهای به طول n از O به A باشد (یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به رأس غیرمجاور در یک وجه).
یک مسیر از O به خودش را در نظر بگیرید. به $n-۱$امین رأس این مسیر توجه کنید. طبق شرط مسئله این رأس باید خود O و یا رأسی باشد که فاصله‌اش از O برابر ۲ است. می‌دانیم که فاصله‌ی سه رأس از O برابر با ۲ است و هم‌چنین تعداد مسیرهای به طول دو بین دو رأس که در یک وجه روبه‌رو به یک قطر هستند برابر ۲ و تعداد مسیرهای به طول ۲ از یک رأس به خودش برابر ۳ است. در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_n = ۲\left(b_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳a_{n-۲}$$

به همین ترتیب به سادگی به دست می‌آید که:

$$b_n = ۲\left(a_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳b_{n-۲}$$

با کم کردن این دو رابطه از یک‌دیگر داریم:

$$a_n - b_n = a_{n-۲} - b_{n-۲}$$

در نتیجه:

$$a_{۱۳۸۶} - b_{۱۳۸۶} = a_{۱۳۸۴} - b_{۱۳۸۴} = \ldots = a_{۰} - b_{۰} = ۱$$

بنابراین $a_{۱۳۸۶} > b_{۱۳۸۶}$.

راه‌حل دوم. چهار رأس از رئوس مکعب روی عمود منصف OA واقع هستند. این چهار رأس را رئوس میانی می‌گوییم. هر مسیر به طول ۱۳۸۶ از O به A از یکی از این رئوس میانی می‌گذرد. حال با فرآیند زیر از هر مسیر O به A مسیری از O به O می‌سازیم.

بعد از اولین باری که مسیر از یک رأس میانی عبور کرد، قرینه‌ی حرکت‌هایی که انجام داده‌ایم را نسبت به صفحه‌ی عمود منصف OA انجام می‌دهیم تا این بار به نقطه‌ی O برسیم.

پس هر مسیر از O به A به مسیری یکتا از O به O تبدیل می‌شود. دقت کنید که از آن‌جا که می‌توان عکس این کار را انجام داد هیچ دو مسیری به یک مسیر تبدیل نمی‌شود. پس تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر یا مساوی مسیرهای O به A است. اما دقت کنید که مسیری که از تعدادی پایین و سپس بالا رفتن از رأس O تشکیل شده است هیچ‌گاه از رئوس میانی نمی‌گذرد و بنابراین تبدیل یافته‌ی هیچ مسیری از O به A نیست.، بنابراین در کل تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر است.

۳. فرض کنید ارتفاع ساختمان در نقطه‌ی X از صفحه را با h_X نمایش دهیم. اگر ساختمان‌های بناشده در دو نقطه‌ی A و B بر یک‌دیگر مشرف نباشند، با توجه به تعریف مشرف بودن این معادل آن است که زاویه‌ای که خط واصل بین دو سر ساختمان‌ها می‌سازند با زمین کم‌تر یا مساوی ۴۵° باشد. اگر این زاویه را θ بنامیم، داریم:

$$۱ = |\tan(۴۵^\circ)| \geq |\tan\theta| = \frac{|h_A - h_B|}{|A - B|} \Leftrightarrow |h_B - h_A| \leq |B - A|$$

که منظور از $|B - A|$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در صفحه‌ی شهر است. فرض کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن ساختمان جدید را بنا کنیم، نقطه‌ی P باشد و ارتفاع ساختمان مورد نظر را با h نمایش‌دهیم. شرط مشرف نبودن هیچ دو ساختمانی بعد از بنای این ساختمان ایجاب می‌کند که بعد از بنای این ساختمان برای هر ساختمان دیگر مثل ساختمان نقطه‌ی A داشته باشیم $|h - h_A| \leq |P - A|$ و معادلاً $h \in [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$.

کافی است نشان دهیم که اشتراک این بازه‌ها برای ساختمان‌های مختلف شامل نقطه‌ای مثبت است، زیرا در این صورت h را برابر این نقطه می‌گیریم و بنابراین همه‌ی شرط‌های مورد نیاز برای مشرف نبودن‌ها برآورده می‌شود.

h را برابر کوچک‌ترین عدد در بین کران بالایی بازه‌های بالا برای ساختمان‌های مختلف بگیرید(دقت کنید که از آن‌جا که تعداد ساختمان‌های شهر متناهی است، حتماً کوچک‌ترین عددی وجود دارد). فرض کنید این عدد مربوط به ساختمانی باشد که در نقطه‌ی B بنا شده است. پس $h = h_B + |P - B|$.

مثبت بودن این عدد واضح است. حال باید نشان دهیم که این عدد در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که این عدد در بازه‌ی مربوط به ساختمان A نباشد.

$$h \notin [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$$

با توجه به این که h کوچک‌ترین کران بالایی در بین کران بالای بازه‌ها بود، تنها حالت ممکن برای این که h در این بازه نباشد، این است که h از کران پایین آن کم‌تر باشد.($h < -|p-A| + h_A$) اما این با توجه به نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که:

$$h_B + |P-B| < -|P-A| + h_A \Rightarrow h_A - h_B > |P-A| + |P-B| \geq |A-B|$$

پس $|h_A - h_B| > |A-B|$ و بنابراین این دو ساختمان قبلاً به هم مشرف بوده‌اند که خلاف فرض مسئله است. این تناقض نشان می‌دهد که h معرفی‌شده در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۴. . برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی با شرایط مسئله بیابیم. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۳, ۲^۳, \ldots, n^۳$$

می‌دانیم که هر کدام از این اعداد مکعب کامل هستند. در نتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. همچنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ است و در نتیجه مربع کامل است. این حکم برای $n = ۱$ به وضوح درست است. حال فرض کنید که حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد، یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + (n-۱)^۳ = \left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲$$

برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

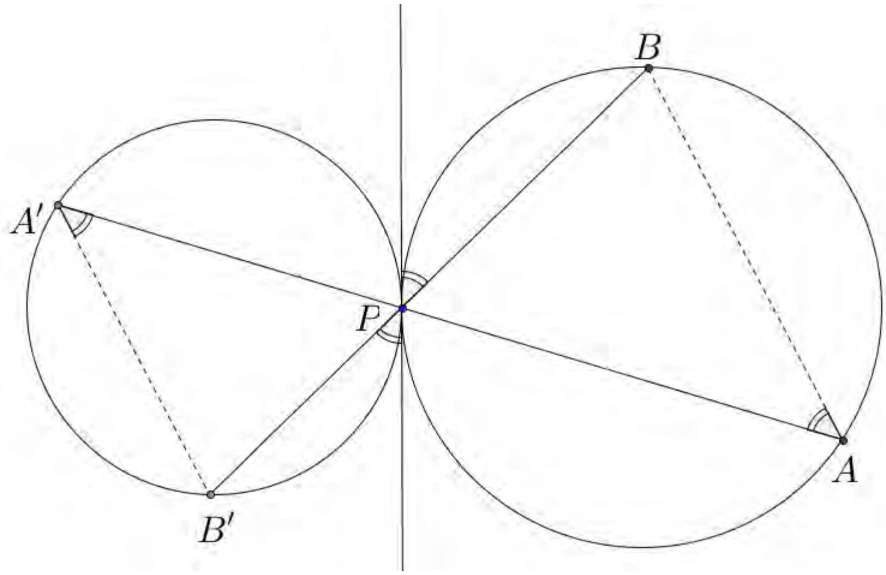
که این هم به سادگی قابل بررسی است:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \frac{n^۴ - ۲n^۳ + n^۲}{۴} = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۵. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ در P مماس خارجی باشند. دو قاطع گذرا از P، به ترتیب $C_۱$ را در A و B، و $C_۲$ را در A' و B' قطع می‌کند(برای بار دوم). در این صورت دو مثلث ABP و $A'B'P$ متشابه هستند.



اثبات.

مماس مشترک دو دایره در P را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $\angle PAB$ با زاویه‌ی ظلی به رأس P که مربوط به کمان BP است برابر است.(کمانی که شامل A نیست.) این زاویه‌ی ظلی با زاویه‌ی ظلی مربوط به کمان $B'P$ در C_2 با رأس P متقابل به رأس است و لذا با هم برابر هستند. در نهایت این زاویه‌ی ظلی جدید هم با زاویه‌ی $\angle PA'B'$ که روبه‌رو به همین کمان است برابر است. پس در کل $\angle PA'B' = \angle PAB$. با استدلال کاملاً مشابه $\angle PBA = \angle P'B'A'$ و بنابراین حکم اثبات می‌شود. $\square$

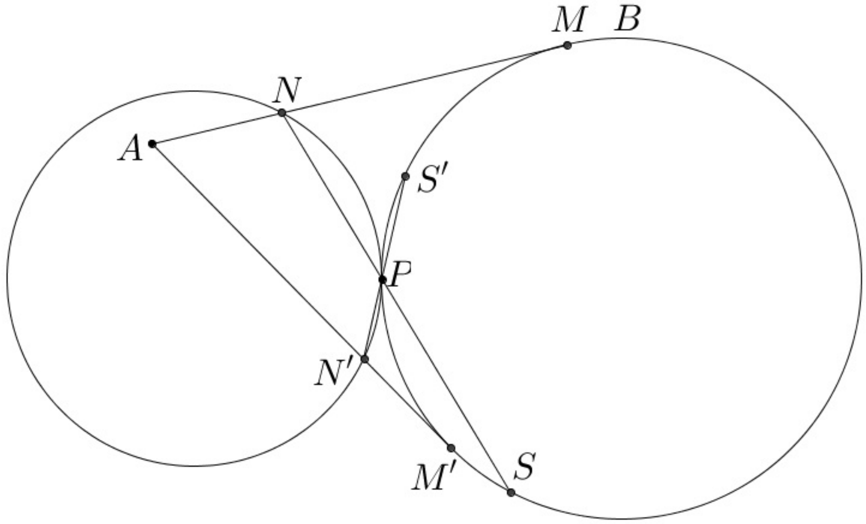
فرض کنید S و S' به ترتیب، محل تقاطع دوم NP و $N'P$ با دایره‌ی C_2 باشند. در این صورت با توجه به این که $N'M'$ و NM بر C_2 مماس هستند، برای قوت N و N' نسبت به C_2 می‌توان نوشت:

$$NM^2 = NP.NS, \quad N'M'^2 = N'P.N'S'$$

حال دقت کنید که طبق لم بالا دو مثلث PSS' و PNN' متشابه هستند و لذا $\frac{N'P}{PS'} = \frac{NP}{PS}$ که این نتیجه می‌دهد $\frac{N'P}{N'S'} = \frac{NP}{NS}$. حال با ترکیب این نتایج داریم:

$$\left(\frac{NM}{N'M'}\right)^2 = \frac{NM^2}{N'M'^2} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NS}{N'S'} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NP}{N'P} = \left(\frac{NP}{N'P}\right)^2$$

در نهایت گرفتن جذر از دو طرف حکم را نتیجه می‌دهد.



۶. برای حل سؤال ابتدا دو لم را ثابت می‌کنیم:

لم ۱. اگر n عددی طبیعی باشد و ۶n چاپ شود، n نیز چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات کاملاً سرراست است.
بین سه عدد ۲n، ۴n و ۶n، عدد ۶n چاپ شده است، پس ۲n و ۴n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۳n، ۶n و ۹n، عدد ۶n چاپ شده است، پس ۳n و ۹n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد n، ۲n و ۳n، عددهای ۳n و ۲n چاپ نمی‌شوند، پس n باید چاپ شود.

□

لم ۲. اگر n عددی طبیعی باشد و ۲n چاپ شود، ۸n چاپ نمی‌شود ولی ۱۶n چاپ می‌شود.

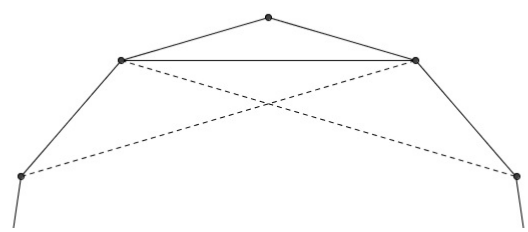
اثبات. اثبات این لم هم مشابه لم قبلی است.
بین سه عدد n، ۲n و ۳n، عدد ۲n چاپ شده است، پس n و ۳n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۲n، ۴n و ۶n، عدد ۲n چاپ شده است، پس ۴n و ۶n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۳n، ۶n و ۹n، عددهای ۳n و ۶n چاپ نمی‌شوند، پس ۹n باید چاپ شود.
بین سه عدد ۹n، ۱۸n و ۲۷n، عدد ۹n چاپ شده است، پس ۱۸n و ۲۷n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۶n، ۱۲n و ۱۸n، عددهای ۶n و ۱۸n چاپ نمی‌شوند، پس ۱۲n باید چاپ شود.
بین سه عدد ۴n، ۸n و ۱۲n، عدد ۱۲n چاپ شده است، پس ۴n و ۸n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۱۲n، ۲۴n و ۳۶n، عدد ۱۲n چاپ شده است، پس ۲۴n و ۳۶n چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد ۸n، ۱۶n و ۲۴n، عددهای ۸n و ۲۴n چاپ نمی‌شوند، پس ۱۶n باید چاپ شود.

□

حال در مورد مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید $۱۳۸۲۴ = ۲^۹ \times ۳^۳$ چاپ شود. با سه بار استفاده از لم ۱ این نتیجه می‌دهد که باید عدد ۶۴ هم چاپ بشود. از طرف دیگر با توجه به این که ۲ چاپ شده است، طبق لم ۲ عدد ۱۶ هم باید چاپ شود. استفاده‌ی دوباره از لم ۲ نتیجه می‌دهد که $۶۴ = ۴ \times ۱۶$ چاپ نمی‌شود که با صحبت‌های بالا متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که ۱۳۸۲۴ نباید چاپ بشود.

۲۲.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

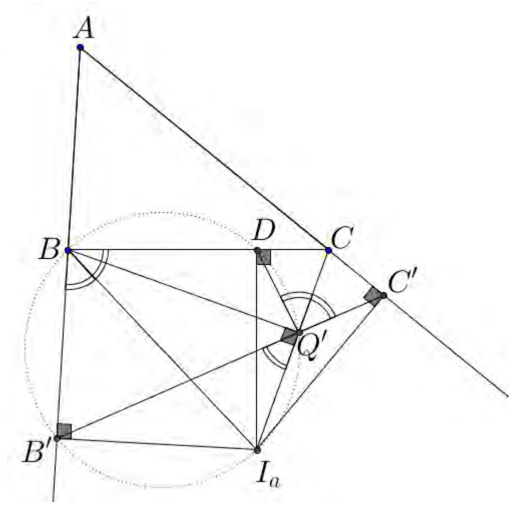
۱. به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که هرگاه $n-۳$ قطر نامتقاطع از یک nضلعی محدب رسم شود، آن را به $n-۲$ مثلث تقسیم می‌کند. به این صورت که یکی از قطرهای رسم شده را در نظر بگیرید و nضلعی را از روی آن قطر به دو چندضلعی با تعداد ضلع‌های کم‌تر تقسیم کنید و به کمک استقرا حکم مورد نظر را نتیجه بگیرید. تنها حالت پایه‌ی $n=۳$ باقی می‌ماند که از آن‌جا که هیچ قطری رسم نشده است، چندضلعی به یک مثلث تقسیم می‌شود.
حال در مسئله‌ی اصلی هنگامی که $n > ۳$ است هیچ‌کدام از مثلث‌ها نمی‌توانند با nضلعی سه ضلع مشترک داشته باشند و ضمناً هر مثلث حداقل یک و حداکثر دو ضلع مشترک با nضلعی دارد. با توجه به این که $n-۲$ مثلث و n ضلع داریم، دقیقاً دو تا از مثلث‌ها دو ضلع مشترک با nضلعی دارند و بقیه تنها یک ضلع مشترک دارا هستند.
یکی از این دو مثلث را در نظر می‌گیریم. این مثلث می‌تواند یکی از n مثلثی باشد که دو ضلع مجاور از n ضلعی را شامل هستند. حال سومین ضلع از این مثلث را در نظر بگیرید که حتماً یک قطر از چندضلعی است. مثلث دیگری که این قطر یکی از ضلع‌های آن است، می‌تواند یکی از دو مثلثی باشد که این قطر و یکی از دو ضلع nضلعی که مجاور ضلع‌های مثلث قبلی هستند را شامل است.(به شکل زیر دقت کنید.)



حال به همین ترتیب قطری که مثلث جدید شامل است را در نظر بگیرید. برای مثلث سوم هم با همین استدلال دو حالت داریم. با ادامه‌ی همین فرآیند برای هر مثلث جدید (به جز اولین و آخرین مثلث که به ترتیب n حالت و ۱ حالت داشتند) دو حالت محتمل است. اما دقت کنید که هر آرایش از مثلث‌ها دو بار شمرده شده است، چرا که در هر آرایش دو مثلث وجود دارد که با چندضلعی دارای دو ضلع مشترک است و شروع از هر کدام می‌تواند به همین آرایش منجر شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با $\frac{n\times ۲^{n-۴}}{۲} = n۲^{n-۵}$.

۲. D را نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC از مثلث بگیرید. در این صورت $CD = CC'$ چرا که دو مثلث $I_aC'C$ و I_aDC به دلیل داشتن یک زاویه‌ی ۹۰ درجه و دو ضلع برابر هم‌نهشت هستند. Q' را پای عمود وارد از B بر I_aC بگیرید. در این صورت مثلث‌های DCQ' و $C'CQ'$ هم‌نهشت هستند، زیرا $\angle Q'CD = \angle Q'CC'$ ، $Q'C = Q'C$ و $CD = CC'$. در نتیجه $\angle C'Q'C = \angle DQ'C$. از آن‌جا که زاویه‌های $\angle BQ'I_a$ و $\angle BDI_a$ قائمه هستند، چهارضلعی $BDQ'I_a$

محاطی است. در نتیجه $\angle DQ'C = \angle DBI_a$. ضمناً دقت کنید که BI_a نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle DBB'$ است و لذا $\angle DBI_a = \angle B'BI_a$. قائمه بودن زاویه‌ی $\angle BB'I_a$ نتیجه می‌دهد که نقطه‌ی B' هم روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی $BDQ'I_a$ قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $\angle B'BI_a = \angle B'Q'I_a$. با جمع‌بندی این رابطه‌ها می‌فهمیم که $\angle B'Q'I_a = \angle CQ'C'$ پس نقطه‌های B'، Q' و C' روی یک خط قرار دارند. در نتیجه نقطه‌ی Q' که محل تقاطع I_aC و $B'C'$ است همان نقطه‌ی Q است. پس در کل نشان دادیم که $BQ \perp I_aC$. مشابه همین استدلال نشان می‌دهد که $CP \perp I_aB$.



حال دقت کنید که CI نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C است و در نتیجه بر CI_a که نیم‌ساز خارجی این زاویه است عمود می‌باشد. این نکته با توجه به این‌که $BQ \perp I_aC$ نشان می‌دهد که $BQ \parallel IC$ و مشابه همین نتیجه می‌شود که $CP \parallel BI$. پس چهارضلعی $BMCI$ یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه فاصله‌ی دو رأس M و I تا قطر BC مساوی است. اما فاصله‌ی I از BC برابر طول شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث است و بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۳. اگر $f^{۱۳۸۷}(a) = a$، آن‌گاه با اثر دادن تابع f روی دو طرف این تساوی می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(a)) = f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$$

و دقت کنید که $f(a) \neq a$، پس $f(a)$ جوابی متمایز از a برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ است. با اعمال دوباره‌ی تابع f بر دو طرف عبارت بالا می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(f(a))) = f^{۱۳۸۹}(a) = f(f(f^{۱۳۸۷}(a))) = f(f(a))$$

پس $f(f(a))$ هم جواب دیگری برای این معادله است. اما دقت کنید که $f(f(a)) \neq f(a)$. حال ادعا می‌کنیم که $f(f(a))$ و a هم متمایز هستند. در غیر این صورت اگر $f^{۲}(a) = a$ باشد، داریم:

$$f^{۱۳۸۸}(a) = f^{۱۳۸۶}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۶}(a) = f^{۱۳۸۴}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۴}(a) = \cdots = f^{۴}(a) = f^{۲}(f^{۲}(a)) = f^{۲}(a)$$

اما $f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$، پس باید $f^{۲}(a) = f(a)$ باشد که امکان ندارد. در نتیجه در کل سه جواب حقیقی متمایز برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ یافته‌ایم.

می‌توان به سادگی چک کرد که ترکیب دو تابع به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ هم به همین فرم است(البته با a، b، c و d متفاوت). این نتیجه می‌دهد که تابع $f^{۱۳۸۷}(x)$ تابعی به فرم $\frac{mx+n}{px+q}$ است که معادله‌ی $x = \frac{mx+n}{px+q}$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. جواب‌های این معادله به وضوح جواب‌های معادله‌ی $px^۲ + (q-m)x - n = ۰$ هم هستند که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر دو است. از آن‌جا که یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی حداکثر دو، حداکثر دو جواب حقیقی دارد؛ این چندجمله‌ای باید متحد با صفر باشد که این نتیجه می‌دهد که $p = ۰$، $q = m$ و $n = ۰$. پس داریم $f^{۱۳۸۷}(x) = \frac{mx+n}{px+q} = \frac{mx}{m} = x$، و این یعنی برای هر عدد حقیقی x، $f^{۱۳۸۷}(x) = x$.

۴. راه‌حل اول. $۴(a^۳+۱)$ و $۴(a^۹+۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{۴(a^۹+۱)}{۴(a^۳+۱)} = a^۶ - a^۳ + ۱$ هم مکعب کامل است. اگر $a > ۱$ باشد، $a^۶ - a^۳ + ۱ < a^۶ = (a^۲)^۳$ و از طرف دیگر $a^۶ - a^۳ + ۱ > a^۶ - ۳a^۴ + ۳a^۲ - ۱ = (a^۲ - ۱)^۳$، زیرا:

$$\begin{aligned} & ۳a^۴ - a^۳ - ۳a^۲ + ۲ \\ &= (a^۴ - a^۳) + (۲a^۴ - ۳a^۲) + ۲ \\ &= a^۳(a-۱) + a^۲(۲a-۳) + ۲ > ۰ \end{aligned}$$

اما $(a^۲-۱)^۳$ و $(a^۲)^۳$ دو مکعب کامل متوالی هستند و عددی که بین آن‌ها قرار دارد نمی‌تواند مکعب کامل باشد. پس a مجبور است برابر یک باشد که در این صورت هم همه‌ی جمله‌ها برابر ۸ و در نتیجه مکعب کامل هستند.

راه‌حل دوم. اگر $a > ۱$ باشد، $۴(a^n + ۱)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب n است. حال دقت کنید که $۴(a^{n+۳} + ۱)$ و همین‌طور $a^۳ \times ۴(a^n + ۱) = ۴(a^{n+۳} + a^۳)$ مکعب کامل هستند. اما تفاضل این دو مقدار برابر $۴a^۳ - ۴$ است که مستقل از n است. این یعنی تفاضل دو مکعب کامل که هر دو با افزایش n زیاد می‌شوند مقداری ثابت است که امکان ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که a باید برابر یک باشد.

راه‌حل سوم. از لم زیر که حالت خاصی از گزاره‌ای است که به لم دو خط معروف است استفاده می‌کنیم:

لم. فرض کنید x عددی طبیعی و p عددی اول و فرد باشد که $p|x+۱$. اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ برابر تعداد عوامل p در $x + ۱$ به اضافه‌ی تعداد عوامل p در n است.

اثبات. تعداد عوامل p در عدد طبیعی m را با $||m||_p$ نمایش می‌دهیم و حکم را به استقرا روی $||n||_p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n بر p بخش‌پذیر نباشد، با توجه به این که $(x^n + ۱) = (x+۱)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱)$ باید نشان دهیم که $p \nmid x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱$. برای این منظور دقت کنید که:

$$x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱ \equiv (-۱)^{n-۱} - (-۱)^{n-۲} + \cdots - (-۱) + ۱ \equiv n \not\equiv ۰ \pmod p$$

اگر n تنها یک عامل p داشته باشد، باید نشان دهیم که تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x + ۱$ است. در این حالت می‌توان نوشت $n = pm$ که m بر p بخش‌پذیر نیست. حال طبق استدلال قسمت قبل

$$||x^{mp} + ۱||_p = ||(x^p)^m + ۱||_p = ||x^p + ۱||_p$$

پس کافی است حکم این قسمت را برای حالت $n = p$ ثابت کنیم. از آن‌جا که $x + ۱$ بر p بخش‌پذیر است می‌توان عدد صحیح t یافت که $x = tp - ۱$.

$$x^p + ۱ = (tp - ۱)^p + ۱ = \sum_{i=۱}^{p} \binom{p}{i} (tp)^i (-۱)^{p-i} = tp \left(\sum_{i=۲}^{p} \binom{p}{i} (tp)^{i-۱} (-۱)^{p-i} + p \right) = (x + ۱)(\cdots)$$

از آن‌جا که تمام $\binom{p}{i}$ها بر p بخش‌پذیر هستند، عبارت داخل پرانتز تنها یک عامل p دارد. این نشان می‌دهد که تعداد عوامل p در $x^p + ۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x + ۱$ است. حال فرض کنید که حکم برای اعدادی که k عامل p دارند ثابت شده باشد و n، $k + ۱$ عامل p داشته باشد، در این صورت عدد طبیعی فرد m وجود دارد که $n = mp$ و m، k عامل p دارد. حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$||x^{mp} + ۱||_p = ||(x^p)^m + ۱||_p = ||x^p + ۱|| + ||m||_p = ||x + ۱||_p + ||p||_p + ||m||_p = ||x + ۱||_p + ||mp||_p$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است.

□

حال دقت کنید که $۴(a^۳ + ۱) = ۴(a + ۱)(a^۲ - a + ۱)$. اگر $a > ۱$ باشد، $a^۲ - a + ۱$ عدد فردی بزرگ‌تر از یک است، پس عامل اول فردی مثل p دارد. با استفاده از لم بالا داریم:

$$||۴(a^{۳p} + ۱)||_p = ||a^{۳p} + ۱||_p = ||a^۳ + ۱||_p + ||p||_p = ||۴(a^۳ + ۱)||_p + ۱$$

اما $۴(a^۳ + ۱)$ و $۴(a^{۳p} + ۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تعداد عوامل p در آن‌ها باید مضرب ۳ باشد که چون اختلاف این تعداد برابر یک است امکان ندارد. در نتیجه a نمی‌تواند بیش‌تر از ۱ باشد و در نتیجه تنها $a = ۱$ ممکن است.

۵. مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ را S می‌نامیم. مسئله را برای شماره‌های با هر تعداد رقم مطرح می‌کنیم و سعی می‌کنیم حداکثر تعداد شماره‌های ممکن با n رقم را پیدا کنیم که هر دو شماره‌ی انتخاب‌شده یا حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم حداقل دو واحد اختلاف داشته باشند. می‌توان یک شماره‌ی n رقمی با ارقام موجود در مجموعه‌ی S را به صورت یک nتایی مرتب از اعضای مجموعه‌ی S دید که آن را با S^n نمایش می‌دهیم. به استقرا روی n نشان می‌دهیم حداکثر تعداد اعضایی از S^n که می‌توانند انتخاب شوند تا شرط مسئله را برآورده کنند برابر $\frac{۹^n+۱}{۲}$ است. حکم برای حالت $n = ۱$ به سادگی و با اندکی چک‌کردن ساده به دست می‌آید.(حتی می‌شد $n = ۰$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت!) حال فرض کنید که حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد و ما می‌خواهیم حداکثر nتایی‌هایی مرتب با خاصیت مطلوب را بیابیم. اعضای S^n را با توجه به عضو اول آن‌ها می‌توان به ۹ دسته تقسیم کرد. اعضایی که عضو اول آن‌ها ۱ است را $A_۱$، آن‌هایی که عضو اول آن‌ها ۲ است را $A_۲$ و... واضح است که برای هر $i \in S$ تعداد اعضای A_i برابر $۹^{n-۱}$ است(برای هر جای‌گاه یکی از عناصر S باید انتخاب شود و بنابراین ۹ حالت داریم.) بنابراین تعداد عناصر S^n هم برابر ۹^n خواهد بود. حال دقت کنید که هر عنصر $A_۱$ را می‌توان با تغییر عضو اولش از یک به دو به عنصری از $A_۲$ تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین هر عضو از $A_۱$ را با یک عضو از $A_۲$ جفت می‌شود، به گونه‌ای که تنها در رقم اول تفاوت داشته باشند. توجه کنید

که از آن‌جا که دو شماره‌ی یک جفت در یک رقم و آن هم تنها یک واحد اختلاف دارند، نمی‌توانند هر دو جزء شماره‌های انتخابی باشند. بنابراین از هر جفت معرفی شده حداکثر یک عضو انتخاب می‌شود و در نتیجه تعداد اعضای انتخابی از $A_1 \cup A_2$ حداکثر برابر $\frac{|A_1|+|A_2|}{2} = 9^{n-1}$ است. به همین ترتیب تعداد اعضای انتخابی از $A_3 \cup A_4$، $A_5 \cup A_6$ و $A_7 \cup A_8$ هم حداکثر همین 9^{n-1} است. اما در مورد A_9 دقت کنید که رقم اول تمام اعضای A_9 یکسان است و بنابراین اگر اختلافی در دو عنصر انتخاب‌شده باشد، تفاوت در $n-1$ رقم بعدی است. دقت کنید که یک تناظر بین اعضای S^{n-1} و A_9 با اضافه کردن و یا برداشتن رقم ۹ از ابتدای شماره وجود دارد. بنابراین طبق فرض استقرا حداکثر $\frac{9^{n-1}+1}{2}$تا از اعضای A_9 را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین در نهایت تعداد کل شماره‌های انتخابی حداکثر برابر است با:

$$9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + \frac{9^{n-1}+1}{2} = \frac{9 \times 9^{n-1}+1}{2} = \frac{9^n+1}{2}$$

بنابراین اثبات استقرا به پایان می‌رسد. دقت کنید که اگر همه‌ی nتایی‌هایی که زوجیت مجموع ارقام‌شان با n یکی است را انتخاب کنیم تعدادشان برابر همین مقدار حداکثر است. از طرفی اگر دو شماره‌ی متفاوت با این خاصیت را در نظر بگیریم، نمی‌توانند تنها در یک شماره و آن هم یک واحد اختلاف داشته باشند، زیرا در این صورت زوجیت مجموع ارقام آن‌ها متفاوت خواهد شد. بنابراین می‌توان به تعداد حداکثر معرفی‌شده عضو انتخاب کرد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تنها یک راه (همین راه بالا) برای انتخاب $\frac{9^n+1}{2}$ شماره‌ی nرقمی با خاصیت خواسته شده وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. باز هم صحت گزاره در حالت $n=1$ با یک بررسی ساده قابل چک‌کردن است.(در این‌جا هم می‌توان $n=0$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت.) فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد. طبق بالا برای رسیدن به حداکثر باید از A_9، $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ عضو انتخاب شود که طبق فرض استقرا تنها به یک صورت امکان دارد.(یادآوری می‌کنیم که اعضای A_9 همان اعضای S^{n-1} هستند که یک رقم ۹ به ابتدای آن‌ها اضافه شده است.) دقت کنید که اعضایی که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضایی از A_9 هستند که مجموع ارقام آن‌ها زوجیت متفاوتی با $n-1$ و بنابراین زوجیت یکسانی با n دارد.(زیرا با اضافه شدن رقم ۹ به ابتدای شماره زوجیت مجموع رقم‌ها تغییر می‌کند.) حال مشابه جفت کردنی که در مورد اعضای A_1 و A_2 در بالا اتفاق افتاد می‌توان اعضای A_8 و A_9 را هم با یک‌دیگر جفت کرد، به گونه‌ای که اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. برای رسیدن به حداکثر بالا باید از هر جفت دقیقاً یک عضو انتخاب شود. اما در $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از جفت‌ها شماره‌ای که رقم اولش ۹ بود انتخاب شده است. بنابراین از مابقی زوج‌ها باید عنصری از A_8 انتخاب شود که باز هم دارای این خاصیت است که زوجیت مجموع ارقامش با n یکی است. در ادامه اعضای A_8 و A_7 را با هم جفت می‌کنیم و استدلال قبلی را این بار برای این دو تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این استدلال تا رسیدن به A_1 می‌بینیم که همه‌ی اعداد انتخاب‌شده باید به صورت مثالی که گفته شد باشند و بنابراین یک راه یکتا برای انتخاب این تعداد شماره وجود دارد.

۶. ابتدا باید این فرض را به صورت مسئله اضافه کرد که زاویه‌ی $\angle B$ قائمه نیست!

با استفاده از روابط مربوط به قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره‌ی محیطی ABC می‌فهمیم $R^2 - OT^2 = TA.TB$ که R شعاع دایره است. (این نتیجه را می‌شد با استفاده از رابطه‌ی استوارت در مثلث OAB و

قاطع OT هم به دست آورد.) با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزایه‌ی ATH و BTH می‌توان نتیجه گرفت که $TA.TB = TH^۲$ و لذا:

$$OT^۲ = R^۲ - TH^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle B)$$

با استدلال‌های کاملاً مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle C)$. دقت کنید که تا کنون از فرض $AC = ۲OT$ استفاده نکرده‌ایم. حال اگر این رابطه برقرار باشد، داریم:

$$OT = \frac{۱}{۲}AC = R.\sin(\angle B) \Rightarrow R^۲\sin^۲(\angle B) = R^۲ - AH^۲\cos^۲(\angle B) \Rightarrow R^۲ = AH^۲$$

پس طول ارتفاع AH برابر طول شعاع دایره یعنی R است.(دقت کنید که در این‌جا از قائمه نبودن $\angle B$ و در نتیجه صفر نبودن کسینوسش استفاده کردیم.) حال اگر روابط مشابهی را برای پاره‌خط OT' بنویسیم حکم نتیجه می‌شود:

$$(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle C) = R^۲(۱ - \cos^۲(\angle C)) = R^۲.\sin^۲\angle C$$
$$\Rightarrow \quad OT' = R.\sin(\angle C) = \tfrac{۱}{۲} \times ۲R.\sin(\angle C) = \tfrac{۱}{۲}AB$$

۲۳.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

۱. دقت کنید:

$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c &= \tfrac{x(1+x)}{2}(a+b+c) - \tfrac{x(1-x)}{2}(a-b+c) + (1-x^2)c \\ &= \tfrac{x(1+x)}{2}p(+1) - \tfrac{x(1-x)}{2}p(-1) + (1-x^2)p(0) \end{aligned}$$

اگر $0 \leq x \leq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$|ax^2+bx+c| \leq \frac{x(1+x)}{2} + \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - (\frac{1}{2}-x)^2 \leq \frac{5}{4}$$

و اگر $-1 \leq x \leq 0$:

$$|ax^2+bx+c| \leq -\frac{x(1+x)}{2} - \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - (\frac{1}{2}+x)^2 \leq \frac{5}{4}$$

این نشان می‌دهد که برای هر x در بازه‌ی $[-1,1]$، $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$. ضمناً با توجه به این نابرابری‌ها تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

الف. $p(x) = \pm(x^2 - x - 1)$ در $x = +\frac{1}{2}$.

ب. $p(x) = \pm(x^2 + x - 1)$ در $x = -\frac{1}{2}$.

۲. فرض کنید a_1، a_2، a_3 و a_4 به ترتیب نمایان‌گر تعداد درختان سیب، درختان انار، درختان هلو و خانه‌های خالی باشند. دقت کنید که هر خانه‌ی خالی، هر درخت هلو و هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارند. هم‌چنین با توجه به تعداد سیب‌ها که a_1 است، حداکثر $4a_1$ زوج خانه‌ی هم‌سایه می‌توان یافت که یکی از آن‌ها درخت سیب باشد و دیگری درخت سیب نباشد. پس $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$. اگر شمارش مشابهی را برای تعداد زوج خانه‌های مجاوری که دقیقاً یکی از آن‌ها درخت انار و دیگری درخت هلو و یا خالی باشد انجام دهیم، می‌بینیم که هر خانه‌ی خالی و هر درخت هلو یک هم‌سایه‌ی انار دارد و از طرف دیگر با توجه به این که هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارد، حداکثر سه تا از هم‌سایه‌های یک درخت انار می‌توانند هلو و یا خالی باشند. در نتیجه حداکثر $3a_2$ زوج خانه‌ی مجاور با این خاصیت می‌توان یافت و لذا $3a_2 \geq a_3 + a_4$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $2a_3 \geq a_4$.

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2a_3 &\geq a_4 & &\Rightarrow\quad a_3 \geq \tfrac{a_4}{2} \\ 3a_2 &\geq a_3 + a_4 \geq \tfrac{a_4}{2} + a_4 = \tfrac{3}{2}a_4 & &\Rightarrow\quad a_2 \geq \tfrac{a_4}{2} \\ 4a_1 &\geq a_2 + a_3 + a_4 \geq \tfrac{a_4}{2} + \tfrac{a_4}{2} + a_4 = 2a_4 & &\Rightarrow\quad a_1 \geq \tfrac{a_4}{2} \end{aligned}$$

پس در کل با توجه به این که $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 50 \times 50 = 2500$ داریم:

$$2500 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{5}{2}a_4 \Rightarrow 1000 \geq a_4$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

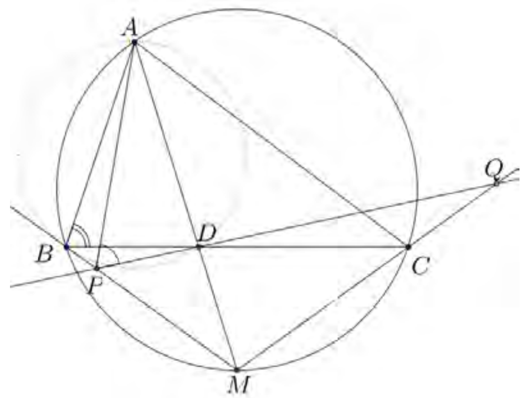
۳. با توجه به این که AM نیم‌ساز زاویه‌ی BAC است، داریم:

$$\angle DBM = \angle CBM = \angle MAC = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAM$$

پس دایره‌ی محیطی مثلث ABD در B بر BM مماس است و در نتیجه نقطه‌ی P که روی این خط مماس قرار دارد، نمی‌تواند درون دایره باشد. بنابراین $\angle APQ = \angle APD \leq \angle ABD = \angle B$.(اگر T را نقطه‌ی دیگر تقاطع PD با دایره‌ی محیطی ABD بگیریم، زاویه‌ی $\angle ATD$ که برابر $\angle ABD$ است زاویه‌ی خارجی مثلث APT خواهد بود و بنابراین از $\angle APD$ کم‌تر نیست.

با استدلال کاملاً مشابه می‌توان فهمید $\angle AQP \leq \angle C$. پس در کل:

$$\angle PAQ = ۱۸۰^\circ - \angle APQ - \angle AQP \geq ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle C = \angle A$$



۴. ادعا می‌کنیم این عمل برای عدد طبیعی $n > ۲$ امکان‌پذیر است، اگر و تنها اگر برای $n - ۲$ امکان‌پذیر باشد. فرض کنید برای بیان چهار جهت از چهار واژه‌ی "بالا"، "پایین"، "چپ" و "راست" استفاده کنیم. دقت کنید که اگر n ستون $n+۲$تایی بخواهند به $n+۲$ستون nتایی تبدیل شوند، نفرات سطر بالا باید حتماً یک واحد به پایین حرکت کنند و نفرات پایین باید حتماً یک واحد به بالا بروند. به همین ترتیب نفرات سمت راست باید یک قدم به سمت چپ بروند و نفرات سمت چپ یک واحد به سمت راست بیایند.(البته به غیر از نفر بالایی و پایینی این ستون‌ها که در ستون بالا و پایین هستند و حرکتشان توضیح داده شد.) حال به بقیه‌ی سربازها توجه کنید. آن‌ها شامل $n - ۲$ ستون، nتایی هستند که باید به n ستون $n - ۲$تایی تبدیل شوند. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. بنابراین با تکرار چندباره‌ی این ادعا می‌توان دید که اگر n عددی زوج باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۲$ قابل انجام باشد. هم‌چنین اگر n عددی فرد باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۱$ قابل انجام باشد. این کار برای $n = ۱$ قابل انجام نیست، زیرا دو سرباز کناری هر دو تنها می‌توانند به خانه‌ی وسط بیایند و این امکان ندارد. اما در مورد $n = ۲$ به سادگی می‌توان دید که این کار قابل انجام است. پس این کار تنها زمانی ممکن است که n زوج باشد.

۵. برای هر زوج $i < j$ از اعداد طبیعی متمایز، می‌دانیم که $a_j - a_i | a_j$ و با توجه به اکیداً صعودی و طبیعی بودن a_iها:

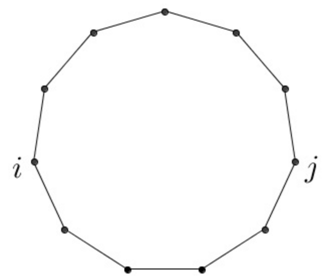
$$a_j > a_j - a_۱ > a_j - a_۲ > \cdots > a_j - a_i$$

از طرف دیگر همه‌ی جمله‌های بالا مقسوم‌علیه a_j هستند. بنابراین اگر $a_j > b_۱ > b_۲ > \cdots > b_k$ همه‌ی مقسوم‌علیه‌های a_j باشند، خواهیم داشت $a_j - a_i \leq b_i$. حال از آن‌جا که b_i، $i+۱$امین مقسوم‌علیه بزرگ

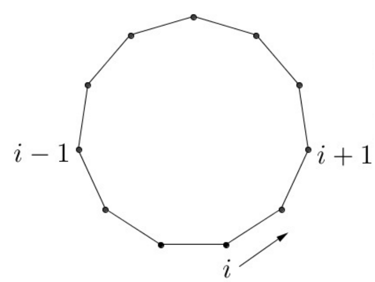
a_j است، $b_i \leq \frac{a_j}{i+1}$ و بنابراین در کل:

$$a_j - a_i \leq b_i \leq \frac{a_j}{i+1} \Rightarrow (i+1)(a_j - a_i) \leq a_j \Rightarrow i a_j \leq (i+1) a_i \leq j a_i$$

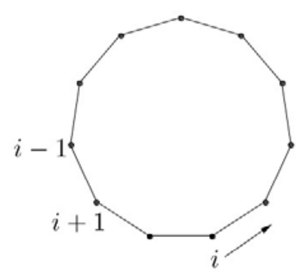
۶. ابتدا میز را به ۱۱ کمان برابر تقسیم کنید. حال اگر کارت‌های i و j در دو نقطه از جدول باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها را تعداد کمان‌های بین نقاط آن دو می‌گیریم(تعداد کمان‌های کم‌تر). به طور مثال در شکل زیر فاصله‌ی دو کارت i و j برابر ۵ است.



حال بعد از هر مرحله مجموع فاصله‌های کارت‌های با شماره‌های متوالی را محاسبه می‌کنیم.(دقت کنید که کارت ۱۱ با ۱ شماره‌ی متوالی دارند!) اگر محل کارت i در کمان کوچک‌تر بین $i+1$ و $i-1$ باشد، این مقدار تغییر نمی‌کند. (زیرا فاصله‌ی $i+1$ و $i-1$ تغییر نمی‌کند، اما در بین فاصله‌ی i و $i+1$ و همین‌طور i و $i-1$، از یکی یک واحد کم می‌شود و به دیگری یک واحد اضافه می‌گردد.) و در غیر این صورت دو واحد تغییر می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



مجموع فاصله تغییر نمی‌کند.



دو واحد تغییر می‌کند.

بنابراین زوجیت این مقدار همواره ثابت می‌ماند. در ابتدا این مقدار برابر ۱۱ است و اگر قرار باشد همه‌ی کارت‌ها در یک نقطه جمع شوند، این مقدار باید برابر صفر شود که امکان ندارد.

۲۴.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

۱. ابتدا دقت کنید که

$$(ab+۱)^۲+(a-b)^۲=a^۲b^۲+a^۲+b^۲+۱=(ab-۱)^۲+(a+b)^۲=(a^۲+۱)(b^۲+۱)$$

ادعا می‌کنیم که تحت شرایط مسئله $a^۲+۱$ و $b^۲+۱$ نسبت به هم اول هستند. زیرا اگر عامل اول مشترکی مثل p داشته باشند، تفاضل آن‌ها یعنی $a^۲-b^۲$ باید بر p بخش‌پذیر باشد. پس $p|a+b$ و یا $p|a-b$.

اگر $p|a+b$، با توجه به این که $(ab-۱)^۲+(a+b)^۲=(a^۲+۱)(b^۲+۱)$ بر p بخش‌پذیر است، باید $ab-۱$ هم بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a+b$ و $ab-۱$ که فرض سؤال است امکان ندارد. مشابه این حالت اگر $p|a-b$، با توجه به این که $(ab+۱)^۲+(a-b)^۲=(a^۲+۱)(b^۲+۱)$ هم بر p بخش‌پذیر است، باید $ab+۱$ بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه به نسبت به هم اول بودن $a-b$ و $ab+۱$ که فرض سؤال است امکان ندارد. پس در کل $a^۲+۱$ و $b^۲+۱$ نسبت به هم اول هستند و اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد هر دو مربع کامل هستند. یعنی عدد صحیح x یافت می‌شود که $x^۲=a^۲+۱$. این نتیجه می‌دهد که $(x-a)(x+a)=۱$ و چون $x-a$ و $x+a$ هر دو صحیح هستند باید هر دو برابر ۱ یا هر دو برابر ۱− باشند. پس در هر صورت با هم برابرند که این نتیجه می‌دهد a برابر صفر است که با طبیعی بودن a تناقض دارد. بنابراین این حاصل‌ضرب نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۲. فرض کنید k مثلث با مساحت یک در بین مثلث‌های با رئوس در بین این نقاط موجود باشد. یک زوج از این نقاط را به دل‌خواه در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر d باشد. هر نقطه‌ی دیگری که مثلث تولید شده توسط آن و دو نقطه‌ی در نظر گرفته‌شده برابر یک باشد، باید فاصله‌ای برابر $\frac{۲}{d}$ از خط شامل آن دو نقطه داشته باشد. پس این چنین نقاطی باید روی دو خط موازی(و به فاصله‌ی $\frac{۲}{d}$) با پاره‌خط شامل آن دو نقطه قرار داشته باشند و از آن‌جا که طبق فرض مسئله روی هیچ خطی سه نقطه از نقاط قرار ندارند تعداد چنین نقاطی حداکثر ۴ است(روی هر کدام از دو خط حداکثر دو نقطه). حال دقت کنید که اگر برای همه‌ی $\binom{n}{۲}$ زوج نقطه، تعداد این نقاط را بشماریم هر مثلث دقیقاً سه بار شمرده شده است. پس

$$۴\binom{n}{۲}\geq ۳k \Rightarrow \frac{۲}{۳}(n^۲-n)\geq k$$

و به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳. فرض کنید امتداد پاره‌خط PD که محور اصلی دو دایره است، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی N قطع کند. چهارضلعی $BDPC$ محاطی است و در نتیجه $\angle BDC=\angle BPC$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle DPM=\angle BPC$ یا معادلاً $\angle DPB=\angle MPC$. نقطه‌ی N روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، بنابراین قوت آن نسبت به دو دایره برابر است:

$$NA^۲=NB^۲\Rightarrow NA=NB$$

حال داریم:

$$\angle PBC = \angle PDC = \frac{۱}{۲}\widehat{ADP} = \angle PAB$$

$$\angle PCB = \frac{۱}{۲}\widehat{PDB} = \angle PBA$$

پس مثلث‌های PCBو PBA متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌ی بین میانه و ضلع متناظر آن‌ها با هم برابر است. حال دقت کنید که PM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث PBC و PN میانه‌ی ضلع AB در مثلث PAB است و لذا $\angle DPB = \angle NPB = \angle MPC$ و این همان حکمی است که قصد اثبات آن را داشتیم.

۴. راه‌حل اول. به برهان خلف فرض کنید α یک ریشه‌ی حقیقی معادله باشد که $|\alpha| \leq ۱$. بنابراین:

$$P(\alpha) = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + b\alpha^۲ + c\alpha + d = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + c\alpha = -(b\alpha^۲ + d)$$

$$\Rightarrow |\alpha||a\alpha^۲ + c| = |b\alpha^۲ + d| \Rightarrow |a\alpha^۲ + c| \geq |b\alpha^۲ + d| \geq b\alpha^۲ + d$$

حال دقت کنید که بیش‌ترین مقداری که تابع $f(x)|ax + c|$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ می‌پذیرد، به ازای یکی از مقادیر انتهایی بازه است. و به عبارتی $f(x) \leq \max\{f(۰), f(۱)\} = \max\{|c|, |a + c|\}$. پس:

$$|a\alpha^۲ + c| \leq \max\{|c|, |a + c|\}$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت که تابع خطی $g(x) = bx + d$ نیز کم‌ترین مقدار خود را در یکی از نقاط انتهایی می‌پذیرد. پس:

$$b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

حال بنابر رابطه‌های بالا داریم:

$$\max\{|c|, |a + c|\} \geq |a\alpha^۲ + c| \geq b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

در نتیجه باید $\max\{|c|, |a + c|\} \geq \min\{d, b + d\}$ که با فرض مسئله در تناقض است، پس چنین αای وجود ندارد.

راه‌حل دوم. دقت کنید که

$$P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ + c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$$

اگر $x \notin \{-۱, ۰, ۱\}$، ثابت می‌کنیم:

الف. $(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$

ب. $c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$

برای اثبات ادعای الف، می‌دانیم که $۰ < |x| < ۱$، پس

$$(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ = x^۲((a + c)x + (b + d))$$

حال دقت کنید که:

$$b + d > |a + c \geq x(a + c)| \geq\Rightarrow (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$$

برای اثبات ادعای ب دقت کنید که $۱ - x^۲ > ۰$ و در نتیجه:

$$d > |c| > |xc| \geq -xc \Rightarrow cx + d > ۰ \Rightarrow (۱ - x^۲)(cx + d) > ۰ \Rightarrow c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲) > ۰$$

حال با جمع زدن رابطه‌های الف و ب به این نتیجه می‌رسیم که $P(x)$ ریشه‌ای در $[-1,1]$ ندارد، مگر احتمالاً در ۰، ۱+ و یا ۱− که این سه عدد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$P(0) = d > |c| \geq 0$$
$$b + d > |a+c| \Rightarrow b + d > a + c \Rightarrow P(-1) > 0$$
$$b + d > |a+c| \Rightarrow b + d > -a - c \Rightarrow P(1) > 0$$

پس این نقاط هم ریشه‌ی $P(x)$ نیستند و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۵. زاویه‌ی $\angle BCT$ زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین BCE با زاویه‌ی خارجی $\angle ABC$ است، پس $\angle BCT = \frac{1}{2}\angle ABC$ و به طور مشابه $\angle CBT = \frac{1}{2}ACB$. پس:

$$\angle CTF = \angle BCT + \angle CBT = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 60^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $ABTC$ محاطی است و در نتیجه $\angle EBF = \angle ACE = \angle AKE$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ABF = 180^\circ - \angle EBF = 180^\circ - \angle AKE = \angle AKF$. پس چهارضلعی $ABKF$ محاطی است.
حال داریم که $\angle EBK = \angle CFK$ و $\angle BEK = \angle KCF$ و $BE = CF$، پس مثلث‌های KEB و KCF هم‌نهشت هستند و لذا $KE = KC$. به عنوان نتیجه دو کمان EK و KC برابر هستند و AK نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ خواهد بود.

۶. فرض کنید برای عدد طبیعی $2 \leq i \leq n$، منظور از A_i مجموعه‌ی کلاس‌های iنفره باشد. نشان می‌دهیم که $|A_i| \leq \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$. طبق فرض هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از دانش‌آموزان حداکثر در یک کلاس از کلاس‌های A_i می‌توانند با هم شرکت کنند، پس به عبارتی $\binom{n}{2} \geq |A_i|\binom{i}{2}$. پس $|A_i| \leq \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$.
حال می‌دانیم که

$$m = |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_n|$$

در نهایت با جای‌گذاری نامساوی به دست آمده در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m &\leq n(n-1)\left(\frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}\right) \\ &= n(n-1)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n(n-1)(1 - \frac{1}{n}) = (n-1)^2 \end{aligned}$$

و در نتیجه اثبات حکم به پایان می‌رسد.

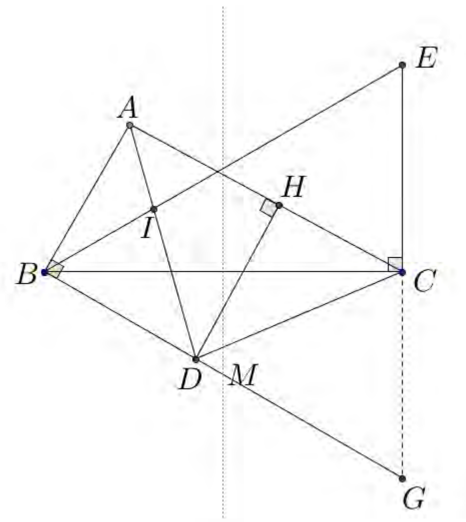
۲۵.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

۱. راه‌حل اول. طبق اصل لانه‌کبوتری از ۱۳۹۰ مورچه، لااقل ۶۹۵ مورچه یک طرف خط مفروض قرار دارند. فرض کنید این طرف بالای خط باشد. در ادامه تنها آن مورچه‌هایی را درنظر می‌گیریم که در بالای خط قرار دارند.
محور x را در جهت خط و محور y را عمود بر آن انتخاب می کنیم و فرض کنید که (x_i, y_i) نمایش‌گر مختصات سر یک مورچه در بالای محور باشد. در این صورت برای دو مورچه‌ی مختلف i و j داریم که:

$$(x_i - x_j)^۲ + (y_i - y_j)^۲ \geq ۲^۲ = ۴ \Rightarrow (x_i - x_j)^۲ \geq ۴ - (y_i - y_j)^۲ \geq ۳$$

لذا برای هر دو مورچه‌ای در بالای خط داریم که $x_i - x_j \geq \sqrt{۳}$ پس اگر فرض کنیم که مورچه‌ها بر حسب مختصه x مرتب شده‌اند، یعنی: $x_۱ < x_۲ < x_۳ < \ldots < x_{۶۹۵}$ داریم که فاصله‌ی هر دو عضو متوالی از دنباله‌ی فوق لااقل $\sqrt{۳}$است پس $x_{۶۹۵} - x_۱ \geq \sqrt{۳} \times ۶۹۴ > ۱۲۰۰$ در نتیجه این دو مورچه در راستایx بیش از ۱۲ متر فاصله دارند پس کلاً فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۲ متر است.
راه حل دوم. اگر به مرکز سر هر مورچه دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر رسم کنیم، فرض مسئله معادل این می‌شود که هیچ دو دایره‌ای هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند و همگی خط مورد نظر را قطع می‌کنند(چرا؟) هم‌چنین این که همه‌ی دایره‌ها خط مورد نظر را قطع می‌کنند نتیجه می‌دهد که همه‌ی دایره‌ها به کلی داخل نواری به پهنای ۴ به مرکزیت خط قرار می‌گیرند.
با فرض خلف اگر فرض کنیم که سر همه‌ی مورچه‌ها درون طول ۱۰۰۰ سانتی‌متر قرار می گیرد می توان نتیجه گرفت که طول ۱۰۰۲ از نوار مورد نظر وجود دارد که همه دایره‌ها به کلی درون آن باشند. اما مساحت این ناحیه ۴۰۰۸ سانتی‌متر مربع است که از مجموع مساحت دایره‌های درون این ناحیه ($۱۳۹۰\pi \approx ۴۳۶۷$) کم‌تر است و این تناقض است.
توضیح: راه‌حل‌های دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد که کران‌های به‌تری نیز می‌دهد.

۲. راه‌حل اول. مطابق شکل G را قرینه‌ی نقطه‌ی E نسبت به ضلع BC بگیرید. در این صورت BEG یک مثلث متساوی‌الساقین است($BE = BG$) که یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد($\angle EBG = ۹۰^\circ - \frac{\angle ABC}{۲} = ۶۰^\circ$). پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر M را وسط ضلع BG از این مثلث بگیریم با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین میانه همان ارتفاع است، $EM \perp BG$ و در نتیجه $\angle BEM = ۳۰^\circ$. پس کافی است نشان دهیم که $BD \leq BM$. برای این منظور توجه کنید که نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle A$ است. پس اگر H پای عمود وارد از D بر AC باشد، $BD = DH$. اما از طرف دیگر با توجه به این که DH بر AC عمود است، $DH \leq DC$. پس در کل $BD \leq DC$. این نشان می‌دهد که D و B در یک طرف عمود منصف BC قرار دارند. اما می‌دانیم که عمود منصف BC، طبق قضیه‌ی تالس BG را در نقطه‌ی وسطش یعنی M قطع می‌کند. در نتیجه D روی پاره‌خط BM قرار دارد و لذا $DB \leq BM$ و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.



راه‌حل دوم. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC که در این‌جا محل تقاطع BEو AD است را مطابق معمول با I نمایش می‌دهیم. α را برابر $\frac{1}{2}\angle BAC$ بگیرید. در این صورت داریم:

$$\angle IBD = ۹۰^\circ - \angle IBA = ۹۰^\circ - \frac{\angle CBA}{۲} = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$
$$\angle CEB = ۹۰^\circ - \angle CBE = ۹۰^\circ - \frac{\angle CBA}{۲} = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و BED، $\angle CEB = \angle EBD = ۶۰^\circ$ و BE ضلع مشترک هر دو است. از آن‌جا که $\angle EBC = ۳۰^\circ$ است، کافی است نشان دهیم که $BD \leq CE$ ولی می‌دانیم که $\tan\alpha = \frac{BD}{AB}$ و $\frac{EC}{BC} = \tan(۳۰^\circ)$. پس

$$\begin{aligned}
BD \leq CE &\Leftrightarrow AB\tan\alpha \leq BC\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \frac{AB}{BC}.\tan\alpha \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \tan\alpha\frac{\sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha)}{\sin(۲\alpha)} \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha)}{۲\sin\alpha.\cos\alpha} \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha) \leq ۲\cos^۲\alpha.\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \sin ۱۲۰^\circ.\cos(۲\alpha) - \sin ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq (۱ + \cos(۲\alpha))\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow (\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ
\end{aligned}$$

حال برای نشان دادن این حکم معادل آخر از نامساوی کوشی‌شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&((\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ)^۲ \\
\leq\ &((\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ)^۲ \\
=\ &(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ + (\frac{-۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} = \tan^۲(۳۰^\circ)
\end{aligned}$$

۳. ابتدا نشان می‌دهیم که این دنباله اکیداً صعودی است. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که برای یک عدد طبیعی i، $a_i = a_{i+۱}$. حال برای یک عدد اول بزرگ مثل p، j را برابر $p - i$ قرار دهید. در این صورت $i + j$ اول است و تنها دو مقسوم‌علیه دارد. پس $a_i + a_j$ هم تنها دو مقسوم‌علیه دارد و در

نتیجه اول است. اما $a_{i+1}+a_j=a_i+a_j$ و لذا $a_{i+1}+a_j$ هم اول بوده و در نتیجه دو مقسوم‌علیه دارد. پس $i+j+1=p+1$ هم اول است که امکان ندارد.
حال i و j را برابر 2^{p-2} که p یک عدد اول است قرار دهید. در این صورت $i+j=2^{p-1}$، p مقسوم‌علیه دارد. پس $2a_i$ هم باید p مقسوم‌علیه داشته باشد. حال اگر تجزیه‌ی $2a_i$ به عوامل اول به صورت $2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=p$$

پس تنها یکی از α_i+1ها می‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد و آن‌هم ناچاراً α_1+1 است. پس $\alpha_1=p-1$ و در نتیجه $a_i=a_{2^{p-2}}=2^{p-2}$. حال دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح داریم که در بی‌نهایت عدد صحیح مثل k، $a_k=k$ شده است. در این صورت این دنباله مجبور است برای هر عددی این خاصیت را داشته باشد. پس تنها دنباله‌ای که در این خاصیت صدق می‌کند دنباله‌ی اعداد طبیعی است.

۴. فرض کنید اعداد حقیقی $a_1,a_2,\ldots,a_n$ شرط مسئله را برآورده کنند. در این صورت

$$20=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n$$

پس $n\geq 21$. می‌خواهیم نشان دهیم که $n=22$ جواب است. برای این منظور فرض کنید

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{21}$$

تعدادی عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1,1)$ باشند که $a_1+a_2+\cdots+a_{21}=0$ و $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=20$. حال دقت کنید که $a_1\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{21}}{21}\leq a_{21}$. پس $a_1\leq 0\leq a_{21}$. از طرفی با توجه به این که ۲۱ کوچک‌ترین عدد ممکن با این خاصیت است هیچ‌کدام از a_iها نمی‌توانند صفر باشند. بنابراین عدد طبیعی مشخص k وجود دارد که

$$-1<a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k<0<a_{k+1}\leq\cdots\leq a_{21}<1$$

اگر $k\leq 10$، آن‌گاه برای هر $k+1\leq i\leq 21$ باید $0<a_i<1$ باشد و در نتیجه $0<a_i^2<a_i$. حال داریم:

$$\begin{aligned}20 &= a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=(a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}^2+\cdots+a_{21}^2)\\&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}+\cdots+a_{21})\\&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(-a_1-a_2-\cdots-a_k)\\&< 2k\leq 20\end{aligned}$$

که یک تناقض است. اگر هم $k\geq 11$، با در نظر گرفتن دنباله‌ی $-a_i$ به جای a_i و تکرار استدلال بالا به تناقض می‌رسیم. پس n نمی‌تواند برابر ۲۱ باشد و لذا $n\geq 22$. برای $n=22$ هم دنباله‌ی زیر شرایط خواسته شده را دارد.

$$a_1=a_2=\cdots=a_{11}=-a_{12}=-a_{13}=\cdots=-a_{22}=\sqrt{\frac{11}{10}}$$

پس پاسخ مسئله ۲۲ است.

۵. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که حداکثر تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان برابر $2n-1$ است. برای این تعداد روز اگر رنگ‌های مختلف را با شماره‌های $1,2,\dots,n$ نمایش دهیم، دنباله‌ی زیر از رنگ‌ها که طول آن برابر $2n-1$ است به وضوح خاصیت خواسته شده را دارد.

$$(1,2,\dots,n-1,n,n-1,\dots,1)$$

در حالت $n=1$ حکم کاملاً بدیهی است. حال فرض کنید که حکم برای اعداد کم‌تر از n درست باشد و می‌خواهیم حکم را در حالت n نتیجه بگیریم.
فرض کنید روز اول رنگین‌کمان R باشد و در k روز با شماره‌های $R_1,R_2,\dots,R_k$ این رنگ را داشته است.(طبیعتاً $R_1=1$ است!)
حال هر کدام از بازه‌های (R_1,R_2)، (R_2,R_3)،...، (R_{k-1},R_k) و $(R_k,\dots)$ را در نظر بگیرید.(منظور از بازه‌ی (R_i,R_{i+1}) روزهای بین روز R_iام و R_{i+1}ام است.) اگر پرنده در روز در دو بازه‌ی مختلف دارای یک رنگ باشد، فرض مسئله در مورد این دو روز و سر و ته بازه‌ی شامل روز اول به هم می‌خورد. بنابراین بازه‌های مختلف رنگ‌های مختلف دارند.
C_i را برابر تعداد رنگ‌هایی بگیرید که رنگین کمان در بازه‌ای که از روز R_i شروع می‌شود به خود می‌گیرد. طبق نتیجه‌ی بالا باید $\sum_{i=1}^{k} C_i = n-1$ باشد. با توجه به این که $C_i<n$ است، طبق فرض استقرا تعداد روزهای بازه‌ای که از R_i شروع می‌شود حداکثر برابر $2C_i-1$ است. تنها دقت کنید که تعداد روزهای بازه‌ی آخر ممکن است برابر صفر باشد که در این صورت تعداد کل روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k+\sum_{i=1}^{k-1}(2C_i-1)=2n-1$ است. در غیر این صورت که این تعداد ناصفر باشد تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k+\sum_{i=1}^{k}(2C_i-1)=2n-2<2n-1$ است.

۶. فرض کنید که M وسط ضلع BC و a عمود منصف این ضلع باشد. X را نقطه‌ی تقاطع a و l بگیرید و به علاوه فرض کنید $\angle MXE=\alpha$،$\angle ABC=\beta$ و $\angle ACB=\gamma$ باشد. Y را نقطه‌ای روی پاره‌خط DE بگیرید که $EY=EC$ و Z قرینه‌ی نقطه‌ی Y نسبت به عمود منصف BC باشد.(پس Z روی خط l' است.) در این صورت به وضوح چهارضلعی $BCYZ$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و در نتیجه یک چهارضلعی محاطی است. K را نقطه‌ی تقاطع دوم (غیر از Z) دایره‌ی محیطی این چهارضلعی با خط l' بگیرید.(اثبات در حالتی که این دایره بر l' مماس باشد کاملاً مشابه است. در این حالت K همان Z خواهد بود.) ادعا می‌کنیم که با این شرایط $D'B=D'K$ است.

$$\angle CED = 360^\circ - (\angle MCE + \angle CMX + \angle MXE) = 360^\circ - (180^\circ - \gamma + 90^\circ + \alpha) = 90^\circ + \gamma - \alpha$$
$$\Rightarrow \quad \angle CYE = \frac{180^\circ - \angle CED}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - \gamma + \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

حال از آن‌جا که مثلث ZXY متساوی‌الساقین است، $\angle XYZ = 90^\circ - \angle MXE = 90^\circ - \alpha \ (2)$.

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \angle CYZ = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (45^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

چهارضلعی $CYKZ$ با توجه به نحوه‌ای که K را معرفی کردیم محاطی است و در نتیجه $\angle CKZ =$

$\angle CYZ = ۴۵^\circ + \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$. پس

$$\angle CKE' = ۱۸۰^\circ - \angle CKZ = ۱۳۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} - \frac{\alpha}{۲} \qquad (۳)$$

$$\begin{aligned}\angle CE'K &= ۳۶۰^\circ - (\angle MCE' + \angle XMC + \angle MXE') \\ &= ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \gamma + ۹۰^\circ + ۱۸۰^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - ۹۰^\circ \qquad (۴)\end{aligned}$$

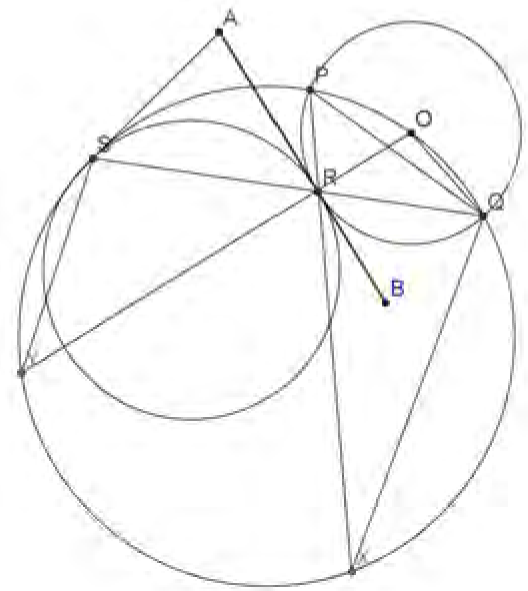
در نتیجه:

$$\begin{aligned}\angle KCE\prime &= ۱۸۰^\circ - (\angle CE\prime K + \angle CKE\prime) \overset{(۳),(۴)}{=} ۱۸۰^\circ - (\alpha + \gamma - ۹۰^\circ + ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲}) \\ &= ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲} = \angle CKE' \\ &\Rightarrow \angle KCE' = \angle CKE'\end{aligned}$$

پس نشان دادیم که مثلث $CE'K$ یک مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه $CE' = KE'$. به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD' = KD'$ و بنابراین در کل $D'E' = D'K + KE' = BD' + CE'$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۱. برای اثبات موازی بودن QX و SY باید ثابت کنیم کمان‌های XY و SPQ روی دایره‌ی C_1 برابرند. برای این کار مماس بر دایره‌ی C_1 در نقطه S را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با مماس مشترک دایره‌های C_2 و C_3 در نقطه‌ی R را A می‌نامیم. حال با توجه به شکل روابط زیر برقرار است:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \angle ASQ & = & \widehat{SPQ} & = & \widehat{SR} & & \\ \angle ASQ & = & \angle ARS & = & \angle BRQ & = & \widehat{RQ} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{SPQ} = \widehat{SR} = \widehat{RQ} \quad (۱)$$



هم‌چنین روابط زیر نیز برقرار است:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{1}{2}\widehat{QX} & = & \angle QPX & = & \frac{1}{2}\widehat{RQ} & = & \frac{1}{2}\angle YOQ & = & \frac{1}{4}\widehat{YXQ} & = & \frac{1}{4}(\widehat{QX}+\widehat{XY}) \\ & \Rightarrow & \frac{1}{4}\widehat{QX} & = & \frac{1}{4}\widehat{XY} & \Rightarrow & \widehat{QX} & = & \widehat{XY} & & (۳) \\ & \overset{(۲),(۳)}{\Rightarrow} & \widehat{QX} & = & \widehat{XY} & = & \widehat{RQ} & & & & (۴) \end{array}$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۴) داریم: $\widehat{SPQ} = \widehat{RQ} = \widehat{XY}$ و حکم ثابت می‌شود.

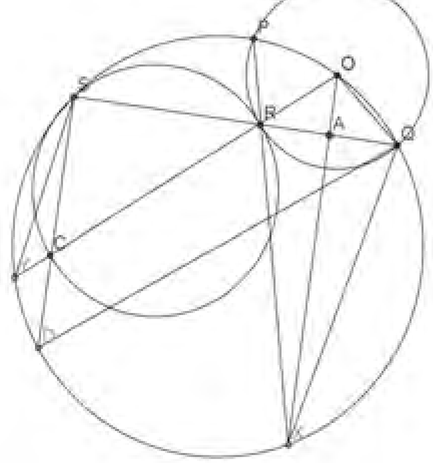
راه‌حل دوم. داریم

$$OP = OQ \Rightarrow \widehat{OP} = \widehat{OQ}$$

$$OP = OR \Rightarrow \angle OPR = \angle ORP$$

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{OP}+\widehat{XY}) & = & \frac{1}{2}(\widehat{OQ}+\widehat{XQ} \Rightarrow \widehat{XQ} & = & \widehat{XY} \\ \Rightarrow \angle ROX = \angle QOX & \overset{OQ=OR}{\Rightarrow} & \angle OAR = ۹۰^\circ & & (۱) \end{array}$$

هم‌چنین چون C_2 و C_3 در نقطه R مماس هستند، OR از مرکز دایره C_3 نیز عبور می‌کند. پس مرکز دایره C_3 روی خط RC واقع است (C محل برخورد RY و دایره C_3 است) در نتیجه (۲) $\angle CSR = ۹۰$.



از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود(۳) $SD \parallel OX$. هم‌چنین با توجه به این‌که S مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۲$ است، پس DQ و YQ موازی هستند (Dمحل برخورد امتداد SC با دایره $C_۱$ است.) در نتیجه $\widehat{YD} = \widehat{OQ}$. پس (۴) $\angle YSD = \angle QXO$ حال با توجه به (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که QX و SY نیز موازی‌اند و حکم ثابت می‌شود.

۲. آرایشی از اعداد ۱ تا n با خاصیت مطلوب را یک آرایش مجاز می‌نامیم. آرایش‌هایی را که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض می‌کنیم. برای $n = ۳$ فقط دو آرایش مجاز و برای $n = ۴$ نیز فقط دو آرایش مجاز (اعداد به ترتیب ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) وجود دارد. حال با استقرا ثابت می‌کنیم که برای اعداد زوج بزرگ‌تر از ۳ دو آرایش و برای اعداد فرد بزرگ‌تر از ۳، چهار آرایش مجاز وجود دارد.
لم. در یک آرایش مجازِ ۱ تا n، مجموعِ دو عدد ِ مجاورِ n برابر با n است و اگر n را حذف کنیم به آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$ می‌رسیم. برعکس، اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید. اثبات. اگر دو عدد مجاور n، a و b باشند، داریم $n|a+b \quad , \quad a+b \leq ۲n - ۳$ پس: $a+b=n$ حال اگر دو عدد مجاور a و b (به غیر از n) به ترتیب x و y باشند (یعنی حالت $x\ a\ n\ b\ y$):

$$a|x+n \Leftrightarrow a|x+a+b \Leftrightarrow a|x+b$$

$$b|y+n \Leftrightarrow b|y+a+b \Leftrightarrow b|y+a$$

پس با حذف n به آرایش مطلوبی از اعداد ۱،۲،...،$n - ۱$ می‌رسیم و برعکس اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

حال فرض می‌کنیم حکم استقرا برای عدد زوج n درست باشد، سپس حکم را برای $n + ۱$ و $n + ۲$ ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا، تنها دو آرایش مجاز برای ۱ تا n وجود دارد که عبارت‌اند از چینش اعداد ۱ تا n به طور ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد. حال باید $n + ۱$ را بین دو عدد مجاور از این دو آرایش

که مجموعشان $n+۱$ است، قرار دهیم. به راحتی معلوم می‌شود که این دو عدد فقط می‌توانند $\{۱,n\}$ یا $\{\frac{n}{۲},\frac{n}{۲}+۱\}$ باشند. پس برای عدد فرد $n+۱$ چهار حالت صحیح وجود دارد که در دوتای آن اعداد به ترتیب دور دایره قرار گرفته‌اند (این دو حالت را حالات الف نام می‌گذاریم) و در دو حالت دیگر(که با حالات ب نام‌گذاری می‌کنیم) غیر از $n+۱$ بقیه اعداد به ترتیب قرار گرفته‌اند. حال می‌خواهیم جواب مسئله را برای عدد زوج $n+۲$ بدست بیاوریم. باید عدد $n+۲$ را بین دو عدد مجاور از آرایش‌های مجاز اعداد $۱,۲,\dots,n+۱$ قرار دهیم، که مجموع آن‌ها $n+۲$ باشد. به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های الف $n+۲$ فقط می‌تواند بین ۱ و $n+۱$ قرار گیرد. هم‌چنین به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های ب مجموع هیچ دو عدد مجاوری $n+۲$ نمی‌شود. بنابراین برای عدد زوج $n+۲$ نیزفقط دو آرایش مجاز وجود دارد. پس گام استقرا اثبات شد و اثبات کامل است.

راه‌حل دوم. حل مسئله را با چند لم آغاز می‌کنیم:

لم. هیچ دو عدد زوجی در دایره کنار هم نیستند.

اثبات. واضح است اگر اعداد $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $\dots$ a_n به ترتیب دور دایره چیده‌شده باشند و $a_۱$ و $a_۲$ زوج باشند آن‌گاه $a_۳$ هم زوج است زیرا می دانیم $a_۲|a_۳+a_۱$ و با تکرار این روند همه‌ی اعداد زوج می‌شوند که تناقض است.

$\square$

لم. اگر n زوج باشد اعداد دور دایره یکی در میان زوج هستند و اگر n فرد باشد تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی جفت‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

اثبات. طبق لم ۱ اگر n زوج باشد چون تعداد اعداد زوج و فرد برابر است و هیچ دو عدد زوجی کنار هم نیستند پس اعداد یکی در میان زوج و فرد هستند و اگر n فرد باشد چون تعداد اعداد فرد یکی بیشتر است پس تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی زوج‌های کنار هم زوج و فرد هستند. $\square$

حال برای اعداد زوج ثابت می‌کنیم که تنها یک چینش متوالی (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد ۱ تا n به همین ترتیب دور دایره چیده شده‌اند.

عدد $n-۱$ فرد است پس طبق لم ۲ اعداد¨ مجاور آن زوج هستند. پس مجموع دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n-۱$ باشد پس باید مجموعِ آن‌ها برابر $۲n-۲$ باشد (بیش‌تر از $۲n-۲$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعداد¨ باقی‌مانده n و $n-۲$ هستند که مجموعشان $۲n-۲$ است). پس قطعاً اعداد¨ مجاور $n-۱$ باید n و $n-۲$ باشند. پس اعداد n و $n-۱$ و $n-۲$ به شکل متوالی قرار دارند. حال با استقرا نشان می‌دهیم همه‌ی اعداد به شکل متوالی قرار دارند. فرض کنید اعداد n و $n-۱$ و $\dots$ $n-k$ به طور متوالی قرار گرفته اند ($n-۲>k>۲$) نشان می دهیم عدد بعدی $n-k-۱$ است. فرض کنید عدد بعدی x

باشد داریم $n-k|x+n-k+۱$ که نشان می‌دهد $n-k|x+۱$. حال چون x کم‌تر از $n-k$ است تنها عدد ممکن $n-k-۱$ است که نشان می‌دهد عدد بعدی $n-k-۱$ است که این روند متوالی بودن اعداد را اثبات می‌کند.

حال برای اعداد فرد $n > ۳$ ثابت می‌کنیم که تنها دو آرایش مجاز (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد حتماً باید به یکی از ترتیب‌های زیر باشند $۱,۲,\ldots,n$

$$۱,۲,\ldots \frac{n-۱}{۲}, n, \frac{n+۱}{۲}, \frac{n+۳}{۲}, \ldots, n-۱$$

لم. اگر n فرد باشد یکی از تنها دو عدد" فرد" متوالی عدد n است.

اثبات. مجموع اعداد مجاورِ n از $۲n$ کم‌تر است و چون باید مضربِ n باشد باید برابر n باشد ولی اگر اعداد مجاورِ n دو عدد" زوج باشند مجموع آن‌ها نمی‌تواند n شود چون n فرد است. پس یکی از دو عدد" فرد" متوالی عدد n است . اگر $n=۵$ حکم به راحتی اثبات می‌شود پس فرض می کنیم $n>۵$. حال به ادامه‌ی اثبات می پردازیم: عدد $n-۲$ فرد است پس طبق لم ۲ و لم ۳ هر دو عدد مجاورِ آن یا زوج هستند یا یکی از اعداد مجاور آن n است. اگر n مجاور $n-۲$ باشد مجاورِ دیگرِ $n-۲$ فقط می‌تواند $n-۴$ باشد چون مجموع مجاورهای $n-۲$ باید بر $n-۲$ بخش‌پذیر باشد و این مجموع حداکثر می‌تواند $۲n-۱$ باشد که چون $n>۵$، $۳n-۶ > ۲n-۱$ پس باید $۲n-۴$ باشد. پس n و $n-۲$ و $n-۴$ مجاور هستند ولی طبق لم ۲ امکان ندارد ۳ عدد فرد کنار هم باشند. پس مجاورهای $n-۲$ دو عدد زوج هستند. حال مانند اثبات برای اعداد زوج مجموعِ دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n-۲$ باشد پس قطعاً باید برابر $۲n-۴$ باشد (بیشتر از $۲n-۴$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعداد باقی‌مانده n و $n-۱$ هستند که مجموعشان $۲n-۱$ است که کمتر از $۳n-۶$ است). پس اعداد مجاور $n-۲$ باید $n-۱$ و $n-۳$ باشند.

تا این‌جا دیدیم که $n-۱$ و $n-۲$ و $n-۳$ متوالی هستند. حال اگر مجاور $n-۱$ باشد داریم $n-۱|x+n-۲$ پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: $x=n$. در این حالت مشابه اثبات اعداد زوج می‌توان نتیجه گرفت اعداد متوالی و به صورت ۱، ۲،...،n هستند.

حالت دوم: فرض کنید k بزرگ‌ترین عددی است که اعداد $n-۱$، $n-۲$، ... و $n-k$ به طور متوالی قرار گرفته‌اند ($۲ < k < n-۱$). نشان می‌دهیم $k=\frac{n-۱}{۲}$ و عدد بعدیِ آن n است. عدد بعدی را y بنامید. داریم$n-k|y+n-k+۱$ که نشان می‌دهد $n-k|y+۱$. از طرفی بنابر نحوه‌ی انتخابِ k، y با $n-k-۱$ برابر نیست و چون $n-k<y+۱$ پس $y=n$. حال اگر عدد دیگر مجاور n را z بگیریم داریم $n|z+(n-k)$. ادعا می‌کنیم $n-k \geq \frac{n+۱}{۲}$. زیرا در غیر این صورت z و $n-k$هر دو کمتر از $\frac{n}{۲}$ خواهند بود که با $n|z+(n-k)$ در تناقض است. پس $n-k \geq \frac{n+۱}{۲}$ و چون $n-k|n+۱$ پس $k=\frac{n-۱}{۲}$. حال چون مجموع اعداد" مجاور n همان n است روشن است که عدد دیگر مجاور n باید $\frac{n-۱}{۲}$ باشد. حال به طرز مشابه می‌توان ثابت کرد اعداد ۱ و ۲ و ... و $\frac{n-۳}{۲}$ و $\frac{n-۱}{۲}$ متوالی می‌آیند پس آرایشِ مورد نظر

$$۱,۲,\ldots \frac{n-۱}{۲}, n, \frac{n+۱}{۲}, \frac{n+۳}{۲}, \ldots, n-۱$$

است.

۳. راه‌حل اول. فرض کنید $t+1=q^\alpha s$ که q عددی اول است و $(s,q)=1$. (در واقع α بزرگ‌ترین توانی از است که را می‌شمارد).
حال $x_\circ$ را طوری انتخاب کنید که $x_\circ \equiv 1$ (به پیمانه‌ی $q^{\alpha+1}$) و $x_\circ > t$. قرار دهید $n=x_\circ^\alpha$. ادعا می۲کنیم این n جواب مسئله است.
توجه کنید برای هر i،

$$n^i+t\equiv 1+t\not\equiv 0 \text{ (به پیمانه ی } q^{\alpha+1}) \text{ ولی } n^i+t\equiv 1+t\equiv 0 \text{ (به پیمانه ی } q^\alpha)$$

فرض کنید به ازای i ای n^i+t توان کامل شود. (فرض خلف) در نتیجه rای وجود دارد که $r>1$ و $n^i+t=y^r$ و چون نمای عدد اول q در تجزیه ی n^i+t به عوامل اول برابر با α است، α بر r بخش‌پذیر است. در نتیجه $\alpha\geq 2$ و $y^r = n^i+t=(x_\circ^{i(\frac{\alpha}{r})})^r+t=z^r+t$. از همین تساوی نتیجه می‌شود که $y>z$. حال توجه کنید،

$$z^r+t<z^r+x_\circ\leq z^r+z\leq(z+1)^r\leq y^r=z^r+t$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و این nکار می کند.
دقت کنید در اثبات نابرابری سوم از بسط دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن،

$$(z+1)^r= z^r+rz^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}z^{r-2}+\ldots+rz+1 \geq z^r+z$$

(نابرابری بالا برای $r\geq 2$ درست است)
راه‌حل دوم. دو حالت در نظر بگیرید.
حالت اول. $t+1$ توان کامل نباشد. قرار دهید $n=t(t+1)^2+1$. ادعا می کنیم این n کار می‌کند. فرض کنید برای k ای n^k+t توان کامل شود. در نتیجه با تعریف $y=t(t+1)^2$،

$$(t(t+1)^2+1)^k+t= y^k+ky^{k-1}+\ldots+ky+t+1=(t+1)(b\,(t+1)+1)$$

(به ازای b مناسبی)
به وضوح $t+1$ و $b\,(t+1)+1$ نسبت به هم اول‌اند و ضربشان توان کامل است. پس بایستی هریک توان کامل باشند که خلاف فرض اولیه‌ی ما است.
حالت دوم. $t+1$ توان کامل باشد. قرار دهید $t+1=m^r$ که m توان کامل نیست. (برای این کار r را بیش‌ترین توان ممکن انتخاب کنید) قرار دهید $n_\circ=t(t+1)^2+1$ و $n= n_\circ^r$. همین n جواب مسئله است.
فرض کنید به ازای k,c,d ای $n^k+t=c^d$. مشابه روش کار در حالت اول نتیجه می‌گیریم $t+1$ توان d ام کامل است. پس با توجه به این که $t+1$ توان r ام کامل نیز هست و r بیش‌ترین نمای ممکن است، r بر d بخش‌پذیر است. پس $r=ld$ و

$$t=c^d- n^k= c^d- n_\circ^{kld}=(c-n_\circ)\left(c^{d-1}+c^{d-2}n_\circ^{kl}+\ldots+ n_\circ^{kl(d-1)}\right)\geq n_\circ>t$$

که تناقض است.

۴. الف) با استفاده از برهان خلف نشان می دهیم چنین زیر مجموعه‌هایی یافت نمی‌شود.
فرض کنید این‌طور نباشد و بتوان اعداد طبیعی را به زیرمجموعه های دو عضوی A_1، A_2، A_3، ... افراز کرد طوری که حاصل جمع اعضای A_i برابر $1391 + i$ باشد. اگر $A_i = \{a_i, b_i\}$ باشد آنگاه چون a_i و b_i اعداد طبیعی‌اند و $a_i + b_i = 1391 + i$ پس $a_i, b_i < 1391 + i$. داریم:

$$i \leq 1391 \Rightarrow a_i, b_i < 1391 + i \leq 1391 + 1391 = 2 \times 1391$$

پس همه‌ی اعضای A_1، A_2، A_3، ... ، A_{1391} از 2×1391 کمتر هستند، یعنی حداکثر $2 \times 1391 - 1$ عدد را می‌توان در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار داد که با فرض اولیه مبنی بر افراز به مجموعه‌های دوعضوی، که در نتیجه‌ی آن 2×1391 عدد در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار می‌گیرد، تناقض دارد. این تناقض نشان می‌دهد فرض اولیه نادرست بوده و اعداد طبیعی را نمی‌توان به زیرمجموعه‌های دوعضوی با شرایط خواسته‌شده‌ی مسئله افراز کرد.

ب) با ارائه‌ی روشی برای ساخت این مجموعه‌ها نشان می‌دهیم جواب مثبت است.
روش به این صورت است که در مرحله‌ی i–ام، a_i، کوچک‌ترین عددی که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای قرار نگرفته و $b_i = 1391 + i^2 - a_i$ را در مجموعه‌ی A_i قرار می‌دهیم. در مراحل زیر نشان می‌دهیم مجموعه‌های حاصل شرایط مسئله را داراست.
آ. همه ی اعداد طبیعی در حداقل یکی از این مجموعه‌ها قرار می گیرد، در غیر این صورت، فرض کنید a کوچک‌ترین عددی باشد که در هیچ مجموعه‌ای نیامده و در مرحله‌ی i–ام همه‌ی اعداد کوچک‌تر از a انتخاب شده باشند، در این صورت طبق روش فوق در مرحله i عدد a انتخاب می‌شود. پس فرض اولیه نادرست بوده و همه‌ی اعداد طبیعی در این مجموعه‌ها پوشانده می‌شوند.
بـ. در مراحل زیر ثابت می‌کنیم هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده و بدین ترتیب ثابت می‌شود خروجیِ این روش افرازی است که مورد نظر سوال است.
لم. $a_i \leq 2i - 1$.
اثبات. تا پیش از مرحله ی i–ام، $2i - 2$ عدد در مجموعه ها قرار گرفته‌اند، پس دست کم یکی از اعداد کمتر یا مساوی $2i - 1$ انتخاب نشده است در نتیجه $a_i \leq 2i - 1$.
۱. با توجه به اینکه در هر مرحله a_i کوچک‌ترین عددی است که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای نیامده پس a_i با هیچ‌کدام از $2i - 2$ عدد قبلی برابر نیست و هم‌چنین $a_i > a_j$ که $j < i$ باشد.

$$b_i = 1391 + i^2 - a_i \geq 1391 + (i-1)^2 > 2i - 1 \geq a_i$$

۲. اگر $i > j$ آن‌گاه:

$$b_i = 1391 + i^2 - a_i \geq 1391 + i^2 - 2i + 1 = 1391 + (i-1)^2 > b_j > a_j$$

به این ترتیب ثابت شده است که هیچ دو عدد در یک مجموعه یا در مجموعه‌های متفاوت با یک‌دیگر برابر نیستند در نتیجه هر مجموعه دقیقاً دو عضوی است و هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده است.

۵. ابتدا فرض کنید $Q(b,d) = P(0,b,0,d)$. در این صورت $Q(b,d) \geq 0$ اگر و تنها اگر چندجمله‌ای

x^4+bx^2+d دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و این مورد هم برقرار است اگر و تنها اگر x^2+bx+d دارای دو ریشه حقیقی نامنفی باشد.
(چرا که

$$x^2+bx+d=(x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow x^4+bx^2+d=(x^2-\alpha)(x^2-\beta)$$

و $x^2-\alpha$ به عوامل خطی تجزیه می‌شود اگر و تنها اگر $\alpha \geq 0$) حال ثابت می‌کنیم x^2+bx+d دارای دو ریشه‌ی حقیقی نامنفی است اگر وتنها اگر $b^2-4d \geq 0, b \leq 0, d \geq 0$.
فرض کنید $\alpha, \beta \geq 0$ ریشه‌های x^2+bx+d باشند، در این صورت:

$$x^2+bx+d=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

و بنابراین $b=-(\alpha+\beta) \leq 0, d=\alpha\beta \geq 0$ و چون چندجمله‌ای دارای ریشه بود پس $b^2-4d \geq 0$.
حال بر عکس فرض کنید $b^2-4d \geq 0, b \leq 0, d \geq 0$ بنابراین x^2+bx+dدارای دو ریشه‌ی حقیقی است فرض کنید این ریشه‌ها α, β باشند. در این صورت مانند قبل $b=-(\alpha+\beta), d=\alpha\beta$ حال $d \geq 0$ بنابراین α, βدارای علامت مخالف نیستند، بنابراین اگر $\alpha < 0$ آن‌گاه $\beta \leq 0$ و در نتیجه $b=-(\alpha+\beta) > 0$ که خلاف فرض ماست پس داریم$\alpha, \beta \geq 0$ و آن‌چه می‌خواستیم ثابت شد.
حال داریم

$$Q(b,d) \geq 0 \Leftrightarrow b^2-4d \geq 0, b \leq 0, d \geq 0 \qquad (1)$$

حال برای هر $b<0$ چندجمله‌ای تک متغیره‌ی $Q_b(y)$ که $Q_b(y)=Q(b,y)$ برای $0 \leq y \leq \frac{b^2}{4}$ نامنفی و برای $y<0$ منفی است و چون هر چندجمله‌ای تابعی پیوسته است پس $Q_b(0)=0$. در نتیجه چندجمله‌ای $L(b)=Q(b,0)$ برای هر $b<0$ برابر صفر شده است و این یعنی این چندجمله‌ای دارای بی‌نهایت ریشه است و بنابراین همه‌جا صفر است و این یعنی $L(1)=Q(1,0)=0$ بنابراین طبق (۱) باید داشته باشیم $1 \leq 0$. پس به تناقض رسیدیم پس حکم مسئله ثابت شد.

۶. راه‌حل اول. مثلث BDT متساوی‌الساقین به رأس B است. بنابراین داریم $\angle BDT = \frac{1}{2}\angle B$. به‌طور مشابه $\angle CDS = \frac{1}{2}\angle C$. بنابراین

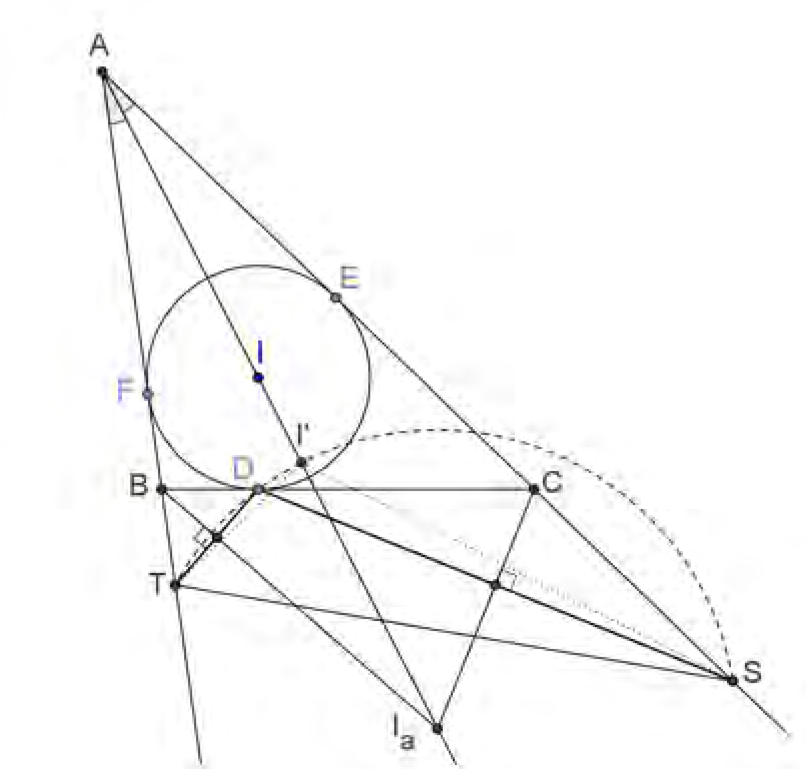
$$\angle TDS = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

اگر مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABC و ATS را به‌ترتیب I و I' بنامیم، خواهیم داشت:

$$I'TS = \tfrac{1}{2}\angle T, \quad \angle I'ST = \tfrac{1}{2}\angle S$$
$$\Rightarrow \angle TI'S = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\angle T - \tfrac{1}{2}\angle S = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle A.$$

بنابراین $\angle TDS = \angle TI'S$ و چون I' و D هردو یک طرف خط TS هستند، چهارضلعی $TDI'S$ محاطی است. مرکز دایره‌ی محیطی این چهارضلعی همان محل برخورد عمودمنصف‌های TD و SD است که همان نیم‌سازهای خارجی زوایای $\angle B$ و $\angle C$ از مثلث ABC هستند. پس مرکز این دایره همان مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC متناظر با رأس A است که آن را I_a می‌نامیم.
اگر دایره‌ی به مرکز I_a و شعاع I_aD را ω بنامیم، I' همان تقاطع ω با خط AI_a است. هم‌چنین I_a و

D در دو طرف TS قرار دارند (چون $\angle TDS > ۹۰^\circ$ و I_a مرکز دایره‌ی محیطی مثلث TDS است) در حالی که I'، D و I در یک طرف TS قرار دارند. پس I' روی نیم‌خط I_aI است که خط‌المرکزین دایره‌ی محاطی و ω است. پس برای اثبات این‌که I' داخل یا روی دایره‌ی محاطی است، کافی است ثابت کنیم $I_aI - r \leq I_aI' \leq I_aI + r$ که در آن r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است. اما $r = I_aD$ و $I_aI' = I_aD$. پس نامساوی‌های فوق تبدیل می‌شوند به $I_aI - ID \leq I_aD \leq I_aI + ID$ که همان نامساوی مثلث در مثلث I_aID است و حکم ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. فرض کنید E' نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS با ضلع AS باشد. با توجه به این که زاویه‌ی II' با ضلع AC برابر با $\frac{A}{۲}$ است، خواهیم داشت $EE' = II' \cos(\frac{A}{۲})$. پس کافی است ثابت کنیم $EE' \leq r\cos(\frac{A}{۲})$. می‌دانیم

$$AE = \tfrac{۱}{۲}(AB + AC - BC),$$

$$AE' = \tfrac{۱}{۲}(AT + AS - TS) = \tfrac{۱}{۲}\left((AB + BD) + (AC + CD) - TS\right).$$

توجه کنید که $AE' > AE$، زیرا دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC کاملاً داخل مثلث ATS است و بنابراین شعاع دایره‌ی محاطی داخلی ATS بیشتر از r است. بنابراین $EE' = BC - \frac{۱}{۲}TS$. پس کافی‌است ثابت کنیم $BC - \frac{۱}{۲}TS \leq r\cos\frac{A}{۲}$. اما اگر M را تقاطع EF با AI بگیریم، داریم

$$r\cos\frac{A}{۲} = IE \sin\angle MIE = EM = \frac{۱}{۲}EF.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $۲BC - TS \leq EF$. داریم $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = ۲\overrightarrow{BC}$ زیرا

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS})$$

و $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CS}=0$. بنابراین

$$2BC=\left|2\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{TS}\right|\leq\left|\overrightarrow{FE}\right|+\left|\overrightarrow{TS}\right|=FE+TS$$

و حکم ثابت می‌شود.

۲۷.۰ راه‌حل سؤالات مرحله دوم سی و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

۱. راه حل اول. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد، یعنی ($10^{k-1} \leq a < 10^k$). در این صورت $b/a = b + \frac{a}{10^k}$، بنابراین با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Rightarrow 10^k a = 10^k b^2 + ab$$

با توجه به عبارت بالا و توجه به روابط بخش‌پذیری، $a|10^k b^2$، $b|10^k a$ و $10^k|ab$ به دست می‌آیند. از آن‌جا که a و b نسبت به هم اول هستند، با به کاربردن لم اقلیدس و استفاده از دو رابطهٔ اول قبلی به دست می‌آید $b|10^k$ و $a|10^k$. مجدداً چون ب.م.م a و b برابر یک است، خواهیم داشت $ab|10^k$. بنابراین $10^k = ab$. حال بار دیگر با توجه به این که a و b نسبت به هم اول هستند، عامل مشترکی ندارند و لذا چهار حالت زیر ممکن است:

حالت۱. $a = 10^k$ و $b = 1$.

حالت۲. $a = 2^k$ و $b = 5^k$.

حالت۳. $a = 5^k$ و $b = 2^k$.

حالت۴. $a = 1$ و $b = 10^k$.

حالت ۱ با k رقمی بودن a تناقض دارد. ضمناً از فرض مسئله ($\frac{a}{b} = b/a$) به دست می‌آید $\frac{a}{b} > b$ و لذا $a > b^2$ و با توجه به این نکته حالت های ۲ و ۴ هم امکان ندارند ($1 < 10^{2k}$, $2^k < 5^{2k}$). پس تنها حالت مورد قبول ۳ است. با توجه به k رقمی بودن a، $10^{k-1} \leq a = 5^k$ و در نتیجه $2^{k-1} \leq 5$. یعنی k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد($2^{k-1} \leq 5 < 8 = 2^3 \Rightarrow k \leq 3$).

- $k = 1$. در این صورت $a = 5$ و $b = 2$ که به وضوح $\frac{5}{2} = 2/5$ و این جوابی از مسئله است.
- $k = 2$. در این صورت $a = 25$ و $b = 4$ که امکان ندارد زیرا $4/25 < 6 < \frac{25}{4}$.
- $k = 3$. در این صورت $a = 125$ و $b = 8$ که این هم ممکن نیست چون $8/125 < 10 < \frac{125}{8}$.

بنابراین تنها جواب مسئله $a = 5$ و $b = 2$ است.

راه حل دوم. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد. پس خواهیم داشت $\frac{a}{b} = b/a = b + \frac{a}{10^k}$ و این معادل با این است که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$. چون $(a,b) = 1$، پس $(a-b^2, b) = 1$ یعنی $\frac{a-b^2}{b}$ کسری تحویل‌ناپذیر و مساوی با(ساده شده‌ی) $\frac{a}{10^k}$ است. بنابراین $s \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $s(a-b^2) = a$ و $sb = 10^k$. پس خواهیم داشت $a-b^2|a$ و چون $(a-b^2, a) = 1$، $a-b^2|1$ و لذا $a - b^2 = \pm 1$. اما از آن‌جا که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$ تنها حالت $+1$ قابل قبول است. یعنی $a = b^2 + 1$ و $\frac{a}{10^k} = \frac{1}{b}$. حال توجه کنید که چون k تعداد ارقام a است، پس $a \geq 10^{k-1}$ و $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \geq \frac{1}{10}$، در نتیجه $b \leq 10$. از طرفی $ab = b(b^2+1) = 10^k$ توانی از ۱۰ است، پس عوامل اول b، ۲ یا ۵ است یعنی$b \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$. در این صورت $b^2 + 1 \in \{2, 5, 17, 26, 65, 101\}$ و چون b^2+1 هم عامل اولی جز ۲ و ۵ ندارد تنها حالت $b = 1$ و $b = 2$ می‌ماند. اما اگر $b = 1$، $b(b^2+1) = 2$

توانی از ۱۰ نیست. پس تنها حالت $a = ۵$ و $b = ۲$ باقی می‌ماند که این هم به وضوح جوابی از مسئله است. $(\frac{a}{b} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ = b/a)$.

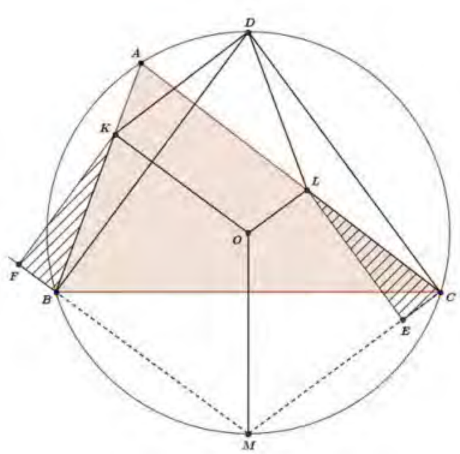
۲. نشان می‌دهیم مجموعه‌ی n عدد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_n$ کامل است اگر و تنها اگر $w_۱ = ۱$ و برای هر $۲ \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$. توجه کنید اگر $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_n$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_{n-۱}$ نیز دارای آن شرط هستند پس برای اثبات حکم کافیست ادعای خود را ثابت کنیم.

روشن است که اگر $w_۱ > ۱$ یا برای یک $۲ \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i > w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$ آنگاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$ مجموع هیچ تعدادی از وزنه‌ها نمی‌شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا درباره‌ی آن‌ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی n نشان می‌دهیم که کامل هستند. پایه‌ی استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. حال حکم را برای $n = k - ۱$ فرض می‌کنیم. اگر $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_k$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_{k-۱}$ نیز دارای آن شرط هستند پس طبق فرض استقرا مجموعه‌ای کاملند پس هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$ باشد به صورت جمع تعدادی از $w_۱, w_۲, \ldots, w_{k-۱}$ است. حال برای آن W های طبیعی که $w_۱+w_۲+\cdots+w_{k-۱} < W < w_۱+w_۲+\cdots+w_k$ چون $w_k \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱} + ۱$ داریم:

$$-۱ \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱} - w_k < W - w_k < w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$$

در حالت $W - w_k = ۰$ مطلوب حاصل است. در غیر این صورت $۱ \leq W - w_k < w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$ پس طبق فرض استقرا $W - w_k$ به صورت جمع تعدادی از $w_۱, w_۲, \ldots, w_{k-۱}$ است. حال اگر w_k را به آن مجموعه اضافه کنیم مجموع اعضای مجموعه‌ی جدید برابر W خواهد بود و حکم برای $n = k$ نیز نتیجه می‌شود.

۳. راه حل اول.



ابتدا ثابت می‌کنیم $KB = LC$ است. از نقاط K و L عمودهای KF و LE را بر خطوط MB و MC رسم می‌کنیم. این دو عمود، برابر فاصله O تا دو وتر برابر MB و MC از دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند و

در نتیجه با هم برابرند.

از طرف دیگر داریم: $\angle KBF = \angle LCE$ (چهارضلعی $ABMC$ محاطی است.) در نتیجه $\overset{\triangle}{KBF} \cong \overset{\triangle}{LCE}$ و $KB = LC$ است.

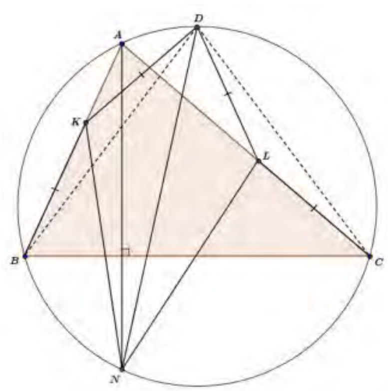
اگر D نقطه‌ی وسط کمان $B\widehat{A}C$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{c} DB = DC \\ \angle DBA = \angle DCA \\ KB = LC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overset{\triangle}{DBK} \cong \overset{\triangle}{DCL} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \angle KDL = \angle BDC = \angle BAC \\ KD = LD \end{array}\right.$$

از طرفی $\angle KOL = \angle BMC$ پس نتیجه می‌شود که $AKOLD$ محاطی است و داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \angle AKD = \angle ALD = \angle AOD = \angle B - \angle C \\ \angle KBD = \angle LCD = \frac{\angle B - \angle C}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle KDB = \angle LDC = \frac{\angle B - \angle C}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad KB = KD = LD = LC \quad (*)$$

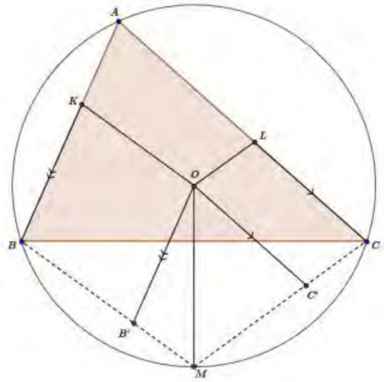


در انتها با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ حکم مساله اثبات خواهد شد.

$$\left.\begin{array}{c} \angle NDK = \angle NDB + \angle BDK = (۹۰^\circ - \angle B) + (\frac{\angle B - \angle C}{۲}) = \frac{\angle A}{۲} \\ \\ \angle NDL = \angle NDC - \angle CDL = (۹۰^\circ - \angle C) - (\frac{\angle B - \angle C}{۲}) = \frac{\angle A}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle NDK = \angle NDL$$

اکنون با کمک رابطه‌ی $(*)$ هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ اثبات می‌شود و داریم: $NK = NL$.

راه حل دوم.

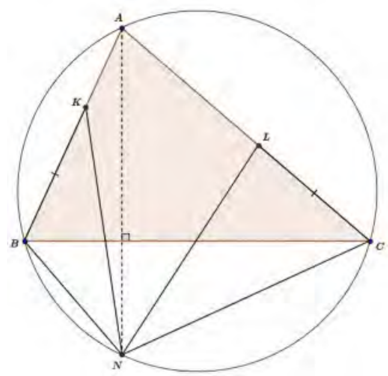


از نقطه‌ی O دو خط به موازات اضلاع AB و AC مثلث رسم می‌کنیم تا MB و MC را در B' و C' قطع کنند. طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در دو مثلث $O\overset{\triangle}{M}B'$ و $O\overset{\triangle}{M}C'$ داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{OB'}{\sin(\frac{\angle B+\angle C}{۲})} = \frac{R}{\sin(\angle B+\frac{\angle A}{۲})} \\ \sin(\angle B + \frac{\angle A}{۲}) = \sin(\angle C + \frac{\angle A}{۲}) \\ \frac{OC'}{\sin(\frac{\angle B+\angle C}{۲})} = \frac{R}{\sin(\angle C+\frac{\angle A}{۲})} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad OB' = OC' \quad \Rightarrow \quad KB = LC = x \quad (۱)$$

طبق رابطه‌ی (۱) بدست می‌آید که:

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin(\frac{\angle B+\angle C}{۲})}{\sin(\angle C + \frac{\angle A}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\angle B+\angle C}{۲})}{\cos(\frac{\angle B-\angle C}{۲})} \qquad (۲)$$



اکنون طول دو پاره‌خط NK و NL را با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $B\overset{\triangle}{N}K$ و $C\overset{\triangle}{N}L$ بدست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} NK^{۲} = NB^{۲} + BK^{۲} - ۲NB \cdot BK \cdot \cos(۹۰^\circ - \angle C + \angle B) \\ \\ NL^{۲} = NC^{۲} + CL^{۲} - ۲NC \cdot CL \cdot \cos(۹۰^\circ - \angle B + \angle C) \end{cases}$$

حال چون $BK = CL = x$ داریم:

$$NK = NL$$
$$\Leftrightarrow NB^{۲} - ۲NB \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \angle C + \angle B) = NC^{۲} - ۲NC \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \angle B + \angle C)$$
$$\Leftrightarrow NB^{۲} - ۲NB \cdot x \cdot \sin(\angle C - \angle B) = NC^{۲} - ۲NC \cdot x \cdot \sin(\angle B - \angle C) \qquad (۳)$$

از قضیه سینوس‌ها داریم:

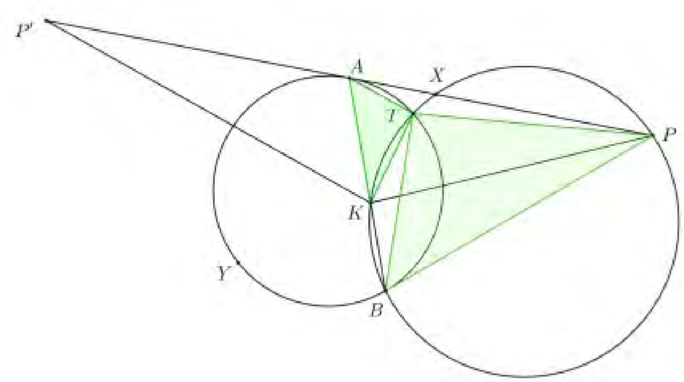
$$NB = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \angle B) = ۲R \cdot \cos\angle B \quad , \quad NC = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \angle C) = ۲R \cdot \cos\angle C$$

حال رابطه‌ی (۳) را می‌توان به صورت ساده‌تری نوشت:

$$۴R^{۲} \cdot \cos^{۲}\angle B + ۴R \cdot x \cdot \cos\angle B \cdot \sin(\angle B - \angle C) = ۴R^{۲} \cdot \cos^{۲}\angle C - ۴R \cdot x \cdot \cos\angle C \cdot \sin(\angle B - \angle C)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \sin(\angle B - \angle C) \cdot [\cos\angle B + \cos\angle C] = R \cdot [\cos\angle C - \cos\angle B] \cdot [\cos\angle B + \cos\angle C]$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R} = \frac{\cos\angle C - \cos\angle B}{\sin(\angle B - \angle C)} = \frac{۲\ \sin(\frac{\angle B - \angle C}{۲})\ \sin(\frac{\angle B + \angle C}{۲})}{۲\ \sin(\frac{\angle B - \angle C}{۲})\ \cos(\frac{\angle B - \angle C}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\angle B + \angle C}{۲})}{\cos(\frac{\angle B - \angle C}{۲})}$$

این تساوی، همان رابطه‌ی (۲) می‌باشد و از آنجا که این مراحل بازگشت‌پذیرند خواهیم داشت: $NK = NL$.

۴. راه حل اول. در این راه حل همه‌ی کمان‌ها متعلق به دایره‌ی C هستند.

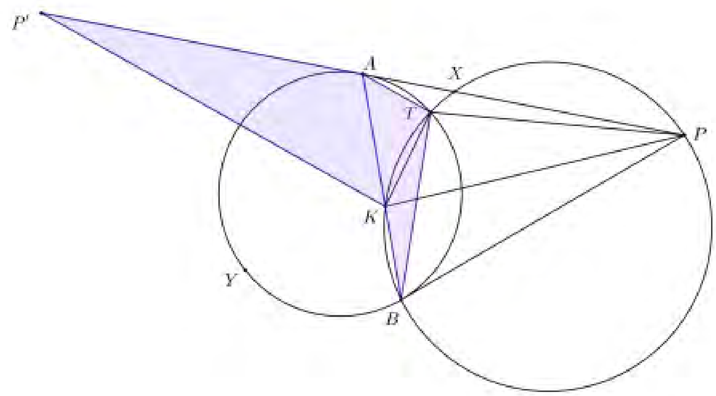


چهارضلعی $KTPB$ محاطی است بنابراین $\angle AKT = \angle BPT$:

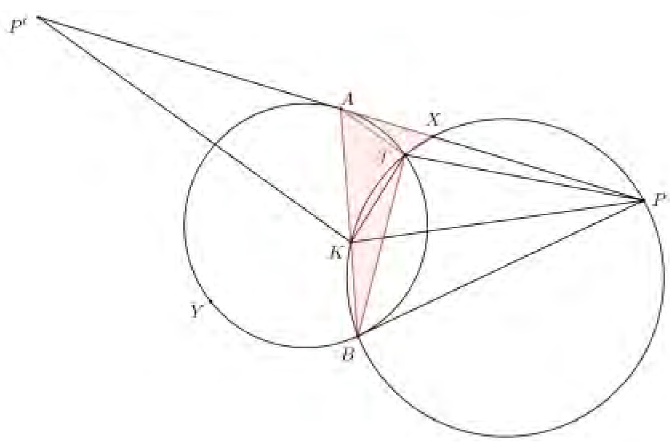
$$\left.\begin{array}{c} \angle TAK = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = \angle TBP \\ \angle AKT = \angle BPT \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{TAK} \sim \overset{\triangle}{TBP} \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA} \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \angle P'AK = \frac{\overset{\frown}{AYB}}{۲} = \angle BTA \\ (۱) \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{P'AK} \sim \overset{\triangle}{BTA} \Rightarrow \angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT.$$



راه حل دوم. در این راه حل تنها رابطه‌ی (۱) را از راه دیگری ثابت می‌کنیم. قوت نقطه‌ی A را نسبت به دایره‌ی محیطی مثلث $P\overset{\triangle}{B}K$ محاسبه می‌کنیم:



$$AX \cdot AP = AK \cdot AB \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AP}{AK} = \frac{AP'}{AK} \ \ (۱)$$

از طرفی چهارضلعی $TKBP$ محاطی است:

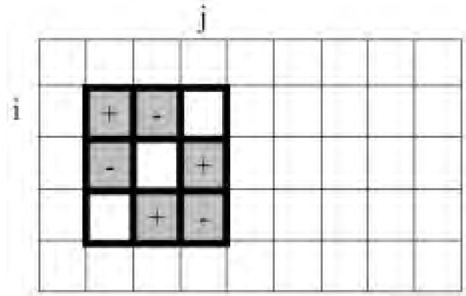
$$\left.\begin{array}{r} \angle TBP = \angle TXA \\ \angle TAX = \frac{\widehat{AT}}{۲} = \angle TBA \\ \angle TAB = \frac{\widehat{TB}}{۲} = \angle TBP \end{array}\right\} \Rightarrow T\overset{\triangle}{A}B \sim T\overset{\triangle}{X}A \Rightarrow \frac{AB}{XA} = \frac{TB}{TA} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AP'}{AK} = \frac{TB}{TA} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}$$

۵. ابتدا حکم مسأله را در حالتی که $m,n \geq ۳$ اثبات می‌کنیم. در حالتی که یکی از m و n کمتر از ۳ باشد، زیر جدول ۳ × ۳ وجود ندارد. پس می‌توان هر زیر جدول ۳ × ۳ آن را صفر کرد. در این حالت باید ثابت کنیم جدول را می‌توان با اعمال معرفی شده صفر کرد. این قسمت را در انتها ثابت می‌کنیم.

عدد نوشته‌شده در خانه‌ی سطر i و ستون j را با $A(i,j)$ نشان می‌دهیم. یک زیرجدول ۳ × ۳ در نظر بگیرید که خانه‌ی گوشه‌ی بالا-راست آن، (i,j) باشد. این زیرجدول را با $S(i,j)$ نشان می‌دهیم.

منظور از شاخص این زیر جدول، عدد حاصل از جمع زدن اعداد خانه‌های مشخص شده در شکل زیر با علامت‌های مشخص شده است، یعنی عدد

$$A(i+۱,j)-A(i+۲,j)+A(i+۲,j-۱)-A(i+۱,j-۲)+A(i,j-۲)-A(i,j-۱)$$



خانه‌های مشخص شده در شکل بالا دارای این خاصیت هستند که هر ردیف افقی یا عمودی یا اریب، خانه‌های مشخص شده در شکل بالا را یا قطع نمی‌کند و یا در دو خانه با علامت مخالف قطع می‌کند. پس با انجام هر یک از اعمال مجاز در صورت مسأله، شاخص یک زیرجدول تغییر نمی‌کند. حال از آن‌جا که بنابر فرض، می‌توان اعداد هر زیرجدول ۳×۳ را صفر کرد، و چون شاخص در طول این فرآیند تغییر نمی‌کند پس شاخص هر زیرجدول ۳×۳ از ابتدا صفر است و در طول فرآیند نیز صفر می‌ماند.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات حکم را داریم. حکم را با استقرا روی $m+n$ اثبات می‌کنیم. پایه‌ی استقرا در حالتی است که $m+n=۶$، یعنی $m=n=۳$. در این حالت حکم بدیهی است چون کل جدول یک زیرجدول ۳×۳ است. حال فرض کنید $m+n>۶$. پس دست‌کم یکی از m و n از ۳ بیش‌تر است. فرض می کنیم $m>۳$ (حالت $n>۳$ مشابه است). حال زیرجدولی از جدول اصلی را در نظر بگیرید که از حذف ستون آخر به دست آمده است. فرض استقرا برای این زیرجدول $(m-۱)\times n$ برقرار است. پس بنابر استقرا، می‌توان با استفاده از اعمال مجاز، همه‌ی اعداد این زیرجدول را صفر کرد. پس به جدولی می‌رسیم که تنها ستون آخر آن ممکن است ناصفر باشد. ادعا می‌کنیم که در این حالت اعداد ستون آخر به جز عدد خانه‌ی بالا-راست، باید برابر باشند. زیرجدول $S(۱,m)$ را در نظر بگیرید. شاخصِ این جدول برابر است با

$$A(۲,m)-A(۳,m)+A(۳,m-۱)-A(۲,m-۲)+A(۱,m-۲)-A(۱,m-۱)=A(۲,m)-A(۳,m)$$

از طرفی بنابر آن‌چه گفته شد، این شاخص باید صفر باشد. پس $A(۳,m)=A(۲,m)$. با در نظر گرفتن زیرجدول‌های $S(۳,m)$، $S(۴,m)$، ... و $S(n-۲,m)$ و تکرار استدلال فوق، مشابهاً نتیجه می‌شود $A(۴,m)=A(۳,m)$، $A(۵,m)=A(۴,m)$، ... و $A(n,m)=A(n-۱,m)$. پس در ستون آخر، مقادیر همه‌ی خانه‌ها به جز خانه $(۱,m)$ با یک‌دیگر برابرند. پس با استفاده از تعدادی عمل مجاز روی ستون آخر می‌توان همه‌ی آن‌ها را صفر کرد و سپس با استفاده از ردیف اریبی که تنها از خانه‌ی$(۱,m)$ تشکیل شده، می‌توان خانه‌ی $(۱,m)$ را نیز صفر کرد و بنابراین کل جدول صفر می‌شود.

تنها می‌ماند حالتی را ثابت کنیم که حداقل یکی از m و n از ۳ کم‌تر باشند. مثلاً فرض کنید $m<۳$ (حالت $n<۳$ مشابه است). اگر $m=۱$، به وضوح می‌توان با استفاده از سطرها، همه‌ی خانه‌ها را صفر

کرد. اگر $m=۲$، روش زیر را به کار می‌بریم.

ابتدا با استفاده از سطر nام، $A(n,۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n,۲)$، $A(n,۲)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از سطر $(n-۱)$ام، $A(n-۱,۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n-۱,۲)$، $A(n-۱,۲)$ را صفر می‌کنیم و همین فرآیند را ادامه می‌دهیم تا همه‌ی جدول صفر شود.

۶. لم۱. به ازای هر $n\geq ۳$ داریم: $a_n\geq ۳$

اثبات. فرض کنید $a_n<۳$ اگر $a_{n-۱}\geq a_{n-۲}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\geq ۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\right]\geq ۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۲}}{a_{n-۱}}\right]=۰\Rightarrow a_{n-۱}>۲a_{n-۲}\Rightarrow\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}>۴$$

که با فرض $a_n<۳$ در تناقض است. در حالتی که $a_{n-۲}\geq a_{n-۱}$ نیز استدلال کاملاً مشابه است چون رابطه‌ی بازگشتی نسبت به دو جمله قبل متقارن است.

لم۲. به ازای هر $n\geq ۳$ داریم: $a_{n+۲}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$ یا $a_{n+۱}=a_n$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a_{n+۱}\neq a_n$. همچنین به علت تقارن رابطه‌ی بازگشتی بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم $a_n=\max\{a_{n+۱},a_n\}$ پس:

$$\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}<۲$$

ازطرفی

$$a_{n+۱},a_n\geq ۳\Rightarrow\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\leq\frac{۲a_n}{۳}\Rightarrow a_{n+۲}=\left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right]+\left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]\leq ۱+\frac{۲a_n}{۳}\leq\frac{a_n}{۳}+\frac{۲a_n}{۳}=a_n$$

و با توجه به فرض $a_n\neq a_{n+۱}$ هر دوی نابرابری‌های $\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\leq\frac{۲a_n}{۳}$ و $۱\leq\frac{a_n}{۳}$ نمی‌توانند تساوی باشند و حکم نتیجه می‌شود.

لم۳. k وجود دارد که $a_k=a_{k+۱}$

اثبات. اگر چنین نباشد طبق لم ۲ برای هر $n\geq ۳$:

$$a_{n+۲}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

و

$$a_{n+۳}<\max\{a_{n+۲},a_{n+۱}\}$$

در حالتی که $a_{n+۲}<a_{n+۳}$ نتیجه می‌شود $a_{n+۳}<a_{n+۱}$ یعنی

$$\max\{a_{n+۳},a_{n+۲}\}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

و در حالتی که $a_{n+۲}>a_{n+۳}$ نیز نتیجه می‌شود

$$\max\{a_{n+۳},a_{n+۲}\}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

یعنی ماکزیمم جفت جمله‌های متوالی همواره اکیداً نزولی است که غیر ممکن است. توجه کنید که این استدلال نتیجه می‌دهد که دو جمله برابر و متوالی بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر می‌شود.

حال توجه کنید که همواره پس از دو جمله‌ی برابر در دنباله عدد ۴ ظاهر می‌شود و اگر آن دو عدد برابر ۳ یا ۴ باشند مطلوب حاصل می‌شود چون اگر ۳ و ۴ پشت سر هم بیایند جمله‌ی بعد از ۴ هم ۳ می‌شود. اما اگر آن دو عدد برابر بزرگتر از ۴ باشند مثلاً $a_k = a_{k+1} > 4$ اگر اولین باری که دو عدد مساوی دیگر در دنباله ظاهر می‌شود $a_{k+m} = a_{k+m+1}$ باشد که m فرد است، با توجه به اثبات لم ۳ داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \cdots > \max\{a_{k+m}, a_{k+m+1}\} = a_{k+m}$$

و در حالتی که m زوج است داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \cdots > \max\{a_{k+m-1}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}$$

یعنی تا وقتی اعداد متوالی برابر بیش از ۴ باشند همواره یک جفت برابر متوالی کمتر از جفت برابر متوالی قبلی است ولی این روند نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و پس از مدتی به دو عدد ۳ یا ۴ متوالی می‌رسیم که مطلوب ما را به دست می‌دهد.