فصل
۲

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

در این فصل به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول، یعنی

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad (۱)$$

که در آن f تابعی از دو متغیر است می‌پردازیم. به هر تابع مشتق‌پذیر $y = \phi(t)$ که به‌ازای هر t در بازه‌ای در این معادله صدق می‌کند جواب می‌گوییم و هدفمان این است که معین کنیم چنین تابعهایی وجود دارند یا نه، و اگر وجود داشتند روشهایی برای یافتن جوابها پیدا کنیم. متأسفانه روش کلی‌ای موجود نیست که معادله را به‌ازای f دلخواه برحسب توابع مقدماتی حل کند. در عوض، چند روش را توصیف می‌کنیم که هرکدام در زیرخانوادهٔ معینی از معادلات مرتبهٔ اول به‌کار می‌آیند. مهم‌ترین زیرخانواده‌ها عبارت‌اند از معادلات خطی (بخش ۱.۲)، معادلات جداشدنی (بخش ۲.۲) و معادلات کامل (بخش ۶.۲). در بخش‌های دیگر این فصل بعضی از کاربردهای مهم معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را تشریح کرده‌ایم، ایدهٔ تخمین جواب با محاسبات عددی را مطرح کرده‌ایم و سؤالهای نظری مربوط به وجود و یکتایی جوابها را بررسی کرده‌ایم. در بخش آخر مثالی از جوابهای آشوبناک در بستر معادلات تفاضلی آورده‌ایم که نقاط تشابه مهمی با معادلات دیفرانسیل دارند و بررسیشان ساده‌تر است.

۱.۲ معادلات خطی؛ روش عاملهای انتگرال‌ساز

اگر تابع f در معادلهٔ (۱) برحسب متغیر y خطی باشد، به معادلهٔ (۱) معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌گوییم. در بخش‌های ۱.۱ و ۲.۱ گونهٔ خاصی از معادلات خطی مرتبهٔ اول را بررسی کردیم که ضرایبشان ثابت هستند. آن معادله‌ها نوعاً به‌صورت

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \qquad (۲)$$

بودند که در آن a و b ثابتهای مفروضی هستند. یادآوری می‌کنیم که این معادله، حرکت شیئی در حال سقوط در جو را توصیف می‌کند. حالا می‌خواهیم کلی‌ترین صورت ممکن معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول را بررسی کنیم که با قرار

دادن تابعهایی دلخواه از t به‌جای a و b در معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید. معمولاً صورت کلی **معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول** را به شکل استاندارد

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \qquad (۳)$$

می‌نویسیم که در آن p و g تابعهایی مفروض برحسب متغیر مستقل t هستند.

معادلهٔ (۲) را می‌توانیم با روش مستقیم انتگرال‌گیری که در بخش ۲.۱ دیدیم حل کنیم، به شرط اینکه $a \neq 0$ و $y \neq b/a$. می‌توان معادله را به‌صورت

$$\frac{dy/dt}{y-(b/a)} = -a \qquad (۴)$$

بازنویسی کرد؛ بنابراین با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$\ln|y-(b/a)| = -at + C$$

که جواب عمومی معادلهٔ (۲)، یعنی

$$y = (b/a) + ce^{-at} \qquad (۵)$$

از آن نتیجه می‌شود که در آن c ثابتی دلخواه است.

متأسفانه این روش مستقیم را نمی‌توان برای حل معادلهٔ کلی (۳) به‌کار گرفت، بنابراین برای حل آن به روشی متفاوت نیاز داریم. این روش را مدیون لایب‌نیتز هستیم؛ در این روش معادلهٔ دیفرانسیل (۳) را در تابع مشخصی ضرب می‌کنیم که طوری انتخاب شده که معادلهٔ حاصله به‌سادگی انتگرال‌پذیر باشد. به تابع $\mu(t)$ **عامل انتگرال‌ساز** می‌گوییم و مشکل اصلی، چگونگی تعیین آن است. این روش را با یک مثال ساده طرح می‌کنیم؛ بعداً نشان می‌دهیم که چگونه باید آن را به معادلات خطی مرتبهٔ اول ــ از جمله، معادلهٔ کلی (۳) ــ بسط داد.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3} \qquad (۶)$$

را حل کنید و چند جواب را رسم کنید. جوابی از آن را بیابید که نمودارش از نقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرد.

اولین گام، ضرب معادلهٔ (۶) در تابع $\mu(t)$ است که هنوز نامشخص است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}. \qquad (۷)$$

حالا سؤال این است که آیا می‌توان $\mu(t)$ را طوری انتخاب کرد که طرف چپ معادلهٔ (۷) مشتق عبارتی معین باشد؟ در این‌صورت حتی بدون شناخت تابع y می‌توان از معادلهٔ (۷) انتگرال گرفت. برای اینکه ببینید عامل انتگرال‌ساز $\mu(t)$ را چطور باید انتخاب کنید، از خودتان بپرسید که کجا در حساب دیفرانسیل و انتگرال عبارتی شامل جمله‌ای مانند $\mu(t)dy/dt$ را دیده‌اید. اگر این جمله قاعدهٔ مشتق‌گیری حاصلضرب را به خاطرتان آورد، در مسیر درستی قرار دارید. پس سعی می‌کنیم $\mu(t)$ را طوری تعیین کنیم که طرف چپ معادلهٔ (۷)، مشتق عبارت $\mu(t)y$ باشد. با مقایسهٔ طرف چپ معادلهٔ (۷) با فرمول مشتق‌گیری

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y \qquad (۸)$$

می‌توان دید که آنها برابرند اگر $\mu(t)$ را طوری انتخاب کنیم که در

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t) \qquad (۹)$$

صدق کند. بنابراین در جستجوی عامل انتگرال‌ساز موفق خواهیم بود اگر بتوانیم جوابی برای معادلهٔ (۹) بیابیم. باید به‌سادگی بتوانید تابعی را بیابید که در معادلهٔ (۹) صدق می‌کند: مشتق کدام تابع معروف حساب دیفرانسیل و انتگرال نصف خود تابع است؟ به‌طور نظام‌مند، معادلهٔ (۹) را به‌صورت

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2} \qquad (۱۰)$$

بنویسید که معادل است با

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}. \qquad (۱۱)$$

در این‌صورت نتیجه می‌شود که

$$\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}t + C \qquad (۱۲)$$

یا

$$\mu(t) = ce^{t/2}. \qquad (۱۳)$$

تابع $\mu(t)$ در معادلهٔ (۱۳) عامل انتگرال‌سازی برای معادلهٔ (۶) است. چون به کلی‌ترین صورت عامل انتگرال‌ساز نیاز نداریم، c را در معادلهٔ (۱۳) برابر واحد انتخاب می‌کنیم و از $\mu(t) = e^{t/2}$ استفاده می‌کنیم. حالا به معادلهٔ (۶) برمی‌گردیم و آن را در عامل انتگرال‌ساز $e^{t/2}$ ضرب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \qquad (۱۴)$$

با این انتخاب عامل انتگرال‌ساز، طرف چپ معادلهٔ (۱۴) مشتق $e^{t/2}y$ است؛ بنابراین (۱۴) تبدیل می‌شود به

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \qquad (۱۵)$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود

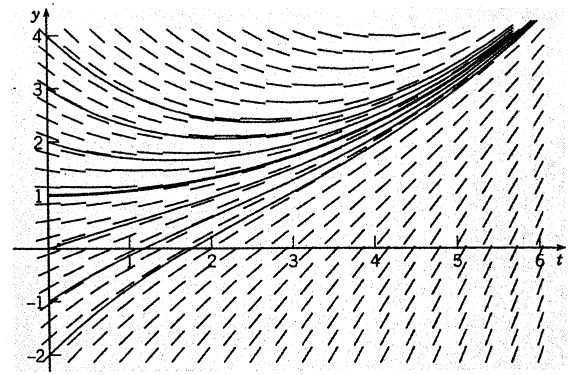
$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + c \qquad (۱۶)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. درنهایت، با حل معادلهٔ (۱۶) نسبت به y، جواب عمومی معادلهٔ (۶) را به‌دست می‌آورید؛ یعنی

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}. \qquad (۱۷)$$

برای یافتن جوابی که از نقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرد، در معادلهٔ (۱۷) قرار می‌دهیم $t = 0$ و $y = 1$؛ نتیجه می‌شود $(3/5) + c = 1$. پس $c = 2/5$ و جواب مطلوب عبارت است از

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + \frac{2}{5}e^{-t/2}. \qquad (۱۸)$$



شکل ۲.۱.۱ منحنی‌های انتگرال $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$.

در شکل ۲.۱.۱ نمودار معادلهٔ (۱۷) را به‌ازای چند مقدار c آورده‌ایم و میدان جهت را هم در زمینه قرار داده‌ایم. جوابی را که از $(0, 1)$ می‌گذرد با منحنی پررنگ نشان داده‌ایم.

اکنون می‌خواهیم روش عاملهای انتگرال‌ساز را به معادله‌هایی به‌صورت

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t) \tag{۱۹}$$

تعمیم بدهیم که در آن a ثابتی مفروض و $g(t)$ تابعی مفروض است. به روش مثال ۱، عامل انتگرال‌ساز $\mu(t)$ باید به‌جای معادلهٔ (۹) در معادلهٔ

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu \tag{۲۰}$$

صدق کند؛ بنابراین عامل انتگرال‌ساز $\mu(t) = e^{at}$ است. با ضرب معادلهٔ (۱۹) در $\mu(t)$ نتیجه می‌شود

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t)$$

یا

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \tag{۲۱}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۲۱) نتیجه می‌شود

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt + c \tag{۲۲}$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. مانند مثال ۱، به‌ازای بسیاری از تابعهای سادهٔ $g(t)$ می‌توانیم انتگرال معادلهٔ (۲۲) را محاسبه کنیم و جواب y را برحسب توابع مقدماتی بنویسیم؛ اما برای تابعهای پیچیده‌تر $g(t)$، لازم است که جواب را به‌صورت انتگرال باقی بگذاریم. در این حالت

$$y = e^{-at}\int_{t_0}^{t} e^{as}g(s)ds + ce^{-at}. \tag{۲۳}$$

توجه کنید که در معادلهٔ (۲۳) از s به‌عنوان متغیر انتگرال‌گیری استفاده کرده‌ایم تا آن را از متغیر مستقل t متمایز کنیم و از مقدار مناسب t_0 به‌عنوان کران پایینی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \tag{۲۴}$$

را حل کنید و نمودار چند جواب را رسم کنید. رفتار جوابها را وقتی $t \to \infty$ بررسی کنید.

معادلهٔ (۲۴) به شکل معادلهٔ (۱۹) به‌ازای $a = -2$ است؛ بنابراین، عامل انتگرال‌ساز آن $\mu(t) = e^{-2t}$ است. با ضرب معادلهٔ دیفرانسیل (۲۴) در $\mu(t)$ نتیجه می‌شود

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t} \tag{۲۵}$$

یا

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. \tag{۲۶}$$

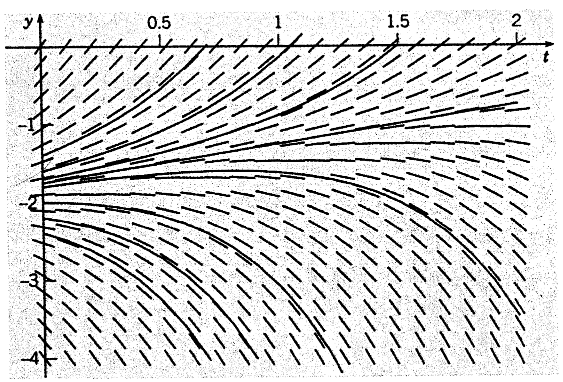
سپس با انتگرال‌گیری از دو طرف این معادله نتیجه می‌شود

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c$$

که در آن جملهٔ آخر معادلهٔ (۲۶) را با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء به‌دست آورده‌ایم. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۲۴) عبارت است از

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}. \tag{۲۷}$$

میدان جهت و نمودارهای جواب (۲۷) را به‌ازای چند مقدار c در شکل ۲.۱.۲ نشان داده‌ایم. رفتار جوابها به‌ازای مقادیر بزرگ t با جملهٔ ce^{2t} تعیین می‌شود. اگر $c \neq 0$، جواب به‌صورت نمایی با همان علامت c رشد می‌کند. مرز بین جوابهایی که به‌طور مثبت رشد می‌کنند و آنهایی که به‌طور منفی رشد می‌کنند، در $c = 0$ رخ می‌دهد. اگر در معادلهٔ (۲۷) $c = 0$ را قرار بدهیم نتیجه می‌شود $y = -\frac{7}{4}$ نقطهٔ جدایی روی محور yها است. توجه کنید که به‌ازای این مقدار اولیه، جواب $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t$ است که به‌طور مثبت و خطی ــ و نه نمایی ــ رشد می‌کند.



شکل ۲.۱.۲ منحنی‌های انتگرال $y' - 2y = 4 - t$.

اکنون به صورت کلی معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی کلی (۳) برمی‌گردیم؛ یعنی

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t)$$

که در آن p و g تابعهایی مفروض هستند. برای تعیین عامل انتگرال‌ساز مناسب، معادلهٔ (۳) را در تابع $\mu(t)$ ــ که هنوز تعیین نشده ــ ضرب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+p(t)\mu(t)y=\mu(t)g(t). \qquad (۲۸)$$

با دنبال کردن همان روش مثال ۱، می‌توان دید که طرف چپ معادلهٔ (۲۸) مشتق حاصلضرب $\mu(t)y$ است، به‌شرط اینکه $\mu(t)$ در معادلهٔ

$$\frac{d\mu(t)}{dt}=p(t)\mu(t) \qquad (۲۹)$$

صدق کند. اگر فعلاً فرض کنیم که $\mu(t)$ مثبت است، نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)}=p(t)$$

و در نتیجه

$$\ln\mu(t)=\int p(t)dt+k.$$

با انتخاب ثابت دلخواه k برابر صفر، ساده‌ترین تابع ممکن برای μ را به‌دست می‌آوریم؛ یعنی

$$\mu(t)=\exp\int p(t)dt. \qquad (۳۰)$$

توجه کنید که همان‌طور که فرض کردیم، $\mu(t)$ به‌ازای همهٔ زمانها مثبت است. با بازنویسی معادلهٔ (۲۸) نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y]=\mu(t)g(t); \qquad (۳۱)$$

بنابراین

$$\mu(t)y=\int\mu(t)g(t)dt+c \qquad (۳۲)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. گاهی انتگرال معادلهٔ (۳۲) را می‌توان برحسب توابع مقدماتی محاسبه کرد؛ اما این کار در حالت کلی ممکن نیست. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$y=\frac{۱}{\mu(t)}\left[\int_{t_۰}^{t}\mu(s)g(s)ds+c\right] \qquad (۳۳)$$

که در آن مجدداً $t_۰$ کران پایین مناسبی برای انتگرال‌گیری است. توجه کنید که معادلهٔ (۳۳) شامل دو انتگرال است: یکی برای به‌دست آوردن $\mu(t)$ از معادلهٔ (۳۰) و دیگری برای تعیین y از معادلهٔ (۳۳).

مثال ۳

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$ty'+۲y=۴t^۲ \qquad (۳۴)$$

$$y(۱)=۲ \qquad (۳۵)$$

را حل کنید.

برای تعیین درست $p(t)$ و $g(t)$، ابتدا باید معادلهٔ (۳۴) را به‌صورت استاندارد (۳۴) نوشت؛ بنابراین

$$y'+(۲/t)y=۴t \qquad (۳۶)$$

و در نتیجه $p(t)=۲/t$ و $g(t)=۴t$. برای حل معادلهٔ (۳۶)، ابتدا عامل انتگرال‌ساز $\mu(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mu(t)=\exp\int\frac{۲}{t}dt=e^{۲\ln|t|}=t^۲.$$

با ضرب معادلهٔ (۳۶) در $\mu(t)=t^۲$ نتیجه می‌شود

$$t^۲y'+۲ty=(t^۲y)'=۴t^۳$$

و بنابراین

$$t^۲y=t^۴+c$$

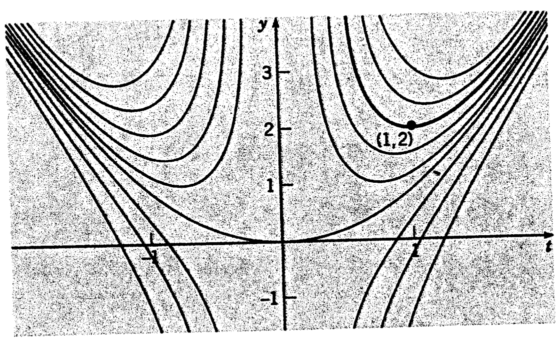
که در آن c ثابتی دلخواه است. در نتیجه

$$y=t^۲+\frac{c}{t^۲} \qquad (۳۷)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۳۴) است. منحنی‌های انتگرال معادلهٔ (۳۴) را به‌ازای چند مقدار c در شکل ۳.۱.۲ رسم کرده‌ایم. برای برآورده شدن شرط اولیهٔ (۳۵)، لازم است که c را برابر ۱ انتخاب کنیم؛ پس

$$y=t^۲+\frac{۱}{t^۲},\qquad t>۰ \qquad (۳۸)$$

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۳۴) و (۳۵) است. این جواب را با منحنی پررنگ در شکل ۳.۱.۲ نشان داده‌ایم. توجه کنید که وقتی از طرف راست $t\to ۰$، جواب بی‌کران می‌شود و به قسمت محور yها مجانب می‌شود. این اثر ناپیوستگی بینهایت



شکل ۳.۱.۲ منحنی‌های انتگرال $ty'+۲y=۴t^۲$.

ضریب $p(t)$ در مبدأ است. تابع $y = t^2 + (1/t^2)$ به‌ازای $t < 0$ قسمتی از جواب مسئلهٔ مقدار اولیه نیست.

این اولین مثالی است که در آن، جواب به‌ازای بعضی از مقادیر t وجود ندارد. مجدداً، این هم به‌واسطهٔ ناپیوستگی بی‌نهایت $p(t)$ در $t = 0$ است که جواب را به بازهٔ $0 < t < \infty$ محدود می‌کند.

با توجه مجدد به شکل ۳.۱.۲ می‌توان دید که بعضی از جوابها (آنهایی که به‌ازای $c > 0$ به‌دست می‌آیند) وقتی از طرف راست $t \to 0$، به قسمت مثبت محور yها مجانب می‌شوند؛ در حالی که جوابهای دیگر (که به‌ازای $c < 0$ به‌دست می‌آیند) مجانب قسمت منفی محور yها هستند. جوابی که به‌ازای $c = 0$ به‌دست می‌آید، یعنی $y = t^2$، در $t = 0$ کراندار و مشتق‌پذیر است. اگر شرط اولیهٔ (۳۵) را به شکل

$$y(1) = y_0 \qquad (39)$$

تعمیم بدهیم، $c = y_0 - 1$ و جواب (۳۸) تبدیل می‌شود به

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \quad t > 0, \quad y_0 \neq 1. \qquad (40)$$

مانند آنچه در مثال ۲ دیدیم، این هم مثالی است که در آن یک مقدار اولیهٔ بحرانی — یعنی $y_0 = 1$ — موجود است که جوابهایی را که به طریقی کاملاً متفاوت رفتار می‌کنند جدا می‌کند.

مثال ۴

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$2y' + ty = 2 \qquad (41)$$

$$y(0) = 1 \qquad (42)$$

را حل کنید.

برای تبدیل معادلهٔ دیفرانسیل (۴۱) به‌صورت استاندارد (۳)، باید طرفین را بر دو تقسیم کنیم و بنویسیم

$$y' + (t/2)y = 1; \qquad (43)$$

پس $p(t) = t/2$ و عامل انتگرال‌ساز $\mu(t) = \exp(t^2/4)$ است. با ضرب معادلهٔ (۴۳) در $\mu(t)$ نتیجه می‌شود

$$e^{t^2/4}y' + \frac{t}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4}. \qquad (44)$$

طرف چپ معادلهٔ (۴۴) مشتق $e^{t^2/4}y$ است، بنابراین با انتگرال‌گیری از دو طرف (۴۴) نتیجه می‌شود

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4}\,dt + c. \qquad (45)$$

انتگرال طرف چپ معادلهٔ (۴۴) را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی محاسبه کرد، بنابراین انتگرال را محاسبه‌نشده باقی می‌گذاریم. اما با انتخاب نقطهٔ اولیهٔ $t = 0$ به‌عنوان کران پایین انتگرال‌گیری، می‌توانیم معادلهٔ (۴۵) را به‌صورت

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4}\,ds + c \qquad (46)$$

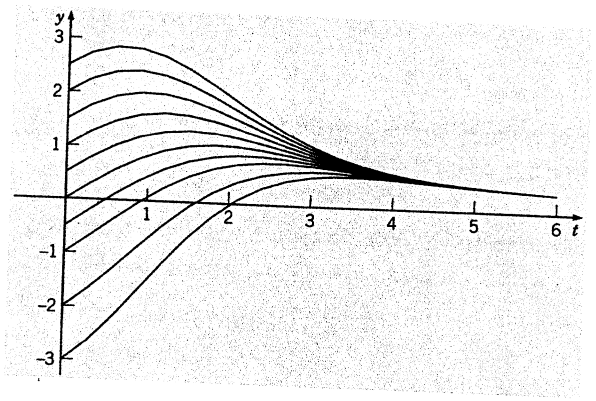
بنویسیم که در آن c ثابتی دلخواه است. در این‌صورت نتیجه می‌شود که جواب عمومی y برای معادلهٔ (۴۱) با

$$y = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}\,ds + ce^{-t^2/4} \qquad (47)$$

داده می‌شود. شرط اولیهٔ (۴۲) ایجاب می‌کند که $c = 1$.

هدف اصلی این مثال طرح این مطلب است که گاهی باید جواب را به‌صورت انتگرال باقی گذاشت. این موضوع کمی ناراحت‌کننده است، اما مانع جدی‌ای نیست. به‌ازای هر مقدار مفروض t، انتگرال معادلهٔ (۴۷) انتگرال معین است و می‌توان با استفاده از انتگرال‌گیرهای عددی در دسترس، آن را تا هر درجهٔ دقت محاسبه کرد. با تکرار این روند به‌ازای چند مقدار t و نقطه‌یابی می‌توانید نمودار جواب را به‌دست بیاورید. می‌توانید از روشهای تقریب عددی مانند آنچه در فصل ۸ خواهیم دید استفاده کنید و بدون عبارتی برای جواب، مستقیماً از خود معادلهٔ دیفرانسیل استفاده کنید. نرم‌افزارهایی مانند میپل و متمتیکا به‌سادگی چنین روندهایی را اجرا می‌کنند و نمودار جواب معادلهٔ دیفرانسیل را تولید می‌کنند.

در شکل ۴.۱.۲ نمودارهای جواب (۴۷) را به‌ازای چند مقدار c نمایش داده‌ایم. با توجه به شکل، این حدس قابل قبول است که وقتی $t \to \infty$، همهٔ جوابها به یک حد میل می‌کنند. این حد را می‌توان به‌طور تحلیلی به‌دست آورد (مسئلهٔ ۳۲ را ببینید).



شکل ۴.۱.۲ منحنی‌های انتگرال $2y' + ty = 2$.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲،

الف) یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده رسم کنید.

ب) بر اساس بررسی میدان جهت، رفتار جوابها را به‌ازای مقادیر بزرگ t تشریح کنید.

ج) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید و با استفاده از آن، رفتار جوابها را وقتی $t \to \infty$ تعیین کنید.

۱. $y' + 3y = t + e^{-2t}$

۲. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

۳. $y' + y = te^{-t} + 1$

۴. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t$، $t > 0$

۵. $y' - 3y = 4e^t$

۶. $ty' + 2y = \sin t$، $t > 0$

۷. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$

۸. $(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$

۹. $ty' - y = t^2 e^{-t}$، $t > 0$

۱۰. $2y' + y = 3t$

۱۱. $y' + y = 5\sin 2t$

۱۲. $2y' + y = 3t^2$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۲۰، جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌دست بیاورید.

۱۳. $y'-y=2te^{2t}$، $y(0)=1$

۱۴. $y'+3y=te^{-3t}$، $y(1)=0$

۱۵. $ty'+2y=t^2-t+1$، $y(1)=\frac{1}{2}$، $t>0$

۱۶. $y'+(2/t)y=(\cos t)/t^2$، $y(\pi)=0$، $t>0$

۱۷. $y'-4y=e^{4t}$، $y(0)=2$

۱۸. $ty'+2y=\sin t$، $y(\pi/2)=1$، $t>0$

۱۹. $t^3y'+4t^2y=e^{-t}$، $y(-1)=0$، $t<0$

۲۰. $ty'+(t+1)y=t$، $y(\ln 2)=1$، $t>0$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۳،

الف) یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به‌دست بیاورید. این جوابها با بزرگ‌شدن t چطور به‌نظر می‌رسند؟ آیا رفتار به انتخاب مقدار اولیهٔ a بستگی دارد؟ فرض کنید a_0 مقداری برای a باشد که در آن انتقال از یک رفتار به دیگری رخ می‌دهد. مقدار a_0 را تخمین بزنید.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و مقدار بحرانی a_0 را دقیقاً به‌دست بیاورید.

ج) رفتار جواب متناظر مقدار اولیهٔ a_0 را توصیف کنید.

۲۱. $y'-\frac{1}{2}y=2\cos t$، $y(0)=a$

۲۲. $3y'-2y=e^{-\pi t/2}$، $y(0)=a$

۲۳. $2y'-y=e^{t/3}$، $y(0)=a$

در هر یک از مسئله‌های ۲۴ تا ۲۶،

الف) یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده رسم کنید. وقتی $t\to 0$ این جوابها چطور به‌نظر می‌رسند؟ آیا رفتار به انتخاب مقدار اولیهٔ a بستگی دارد؟ فرض کنید a_0 مقداری برای a باشد که در آن انتقال از یک رفتار به دیگری رخ می‌دهد. مقدار a_0 را تخمین بزنید.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و مقدار بحرانی a_0 را دقیقاً به‌دست بیاورید.

ج) رفتار جواب متناظر مقدار اولیهٔ a_0 را توصیف کنید.

۲۴. $ty'+(t+1)y=2te^{-t}$، $y(1)=a$، $t>0$

۲۵. $ty'+2y=(\sin t)/t$، $y(-\pi/2)=a$، $t<0$

۲۶. $(\sin t)y'+(\cos t)y=e^t$، $y(1)=a$، $0<t<\pi$

۲۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'+\frac{1}{2}y=2\cos t,\qquad y(0)=-1$$

را در نظر بگیرید. مختصات اولین نقطهٔ ماکزیمم موضعی جواب را به‌ازای $t>0$ به‌دست بیاورید.

۲۸. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'+\frac{2}{3}y=1-\frac{1}{2}t,\qquad y(0)=y_0$$

را در نظر بگیرید. مقدار y_0 را طوری پیدا کنید که جواب، بر محور tها مماس باشد.

۲۹. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'+\frac{1}{4}y=3+2\cos 2t,\qquad y(0)=0$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه را بیابید و رفتار آن را به‌ازای tهای بزرگ تشریح کنید.

ب) مقدار tای را مشخص کنید که به‌ازای آن، جواب برای اولین‌بار خط $y=12$ را قطع می‌کند.

۳۰. مقدار y_0 را طوری بیابید که جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'-y=1+3\sin t,\qquad y(0)=y_0$$

وقتی $t\to\infty$ کراندار باقی بماند.

۳۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'-\frac{3}{2}y=3t+2e^t,\qquad y(0)=y_0$$

را در نظر بگیرید. مقدار y_0 را طوری بیابید که جوابهایی را که وقتی $t\to\infty$ به‌طور مثبت رشد می‌کنند از آنها که به‌طور منفی رشد می‌کنند جدا کند. جواب متناظر مقدار بحرانی y_0 وقتی $t\to\infty$ چگونه رفتار می‌کند؟

۳۲. ثابت کنید همهٔ جوابهای $2y'+ty=2$ [معادلهٔ (۴۱) متن] وقتی $t\to\infty$ به حدی میل می‌کنند و مقدار حد را بیابید.

راهنمایی: جواب عمومی ــ معادلهٔ (۴۷) ــ را در نظر بگیرید و قاعدهٔ هوپیتال را روی جملهٔ اول آن به‌کار ببرید.

۳۳. ثابت کنید اگر a و λ ثابتهایی مثبت باشند و b عدد حقیقی دلخواهی باشد، هر جواب معادلهٔ

$$y'+ay=be^{-\lambda t}$$

این خاصیت را دارد که وقتی $t\to\infty$، $y\to 0$.

راهنمایی: حالتهای $a=\lambda$ و $a\neq\lambda$ را جداگانه در نظر بگیرید.

در هر یک از مسئله‌های ۳۴ تا ۳۷، معادلهٔ خطی مرتبهٔ اولی بسازید که جوابهای آن وقتی $t\to\infty$ رفتار خواسته‌شده را داشته باشند. سپس معادله را حل کنید و ثابت کنید که جوابها واقعاً خاصیت مشخص‌شده را دارند.

۳۴. وقتی $t\to\infty$، حد هر جواب ۵ باشد.

۳۵. وقتی $t\to\infty$، همهٔ جوابها مجانب خط $y=3-t$ شوند.

۳۶. وقتی $t\to\infty$، همهٔ جوابها مجانب خط $y=3t+1$ شوند.

۳۷. وقتی $t\to\infty$، همهٔ جوابها به منحنی $y=4-t^2$ میل کنند.

۳۸. تغییر پارامترها. روش زیر را برای حل صورت کلی معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول، یعنی

$$y'+p(t)y=g(t)\qquad\text{(i)}$$

در نظر بگیرید.

الف) اگر به‌ازای هر t، $g(t) = ۰$، ثابت کنید جواب

$$y = A \exp\left[-\int p(t)dt\right] \qquad \text{(ii)}$$

است که در آن A ثابت است.

ب) اگر $g(t)$ همه جا صفر نباشد، فرض کنید جواب معادلهٔ (i) به‌صورت

$$y = A(t) \exp\left[-\int p(t)dt\right] \qquad \text{(iii)}$$

است که این‌بار در آن A تابعی از t است. با قرار دادن y در معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده، ثابت کنید $A(t)$ باید در شرط

$$A'(t) = g(t) \exp\left[\int p(t)dt\right] \qquad \text{(iv)}$$

صدق کند.

ج) $A(t)$ را که از معادلهٔ (iv) به‌دست آورده‌اید در معادلهٔ (iii) قرار بدهید و y را تعیین کنید. ثابت کنید جواب به‌دست آمده به این‌صورت با معادلهٔ (۳۳) در متن تطابق دارد. این روش به روش تغییر پارامترها مشهور است؛ در بخش ۶.۳ در ارتباط با معادلات مرتبهٔ دوم آن را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم.

در هر یک از مسئله‌های ۳۹ تا ۴۲، با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۸، معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۳۹. $y' - ۲y = t^۲ e^{۲t}$

۴۰. $y' + (۱/t)y = ۳\cos ۲t$، $t > ۰$

۴۱. $ty' + ۲y = \cos t$، $t > ۰$

۴۲. $۲y' + y = ۳t^۲$

۲.۲ معادلات جداشدنی

در بخش‌های ۲.۱ و ۱.۲ برای حل معادلات خطی به‌صورت

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad (۱)$$

که در آن a و b ثابت هستند از فرایند انتگرال‌گیری مستقیم استفاده کردیم. در اینجا نشان می‌دهیم که این روند برای دستهٔ بسیار بزرگ‌تری از معادله‌ها قابل استفاده است.

در این بخش برای نمایش متغیر مستقل به دو دلیل به‌جای t از x استفاده می‌کنیم. اول اینکه در معادلات دیفرانسیل برای متغیرها از نمادهای مختلف استفاده می‌کنند و نباید به استفاده از یک جفت خاص عادت کنید؛ خاصه اینکه اغلب x به‌عنوان متغیر ظاهر می‌شود. دیگر اینکه در این بخش، می‌خواهیم t را برای کار دیگری حفظ کنیم.

معادلهٔ مرتبهٔ اول در حالت کلی به‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (۲)$$

است. معادلات خطی را در بخش قبل بررسی کردیم؛ اما اگر معادلهٔ (۲) خطی نباشد، روش جامعی برای حل این معادله وجود ندارد. در اینجا زیرخانواده‌ای از معادلات مرتبهٔ اول را در نظر می‌گیریم که می‌توان آنها را با انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد.

برای شناسایی این خانواده از معادله‌ها، ابتدا معادلهٔ (۲) را به‌صورت

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = ۰ \qquad (۳)$$

بازنویسی می‌کنیم. همواره می‌توان با قرار دادن $M(x,y) = -f(x,y)$ و $N(x,y) = ۱$ این کار را انجام داد، اما ممکن است راههای دیگری هم وجود داشته باشند. اگر M صرفاً تابع x و N صرفاً تابع y باشد، معادلهٔ (۳) تبدیل می‌شود به

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = ۰. \qquad (۴)$$

به چنین معادله‌ای **جداشدنی** می‌گوییم، چون اگر آن را در شکل دیفرانسیلی، یعنی

$$M(x)dx + N(y)dy = ۰ \qquad (۵)$$

بنویسیم، اگر بخواهیم می‌توانیم جمله‌های شامل هر متغیر را در یکی از دو طرف معادله قرار بدهیم. به‌علاوه، شکل دیفرانسیلی (۵) متقارن‌تر است و تمایز متغیر مستقل و متغیر وابسته را کم‌رنگ می‌کند.

معادلهٔ جداشدنی را می‌توان با انتگرال‌گیری از تابعهای M و N حل کرد. این روند را با یک مثال طرح می‌کنیم و سپس آن را برای معادلهٔ کلی (۴) بررسی می‌کنیم.

مثال ۱

ثابت کنید معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^۲}{۱ - y^۲} \qquad (۶)$$

جداشدنی است و معادله‌ای برای منحنی‌های انتگرال به‌دست بیاورید.

اگر معادلهٔ (۶) را به‌صورت

$$-x^۲ + (۱ - y^۲)\frac{dy}{dx} = ۰ \qquad (۷)$$

بنویسیم، به شکل (۴) درمی‌آید و بنابراین جداشدنی است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال یادآوری می‌کنیم که اگر y تابعی از x باشد، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y)\frac{dy}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx};$$

به‌عنوان مثال اگر $f(y) = y - y^۳/۳$ آنگاه

$$\frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^۳}{۳}\right) = (۱ - y^۲)\frac{dy}{dx}.$$

پس جملهٔ دوم معادلهٔ (۷) مشتق $y - y^۳/۳$ نسبت به x است و جملهٔ اول مشتق $-x^۳/۳$. پس معادلهٔ (۷) را می‌توان به‌صورت

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^۳}{۳}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^۳}{۳}\right) = ۰$$

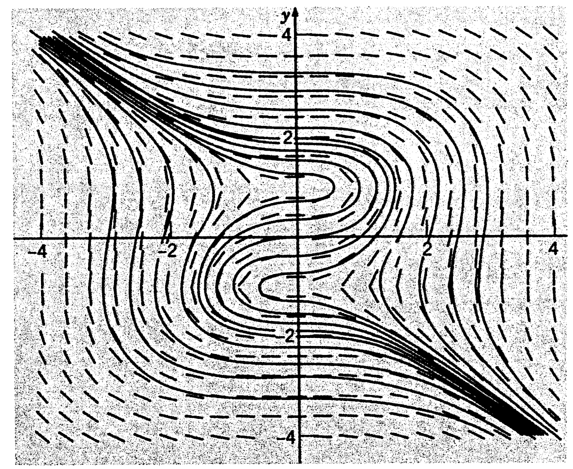
یا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^۳}{۳} + y - \frac{y^۳}{۳}\right) = ۰$$

نوشت. بنابراین با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$-x^3+3y-y^3=c \qquad (۸)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. معادلهٔ (۸) معادلهٔ منحنی‌های انتگرال معادلهٔ (۶) است. یک میدان جهت و چند منحنی انتگرال را در شکل ۱.۲.۲ نمایش داده‌ایم. هر تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ که در معادلهٔ (۸) صدق کند، جوابی برای معادلهٔ (۶) است. معادلهٔ منحنی انتگرال گذرا از نقطهٔ (x_0, y_0) را می‌توان با قرار دادن x_0 و y_0 به‌ترتیب به‌جای x و y در معادلهٔ (۸) و تعیین مقدار متناظر c به‌دست آورد.



شکل ۱.۲.۲ میدان جهت و منحنی‌های انتگرال $y' = x^2/(1-y^2)$.

اساساً همین روند را می‌توان برای هر معادلهٔ جداشدنی به‌کار گرفت. به معادلهٔ (۴) برمی‌گردیم؛ فرض کنید H_1 و H_2 به‌ترتیب تابعهای اولیهٔ M و N باشند. پس

$$H_1'(x)=M(x), \qquad H_2'(y)=N(y) \qquad (۹)$$

و معادلهٔ (۴) تبدیل می‌شود به

$$H_1'(x)+H_2'(y)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (۱۰)$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}H_2(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}H_2(y); \qquad (۱۱)$$

در نتیجه می‌توان معادلهٔ (۱۰) را به‌صورت

$$\frac{d}{dx}[H_1(x)+H_2(y)]=0 \qquad (۱۲)$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود

$$H_1(x)+H_2(y)=c \qquad (۱۳)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. هر تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ که در معادلهٔ (۱۳) صدق کند جواب معادلهٔ (۴) است؛ به‌عبارت دیگر، معادلهٔ (۱۳) جواب را به‌طور ضمنی و نه صریح تعریف می‌کند. در عمل معمولاً معادلهٔ (۱۳) با انتگرال‌گیری از جملهٔ اول نسبت به x و جملهٔ دوم نسبت به y به‌دست می‌آید.

معادلهٔ دیفرانسیل (۴) با شرط اولیهٔ

$$y(x_0)=y_0 \qquad (۱۴)$$

یک مسئلهٔ مقدار اولیه تشکیل می‌دهند. برای حل این مسئلهٔ مقدار اولیه، باید مقدار مناسب c را در معادلهٔ (۱۳) تعیین کرد. این کار را با قرار دادن $x=x_0$ و $y=y_0$ در معادلهٔ (۱۳) انجام می‌دهیم که نتیجه می‌شود

$$c=H_1(x_0)+H_2(y_0). \qquad (۱۵)$$

با قرار دادن این مقدار از c در معادلهٔ (۱۳) و توجه به اینکه

$$H_1(x)-H_1(x_0)=\int_{x_0}^{x}M(s)ds, \qquad H_2(y)-H_2(y_0)=\int_{y_0}^{y}N(s)ds$$

نتیجه می‌شود

$$\int_{x_0}^{x}M(s)ds+\int_{y_0}^{y}N(s)ds=0. \qquad (۱۶)$$

معادلهٔ (۱۶) نمایش ضمنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۴) است که در شرط اولیهٔ (۱۴) صدق می‌کند. باید به‌خاطر بسپارید که برای تعیین فرمول صریح جواب، باید معادلهٔ (۱۶) را نسبت به y به‌عنوان تابعی از x حل کرد. متأسفانه انجام این کار به‌طور تحلیلی اغلب غیرممکن است؛ در چنین حالتی می‌توانید از روشهای عددی برای یافتن جواب تقریبی مقادیر y به‌ازای مقادیر داده‌شدهٔ x استفاده کنید.

مثال ۲

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \qquad y(0)=-1 \qquad (۱۷)$$

را حل کنید و بازه‌ای را که در آن جواب موجود است تعیین کنید.

معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به‌صورت

$$2(y-1)dy=(3x^2+4x+2)dx$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از طرف چپ نسبت به y و از طرف راست نسبت به x نتیجه می‌شود

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c \qquad (۱۸)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. برای به‌دست آوردن جوابی که در شرط اولیهٔ داده‌شده صدق کند، در معادلهٔ (۱۸) قرار می‌دهیم $x = 0$ و $y = -1$، نتیجه می‌شود $c = 3$. بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیه به‌صورت ضمنی

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \qquad (۱۹)$$

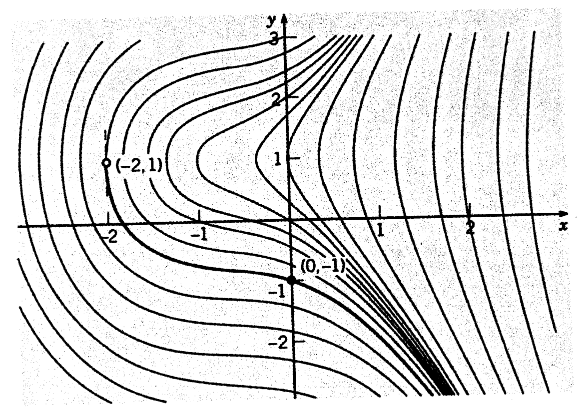
به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن جواب صریح باید معادلهٔ (۱۹) را برحسب y حل کنیم. در این حالت خاص، این کار ساده است، چون معادلهٔ (۱۹) نسبت به y چندجمله‌ای درجهٔ دوم است و می‌توانیم بنویسیم

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ (۲۰) دو جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل می‌دهد که تنها یکی از آنها در شرط اولیهٔ داده‌شده صدق می‌کند. این جواب نظیر علامت منفی در معادلهٔ (۲۰) است؛ بنابراین درنهایت

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \qquad (۲۱)$$

را به‌عنوان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۷) به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که اگر اشتباهاً علامت مثبت انتخاب می‌شد، جوابی برای همان معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آمد که در شرط $y(0) = 3$ صدق می‌کند. درنهایت، برای تعیین بازه‌ای که در آن جواب (۲۱) معتبر است، باید بازه‌ای را بیابیم که عبارت زیر رادیکال در آن مثبت است. تنها صفر حقیقی این عبارت $x = -2$ است، بنابراین بازهٔ موردنظر $x > -2$ است. جواب مسئلهٔ مقدار اولیه و چند منحنی انتگرال دیگر معادلهٔ دیفرانسیل را در شکل ۲.۲.۲ نشان داده‌ایم.



شکل ۲.۲.۲ منحنی‌های انتگرال $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$.

توجه کنید که مرز بازهٔ اعتبار جواب (۲۱) با نقطهٔ $(-2, 1)$ تعیین می‌شود که در آن خط مماس عمودی است.

مثال ۳

معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \qquad (۲۲)$$

را حل کنید و نمودار چند منحنی انتگرال را رسم کنید. همچنین جوابی را که از نقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرد پیدا کنید و بازهٔ اعتبار

جواب را تعیین کنید.

با بازنویسی معادلهٔ (۲۲) به‌صورت

$$(4 + y^3)dy = (4x - x^3)dx,$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف، ضرب در ۴ و جابه‌جایی جمله‌ها نتیجه می‌شود

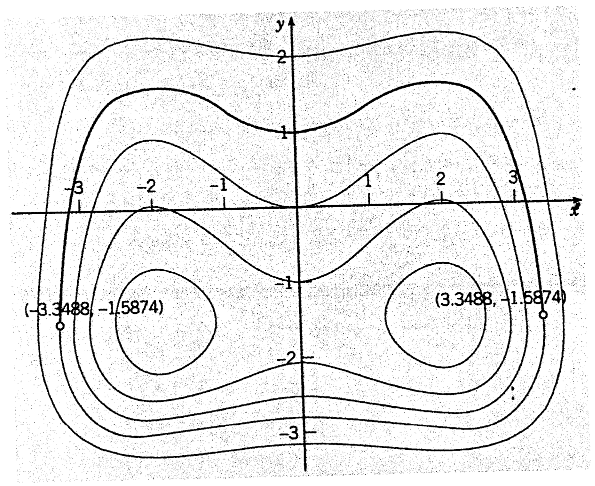
$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c \qquad (۲۳)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. هر تابع مشتق‌پذیر $y = \phi(x)$ که در (۲۳) صدق کند، جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲) است. نمودارهای (۲۳) را به‌ازای چند مقدار c در شکل ۳.۲.۲ نشان داده‌ایم.

برای یافتن جواب خاص گذرا از $(0, 1)$، در معادلهٔ (۲۳) قرار می‌دهیم $x = 0$ و $y = 1$ که نتیجه می‌شود $c = 17$. پس جواب به‌طور ضمنی عبارت است از

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \qquad (۲۴)$$

این منحنی را در شکل ۳.۲.۲ با منحنی پررنگ نشان داده‌ایم. بازهٔ اعتبار این جواب تا جایی که تابع مشتق‌پذیر بماند به هر دو طرف نقطهٔ اولیه گسترش می‌یابد. در شکل می‌بینیم که بازه جایی ختم می‌شود که به نقطه‌ای برسیم که در آن خط مماس قائم است. از معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲) نتیجه می‌شود که اینها نقاطی هستند که $4 + y^3 = 0$، یا $y = (-4)^{1/3} \cong -1{,}5874$. از معادلهٔ (۲۴) نتیجه می‌شود که مقادیر متناظر x عبارت‌اند از $x \cong \pm 3{,}3488$. این نقطه‌ها روی نمودار شکل ۳.۲.۲ مشخص شده‌اند.



شکل ۳.۲.۲ منحنی‌های انتگرال $y' = (4x - x^3)/(4 + y^3)$. جواب گذرا از $(0, 1)$ را با منحنی پررنگ نشان داده‌ایم.

تذکر ۱: گاهی معادله‌ای به‌صورت (۲)، یعنی

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

جواب ثابتی مانند $y = y_۰$ دارد. چنین جوابی را معمولاً به‌سادگی می‌توان یافت: اگر به‌ازای هر x، $f(x, y_۰) = ۰$ آنگاه $y = y_۰$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۲) است. به‌عنوان مثال معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-۳)\cos x}{۱+۲y^۲} \qquad (۲۵)$$

جواب ثابت $y = ۳$ دارد. جوابهای دیگر را می‌توان با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری به‌دست آورد.

تذکر ۲: گاهی می‌توان بررسی معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی مرتبهٔ اول را با در نظرگرفتن هر دوی x و y به‌عنوان تابعی از متغیر سوم t تسهیل کرد. در این‌صورت،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \qquad (۲۶)$$

اگر معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)} \qquad (۲۷)$$

باشد، با مقایسهٔ صورت و مخرج معادله‌های (۲۶) و (۲۷) به دستگاه

$$\frac{dx}{dt} = G(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = F(x,y) \qquad (۲۸)$$

می‌رسیم. در نگاه اول ممکن است بعید به‌نظر برسد که جایگزین کردن معادله‌ای با دو معادلهٔ دیگر به ساده‌تر شدن کار بینجامد، اما در عمل بررسی دستگاه (۲۸) ساده‌تر از معادلهٔ (۲۷) است. در فصل ۹ به بررسی چنین دستگاههای غیرخطی می‌پردازیم.

تذکر ۳: در مثال ۲ به‌دست آوردن صریح y به‌عنوان تابعی از x مشکل نبود، اما این وضع استثنا است و اغلب بهتر است که مانند مثالهای ۱ و ۳ جوابها را به همان شکل ضمنی باقی بگذاریم. پس در مسئله‌های زیر و بخش‌های دیگر، هرگاه معادلات غیرخطی ظاهر شدند، عبارت «معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید» به معنی یافتن صریح جوابها در صورت امکان است، در غیر این‌صورت جوابی بیابید که به‌طور ضمنی تعریف شده است.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۸، معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۱. $y' = x^۲/y$

۲. $y' + y^۲ \sin x = ۰$

۳. $y' = x^۲/y(۱+x^۳)$

۴. $y' = (۳x^۲ - ۱)/(۳+۲y)$

۵. $y' = (\cos^۲ x)(\cos^۲ ۲y)$

۶. $xy' = (۱-y^۲)^{۱/۲}$

۷. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

۸. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^۲}{۱+y^۲}$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۲۰،

الف) جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌طور صریح بیابید.

ب) نمودار جواب را رسم کنید.

ج) بازه‌ای را که در آن جواب تعریف‌شده حداقل به‌طور تقریبی تعیین کنید.

۹. $y' = (۱-۲x)y^۲$، $y(۰) = -۱/۶$

۱۰. $y' = (۱-۲x)/y$، $y(۱) = -۲$

۱۱. $x\,dx + ye^{-x}\,dy = ۰$، $y(۰) = ۱$

۱۲. $y' = xy^۳(۱+x^۲)^{-۱/۲}$، $y(۰) = ۱$

۱۳. $y' = ۲x/(y + x^۲y)$، $y(۰) = -۲$

۱۴. $dr/d\theta = r^۲/\theta$، $r(۱) = ۲$

۱۵. $y' = ۲x/(۱+۲y)$، $y(۲) = ۰$

۱۶. $y' = x(x^۲+۱)/۴y^۳$، $y(۰) = -۱/\sqrt{۲}$

۱۷. $y' = (۳x^۲ - e^x)/(۲y - ۵)$، $y(۰) = ۱$

۱۸. $y' = (e^{-x} - e^x)/(۳+۴y)$، $y(۰) = ۱$

۱۹. $\sin ۲x\,dx + \cos ۳y\,dy = ۰$، $y(\pi/۲) = \pi/۳$

۲۰. $y^۲(۱-x^۲)^{۱/۲}dy = \arcsin x\,dx$، $y(۰) = ۱$

بعضی از خواسته‌های مسئله‌های ۲۱ تا ۲۸ را هم می‌توان با حل تحلیلی به‌دست آورد و هم با رسم جوابهای عددی. سعی کنید مزایا و معایب هرکدام از این روشها را بگویید.

۲۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{(۱+۳x^۲)}{(۳y^۲ - ۶y)}, \qquad y(۰) = ۱$$

را حل کنید و بازه‌ای را که جواب در آن اعتبار دارد مشخص کنید.

راهنمایی: برای تعیین بازهٔ تعریف، به نقاطی توجه کنید که در آن منحنی انتگرال مماس قائم دارد.

۲۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{۳x^۲}{(۳y^۲ - ۴)}, \qquad y(۱) = ۰$$

را حل کنید و بازه‌ای را که جواب در آن اعتبار دارد تعیین کنید.

راهنمایی: برای تعیین بازهٔ تعریف به نقاطی توجه کنید که در آن منحنی انتگرال مماس قائم دارد.

۲۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = ۲y^۲ + xy^۲, \qquad y(۰) = ۱$$

را حل کنید و تعیین کنید که جواب کجا مقدار مینیمم را اختیار می‌کند.

۲۴. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{(۲ - e^x)}{(۳+۲y)}, \qquad y(۰) = ۰$$

را حل کنید و تعیین کنید جواب کجا مقدار ماکزیمم را اختیار می‌کند.

۲۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{۲\cos ۲x}{(۳+۲y)}, \qquad y(۰) = -۱$$

را حل کنید و تعیین کنید جواب کجا مقدار ماکزیمم را اختیار می‌کند.

۲۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = 2(1+x)(1+y^2), \qquad y(0)=0$$

را حل کنید و تعیین کنید جواب کجا مقدار ماکزیمم را اختیار می‌کند.

۲۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{ty(4-y)}{3}, \qquad y(0)=y_0$$

را در نظر بگیرید.

الف) تعیین کنید که رفتار جواب چگونه با افزایش t به مقدار اولیهٔ y_0 بستگی دارد.

ب) فرض کنید که $y_0 = 0.5$. زمان T را بیابید که در آن جواب برای اولین‌بار به مقدار ۳٫۹۸ می‌رسد.

۲۸. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{ty(5-y)}{(1+t)}, \qquad y(0)=y_0>0$$

را در نظر بگیرید.

الف) تعیین کنید که وقتی $t\to\infty$، جواب چگونه رفتار می‌کند.

ب) اگر $y_0 = 2$، زمان T را بیابید که در آن جواب برای اولین‌بار به مقدار ۴٫۹۹ می‌رسد.

ج) دامنهٔ مقادیر اولیه‌ای را مشخص کنید که به‌ازای آنها، جواب در زمان $t=2$ در بازهٔ $4.99<y<5.01$ قرار می‌گیرد.

۲۹. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d}$$

را، که در آن a، b، c و d ثابت هستند، حل کنید.

معادلات همگن. اگر طرف راست معادلهٔ $dy/dx = f(x,y)$ را بتوان به‌صورت تابعی از نسبت y/x نمایش داد، معادله را همگن[1] می‌گوییم. چنین معادله‌هایی را همواره می‌توان با تغییر متغیر وابسته به معادله‌ای جداشدنی تبدیل کرد. در مسئلهٔ ۳۰ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلات همگن مرتبهٔ اول را حل کرد.

۳۰. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y} \qquad \text{(i)}$$

را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید معادلهٔ (i) را می‌توان به‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)-4}{1-(y/x)} \qquad \text{(ii)}$$

نوشت و بنابراین معادلهٔ (i) همگن است.

۱. کلمهٔ همگن در ریاضیات معانی مختلفی دارد. معادلات همگن که در اینجا بررسی می‌شوند ارتباطی با معادلات همگن که در فصل ۳ و پس از آن ظاهر می‌شوند ندارند.

ب) متغیر وابستهٔ جدید v را معرفی کنید که $v = y/x$ یا $y = xv(x)$. dy/dx را برحسب x، v و dv/dx بنویسید.

ج) y و dy/dx معادلهٔ (ii) را با عبارتهای قسمت (ب) برحسب v و dv/dx جایگزین کنید. ثابت کنید معادلهٔ دیفرانسیل حاصل عبارت است از

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-4}{1-v}$$

یا

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-4}{1-v}. \qquad \text{(iii)}$$

توجه کنید که معادلهٔ (iii) جداشدنی است.

د) معادلهٔ (iii) را حل کنید و v را به‌طور ضمنی برحسب x به‌دست بیاورید.

هـ) جواب معادلهٔ (i) را با قرار دادن y/x به‌جای v در جواب قسمت (د) به‌دست بیاورید.

و) میدان جهت و چند منحنی انتگرال معادلهٔ (i) را به‌دست بیاورید. یادآوری می‌کنیم که طرف راست معادلهٔ (i) واقعاً فقط به نسبت y/x بستگی دارد. این یعنی منحنی انتگرال در طول هر خط گذرا از مبدأ شیب ثابتی دارد، هرچند که شیب از یک خط به دیگری متفاوت است. بنابراین میدان جهت و منحنی‌های انتگرال نسبت به مبدأ متقارن هستند. آیا این تقارن در نمودار شما واضح است؟

روشی را که خطوط اساسی آن را در مسئلهٔ ۳۰ طرح کرده‌ایم می‌توان برای هر معادلهٔ همگن به‌کار برد؛ یعنی جایگزینی $y = xv(x)$، معادلهٔ همگن را به معادله‌ای جداشدنی تبدیل می‌کند. این معادله را می‌توان با انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد و با قرار دادن y/x به‌جای v، جواب معادلهٔ اولیه داده می‌شود. در هر یک از مسئله‌های ۳۱ تا ۳۸،

الف) ثابت کنید معادلهٔ داده‌شده همگن است.

ب) معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید.

ج) یک میدان جهت و چند منحنی انتگرال را رسم کنید. آیا آنها نسبت به مبدأ متقارن هستند؟

۳۱. $dy/dx = (x^2+xy+y^2)/x^2$

۳۲. $dy/dx = (x^2+3y^2)/2xy$

۳۳. $dy/dx = (4y-3x)/(2x-y)$

۳۴. $dy/dx = -(4x+3y)/(2x+y)$

۳۵. $dy/dx = (x+3y)/(x-y)$

۳۶. $(x^2+3xy+y^2)dx - x^2dy = 0$

۳۷. $dy/dx = (x^2-3y^2)/2xy$

۳۸. $dy/dx = (3y^2-x^2)/2xy$

۳.۲ مدل‌سازی با معادلات مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل توجه غیرریاضیدان‌ها را جلب می‌کند، چون می‌توان از آن برای بررسی مسئله‌های مختلفی در فیزیک، بیولوژی و علوم اجتماعی استفاده کرد. یک دلیل این موضوع این است که مدلهای ریاضی و جوابهایشان منجر به معادله‌هایی می‌شوند که متغیرها و پارامترهای مسئله را به هم مرتبط می‌کنند. معمولاً با استفاده از این معادله‌ها می‌توانید پیش‌بینی کنید که روندی طبیعی در شرایط متفاوت چگونه رفتار می‌کند. معمولاً پارامترهای

مدل ریاضی را به‌سادگی می‌توان به‌طور گسترده‌ای تغییر داد، در حالی که همین کار در چارچوبی تجربی — اگر غیرممکن نباشد — بسیار وقت‌گیر و یا گران است. به هر حال، هم مدل‌سازی ریاضی و هم آزمایش یا مشاهده بسیار مهم‌اند و در تحقیقات علمی به نوعی نقش مکمل دارند. اعتبار هر مدل ریاضی با مقایسهٔ پیش‌بینی‌هایش با نتایج تجربی تأیید می‌شود. از طرف دیگر، با تحلیلهای ریاضی می‌توان مطمئن‌ترین جهتهای کاوش تجربی را مشخص کرد، و می‌توان با دقت بسیار بالایی مشخص کرد که کدام داده‌های تجربی سودمندتر هستند.

در بخش‌های ۱.۱ و ۲.۱ چند مدل سادهٔ ریاضی را صورت‌بندی و بررسی کردیم. با تکرار نکات اصلی و تعمیم نتایج به‌دست آمده در آن بخش‌ها شروع می‌کنیم. صرف‌نظر از زمینهٔ کاربرد، در روند مدل‌سازی ریاضی همواره سه گام مشخص وجود دارد.

ساختن مدل. در این گام موضوع فیزیکی را به عبارتهای ریاضی ترجمه می‌کنیم و معمولاً این کار را با گامهای فهرست‌شده در انتهای بخش ۱.۱ انجام می‌دهیم. مهم‌ترین کار در این مرحله شاید بیان روشن اصول فیزیکی‌ای باشد که پذیرفته‌ایم که بر روند حاکم‌اند — چیزی از این دست که مشاهده شده است که تحت شرایطی، حرارت از محیط گرم‌تر به محیط سردتر با نرخی متناسب با اختلاف دما جابه‌جا می‌شود، اینکه اجسام طبق قوانین حرکت نیوتن حرکت می‌کنند و یا جمعیت حشرات ایزوله‌شده با نرخی متناسب با جمعیت فعلی آنها رشد می‌کند. همهٔ این حکمها شامل نرخ تغییر (مشتق) هستند و در نتیجه، وقتی به‌صورت ریاضی بیان شوند به معادلهٔ دیفرانسیل منجر می‌شوند. این معادلهٔ دیفرانسیل یک مدل ریاضی این روند است.

توجه به این موضوع مهم است که معادله‌های ریاضی معمولاً فرایند واقعی را تنها به‌طور تقریبی توصیف می‌کنند. به‌عنوان مثال، اجسامی که با سرعتهایی در حد سرعت نور حرکت می‌کنند تابع قوانین نیوتن نیستند، همان‌طور که قبلاً گفتیم جمعیت حشرات به‌خاطر کمبود غذا و یا مکان، بی‌کران رشد نمی‌کند و انتقال حرارت تحت تأثیر عواملی غیر از تفاوت درجهٔ حرارت هم هست. بنابراین همواره باید از این محدودیتهای مدل آگاه باشید و تنها زمانی از آن استفاده کنید که دقیق بودنش به اندازهٔ کافی موجه باشد. به عبارت دیگر، می‌توانید این دیدگاه را بپذیرید که معادله‌های ریاضی دقیقاً اتفاقات مدل ساده‌شدهٔ فیزیکی را، که طوری ساخته شده است که مهم‌ترین ویژگیهای فرایند واقعی را مجسم کند، توصیف می‌کند گاهی در روند مدل‌سازی ریاضی باید مفهوم روند گسسته را با روند پیوسته جایگزین کنیم. به‌عنوان مثال، تعداد اعضای جمعیت حشرات با مقادیر گسسته تغییر می‌کند؛ اما اگر جمعیت بزرگ باشد موجه است که آن را متغیری پیوسته در نظر بگیریم و یا حتی از مشتق آن صحبت کنیم.

تحلیل مدل. پس از صورت‌بندی ریاضی مسئله، معمولاً باید جواب یک یا چند معادلهٔ دیفرانسیل را به‌دست بیاوریم و یا اگر نشد، تا حد ممکن اطلاعاتی دربارهٔ خواص جواب به‌دست بیاوریم. ممکن است که این مسئلهٔ ریاضی بسیار دشوار باشد و در چنین موقعیتی، ممکن است تقریبهای بیشتری لازم باشد تا بتوان مسئله را به‌طور ریاضی بررسی کرد. به‌عنوان مثال ممکن است معادله‌ای غیرخطی را با معادله‌ای خطی تقریب بزنیم و یا ضرایبی را که به آهستگی تغییر می‌کنند با ثابت جایگزین کنیم. طبیعتاً، هر تقریبی از این دست باید از منظر فیزیکی ارزیابی شود تا مطمئن باشیم که مسئلهٔ ساده‌شدهٔ ریاضی همچنان جنبه‌های اصلی فرایند فیزیکی‌ای را که در حال بررسی آن هستیم نشان می‌دهد. در عین حال، با اطلاع از جنبه‌های فیزیکی مسئله می‌توانیم از تقریبهای ریاضی موجهی استفاده کنیم که به تحلیل مسئلهٔ ریاضی کمک کنند. این تعامل بین درک پدیدهٔ فیزیکی و اطلاع از روشهای ریاضی و محدودیتهای آنها بهترین وجه مشخصهٔ ریاضیات کاربردی است و برای ساختن موفق مدلهای ریاضی برای فرایندهای پیچیدهٔ فیزیکی گریز از آن ممکن نیست.

مقایسه با نتایج تجربی و یا مشاهده. درنهایت، پس از به‌دست آوردن جواب (یا حداقل به‌دست آوردن اطلاعاتی دربارهٔ آن)، باید این اطلاعات را در چارچوبی که مسئله در آن مطرح شده تعبیر کنید. به‌ویژه باید همواره مواظب باشید که جواب، از منظر فیزیکی موجه به نظر برسد. در صورت امکان مقادیر جواب را در چند نقطهٔ منتخب محاسبه کنید و آنها را با مقادیر مشاهده‌شدهٔ تجربی مقایسه کنید، یا بررسی کنید که رفتار جواب پس از زمانی طولانی با مشاهدات سازگار است یا نه و یا جوابهای نظیر مقادیر خاصی از پارامترهای مسئله را بررسی کنید. البته، اینکه جواب ریاضی به نظر موجه برسد تضمین نمی‌کند که جواب درست باشد. اما اگر پیش‌بینی‌های مدل ریاضی به‌طور جدی‌ای با مشاهدات سیستم فیزیکی‌ای که قرار است توصیف شود ناسازگار باشد، مدل ریاضی نیاز به اصلاح دارد یا باید مشاهدات را با دقت بیشتری انجام داد.

مثال ۱
اختلاط

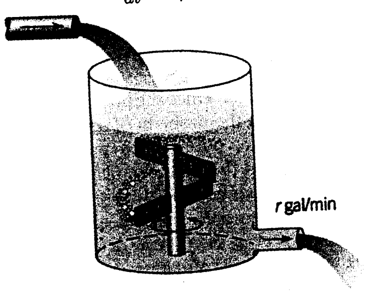
مخزنی در زمان $t = 0$ حاوی Q_0 پوند نمک حل‌شده در ۱۰۰ گالن آب است؛ شکل ۱.۳.۲ را ببینید. فرض کنید آب شامل $\frac{1}{4}$ پوند نمک در هر گالن با نرخ r gal/min وارد مخزن می‌شود و مخلوط کاملاً یکنواخت با همان نرخ از مخزن خارج می‌شود. مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای بنویسید که این فرایند اختلاط را تشریح کند. مقدار نمک $Q(t)$ را در هر زمان بیابید و همچنین مقدار حدی Q_L را که پس از زمان بسیار طولانی موجود است بیابید. اگر $r = 3$ و $Q_0 = 2Q_L$، زمان T را طوری بیابید که پس از آن سطح نمک موجود در محدودهٔ ۲٪ از Q_L قرار بگیرد. همچنین نرخ جریان موردنیاز را بیابید اگر بخواهیم مقدار T از ۴۵ دقیقه بیشتر نشود.

فرض می‌کنیم که در مخزن نمک تولید نمی‌شود و از بین نمی‌رود، بنابراین تغییرات مقدار نمک تنها به‌دلیل خروج و ورود جریان به مخزن است. دقیق‌تر بگوییم، نرخ تغییرات نمک در مخزن، یعنی dQ/dt، برابر با تفاضل نرخ ورود و نرخ خروج نمک است؛ یعنی

$$\frac{dQ}{dt} = \text{نرخ ورود} - \text{نرخ خروج} \qquad (1)$$

نرخ ورود نمک به مخزن حاصلضرب غلظت $\frac{1}{4}$ lb/gal در نرخ r gal/min است که برابر است با $(r/4)$ lb/min. برای یافتن نرخ خروج نمک هم باید غلظت نمک در مخزن را در نرخ خروج جریان، یعنی r gal/min ضرب کنیم. چون نرخ ورود و خروج جریان برابر است، حجم آب مخزن همان ۱۰۰ گالن می‌ماند و چون مخلوط کاملاً یکنواخت است، غلظت در سراسر مخزن ثابت است و برابر است با $(Q(t)/100)$ lb/gal. بنابراین نرخ خروج نمک، $(rQ(t)/100)$ lb/min است. پس معادلهٔ دیفرانسیل این فرایند عبارت است از

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100} \qquad (2)$$



شکل ۱.۳.۲ مخزن آب مثال ۱.

با شرط اولیهٔ

$$Q(۰) = Q_۰. \qquad (۳)$$

اگر از منظر فیزیکی به این مسئله نگاه کنیم، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که درنهایت، مخلوط ابتدایی در مخزن با مخلوطی که وارد مخزن شده و غلظتش $\frac{۱}{۴}$ lb/gal است جایگزین می‌شود. در نتیجه انتظار داریم که مقدار نمک درنهایت خیلی نزدیک به ۲۵ پوند باشد. همچنین مقدار حدی $Q_L = ۲۵$ را با صفر قراردادن dQ/dt در مسئلهٔ (۲) و حل معادلهٔ جبری حاصل برحسب Q به‌دست می‌آوریم.

برای حل تحلیلی مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) و (۳)، توجه کنید که معادلهٔ (۲) هم خطی است و هم جدایی‌پذیر. با بازنویسی آن به شکل استاندارد معادلهٔ خطی، تبدیل می‌شود به

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{۱۰۰} = \frac{r}{۴}; \qquad (۴)$$

پس عامل انتگرال‌ساز $e^{rt/۱۰۰}$ است و جواب عمومی عبارت است از

$$Q(t) = ۲۵ + ce^{-rt/۱۰۰} \qquad (۵)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. برای برآورده شدن شرط اولیهٔ (۳) باید $c = Q_۰ - ۲۵$. بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) و (۳) عبارت است از

$$Q(t) = ۲۵ + (Q_۰ - ۲۵)e^{-rt/۱۰۰} \qquad (۶)$$

یا

$$Q(t) = ۲۵(۱ - e^{-rt/۱۰۰}) + Q_۰ e^{-rt/۱۰۰} \qquad (۷)$$

از معادلهٔ (۶) یا (۷) نتیجه می‌شود که وقتی $t \to \infty$، $Q(t) \to ۲۵(\text{lb})$؛ بنابراین مقدار حدی Q_L برابر ۲۵ است که شهود فیزیکی ما را تأیید می‌کند. علاوه بر این $Q(t)$ با افزایش r با سرعت بیشتری به حد نزدیک می‌شود. در تعبیر جواب (۷)، توجه کنید که جملهٔ دوم طرف راست قسمتی از نمک اولیه است که در زمان t باقی مانده، در حالی که جملهٔ اول مقداری از نمک است که به‌خاطر اختلاط به مخزن وارد شده است. نمودارهای جواب متناظر $r = ۳$ را به‌ازای چند مقدار $Q_۰$ در شکل ۲.۳.۲ نشان داده‌ایم.

اکنون فرض کنید که $r = ۳$ و $Q_۰ = ۲Q_L = ۵۰$؛ در این‌صورت معادلهٔ (۶) تبدیل می‌شود به

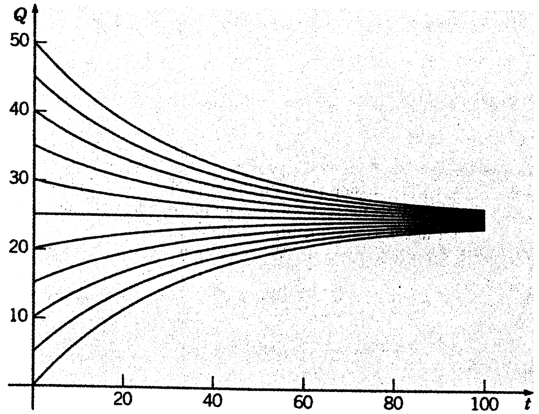
$$Q(t) = ۲۵ + ۲۵e^{-۰٫۰۳t}. \qquad (۸)$$

چون ۲٪ از ۲۵ برابر ۰٫۵ است، می‌خواهیم زمان Tای را پیدا کنیم که در آن $Q(t)$ برابر ۲۵٫۵ است. با قرار دادن $t = T$ و $Q = ۲۵٫۵$ در معادلهٔ (۸) و حل آن نسبت به T نتیجه می‌شود

$$T = \frac{(\ln ۵۰)}{۰٫۰۳} \cong ۱۳۰٫۴(\text{min}). \qquad (۹)$$

برای تعیین r طوری که $T = ۴۵$، به معادلهٔ (۶) برمی‌گردیم و قرار می‌دهیم $t = ۴۵$، $Q_۰ = ۵۰$، $Q(t) = ۲۵٫۵$ و معادله را نسبت به r حل می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$r = \left(\frac{۱۰۰}{۴۵}\right) \ln ۵۰ \cong ۸٫۶۹ \ \frac{\text{gal}}{\text{min}}. \qquad (۱۰)$$



شکل ۲.۳.۲ جوابهای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) و (۳) متناظر $r = ۳$ و به‌ازای چند مقدار $Q_۰$.

چون این مثال فرضی است، اعتبار مدل مورد سؤال نیست. اگر نرخ اختلاط همان‌طور باشد که گفتیم و اگر غلظت نمک در مخزن یکنواخت باشد، معادلهٔ دیفرانسیل (۱) توصیف دقیق این فرایند است. هرچند این مثال خاص اهمیت خاصی ندارد، مدلهایی از این دست معمولاً در مسئلهٔ آلودگی دریاچه‌ها انتشار دارو در عضوی از بدن به‌جای مخزن آب نمک به‌کار گرفته می‌شوند. به‌طور مشابه، در بعضی از حالتها غلظت به هیچ‌وجه یکنواخت نیست. درنهایت نرخ ورود و خروج ممکن است متفاوت باشد که یعنی در مسئله باید مقدار سیال را هم در نظر گرفت.

مثال ۲
سود مرکب

فرض کنید مقداری پول به بانک یا بنگاهی مالی که به‌صورت سالانه بهره‌ای با نرخ r می‌پردازد، سپرده شده باشد. مقدار سرمایه‌گذاری $S(t)$ در هر زمان به دفعاتی که سود ترکیب می‌شود و همچنین به نرخ سود بستگی دارد. بنگاه‌های مالی دربارهٔ ترکیب سود سیاست‌های متفاوتی دارند؛ بعضی آن را ماهانه، بعضی هفتگی و بعضی حتی روزانه ترکیب می‌کنند. اگر فرض کنیم که این ترکیب به‌صورت پیوسته انجام می‌شود، می‌توانیم مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای تنظیم کنیم که رشد سرمایه‌گذاری را توصیف کند.

نرخ تغییر مقدار سرمایه‌گذاری dS/dt است و این کمیت برابر با نرخی است که به آن سود پرداخت می‌شود، که برابر است با حاصلضرب نرخ r در مقدار فعلی سرمایه‌گذاری $S(t)$. پس

$$\frac{dS}{dt} = rS \qquad (۱۱)$$

معادلهٔ دیفرانسیل این فرایند است. فرض کنیم که مقدار اولیهٔ سرمایه‌گذاری در یک زمان مشخص هم معلوم باشد، مثلاً

$$S(۰) = S_۰. \qquad (۱۲)$$

آنگاه جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) و (۱۲) موجودی $S(t)$ حساب را در هر زمان t مشخص می‌کند. این مسئلهٔ مقدار اولیه به‌سادگی حل می‌شود، چون معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱) هم خطی است و هم جداشدنی. در نتیجه، با حل معادله‌های (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود

$$S(t) = S_۰ e^{rt}. \qquad (۱۳)$$

پس حساب بانکی‌ای با سود مرکبِ پیوسته به‌طور نمایی رشد می‌کند.

اکنون می‌خواهیم نتایج حاصل از این مدل پیوسته را با حالتی که ترکیب در مقاطع زمانی مشخص رخ می‌دهد مقایسه کنیم. اگر سود سالانه ترکیب شود، پس از t سال باید

$$S(t) = S_0(1+r)^t.$$

اگر سود دوبار در سال ترکیب شود، پس از پایان ۶ ماه مقدار سرمایه‌گذاری برابر $S_0[1+(r/2)]$ است، و پس از پایان ۱ سال برابر است با $S_0[1+(r/2)]^2$. بنابراین پس از t سال باید

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

در حالت کلی، اگر سود m بار در سال ترکیب شود آنگاه

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{14}$$

رابطهٔ بین فرمولهای (۱۳) و (۱۴) واضح‌تر می‌شود اگر از حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌یاد بیاوریم که

$$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0e^{rt}.$$

همین مدل را می‌توان به همین صورت برای شکل کلی‌تری از سرمایه‌گذاری که در آن سود و احتمالاً افزایش سرمایه هم دخیل است به‌کار برد. به این ترتیب، از این به بعد r را به‌عنوان نرخ بازگشت سرمایه در نظر می‌گیریم.

در جدول ۱.۳.۲ اثر تغییر دفعات ترکیب سود را به‌ازای نرخ بازگشت r برابر با ۸٪ نشان داده‌ایم. ستون دوم و سوم به‌ترتیب با استفاده از معادلهٔ (۱۴) برای ترکیب سه‌ماه یک‌بار و روزانه محاسبه شده است و ستون چهارم با استفاده از معادلهٔ (۱۳) برای ترکیب پیوسته محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهند که دفعات ترکیب معمولاً چندان مهم نیستند. به‌عنوان مثال، در بازه‌ای ۱۰ ساله، تفاوت بین سود پرداختی سه‌ماه یک‌بار و پیوسته به‌ازای ۱۰۰۰ دلار سرمایه‌گذاری، ۱۷٫۵ دلار و یا کمتر از ۲ دلار در سال است. تفاوت برای نرخهای بالاتر سود کمی بیشتر و برای نرخهای پایین‌تر کمتر خواهد بود. در ردیف اول جدول می‌بینیم که نرخ بازگشت ۸٪ برای ترکیب سه‌ماه یک‌بار منجر به سود سالیانهٔ ۸٫۲۴٪ و برای ترکیب پیوسته و یا روزانه منجر به سود سالانهٔ ۸٫۳۳٪ می‌شود.

جدول ۱.۳.۲ رشد سرمایه با نرخ بازگشت $r = 8\%$ برای چند حالت ترکیب سود

سال	$S(t)/S(t_0)$ از معادلهٔ (۱۴)		$S(t)/S(t_0)$ از معادلهٔ (۱۳)
	$m=4$	$m=365$	
۱	۱٫۰۸۲۴	۱٫۰۸۳۳	۱٫۰۸۳۳
۲	۱٫۱۷۱۷	۱٫۱۷۳۵	۱٫۱۷۳۵
۵	۱٫۴۸۵۹	۱٫۴۹۱۸	۱٫۴۹۱۸
۱۰	۲٫۲۰۸۰	۲٫۲۲۵۳	۲٫۲۲۵۵
۲۰	۴٫۸۷۵۴	۴٫۹۵۲۲	۴٫۹۵۳۰
۳۰	۱۰٫۷۶۵۲	۱۱٫۰۲۰۳	۱۱٫۰۲۳۲
۴۰	۲۳٫۷۶۹۹	۲۴٫۵۲۳۹	۲۴٫۵۳۲۵

به حالت سود پیوسته برمی‌گردیم. فرض کنید ممکن است علاوه بر سود سرمایه، به سرمایه اضافه و یا از آن برداشت شود. اگر فرض کنیم که اضافه و یا برداشت سرمایه با نرخ ثابت k انجام می‌شود، معادلهٔ (۱۱) را باید با

$$\frac{dS}{dt} = rS + k$$

یا، به‌صورت استاندارد،

$$\frac{dS}{dt} - rS = k \tag{15}$$

عوض کنیم که در آن k برای سپرده‌گذاری مثبت است و برای برداشت منفی است.

معادلهٔ (۱۵) خطی است و عامل انتگرال‌ساز آن e^{-rt} است. بنابراین جواب عمومی آن به‌صورت

$$S(t) = ce^{rt} - \left(\frac{k}{r}\right)$$

است که در آن c ثابتی دلخواه است. برای برآورده شدن شرط اولیهٔ (۱۲) باید $c = S_0 + (k/r)$. پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵)، (۱۲) عبارت است از

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt}-1). \tag{16}$$

جملهٔ اول عبارت (۱۶) قسمتی از $S(t)$ است که به‌واسطهٔ بازگشت انباشته شدهٔ مقدار اولیهٔ S_0 پدید می‌آید و جملهٔ دوم به‌واسطهٔ سپرده‌گذاری و یا برداشت با نرخ k به‌وجود آمده است.

مزیت بیان مسئله به این‌صورت کلی بدون مقادیر مشخص S_0، r و یا k این است که فرمول (۱۶) برای $S(t)$ کاملاً عمومی است. با این فرمول به‌سادگی می‌توانید نتیجهٔ چند برنامهٔ سرمایه‌گذاری با نرخهای بازگشت متفاوت را مقایسه کنید.

به‌عنوان مثال، فرض کنید کسی در سن ۲۵ سالگی یک حساب بازنشستگی شخصی باز کند و سالانه ۲۰۰۰ دلار به‌طور پیوسته سرمایه‌گذاری کند. فرض کنید که نرخ بازگشت ۸٪ باشد، موجودی این حساب در سن ۶۵ سالگی او چقدر است؟ در اینجا $S_0 = 0$، $r = 0.08$ و $k = 2000$ و می‌خواهیم $S(40)$ را محاسبه کنیم. از معادلهٔ (۱۶) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S(40) &= (25{,}000)(e^{3.2}-1) \\ &= 588{,}313 \text{ دلار} \end{aligned} \tag{17}$$

این جالب است که مجموع سرمایه‌گذاری ۸۰٬۰۰۰ دلار است. بنابراین مابقی ۵۰۸٬۳۱۳ دلار از بازگشت مرکب سرمایه‌گذاری حاصل شده است. موجودی پس از ۴۰ سال نسبت به نرخ سود نسبتاً حساس است؛ به‌عنوان مثال اگر $r = 0.075$، $S(40) = 508{,}948$ و اگر $r = 0.085$، $S(40) = 681{,}508$.

اکنون می‌خواهیم فرضهای مدل را بررسی کنیم. ابتدا فرض کردیم که سود بازگشتی به‌طور پیوسته ترکیب می‌شود و اینکه سرمایهٔ اضافی نیز به‌طور پیوسته سرمایه‌گذاری می‌شود. هیچ‌کدام از اینها در واقع درست نیستند. همچنین فرض کردیم که نرخ بازگشت r در تمام دورهٔ تحت بررسی ثابت است، در حالی که ممکن است این نرخ به‌طور قابل توجهی نوسان کند. با اینکه نمی‌توانیم نرخهای آینده را به‌طور قطعی پیش‌بینی کنیم، می‌توانیم از عبارت (۱۶) برای تعیین اثر تقریبی تفاوت در نرخهای پیش‌بینی‌شده استفاده کنیم؛ البته در این حالت جواب ممکن است بسیار پیچیده‌تر از معادلهٔ (۱۶) باشد.

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵)، (۱۲) و جواب (۱۶) را می‌توان برای تحلیل اموری مانند حقوق بازنشستگی، وام مسکن و وام خودرو به‌کار برد.

مثال ۳
مواد شیمیایی در دریاچه

فرض کنید دریاچه‌ای در ابتدا شامل ۱۰ میلیون گالن آب تمیز است. آبی حاوی ماده‌ای شیمیاییِ ناخواسته با نرخ ۵ میلیون gal/yr به داخل دریاچه جریان می‌یابد و مخلوط به‌دست آمده با همان نرخ از دریاچه خارج می‌شود. غلظت $\gamma(t)$ مادهٔ شیمیایی در آب ورودی به دریاچه با زمان به‌طور متناوب طبق $\gamma(t) = ۲ + \sin ۲t$ g/gal تغییر می‌کند. مدلی ریاضی برای این فرایند جریان بسازید و مقدار مادهٔ شیمیایی در دریاچه را در هر زمان تعیین کنید. جواب را رسم کنید و تأثیر تغییرات غلظت مادهٔ شیمیایی ورودی را تشریح کنید.

چون جریان ورودی و خروجی آب یکسان است، مقدار آب در دریاچه به میزان ثابت $۱۰^{۷}$ گالن باقی می‌ماند. فرض کنید زمان را با t نشان بدهیم و آن را با سال اندازه بگیریم و مادهٔ شیمیایی را با $Q(t)$ نشان بدهیم و با گرم اندازه‌گیری کنیم. این مثال شبیه مثال ۱ است و همان اصول بر ورود و خروج جریان حاکم‌اند. پس

$$\frac{dQ}{dt} = \text{نرخ ورودی} - \text{نرخ خروجی}$$

که در آن «نرخ ورودی» و «نرخ خروجی» به‌ترتیب نرخهایی هستند که مادهٔ شیمیایی به داخل و یا خارج دریاچه جریان می‌یابد. نرخ جریان مادهٔ شیمیایی به داخل با

$$\text{نرخ ورودی} = (۵ \times ۱۰^{۶})\frac{\text{gal}}{\text{yr}} \times (۲ + \sin ۲t)\frac{\text{g}}{\text{gal}} \qquad (۱۸)$$

داده می‌شود. غلظت مادهٔ شیمیایی در دریاچه $Q(t)/۱۰^{۷}$ g/gal است، بنابراین نرخ خروج جریان عبارت است از

$$\text{نرخ خروجی} = (۵ \times ۱۰^{۶})\frac{\text{gal}}{\text{yr}}[Q(t)/۱۰^{۷}]\frac{\text{g}}{\text{gal}} = Q(t)/۲\,\frac{\text{g}}{\text{yr}}. \qquad (۱۹)$$

پس به معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = (۵ \times ۱۰^{۶})(۲ + \sin ۲t) - \frac{Q(t)}{۲} \qquad (۲۰)$$

می‌رسیم که در آن واحد هر جمله g/yr است.

برای اینکه راحت‌تر بتوانیم با ضریبها کار کنیم، از متغیر جدید $q(t)$ که با $Q(t) = ۱۰^{۶}q(t)$ یا $q(t) = Q(t)/۱۰^{۶}$ تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم؛ پس $q(t)$ را با میلیون گرم یا مگاگرم (تن در دستگاه متریک) اندازه می‌گیریم. اگر این متغیر را در معادلهٔ (۲۰) قرار بدهیم، همهٔ جمله‌های شامل عامل $۱۰^{۶}$ از طرفین ساده می‌شوند. اگر جملهٔ شامل $q(t)$ را هم به طرف چپ معادله ببریم، درنهایت می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dq}{dt} + \frac{۱}{۲}q = ۱۰ + ۵\sin ۲t. \qquad (۲۱)$$

در ابتدا هیچ مادهٔ شیمیایی‌ای در دریاچه وجود نداشت؛ بنابراین شرط اولیه عبارت است از

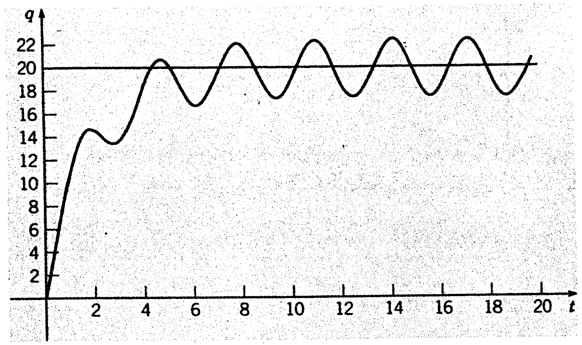
$$q(۰) = ۰. \qquad (۲۲)$$

معادلهٔ (۲۱) خطی است و با اینکه طرف راست تابع زمان است، ضریب q ثابت است؛ پس عامل انتگرال‌ساز $e^{t/۲}$ است. با ضرب معادلهٔ (۲۱) در این عامل و انتگرال‌گیری از معادلهٔ حاصله، جواب عمومی به‌دست می‌آید که عبارت است از

$$q(t) = ۲۰ - \frac{۴۰}{۱۷}\cos ۲t + \frac{۱۰}{۱۷}\sin ۲t + ce^{-t/۲}. \qquad (۲۳)$$

از شرط اولیهٔ (۲۲) نتیجه می‌شود $c = -۳۰۰/۱۷$، بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۱) و (۲۲) عبارت است از

$$q(t) = ۲۰ - \frac{۴۰}{۱۷}\cos ۲t + \frac{۱۰}{۱۷}\sin ۲t - \frac{۳۰۰}{۱۷}e^{-t/۲}. \qquad (۲۴)$$



شکل ۳.۳.۲ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۱) و (۲۲).

نمودار جواب (۲۴) را به‌همراه خط $q = ۲۰$ در شکل ۳.۳.۲ رسم کرده‌ایم. جملهٔ نمایی جواب به‌ازای tهای کوچک مهم است، اما با افزایش t به‌سرعت از بین می‌رود. پس از آن، جواب نوسانی حول مقدار ثابت $q = ۲۰$ دارد که به‌واسطهٔ جمله‌های $\sin ۲t$ و $\cos ۲t$ به‌وجود می‌آید. توجه کنید که اگر جملهٔ $\sin ۲t$ در معادلهٔ (۲۱) نمی‌بود، $q = ۲۰$ جواب تعادلی این معادله بود.

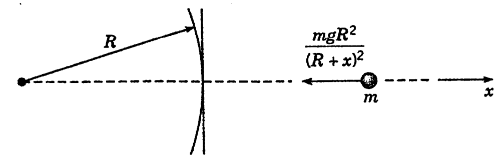
اکنون می‌خواهیم مناسب بودن خود مدل ریاضی را در مورد این مسئله بررسی کنیم. مدل بر چند فرض که به‌طور صریح بیان نشده‌اند استوار است. اول اینکه میزان آب دریاچه فقط با نرخ ورود و خروج آب از آن کنترل می‌شود و هیچ مقداری از آن تبخیر نمی‌شود یا در زمین فرو نمی‌رود و آب باران هم به آن اضافه نمی‌شود. همین مطلب دربارهٔ مادهٔ شیمیایی هم صحیح است؛ به داخل و خارج جریان می‌یابد اما ماهیها و یا دیگر موجودات زندهٔ داخل دریاچه آن را جذب نمی‌کنند. به‌علاوه فرض می‌کنیم که غلظت مادهٔ شیمیایی در همه‌جای دریاچه یکنواخت است. اینکه نتایج به‌دست آمده صحیح‌اند یا نه، قویاً به این فرضهای ساده‌کننده بستگی دارد.

مثال ۴
سرعت گریز

جسمی با جرم ثابت m عمود بر سطح زمین با سرعت اولیهٔ $v_۰$ پرتاب می‌شود. از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم، اما تغییر نیروی جاذبهٔ زمین به‌واسطهٔ فاصله را در نظر می‌گیریم. سرعت را در طی حرکت بیابید. همچنین سرعت اولیهٔ موردنیاز را برای اینکه جسم به حداکثر ارتفاع ξ بالای سطح زمین برسد و حداقل سرعت اولیه را برای اینکه جسم به زمین بازنگردد تعیین کنید. به این سرعت، **سرعت گریز** می‌گوییم.

فرض کنید جهت مثبت محور xها در راستای خط حرکت از مرکز زمین به سمت بیرون باشد و $x = ۰$ روی سطح زمین را نشان بدهد؛ شکل ۴.۳.۲ را ببینید. شکل را افقی رسم کرده‌ایم تا به شما یادآوری کنیم که جهت نیروی جاذبه به سمت مرکز زمین است، که از دیدگاه ناظر خارج از سطح زمین لزوماً به سمت پایین نیست. نیروی جاذبهٔ وارد به جسم (یعنی وزن آن) به‌طور معکوس متناسب با مربع فاصله از مرکز زمین است و با $w(x) = -k/(x+R)^{۲}$ داده می‌شود که در آن k ثابت است، R شعاع زمین است و علامت منفی نشان می‌دهد که جهت $w(x)$ به‌طرف قسمت منفی محور xهاست. می‌دانیم که روی سطح زمین $w(۰)$ برابر $-mg$ است که در آن g شتاب جاذبه در سطح دریاست. بنابراین $k = mgR^{۲}$ و می‌توانیم بنویسیم

$$w(x) = -\frac{mgR^{۲}}{(R+x)^{۲}}. \qquad (۲۵)$$



شکل ۴.۳.۲ جسمی در میدان جاذبهٔ زمین.

چون نیروی دیگری بر جسم وارد نمی‌شود، معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^{۲}}{(R+x)^{۲}} \tag{۲۶}$$

و شرط اولیه عبارت است از

$$v(۰) = v_۰. \tag{۲۷}$$

متأسفانه تعداد متغیرهای معادلهٔ (۲۶) زیاد است؛ چون معادله به t، x و v بستگی دارد. برای حل این مشکل می‌توانیم با در نظر گرفتن x به‌جای t به‌عنوان متغیر مستقل، t را از معادلهٔ (۲۶) حذف کنیم و به این ترتیب می‌توانیم با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای dv/dt را برحسب dv/dx محاسبه کنیم؛ یعنی

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

و معادلهٔ (۲۶) به

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^{۲}}{(R+x)^{۲}} \tag{۲۸}$$

تبدیل می‌شود. معادلهٔ (۲۸) جداشدنی است (هرچند که خطی نیست)؛ بنابراین با جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$\frac{v^{۲}}{۲} = \frac{gR^{۲}}{R+x} + c. \tag{۲۹}$$

چون $x = ۰$ اگر $t = ۰$، شرط اولیهٔ (۲۷) در $t = ۰$ را می‌توان با شرط $v = v_۰$ وقتی $x = ۰$ جایگزین کرد. بنابراین $c = (v_۰^{۲}/۲) - gR$ و

$$v = \pm\sqrt{v_۰^{۲} - ۲gR + \frac{۲gR^{۲}}{R+x}}. \tag{۳۰}$$

توجه کنید که معادلهٔ (۳۰)، سرعت را به‌عنوان تابعی از ارتفاع ــ به‌جای تابعی از زمان ــ نشان می‌دهد. علامت مثبت را باید هنگام صعود و علامت منفی را هنگام بازگشت جسم به طرف زمین انتخاب کنیم.

برای تعیین حداکثر ارتفاع ξ که جسم می‌تواند به آن برسد، با قراردادن $v = ۰$ و $x = \xi$ در معادلهٔ (۳۰) و سپس حل آن نسبت به ξ نتیجه می‌شود

$$\xi = \frac{v_۰^{۲}R}{۲gR - v_۰^{۲}}. \tag{۳۱}$$

با حل معادلهٔ (۳۱) نسبت به $v_۰$، سرعت اولیهٔ مورد نیاز برای بالا بردن جسم تا ارتفاع ξ به‌دست می‌آید که برابر است با

$$v_۰ = \sqrt{۲gR\frac{\xi}{R+\xi}}. \tag{۳۲}$$

سرعت گریز v_e با میل دادن ξ به ∞ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه

$$v_e = \sqrt{۲gR}. \tag{۳۳}$$

مقدار عددی v_e تقریباً ۶٫۹ mi/s یا ۱۱٫۱ km/s است.

در محاسبهٔ سرعت گریز اثر مقاومت هوا را در نظر نگرفته‌ایم، بنابراین سرعت واقعی گریز (شامل اثر مقاومت هوا) کمی بیشتر است. از طرف دیگر، اگر قبل از پرتاب جسم به اندازهٔ قابل توجهی از سطح دریا بالاتر برده شده باشد، سرعت مؤثر گریز به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. در این‌صورت هر دو نیروی جاذبه و اصطکاک کم می‌شوند؛ به‌ویژه، مقاومت هوا با افزایش ارتفاع به‌سرعت کاهش می‌یابد. باید به این هم توجه کنید که ممکن است اِعمال سرعت اولیهٔ بسیار بزرگ به‌طور لحظه‌ای غیرعملی باشد: به‌عنوان مثال، سفینه‌های فضایی شتاب اولیه‌شان را در چند دقیقه به‌دست می‌آورند.

مسئله‌ها

۱. مخزنی را در نظر بگیرید که در یک آزمایش هیدرودینامیک استفاده شده است. پس از یک آزمایش مخزن حاوی ۱۵۰ لیتر از محلول رنگی با غلظت ۱ g/L است. برای آماده‌سازی مخزن برای آزمایش بعدی، با آب تمیزی که با نرخ ۲L/min به داخل آن جریان می‌یابد شسته می‌شود و مخلوطی که به خوبی یکنواخت شده با همان نرخ خارج می‌شود. زمان لازم را برای اینکه غلظت رنگ به ۱٪ مقدار اولیه‌اش برسد بیابید.

۲. مخزنی در ابتدا حاوی ۱۲۰ لیتر آب خالص است. مخلوطی از نمک با غلظت γ g/L با نرخ ۲ L/min وارد مخزن می‌شود و مخلوط یکنواخت حاصل با همان نرخ از مخزن خارج می‌شود. عبارتی برحسب γ برای میزان موجود نمک در زمان t بیابید. همچنین وقتی $t \to \infty$ مقدار حدی نمک در مخزن را بیابید.

۳. مخزنی در ابتدا حاوی ۱۰۰ گالن آب تمیز است. پس از آن آبی شامل $\frac{1}{2}$ lb نمک در هر گالن با نرخ ۲ gal/min به داخل مخزن ریخته می‌شود و مخلوط با همان نرخ خارج می‌شود. پس از ۱۰ دقیقه این فرایند متوقف می‌شود و آب تمیزی با نرخ ۲ gal/min در مخزن ریخته می‌شود و مجدداً مخلوط با همان نرخ خارج می‌شود. مقدار نمک مخزن در پایان ۱۰ دقیقهٔ اضافی را بیابید.

۴. مخزنی با ظرفیت ۵۰۰ گالن در ابتدا حاوی مخلوط ۲۰۰ گالن آب به‌همراه ۱۰۰ پوند نمک است. آب حاوی ۱ پوند نمک در هر گالن با نرخ ۳ gal/min وارد می‌شود و با نرخ ۲ gal/min خارج می‌شود. مقدار نمک موجود در مخزن را قبل از اینکه محلول سرریز شود بیابید. غلظت (پوند در گالن) نمک را در لحظهٔ سرریزشدن مخلوط بیابید. این غلظت را با مقدار نظری غلظت حدی (با این فرض که ظرفیت مخزن نامتناهی است) مقایسه کنید.

۵. مخزنی شامل ۱۰۰ گالن آب و ۵۰ اونس نمک است. آب نمکی با غلظت نمک $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}\sin t)$ oz/gal با نرخ ۲ gal/min به داخل مخزن جریان می‌یابد و مخلوط با همان نرخ خارج می‌شود.

الف) مقدار نمک را در هر زمان بیابید.

ب) جواب را به‌ازای زمانی به‌اندازهٔ کافی طولانی ــ که رفتار نهایی نمودار را ببینید ــ رسم کنید.

ج) رفتار جواب، در درازمدت نوسان حول یک مقدار ثابت معین است. این مقدار کدام است؟ دامنهٔ این نوسان چقدر است؟

۶. فرض کنید مخزنی شامل مایع معینی است و خروجی‌ای در نزدیکی پایین مخزن وجود دارد. فرض کنید $h(t)$ ارتفاع

سطح مایع بالای خروجی در زمان t باشد. طبق اصل توریچلی[1] سرعت جریان خروجی، v، در خروجی مخزن برابر است با سرعت ذره‌ای که به‌طور آزاد (بدون نیروی مقاومت هوا) از ارتفاع سقوط می‌کند.

الف) ثابت کنید $v = \sqrt{2gh}$، که در آن g شتاب جاذبه است.

ب) با مساوی قرار دادن نرخ خروجی و نرخ تغییر مایع در مخزن، ثابت کنید $h(t)$ در معادلهٔ

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -\alpha a\sqrt{2gh} \qquad \text{(i)}$$

صدق می‌کند که در آن $A(h)$ مساحت سطح مقطع مخزن در ارتفاع h و a مساحت خروجی مخزن است. ثابت α ضریب انقباض است که به‌خاطر این نکتهٔ تجربی اضافه‌شده که سطح مقطع جریان خروجی کمتر از a است. مقدار α برای آب تقریباً ۰٫۶ است.

ج) مخزن آبی به شکل استوانهٔ دوار در نظر بگیرید که ارتفاع بالای آن از خروجی مخزن ۳ متر است. شعاع مخزن ۱ متر و شعاع خروجی مخزن ۰٫۱ متر است. اگر مخزن در ابتدا پر از آب باشد، معین کنید در چه زمانی مخزن تا سطح خروجی خالی می‌شود.

۷. فرض کنید مقدار پول S_0 با نرخ بازگشت پیوستهٔ مرکب سالانهٔ r سرمایه‌گذاری شده است.

الف) زمان T را به‌صورت تابعی از r بیابید که مقدار سرمایه پس از آن دوبرابر سرمایهٔ اولیه شود.

ب) T را معین کنید اگر $r = 8\%$.

ج) نرخ بازگشتی را که باید به‌دست بیاید بیابید اگر قرار باشد سرمایهٔ اولیه در ۸ سال دوبرابر شود.

۸. جوانی بدون سرمایهٔ اولیه، هر سال k دلار را با نرخ بازگشت سالانهٔ r سرمایه‌گذاری می‌کند. فرض کنید که سرمایه‌گذاری به‌طور پیوسته انجام می‌شود و سود آن به‌طور پیوسته ترکیب می‌شود.

الف) سرمایهٔ $S(t)$ انباشته‌شده در زمان t را معین کنید.

ب) اگر $r = 7.5\%$، k را طوری معین کنید که در زمان بازنشستگی پس از ۴۰ سال، یک میلیون دلار موجود باشد.

ج) اگر k برابر ۲۰۰۰ دلار در سال باشد، نرخ بازگشت r را طوری را معین کنید که پس از ۴۰ سال یک میلیون دلار موجود باشد.

۹. یکی از فارغ‌التحصیلان دانشگاه ۸۰۰۰ دلار برای خرید خودرو وام می‌گیرد. وام‌دهنده، سالانه ۱۰٪ بهره می‌گیرد. فرض کنید که بهره به‌طور پیوسته ترکیب شود و وام‌گیرنده با نرخ سالانهٔ ثابت k وام را بازپرداخت می‌کند، نرخ بازپرداخت k را برای بازپرداخت کل وام در سه سال مشخص کنید. همچنین مشخص کنید در طول سه سال چه مقدار سود پرداخت می‌شود.

۱۰. شخصی که می‌خواهد خانه‌ای بخرد، توانایی بازپرداخت بیش از ۸۰۰ دلار در ماه را ندارد. فرض کنید نرخ بهره ۹٪ باشد و وام باید ۲۰ ساله بازپرداخت شود. فرض کنید سود به‌طور پیوسته ترکیب شود و بازپرداخت نیز به‌طور پیوسته انجام شود.

الف) حداکثر مقداری را که این خریدار می‌تواند وام بگیرد مشخص کنید.

ب) مجموع بهرهٔ پرداخت‌شده در طول مدت وام مسکن را مشخص کنید.

۱. اوانجلیستا توریچلی (۱۶۰۸–۱۶۴۷م) جانشین گالیله در کرسی ریاضی فلورنس، این نتیجه را در ۱۶۴۴ میلادی منتشر کرد. او به‌خاطر ساختن دماسنج جیوه‌ای و مقاله‌های مهمی در هندسه هم مشهور است.

۱۱. یکی از دانش‌آموخته‌های دانشگاه، ۱۰۰٬۰۰۰ دلار با نرخ سود ۹٪ برای خرید آپارتمانی وام می‌گیرد. با پیش‌بینی افزایش درآمد، خریدار انتظار دارد که بتواند ماهانه $800(1 + t/120)$ بپردازد که در آن t تعداد ماه‌ها پس از زمانی است که وام را دریافت کرده است.

الف) فرض کنید که او بتواند این برنامهٔ بازپرداخت را حفظ کند. در چه زمانی وام به‌طور کامل پرداخت می‌شود؟

ب) با همین برنامهٔ بازپرداخت، دقیقاً چه مقدار وام دریافت کند در طول ۲۰ سال بازپرداخت می‌شود؟

۱۲. یکی از ابزارهای مهم تحقیقات باستان‌شناسی، تاریخ‌یابی رادیوکربن است که شیمیدان آمریکایی ویلارد اف. لیبی[1] آن را ابداع کرده است. با این روش، می‌توان عمر چوبهای معین و باقی‌ماندهٔ گیاهان را و در نتیجه استخوانهای انسان و حیوانات و اشیاء هنری‌ای را که در همان‌جا دفن شده‌اند تعیین کرد. تاریخ‌یابی رادیوکربن بر این واقعیت استوار است که بعضی از چوبها وبقایای گیاهان حاوی مقداری کربن ۱۴ (که ایزوتوپ رادیواکتیو کربن است) هستند. این ایزوتوپ در طول عمر گیاه در آن انباشته می‌شود و در زمان مرگ گیاه شروع به واپاشی می‌کند. چون نیمه‌عمر کربن ۱۴ طولانی است (تقریباً ۵۷۳۰ سال)، پس از هزاران سال هم مقدار قابل‌توجهی از کربن ۱۴ باقی می‌ماند. حتی اگر بخش کوچکی از کربن ۱۴ در زمان حاضر موجود باشد، می‌توان با اندازه‌گیریهای مناسب آزمایشگاهی نسبت مقدار اولیهٔ کربن ۱۴ را که باقی مانده با دقت محاسبه کرد. به‌عبارت دیگر اگر $Q(t)$ مقدار کربن ۱۴ در زمان t و Q_0 مقدار اولیه باشد، می‌توان نسبت $Q(t)/Q_0$ را تا وقتی که این نسبت بسیار کوچک نباشد تعیین کرد. با روشهای فعلی اندازه‌گیری، می‌توانیم از این روش برای دوره‌های زمانی ۵۰٬۰۰۰ سال یا بیشتر استفاده کنیم.

الف) فرض کنید Q در معادلهٔ دیفرانسیل $Q' = -rQ$ صدق کند. نرخ ثابت واپاشی r کربن ۱۴ را معین کنید.

ب) اگر $Q(0) = Q_0$، عبارتی برای $Q(t)$ در زمان t بیابید.

ج) فرض کنید آثاری کشف شده‌اند که در آنها مقدار باقی‌ماندهٔ کنونی کربن ۱۴، ۲۰٪ مقدار اولیه‌اش است. عمر این آثار را تعیین کنید.

۱۳. جمعیت پشه‌ها در ناحیه‌ای مشخص با نرخی متناسب با جمعیت فصلی آنها افزایش می‌یابد و در صورت عدم وجود عوامل دیگر، جمعیت آنها هر هفته دوبرابر می‌شود. در ابتدا ۲۰۰٬۰۰۰ پشه در این ناحیه موجود بودند و شکارچیها (پرندگان، خفاشها و غیره) روزانه ۲۰٬۰۰۰ پشه را می‌خورند. جمعیت پشه‌ها در این ناحیه را در زمان t تعیین کنید.

۱۴. فرض کنید جمعیت خاصی نرخ رشدی دارد که با زمان تغییر می‌کند و این جمعیت در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} = (0.5 + \sin t)\frac{y}{5}$$

صدق می‌کند.

الف) اگر $y(0) = 1$، زمان τ را که در آن جمعیت دوبرابر می‌شود بیابید (یا تخمین بزنید). با انتخاب شرایط اولیهٔ دیگر، مشخص کنید که زمان دوبرابر شدن τ به جمعیت اولیه بستگی دارد یا نه.

ب) فرض کنید نرخ رشد را برابر مقدار متوسطش، یعنی $\frac{1}{10}$، بگیریم. زمان دوبرابر شدن τ را در این حالت بیابید.

ج) فرض کنید جملهٔ $\sin t$ در معادلهٔ دیفرانسیل با $\sin 2\pi t$ جایگزین شود؛ یعنی تغییرات نرخ رشد بسامد بسیار بزرگ‌تری داشته باشد. این چه تأثیری بر زمان دوبرابر شدن τ دارد؟

د) جوابهای به‌دست آمده در قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱. ویلارد اف. لیبی (۱۹۰۸–۱۹۸۰م) در منطقهٔ روستایی کلرادو متولد شد و تحصیلاتش را در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی انجام داد. او روش رادیوکربن را در ۱۹۴۷ میلادی که در دانشگاه شیکاگو بود ابداع کرد و برای این کار جایزهٔ نوبل شیمی را در ۱۹۶۰ دریافت کرد.

۱۵. فرض کنید جمعیت خاصی در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dt} = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0$$

صدق کند که در آن نرخ رشد $r(t)$ با $r(t) = (1+\sin t)/5$ داده‌شده است و k نرخ شکار است.

الف) فرض کنید که $k = \frac{1}{5}$، نمودار y برحسب t را به‌ازای چند مقدار y_0 بین $\frac{1}{2}$ و ۱ رسم کنید.

ب) مقدار بحرانی جمعیت اولیه y_c را، که جمعیت کمتر از آن نابود خواهد شد، مشخص کنید.

ج) مقادیر دیگری برای k انتخاب کنید و مقادیر متناظر y_c را برای هر کدام بیابید.

د) با استفاده از داده‌های به‌دست آمده در قسمت‌های (ب) و (ج)، نمودار y_c برحسب k را رسم کنید.

۱۶. طبق قانون تبرید نیوتن، درجهٔ حرارت جسم با نرخی متناسب با اختلاف درجهٔ حرارت جسم و محیط اطراف تغییر می‌کند. فرض کنید درجهٔ حرارت یک فنجان قهوه از قانون تبرید نیوتن تبعیت کند. اگر درجهٔ حرارت هنگام ریختن قهوه $200°F$ باشد و یک دقیقه بعد در اتاقی با درجهٔ حرارت $70°F$ درجهٔ حرارتش به $190°F$ کاهش یابد، زمانی را تعیین کنید که درجهٔ حرارت قهوه به $150°F$ می‌رسد.

۱۷. انتقال حرارت از یک جسم به محیط اطرافش از طریق تابش براساس قانون استفان-بولتزمان[1] با معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4) \qquad \text{(i)}$$

توصیف می‌شود که در آن $u(t)$ درجهٔ حرارت مطلق جسم در زمان t است، T درجهٔ حرارت مطلق اطراف است و α ثابتی است که به پارامترهای فیزیکی جسم بستگی دارد. با این حال، اگر u از T بسیار بزرگ‌تر باشد، جواب معادلهٔ (i) را می‌توان به‌خوبی با جوابهای معادلهٔ ساده‌تر

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4 \qquad \text{(ii)}$$

تخمین زد. فرض کنید که جسمی با درجهٔ حرارت اولیهٔ $2000°K$ در محیطی با درجهٔ حرارت $300°K$ قرار داشته باشد و $\alpha = 2.0 \times 10^{-12}\,\mathrm{K^{-3}/s}$.

الف) با حل معادلهٔ (ii) درجهٔ حرارت جسم را در زمان t بیابید.

ب) نمودار u برحسب t را رسم کنید.

ج) زمان τ را بیابید که در آن $u(\tau) = 600$، یعنی دوبرابر درجهٔ حرارت محیط باشد. در این زمان خطای استفاده از معادلهٔ (ii) برای تقریب جوابهای معادلهٔ (i) بیش از ۱٪ نیست.

۱۸. جعبهٔ ایزوله‌ای (مانند یک ساختمان) را با درجهٔ حرارت داخلی $u(t)$ در نظر بگیرید. طبق قانون تبرید نیوتن، u در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)] \qquad \text{(i)}$$

صدق می‌کند که در آن $T(t)$ درجهٔ حرارت محیط (بیرونی) است. فرض کنید $T(t)$ به‌طور سینوسی نوسان کند، به‌عنوان مثال فرض کنید $T(t) = T_0 + T_1\cos\omega t$.

۱. ژوزف استفان (۱۸۳۵-۱۸۹۳م) استاد فیزیک دانشگاه وین، قانون تابش را بر مبنای داده‌های تجربی در ۱۸۷۹ میلادی بیان کرد. دانشجوی وی، لودویک بولتزمان (۱۸۴۴-۱۹۰۶م) آن را از اصول ترمودینامیک در ۱۸۸۴ میلادی استنتاج کرد. عمدهٔ شهرت بولتزمان برای کارهای اصیلش در مکانیک آماری است.

الف) معادلهٔ (i) را حل کنید و $u(t)$ را برحسب t، k، T_0، T_1 و ω بنویسید. توجه کنید که قسمتی از جواب شما با بزرگ‌شدن t به صفر میل می‌کند؛ به این قسمت گذرا می‌گوییم. به باقی‌ماندهٔ جواب، پایدار می‌گوییم و آن را با $S(t)$ نشان می‌دهیم.

ب) فرض کنید t با ساعت اندازه‌گیری شود و $\omega = \pi/12$ دورهٔ تناوب ۲۴ ساعتهٔ $T(t)$ باشد. علاوه بر این، فرض کنید $T_0 = 60°F$، $T_1 = 15°F$ و $k = 0.2/h$. نمودارهای $S(t)$ و $T(t)$ را برحسب t روی یک دستگاه رسم کنید. از روی نمودار، دامنهٔ R قسمت نوسانی $S(t)$ را مشخص کنید. همچنین زمان تأخیر τ بین زمانهای ماکزیمم شدن $T(t)$ و $S(t)$ را تخمین بزنید.

ج) فرض کنید k، T_0، T_1 و ω در حال حاضر نامشخص باشند. جواب قسمت نوسانی $S(t)$ را به‌صورت $R\cos[\omega(t-\tau)]$ بنویسید. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارتهایی برای R و τ بیابید. فرض کنید T_1 و ω مقادیر داده‌شده در قسمت (ب) را داشته باشند و نمودارهای R و τ برحسب k را رسم کنید.

۱۹. دریاچه‌ای با حجم ثابت V را در نظر بگیرید که در زمان t مقدار $Q(t)$ مادهٔ آلوده‌کننده در آن موجود باشد و به‌طور یکنواخت با غلظت $c(t)$ در سراسر دریاچه پراکنده شده باشد که در آن $c(t) = Q(t)/V$. فرض کنید آب آلوده با مادهٔ آلوده‌کننده‌ای با غلظت k با نرخ r وارد دریاچه شود و آب با همان نرخ از دریاچه خارج شود. فرض کنید که مواد آلوده به‌طور مستقیم هم با نرخ ثابت P به دریاچه افزوده شوند. توجه کنید که در این مفروضات از بعضی از عوامل که ممکن است در بعضی از حالتها مهم باشند صرف‌نظر کرده‌ایم؛ مانند اثرات اضافه یا کم‌شدن آب به دلیل ته‌نشین‌شدن، تبخیر یا جذب؛ اثرات اختلاف پله‌ای درجهٔ حرارت در دریاچه‌های عمیق؛ اثر ایجاد بی‌نظمیها در خط ساحلی برای ایجاد اسکله‌ها؛ و این واقعیت که مادهٔ آلوده‌کننده به‌طور یکنواخت در دریاچه ریخته نمی‌شود بلکه (معمولاً) در نقاط ایزوله در پیرامون دریاچه ریخته می‌شود. نتایج زیر را باید با توجه به صرف‌نظرکردن از عواملی از این دست تفسیر کرد.

الف) اگر در زمان $t = 0$ غلظت مادهٔ آلوده‌کننده c_0 باشد، عبارتی برای غلظت $c(t)$ در زمان t بیابید. وقتی $t \to \infty$ مقدار حدی غلظت چقدر است؟

ب) اگر اضافه کردن مادهٔ آلوده‌کننده به دریاچه قطع شود ($k = 0$ و $P = 0$ به‌ازای $t > 0$)، بازهٔ زمانی T را بیابید که باید بگذرد قبل از آنکه غلظت مواد آلوده‌کننده به ۵۰٪ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد. همین کار را برای ۱۰٪ به‌جای ۵۰٪ انجام بدهید.

ج) در جدول ۲.۳.۲ شامل داده‌های چند دریاچهٔ بزرگ را آورده‌ایم.[1] با استفاده از این اطلاعات، در هر یک از این دریاچه‌ها از قسمت (ب) زمان T موردنیاز برای کاهش غلظت مواد آلوده‌کننده به ۱۰٪ مقدار اولیه‌اش را بیابید.

جدول ۲.۳.۲ داده‌های مربوط به حجم و جریان در دریاچه‌های بزرگ

دریاچه	$V(\mathrm{km}^3 \times 10^3)$	$r(\mathrm{km}^3/\mathrm{year})$
سوپریور	۱۲٫۲	۶۵٫۲
میشیگان	۴٫۹	۱۵۸
اری	۰٫۴۶	۱۷۵
انتاریو	۱٫۶	۲۰۹

۱. این مسئله براساس مقالهٔ زیر بنا شده و اطلاعات مربوط به جدول از آن منبع استخراج شده است.
R. H. Rainey, "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes", *Science 155* (1967), pp. 1242-1243.

۲۰. توپی با جرم ۰٫۱۵ kg با سرعت اولیهٔ ۲۰ m/s از سقف ساختمانی با ارتفاع ۳۰ m به بالا پرتاب می‌شود. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.

الف) حداکثر ارتفاعی را بیابید که توپ در بالای سطح زمین به آن می‌رسد.

ب) فرض کنید که توپ هنگام بازگشت به زمین به ساختمان برخورد نکند، زمانی را بیابید که توپ به زمین برخورد می‌کند.

ج) نمودارهای سرعت و موقعیت برحسب زمان را رسم کنید.

۲۱. فرض کنید که شرایط همانند مثال ۲۰ باشد با این تفاوت که نیروی مقاومت هوا برابر $|v|/30$ موجود باشد که در آن سرعت v برحسب m/s اندازه‌گیری می‌شود.

الف) حداکثر ارتفاعی را بیابید که توپ در بالای سطح زمین به آن می‌رسد.

ب) زمانی را بیابید که توپ به زمین برخورد می‌کند.

ج) نمودار سرعت و موقعیت برحسب زمان را رسم کنید. این نمودارها را با نمودارهای متناظرشان در مسئلهٔ ۲۰ مقایسه کنید.

۲۲. فرض کنید که شرایط همانند مثال ۲۰ باشد با این تفاوت که نیروی مقاومت هوا برابر $v^2/1325$ موجود باشد که در آن سرعت v برحسب m/s اندازه‌گیری می‌شود.

الف) حداکثر ارتفاعی را بیابید که توپ در بالای سطح زمین به آن می‌رسد.

ب) زمانی را بیابید که توپ به زمین برخورد می‌کند.

ج) نمودارهای سرعت و موقعیت برحسب زمان را رسم کنید. این نمودارها را با نمودارهای متناظرشان در مسئله‌های ۲۰ و ۲۱ مقایسه کنید.

۲۳. چتربازی به وزن ۱۸۰ lb (شامل تجهیزات) به‌طور قائم از ارتفاع ۵۰۰۰ ft به پایین سقوط می‌کند و پس از ۱۰ s سقوط آزاد چترش باز می‌شود. فرض کنید نیروی مقاومت هوا در زمانی که چتر بسته است برابر $0.75|v|$ و هنگامی که چتر باز است $12|v|$ باشد، که در آن سرعت v با ft/s اندازه‌گیری می‌شود.

الف) سرعت چترباز را هنگامی که چتر باز می‌شود پیدا کنید.

ب) مسافت سقوط چترباز را قبل از بازشدن چتر پیدا کنید.

ج) سرعت حدی v_L پس از بازشدن چتر چقدر است؟

د) تعیین کنید که چترباز قبل از بازشدن چتر چه مدت در هوا است.

ه) نمودار سرعت برحسب زمان را از شروع سقوط تا هنگام رسیدن به زمین رسم کنید.

۲۴. سورتمهٔ آبی‌ای با سرعت اولیهٔ ۱۶۰ mi/h در یک کانال آب حرکت می‌کند و سرعتش کاهش می‌یابد. فرض کنید در طول فرایند ترمزگرفتن، شتاب a با رابطهٔ $a(v) = -\mu v^2$ داده می‌شود، که در آن v سرعت و μ ثابت است.

الف) همانند مثال ۴ متن، با استفاده از رابطهٔ $dv/dt = v(dv/dx)$ معادلهٔ حرکت را برحسب v و x بنویسید.

ب) اگر برای کاهش سرعت سورتمه، طی مسافت ۲۰۰۰ ft ضروری باشد، مقدار μ را تعیین کنید.

ج) زمان τ موردنیاز برای کاهش سرعت سورتمه به ۱۵ mi/h را بیابید.

۲۵. جسمی با جرم ثابت m با سرعت اولیهٔ v_0 در محیطی با مقاومت $k|v|$ به بالا پرتاب می‌شود که در آن k ثابت است. از تغییرات میزان نیروی جاذبه صرف‌نظر کنید.

الف) حداکثر ارتفاع x_m را که جسم به آن می‌رسد و زمان t_m را که در آن ارتفاع ماکزیمم به‌دست می‌آید بیابید.

ب) ثابت کنید که اگر $kv_0/mg < 1$ آنگاه t_m و x_m را می‌توان به‌صورت

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right]$$

بیان کرد.

ج) ثابت کنید کمیت kv_0/mg بدون بعد است.

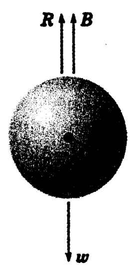
۲۶. جسمی با جرم m به‌طور قائم با سرعت اولیهٔ v_0 در محیطی با مقاومت $k|v|$ به بالا پرتاب می‌شود که در آن k ثابت است. فرض کنید ضریب جاذبهٔ زمین ثابت باشد.

الف) سرعت $v(t)$ جسم را در زمان t بیابید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) مقدار حد $v(t)$ را وقتی $k \to 0$ (یعنی مقاومت به صفر میل می‌کند) بیابید. آیا این نتیجه با سرعت جرم m که با سرعت اولیهٔ v_0 در خلأ به بالا پرتاب می‌شود همخوانی دارد؟

ج) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، حد $v(t)$ را وقتی $m \to 0$ (یعنی وقتی جرم به صفر میل می‌کند) پیدا کنید.

۲۷. بر جسمی که در مایع غلیظی مانند روغن فرو می‌رود، سه نیرو اثر می‌کنند (شکل ۵.۳.۲ را ببینید): نیروی مقاومت R؛ نیروی شناوری B و خود وزن w به‌واسطهٔ جاذبه. نیروی شناوری برابر با وزن سیال جابه‌جا شده توسط جسم است. برای جسم کروی متحرکی با شعاع a، نیروی مقاومت طبق قانون استوکس، $R = 6\pi\mu a|v|$، داده می‌شود که در آن v سرعت جسم و μ ضریب چسبندگی سیال پیرامون است.[1]



شکل ۵.۳.۲ جسمی در حال سقوط در سیالی غلیظ.

۱. جورج گابریل استوکس (۱۸۱۹-۱۹۰۳م)، استاد کمبریج، یکی از پیشروترین ریاضیدانان حوزهٔ ریاضیات کاربردی در قرن نوزدهم است. معادله‌های اساسی مکانیک سیالات (معادلات ناویر-استوکس) به افتخار وی نامگذاری شده‌اند و یکی از قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نام او را یدک می‌کشد. او یکی از پیشگامان استفاده از سری‌های واگرا (مجانبی) است که امروزه بسیار مهم و موردتوجه بسیار است.

الف) سرعت حدی کرهٔ توپری با شعاع a و چگالی ρ را بیابید که آزادانه در محیطی با چگالی ρ' و ضریب چسبندگی μ سقوط می‌کند.

ب) در ۱۹۱۰ میلادی آر. اِی. میلیکان[1] حرکت قطرات کوچک روغن را که در میدان الکتریکی سقوط می‌کنند مطالعه کرد. میدانی با قدرت E نیرویی برابر با Ee روی قطره‌ای با بار الکتریکی e وارد می‌کند. فرض کنید که E طوری تنظیم شده است که قطره بی‌حرکت نگه داشته شود ($v = 0$) و w و B همانند بالا داده شده باشند. عبارتی برای e بیابید. میلیکان این آزمایش را چندین بار تکرار کرد و با استفاده از داده‌هایی که گرد آورده بود توانست بار الکتریکی روی یک الکترون را معین کند.

۲۸. جسمی به جرم ۰٫۲۵ kg از حالت سکون در محیطی با نیروی مقاومت $0{,}2|v|$ رها می‌شود که در آن v برحسب m/s اندازه‌گیری می‌شود.

الف) اگر جرم از ارتفاع ۳۰ متری رها شود، سرعت آن را هنگام برخورد با زمین بیابید.

ب) اگر جرم سرعتی بیش از ۱۰ m/s اختیار نکند، حداکثر ارتفاعی را که از آن رها شده بیابید.

ج) فرض کنید نیروی مقاومت $k|v|$ است که در آن v برحسب m/s اندازه‌گیری می‌شود و k ثابت است. اگر جرم از ارتفاع ۳۰ متری رها شود و با سرعتی حداکثر برابر با ۱۰ m/s به زمین برخورد کند، مقدار موردنیاز ضریب مقاومت k را تعیین کنید.

۲۹. فرض کنید که موشکی به‌طور قائم از سطح زمین با سرعت $v_0 = \sqrt{2gR}$ پرتاب می‌شود که در آن R شعاع زمین است. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.

الف) عبارتی برای سرعت v برحسب فاصلهٔ x از سطح زمین بیابید.

ب) زمان موردنیاز برای رسیدن موشک به ارتفاع ۲۴۰٫۰۰۰ mi (فاصلهٔ تقریبی از زمین به ماه) را بیابید. فرض کنید $R = 4000$ mi.

۳۰. فرض کنید $v(t)$ و $w(t)$ به‌ترتیب مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت توپ بیسبال پرتاب شده باشند. در غیبت مقاومت هوا، v و w در معادله‌های

$$\frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = -g$$

صدق می‌کنند.

الف) ثابت کنید

$$v = u\cos A, \qquad w = -gt + u\sin A$$

که در آن u سرعت اولیهٔ توپ و A زاویهٔ اولیهٔ اوجگیری توپ است.

ب) فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب مختصات افقی و قائم توپ در زمان t باشند. اگر $x(0) = 0$ و $y(0) = h$، $x(t)$ و $y(t)$ را در زمان t بیابید.

ج) فرض کنید $g = 32\ \text{ft/s}^2$، $u = 125$ ft/s و $h = 3$ ft. مسیر توپ را به‌ازای مقادیر مختلف زاویهٔ A رسم کنید؛ یعنی $x(t)$ و $y(t)$ را به‌طور پارامتری رسم کنید.

۱. رابرت اِی. میلیکان (۱۸۶۸-۱۹۵۳م) در کالج اُبرلین و دانشگاه کلمبیا تحصیل کرد. پس از آن استاد دانشگاه شیکاگو و انستیتو تکنولوژی کالیفرنیا بود. کار او در زمینهٔ تعیین مقدار بار الکتریکی الکترون در ۱۹۱۰ میلادی منتشر شد. او برای این کار و مطالعاتش در زمینهٔ اثر فتوالکتریک، در ۱۹۲۳ جایزهٔ نوبل را دریافت کرد.

د) فرض کنید که دیواره‌ای خارجی با ارتفاع H در فاصلهٔ L قرار دارد. اگر توپ از روی دیوار رد شود، چه رابطه‌ای باید بین u و A برقرار باشد؟

هـ) فرض کنید $L = 350$ ft و $H = 10$ ft. با استفاده از رابطهٔ قسمت (د)، دامنهٔ مقادیر A متناظر با سرعت اولیهٔ $u = 110$ ft/s را بیابید (یا از نمودار تخمین بزنید).

و) به‌ازای $L = 350$ و $H = 10$، حداقل سرعت اولیهٔ u و زاویهٔ بهینهٔ A را بیابید که با آن، توپ از زمین خارج می‌شود.

۳۱. مدلی واقع‌بینانه‌تر (از مدل مسئلهٔ ۳۰) برای توپ بیسبال در پرواز، اثرات مقاومت هوا را هم در نظر می‌گیرد. در این حالت معادله‌های حرکت عبارت‌اند از

$$\frac{dv}{dt} = -rv, \qquad \frac{dw}{dt} = -g - rw$$

که در آن r ضریب مقاومت است.

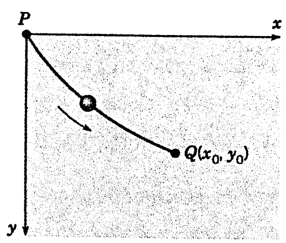
الف) $v(t)$ و $w(t)$ را برحسب سرعت اولیهٔ u و زاویهٔ اوجگیری اولیهٔ A تعیین کنید.

ب) اگر $x(0) = 0$ و $y(0) = h$، $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

ج) مسیر توپ را به‌ازای $r = \frac{1}{5}$، $u = 125$، $h = 3$ و چند مقدار A رسم کنید. این مسیرها با مسیرهای متناظر در مسئلهٔ ۳۱ با $r = 0$ چه تفاوتی دارند؟

د) فرض کنید $r = \frac{1}{5}$ و $h = 3$، حداقل سرعت u و زاویهٔ بهینهٔ A را بیابید که توپ از دیواری با ارتفاع ۱۰ ft در فاصلهٔ ۳۵۰ ft بگذرد. این نتیجه را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۰ (و) مقایسه کنید.

۳۲. مسئلهٔ براچیستروکرون (منحنی کوتاه‌ترین زمان). یکی از مشهورترین مسئله‌های تاریخ ریاضیات، مسئلهٔ براچیستروکرون[1] است. مسئله، پیدا کردن منحنی‌ای است که در طول آن ذره بدون اصطکاک در حداقل زمان از نقطهٔ P به نقطهٔ دیگر Q سر می‌خورد، نقطهٔ دوم پایین‌تر از اولی و نه مستقیماً زیر آن قرار دارد (شکل ۶.۳.۲ را ببینید). این مسئله را یوهان برنولی برای به چالش کشیدن ریاضیدانان هم‌عصر خود در ۱۶۹۶ میلادی مطرح کرد و خود یوهان برنولی، برادرش ژاکوب، آیزاک نیوتن، گوتفرید لایب‌نیتز و مارکیز هوپیتال جواب صحیح را پیدا کردند. مسئلهٔ براچیستروکرون به‌عنوان یکی از پیشگامان حساب تغییرات در پیشرفت ریاضیات اهمیت دارد.



شکل ۶.۳.۲ براچیستروکرون (منحنی کوتاه‌ترین زمان).

۱. کلمهٔ «براچیستروکرون» از کلمه‌های یونانی *brachistros* به معنی کوتاه‌ترین و *chronos* به معنی زمان ساخته شده است.

برای حل این مسئله مناسب است که مبدأ را در نقطهٔ بالایی P قرار بدهیم و جهت محورها را مانند شکل ۶.۳.۲ در نظر بگیریم. مختصات نقطهٔ پایینی Q، $(x_۰, y_۰)$ است. می‌توان نشان داد که منحنی حداقل زمان با تابع $y = \phi(x)$ داده می‌شود که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۱ + y'^{۲})y = k^{۲} \qquad \text{(i)}$$

صدق می‌کند، که در آن $k^{۲}$ ثابت مثبت معینی است که باید بعداً تعیین شود.

الف) معادلهٔ (i) را برحسب y' حل کنید. چرا ضروری است که ریشهٔ دوم مثبت در نظر گرفته شود؟

ب) متغیر جدید t را با رابطهٔ

$$y = k^{۲} \sin^{۲} t \qquad \text{(ii)}$$

معرفی کنید. ثابت کنید معادلهٔ پیداشده در (الف) به

$$۲k^{۲} \sin^{۲} t\,dt = dx \qquad \text{(iii)}$$

تبدیل می‌شود.

ج) با قراردادن $\theta = ۲t$، ثابت کنید جواب معادلهٔ (iii) که در آن وقتی $y = ۰$، $x = ۰$، با

$$x = \frac{k^{۲}(\theta - \sin\theta)}{۲}, \quad y = \frac{k^{۲}(۱ - \cos\theta)}{۲} \qquad \text{(iv)}$$

داده می‌شود. معادله‌های (iv) معادله‌های پارامتری جوابی برای معادلهٔ (i) هستند که از نقطهٔ $(۰, ۰)$ می‌گذرد. به نمودار معادلهٔ (iv) چرخزاد می‌گوییم.

د) با انتخاب مناسب ثابت k، چرخزاد از $(x_۰, y_۰)$ هم می‌گذرد و جواب مسئلهٔ براچیستروکرون است. k را بیابید اگر $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = ۲$.

۴.۲ تفاوتهای معادلات خطی و معادلات غیرخطی

تا به حال دغدغهٔ اصلی ما تبیین این نکته بود که معادلات دیفرانسیل را می‌توان برای بررسی مسئله‌های مختلف علوم طبیعی استفاده کرد و در حالتی که معادله‌ها خطی یا جداشدنی بودند روشهایی برای حلشان ارائه کردیم. اکنون می‌خواهیم به سؤالهای کلی‌تری دربارهٔ معادلات دیفرانسیل بپردازیم و تفاوتهای مهم معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی را با جزئیات بیشتری بررسی کنیم.

وجود و یکتایی جوابها. تاکنون چند مسئلهٔ مقدار اولیه را بررسی کرده‌ایم که همه جواب داشتند و به‌وضوح تنها یک جواب داشتند. این سؤال مطرح می‌شود که این مطلب برای همهٔ مسئله‌های مقدار اولیهٔ معادلات مرتبهٔ اول درست است یا نه. به‌عبارت دیگر، آیا هر مسئلهٔ مقدار اولیه دقیقاً یک جواب دارد؟ این موضوع ممکن است حتی برای غیر ریاضیدانها هم مهم باشد. اگر در بررسی مسئله‌ای فیزیکی به یک مسئلهٔ مقدار اولیه برسید، می‌خواهید قبل از صرف زمان و کوشش برای یافتن جواب بدانید که جوابی موجود است یا نه. علاوه بر این، اگر توانستید یک

جواب را بیابید، می‌خواهید بدانید که باید کار را برای یافتن جوابهای ممکن دیگر ادامه بدهید و یا مطمئن شوید که جواب دیگری موجود نیست. در مورد معادلات خطی، قضیهٔ اساسی زیر جواب این سؤالها را می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۴.۲ اگر تابعهای p و g روی بازهٔ باز $I : \alpha < t < \beta$ شامل $t = t_۰$ پیوسته باشند، تابع یکتای $y = \phi(t)$ موجود است که به‌ازای هر t در I در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + p(t)y = g(t) \qquad (۱)$$

و شرط اولیهٔ

$$y(t_۰) = y_۰ \qquad (۲)$$

که در آن $y_۰$ مقدار اولیهٔ دلخواهی است که از قبل تعیین شده، صدق می‌کند.

توجه کنید که قضیهٔ ۱.۴.۲ بیان می‌کند که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده جواب دارد و تنها یک جواب دارد. به‌عبارت دیگر، این قضیه وجود و یکتایی جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱)، (۲) را تضمین می‌کند. علاوه بر این بیان می‌کند که در همهٔ بازهٔ I شامل نقطهٔ اولیهٔ $t_۰$ که ضرایب p و g در آن پیوسته‌اند، جواب موجود است. یعنی جواب تنها در نقاطی ممکن است موجود نباشد و یا ناپیوسته باشد که حداقل یکی از تابعهای p و یا g ناپیوسته‌اند. معمولاً می‌توان چنین نقطه‌هایی را به سهولت معین کرد.

قسمتی از اثبات این قضیه در بحث بخش ۱.۲ که منجر به فرمول [معادلهٔ (۳۲) در بخش ۱.۲]

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c \qquad (۳)$$

با فرض

$$\mu(t) = \exp\int p(t)dt \qquad (۴)$$

شد نهفته است. از روش رسیدن به این دستور در بخش ۱.۲ معلوم شد که اگر معادلهٔ (۱) جوابی داشته باشد، جواب باید در معادلهٔ (۳) صدق کند. با کمی دقت بیشتر، می‌توانیم نتیجه بگیریم که معادلهٔ (۱) باید جواب داشته باشد: چون p به‌ازای $\alpha < t < \beta$ پیوسته است، μ در این بازه تعریف شده و تابعی ناصفر و مشتق‌پذیر است. با ضرب معادلهٔ (۱) در μ نتیجه می‌شود

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \qquad (۵)$$

چون هر دوی μ و g پیوسته هستند، تابع μg انتگرال‌پذیر است و بنابراین معادلهٔ (۳) از معادلهٔ (۵) به‌دست می‌آید. علاوه بر این، انتگرال μg مشتق‌پذیر است؛ بنابراین y در معادلهٔ (۳) موجود و در بازهٔ $\alpha < t < \beta$ مشتق‌پذیر است. با قرار دادن y از معادلهٔ (۳) در یکی از معادله‌های (۱) و یا (۵)، می‌توانید نشان بدهید که این عبارت در همهٔ بازهٔ $\alpha < t < \beta$ در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند. در پایان، شرط اولیهٔ (۲)، ثابت c را به‌طور یکتا معین می‌کند. بنابراین مسئلهٔ مقدار اولیه تنها یک جواب دارد و این اثبات را کامل می‌کند.

معادلهٔ (۴) عامل انتگرال‌ساز $\mu(t)$ را تا مضربی ثابت که به کران پایینی انتگرال‌گیری بستگی دارد معین می‌کند. اگر این کران پایینی را t_0 انتخاب کنیم می‌توانیم بنویسیم

$$\mu(t) = \exp\int_{t_0}^{t} p(s)ds \qquad (۶)$$

و در نتیجه $\mu(t_0) = 1$. با استفاده از عامل انتگرال‌ساز داده‌شده در معادلهٔ (۶) و انتخاب کران پایینی انتگرال معادلهٔ (۳) برابر با t_0، نتیجه می‌شود که جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right]. \qquad (۷)$$

برای اینکه شرط اولیهٔ (۲) برآورده شود باید انتخاب کنیم $c = y_0$. پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) و (۲) عبارت است از

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + y_0\right], \qquad (۸)$$

که در آن $\mu(t)$ همان است که در معادلهٔ (۶) داده شده است.

اکنون به معادلات دیفرانسیل غیرخطی برمی‌گردیم. باید قضیهٔ ۱.۴.۲ را با قضیهٔ کلی‌تری مانند قضیهٔ زیر جایگزین کنیم.

قضیهٔ ۲.۴.۲ فرض کنید تابعهای f و $\partial f/\partial y$ در مستطیل $\alpha < t < \beta$، $\gamma < y < \delta$ شامل نقطهٔ (t_0, y_0) پیوسته باشند. در این‌صورت، در بازه‌ای مانند $t_0 - h < t < t_0 + h$ مشمول در $\alpha < t < \beta$، جواب یکتایی مانند $y = \phi(t)$ برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \qquad (۹)$$

وجود دارد.

توجه کنید که اگر معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد، فرضهای قضیهٔ ۲.۴.۲ به فرضهای قضیهٔ ۱.۴.۲ ساده می‌شوند: در این حالت $f(t,y) = -p(t)y + g(t)$ و $\partial f(t,y)/\partial y = -p(t)$، بنابراین پیوستگی f و $\partial f/\partial y$ معادل پیوستگی p و g در این حالت است. اثبات قضیهٔ ۱.۴.۲ نسبتاً ساده بود چون بر عبارت (۳) مبتنی بود که جواب معادلهٔ خطی دلخواه را نشان می‌داد. عبارت مشابهی برای جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۹) وجود ندارد؛ بنابراین اثبات قضیهٔ ۲.۴.۲ بسیار مشکل‌تر است. این اثبات تا اندازه‌ای در بخش ۸.۲ و با عمق بیشتر در کتابهای پیشرفتهٔ معادلات دیفرانسیل بررسی می‌شود.

در اینجا توجه کنید که شرایط قضیهٔ ۲.۴.۲ برای تضمین وجود جوابی یکتا در بازهٔ $t_0 - h < t < t_0 + h$ کافی‌اند، اما لازم نیستند. یعنی نتیجه تحت شرایطی کمی ضعیف‌تر بر f همچنان برقرار است. در واقع وجود (اما نه یکتایی) را می‌توان تنها با شرط پیوستگی f ثابت کرد.

یک نتیجهٔ مهم هندسی از بخش‌های یکتایی قضایای ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲ این است که نمودارهای دو جواب یکدیگر را قطع نمی‌کنند: در غیر این‌صورت، دو جواب موجودند که در شرط اولیهٔ نظیر نقطهٔ تقاطع صدق می‌کنند، و این با قضایای ۱.۴.۲ یا ۲.۴.۲ متناقض است.

اکنون چند مثال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱

با استفاده از قضیهٔ ۱.۴.۲، بازه‌ای را معین کنید که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad (۱۰)$$

$$y(1) = 2 \qquad (۱۱)$$

در آن جوابی یکتا دارد.

با بازنویسی معادلهٔ (۱۰) به‌صورت استاندارد (۱)، نتیجه می‌شود

$$y' + \left(\frac{2}{t}\right)y = 4t;$$

بنابراین $p(t) = 2/t$ و $g(t) = 4t$. پس برای این معادله، g به‌ازای هر t پیوسته است، در حالی‌که p به‌ازای $t < 0$ و یا $t > 0$ پیوسته است. بازهٔ $t > 0$ شامل نقطهٔ اولیه است و در نتیجه قضیهٔ ۱.۴.۲ وجود جوابی یکتا را در بازهٔ باز $0 < t < \infty$ تضمین می‌کند که عبارت است از

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0. \qquad (۱۲)$$

اکنون فرض کنید که شرط اولیهٔ (۱۱) را با $y(-1) = 2$ عوض کنیم. در این‌صورت قضیهٔ ۱.۴.۲ وجود جواب یکتا را به‌ازای $t < 0$ تضمین می‌کند. به‌سادگی می‌توانید تحقیق کنید که جواب باز هم با معادلهٔ (۱۲) داده می‌شود؛ ولی این بار در بازهٔ $-\infty < t < 0$.

مثال ۲

قضیهٔ ۲.۴.۲ را در مورد مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1 \qquad (۱۳)$$

به‌کار ببرید.

توجه کنید که در اینجا قضیهٔ ۱.۴.۲ کاربرد ندارد، چون معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی است. برای استفاده از قضیهٔ ۲.۴.۲، توجه کنید که

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

پس این تابعها همه‌جا جز روی خط $y = 1$ پیوسته هستند. بنابراین می‌توان مستطیلی حول نقطهٔ $(0,-1)$ در نظر گرفت که در آن هر دو تابع f و $\partial f/\partial y$ پیوسته هستند. بنابراین قضیهٔ ۲.۴.۲ وجود جوابی یکتا برای مسئلهٔ مقدار اولیه را در بازه‌ای حول $x = 0$ تضمین می‌کند. با این حال، هرچند می‌توان مستطیل را در هر دو جهت مثبت و منفی xها گسترش داد، این لزوماً به این معنا نیست که جواب به‌ازای همهٔ xها موجود است. در واقع، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۳) در مثال ۲ بخش ۲.۲ حل شد و جواب تنها به‌ازای $x > -2$ موجود است.

اکنون فرض کنید شرط اولیه را به $y(0) = 1$ تغییر بدهیم. حالا نقطهٔ اولیه روی خط $y = 1$ قرار دارد؛ بنابراین نمی‌توان مستطیلی حول آن در نظر گرفت که درون آن f و $\partial f/\partial y$ پیوسته باشند. در نتیجه قضیهٔ ۲.۴.۲ چیزی دربارهٔ جوابهای احتمالی این مسئله نمی‌گوید. اما اگر مانند بخش ۲.۲ متغیرها را جدا کنیم و انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

علاوه بر این، اگر $x = 0$ و $y = 1$ آنگاه $c = -1$. درنهایت با حل این معادله نسبت به y نتیجه می‌شود

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. \qquad (14)$$

معادلهٔ (۱۴) دو تابع را معین می‌کند که به‌ازای $x > 0$ در معادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق می‌کنند.

مثال ۳

به‌ازای $t \geq 0$، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \qquad (15)$$

را در نظر بگیرید. قضیهٔ ۲.۴.۲ را برای این مسئله به‌کار ببرید و سپس مسئله را حل کنید.

تابع $f(t,y) = y^{1/3}$ همه‌جا پیوسته است، اما $\partial f/\partial y$ در $y = 0$ موجود نیست و لذا در آن پیوسته نیست. پس قضیهٔ ۲.۴.۲ را نمی‌توان برای این مسئله به‌کار گرفت و نتیجه‌ای از آن به‌دست آورد. اما طبق تذکر پس از قضیهٔ ۲.۴.۲، پیوستگی f وجود جواب ــ و نه یکتایی آن ــ را تضمین می‌کند.

برای اینکه وضع را بهتر درک کنیم باید واقعاً مسئله را حل کنیم، که کاری ساده است چون این معادلهٔ دیفرانسیل جداشدنی است. پس می‌توانیم بنویسیم

$$y^{-1/3}dy = dt;$$

بنابراین

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = t + c$$

و

$$y = \left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^{3/2}.$$

شرط اولیه به‌ازای $c = 0$ برآورده می‌شود، بنابراین

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \qquad (16)$$

در هر دو رابطهٔ معادله‌های (۱۵) صدق می‌کند. از طرف دیگر تابع

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \qquad (17)$$

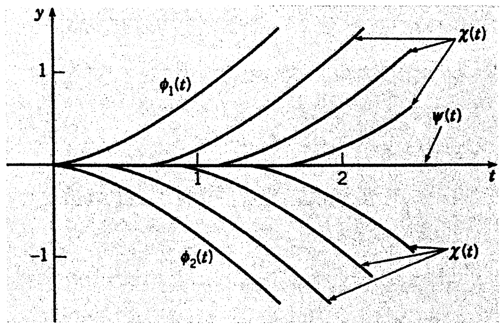
هم جواب مسئلهٔ مقدار اولیه است. علاوه بر این، تابع

$$y = \psi(t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad (18)$$

هم جوابی دیگر است. در واقع تابعهای

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 \\ \pm\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & t \geq t_0 \end{cases} \qquad (19)$$

به‌ازای هر عدد دلخواه مثبت t_0 پیوسته و مشتق‌پذیر (به‌ویژه در $t = t_0$) هستند و جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵) هستند. بنابراین این مسئله خانواده‌ای نامتناهی از جوابها دارد. در شکل ۱.۴.۲، تعدادی از این جوابها را نمایش داده‌ایم.



شکل ۱.۴.۲ چند جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y' = y^{1/3}$، $y(0) = 0$.

همان‌طور که قبلاً گفتیم، چندگانگی جوابهای مسئلهٔ (۱۵) قضیهٔ وجود و یکتایی را نقض نمی‌کند، چون اگر نقطهٔ اولیه روی محور tها باشد، قضیه را نمی‌توان به‌کار برد. اگر (t_0, y_0) روی محور tها نباشد، معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y^{1/3}$ جواب یکتایی دارد که از (t_0, y_0) می‌گذرد.

بازهٔ تعریف. طبق قضیهٔ ۱.۴.۲ جواب معادلهٔ خطی (۱)، یعنی

$$y' + p(t)y = g(t)$$

به شرط $y(t_0) = y_0$ در همهٔ بازه‌ای شامل t_0 که در آن p و g پیوسته هستند موجود است. پس مجانبهای قائم و دیگر ناپیوستگی‌های جواب تنها در نقاط ناپیوستگی p یا g رخ می‌دهند. به‌عنوان مثال، جوابهای مثال ۱ (با یک استثنا) متناظر ناپیوستگی در $t = 0$ در ضریب $p(t) = 2/t$، مجانب محور yها هستند، اما برای هیچ‌یک از جوابها نقطهٔ دیگری وجود ندارد که در آن جواب وجود نداشته باشد و یا مشتق‌پذیر نباشد. آن یک جواب استثنایی نشان می‌دهد که جوابها ممکن است حتی در نقاط ناپیوستگی ضرایب، پیوسته باقی بمانند.

از طرف دیگر ممکن است تعیین بازه‌ای که جواب در آن وجود دارد در مورد مسئلهٔ مقدار اولیهٔ غیرخطی‌ای که در شرایط قضیهٔ ۲.۴.۲ صدق می‌کند مشکل باشد. جواب $y = \phi(t)$ قطعاً تا زمانی که نقطهٔ $(t, \phi(t))$ در ناحیه‌ای قرار دارد که شرایط قضیهٔ ۲.۴.۲ را برمی‌آورد، موجود است. این ناحیه همان است که مقدار h در آن قضیه را مشخص می‌کند. اما چون $\phi(t)$ معمولاً شناخته‌شده نیست ممکن است تعیین موقعیت $(t, \phi(t))$ در آن ناحیه امکان‌پذیر نباشد. در هر حال، بازه‌ای که جواب در آن وجود دارد ممکن است هیچ ربط ساده‌ای به تابع f در معادلهٔ دیفرانسیل $y' = f(t,y)$ نداشته باشد. این موضوع را در مثال زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۴

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \qquad (20)$$

را حل کنید و بازه‌ای را تعیین کنید که در آن جواب وجود دارد.

چون $f(t,y) = y^2$ و $\partial f/\partial y = 2y$ همه‌جا پیوسته هستند، قضیهٔ ۲.۴.۲ تضمین می‌کند که این مسئله جوابی یکتا

دارد. برای یافتن جواب، ابتدا متغیرها را جدا می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$y^{-2}dy = dt \qquad (21)$$

و

$$-y^{-1} = t + c.$$

این معادله را نسبت به y حل می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$y = -\frac{1}{t+c}. \qquad (22)$$

برای اینکه این جواب در شرط اولیه صدق کند باید انتخاب کنیم $c = -1$، بنابراین

$$y = \frac{1}{1-t} \qquad (23)$$

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده است. به‌وضوح، وقتی $t \to 1$ این جواب بی‌کران می‌شود. بنابراین جواب تنها در بازهٔ $-\infty < t < 1$ وجود دارد. هیچ نشانه‌ای در خود معادلهٔ دیفرانسیل در این بازه وجود نداشت که نشان بدهد نقطهٔ $t = 1$ قابل توجه است؛ اما اگر شرط اولیه با

$$y(0) = y_0 \qquad (24)$$

عوض می‌شد، ثابت c در معادلهٔ (۲۲) می‌بایست به‌صورت $c = -\frac{1}{y_0}$ انتخاب می‌شد و در نتیجه

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \qquad (25)$$

جواب مسئلهٔ مقدار اولیه با شرط اولیهٔ (۲۴) است. توجه کنید که وقتی $t \to 1/y_0$ جواب (۲۵) بی‌کران می‌شود، بنابراین اگر $y_0 > 0$، بازهٔ وجود $-\infty < t < 1/y_0$ است و اگر $y_0 < 0$، $1/y_0 < t < \infty$ است. این مثال ویژگی دیگر مسئله‌های مقدار اولیهٔ غیرخطی را نشان می‌دهد: ممکن است نقاط تکین جوابها، علاوه بر خود معادلهٔ دیفرانسیل، بستگی اساسی به شرایط اولیه داشته باشند.

جواب عمومی. یکی دیگر از تفاوتهای معادلات خطی و غیرخطی، مفهوم جواب عمومی است. برای معادلات خطی مرتبهٔ اول می‌توان جوابی شامل یک ثابت دلخواه به‌دست آورد، که همهٔ جوابهای ممکن با تعیین مقدار این ثابت به‌دست بیایند. برای معادلات غیرخطی ممکن است چنین نباشد. حتی اگر جوابی شامل یک ثابت دلخواه به‌دست بیاید، ممکن است جوابهای دیگری موجود باشند که با تعیین مقدار این ثابت به‌دست نیایند. به‌عنوان مثال در معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y^2$ در مثال ۴، عبارت معادلهٔ (۲۲) شامل یک ثابت دلخواه است، اما این عبارت همهٔ جوابهای ممکن این معادلهٔ دیفرانسیل را به‌دست نمی‌دهد. برای اثبات این مطلب توجه کنید که مطمئناً $y = 0$ جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است، اما نمی‌توان آن را از معادلهٔ (۲۲) با انتساب عددی به c به‌دست آورد. در این مثال می‌توانستیم احتمال وقوع چنین اتفاقی را پیش‌بینی کنیم؛ چون با بازنویسی معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت (۲۱) فرض کردیم y باید ناصفر باشد. به‌هر حال وجود جوابهای «اضافی» در معادلات غیرخطی غیرمعمول نیست. مثالی که کمتر بدیهی است در مسئلهٔ ۲۲ داده شده است. پس عبارت «جواب عمومی» را فقط وقتی به‌کار می‌بریم که دربارهٔ معادلات خطی بحث می‌کنیم.

جوابهای ضمنی. مجدداً به‌خاطر بیاورید که برای معادلات خطی مرتبهٔ اول، معادلهٔ (۸) دستوری صریح برای جواب $y = \phi(t)$ به‌دست می‌دهد. تا وقتی که بتوان تابع اولیه‌های موردنیاز را یافت، مقدار جواب در هر نقطه را می‌توان با جایگذاری مقدار مناسب t در معادله به‌دست آورد. برای معادلات غیرخطی وضع به این خوبی نیست. معمولاً بهترین چیزی که می‌توان به آن امید بست یافتن معادله‌ای مانند

$$F(t, y) = 0 \qquad (26)$$

شامل t و y است که جواب $y = \phi(t)$ در آن صدق می‌کند. حتی این هم فقط برای معادلات دیفرانسیل از نوع خاصی میسر است که از معادلات جداشدنی مهم‌ترین آنها هستند. به معادلهٔ (۲۶) انتگرال یا انتگرال اول معادلهٔ دیفرانسیل می‌گوییم و (همان‌طور که قبلاً دیدیم) نمودارش یک منحنی انتگرال و یا شاید خانواده‌ای از منحنی‌های انتگرال است. معادلهٔ (۲۶)، با فرض اینکه می‌توان آن را یافت، جوابها را به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ یعنی به‌ازای هر مقدار t باید معادلهٔ (۲۶) را برای یافتن مقدار متناظر y حل کرد. اگر معادلهٔ (۲۶) به اندازهٔ کافی ساده باشد ممکن است بتوان معادله را به‌طور تحلیلی حل کرد و فرمولی صریح برای جواب به‌دست آورد؛ اما اغلب این کار میسر نیست و برای تعیین مقدار y در نقطهٔ داده‌شدهٔ t باید به روشهای عددی متوسل شد. وقتی چند جفت از مقادیر t و y محاسبه شدند، معمولاً رسم منحنی انتگرال بر این نقاط مفید است. در صورت امکان باید انجام این امر را به رایانه واگذار کنید.

مثالهای ۲ و ۳ و ۴ مسئله‌های غیرخطی‌ای بودند که یافتن فرمولی صریح برای جواب $y = \phi(t)$ در موردشان ساده بود. در مقابل، مثالهای ۱ و ۳ در بخش ۲.۲ نمونه‌هایی بودند که بهتر است جوابهایشان را به‌طور ضمنی باقی گذاشت و از روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار جواب به‌ازای مقدارهای خاصی از متغیر مستقل استفاده کرد. این کار معمول‌تر است و جز وقتی رابطهٔ ضمنی نسبت به y از مرتبهٔ دوم باشد و یا شکل خاص ساده‌ای داشته باشد، احتمال حل دقیق آن با روشهای تحلیلی کم است. در واقع، معمولاً حتی یافتن جوابی ضمنی برای معادلات غیرخطی مرتبهٔ اول غیرممکن است.

ساختن گرافیکی یا عددی منحنی‌های انتگرال. به‌خاطر دشواری به‌دست آوردن جواب تحلیلی دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روشهایی که منجر به جوابهای تقریبی و یا اطلاعات کیفی دیگر در مورد جوابها می‌شوند اهمیت فراوانی دارند. در بخش ۱.۱ گفتیم که چگونه می‌توان میدان جهتی برای معادلهٔ دیفرانسیل ساخت. میدان جهت اغلب صورت کیفی جوابها را نشان می‌دهد و می‌توان از آن در تعیین نواحی‌ای از صفحهٔ ty که جوابها در آنها رفتاری جالب دارند و نیازمند بررسی تحلیلی و یا عددی بیشتر هستند کمک گرفت. روشهای گرافیکی برای معادلات مرتبهٔ اول را در بخش ۵.۲ بیشتر بررسی می‌کنیم. روشهای عددی را در فصل ۸ به‌طور نظام‌مند بررسی می‌کنیم. اما برای استفادهٔ مؤثر از نرم‌افزارهایی که جوابهای تقریبی عددی مسائل مقدار اولیه را رسم و تولید می‌کنند، مطالعهٔ خود الگوریتمهای عددی ضروری نیست.

خلاصه. معادلهٔ خطی $y' + p(t)y = g(t)$ چند ویژگی خوب دارد که در گزاره‌های زیر خلاصه می‌شوند:

۱. با فرض پیوستگی ضرایب، جوابی عمومی با یک ثابت دلخواه موجود است که شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل است. جواب خاصی را که در یک شرط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند می‌توان با انتخاب مقدار مناسب برای ثابت دلخواه به‌دست آورد.

۲. فرمولی برای جواب موجود است (یعنی معادله‌های (۷) یا (۸)). به‌علاوه، هر چند دو انتگرال‌گیری برای به‌دست آوردن عبارت جواب لازم است، فرمول جواب $y = \phi(t)$ به‌جای اینکه جواب ϕ را با معادله‌ای به‌صورت ضمنی بیان کند، صریح است.

۳. نقاط احتمالی ناپیوستگی یا تکین جواب را بدون حل مسئله و صرفاً با یافتن نقاط ناپیوستگی ضرایب می‌توان تعیین کرد. پس اگر ضرایب به‌ازای هر t پیوسته باشند، جواب هم به‌ازای هر t موجود و مشتق‌پذیر است.

در حالت کلی هیچ‌یک از گزاره‌های فوق برای معادلات غیرخطی درست نیستند. با اینکه ممکن است معادلهٔ غیرخطی جوابی شامل ثابتی دلخواه داشته باشد، ممکن است جوابهای دیگری هم موجود باشند. اگر بتوانید از معادله‌ای غیرخطی انتگرال بگیرید، احتمالاً معادله‌ای به‌دست می‌آورید که جوابها را به‌طور ضمنی و نه صریح تعریف می‌کند. در پایان، نقاط تکین معادلات غیرخطی را معمولاً می‌توان با حل معادله و آزمایش جواب به‌دست آورد. نقاط تکین احتمالاً علاوه بر معادلهٔ دیفرانسیل به شرط اولیه هم وابسته هستند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، بدون حل مسئله بازه‌ای را مشخص کنید که جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده به‌طور قطعی در آن موجود است.

۱. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t$، $y(1) = 2$

۲. $t(t-5)y' + y = 0$، $y(2) = 1$

۳. $y' + (\tan t)y = \sin t$، $y(\pi) = 0$

۴. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$، $y(-3) = 1$

۵. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$، $y(1) = -3$

۶. $(\ln t)y' + y = \cot t$، $y(2) = 3$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۲، بیان کنید که شرایط قضیهٔ ۲.۴.۲ درکجای صفحهٔ ty برقرار است.

۷. $y' = (t-y)/(2t+5y)$

۸. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$

۹. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$

۱۰. $y' = \ln|ty|/(1-t^2+y^2)$

۱۱. $dy/dt = (1+t^2)/(3y-y^2)$

۱۲. $dy/dt = (\cot t)y/(1+y)$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۶، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید و معین کنید که بازه‌ای که جواب در آن وجود دارد چه بستگی‌ای به مقدار اولیهٔ y_0 دارد.

۱۳. $y' = -4t/y$، $y(0) = y_0$

۱۴. $y' = 2ty^2$، $y(0) = y_0$

۱۵. $y' + y^3 = 0$، $y(0) = y_0$

۱۶. $y' = t^2/y(1+t^3)$، $y(0) = y_0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۷ تا ۲۰، میدان جهت را رسم کنید و چند جواب معادلهٔ دیفرانسیل را بکشید. تشریح کنید که جوابها با افزایش t چگونه رفتار می‌کنند و رفتارشان چه بستگی‌ای به مقدار اولیهٔ y_0 در زمان $t = 0$ دارد.

۱۷. $y' = ty(3-y)$

۱۸. $y' = y(2-ty)$

۱۹. $y' = -y(2-ty)$

۲۰. $y' = t-1-y^2$

۲۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y' = y^{1/3}$، $y(0) = 0$ از مثال ۳ در متن را در نظر بگیرید.

الف) آیا جوابی موجود است که از نقطهٔ $(1, 1)$ بگذرد؟ اگر چنین است آن را بیابید.

ب) آیا جوابی موجود است که از نقطهٔ $(2, 1)$ بگذرد؟ اگر چنین است آن را بیابید.

ج) همهٔ جوابهای ممکن مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را در نظر بگیرید. مجموعهٔ مقادیری را که این جوابها می‌توانند در $t = 2$ داشته باشند تعیین کنید.

۲۲. الف) تحقیق کنید که $y_1(t) = 1 - t$ و $y_2(t) = -t^2/4$ هر دو جوابهای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1$$

هستند. این جوابها کجا اعتبار دارند؟

ب) توضیح بدهید که چرا وجود دو جواب برای مسئلهٔ داده‌شده، یکتایی جواب در قضیهٔ ۲.۴.۲ را نقض نمی‌کند.

ج) ثابت کنید $y = ct + c^2$ که در آن c ثابتی دلخواه است به‌ازای $t \geq -2c$ در معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) صدق می‌کند. اگر $c = -1$، شرط اولیه نیز برآورده می‌شود و جواب $y = y_1(t)$ به‌دست می‌آید. ثابت کنید انتخابی از c موجود نیست که جواب دوم $y = y_2(t)$ را به‌دست بدهد.

۲۳. الف) ثابت کنید $\phi(t) = e^{2t}$ جواب $y' - 2y = 0$ است و به‌ازای هر مقدار ثابت c، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

ب) ثابت کنید به‌ازای $t > 0$، $\phi(t) = 1/t$ جواب $y' + y^2 = 0$ است، اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست مگر اینکه $c = 0$ یا $c = 1$. توجه کنید که معادلهٔ قسمت (ب) غیرخطی است، در حالی که معادلهٔ قسمت (الف) خطی است.

۲۴. ثابت کنید که اگر $y = \phi(t)$ جواب $y' + p(t)y = 0$ باشد، $y = c\phi(t)$ هم به‌ازای هر مقدار c جواب است.

۲۵. فرض کنید $y = y_1(t)$ جواب معادلهٔ

$$y' + p(t)y = 0 \qquad \text{(i)}$$

باشد و فرض کنید $y = y_2(t)$ جواب

$$y' + p(t)y = g(t) \qquad \text{(ii)}$$

باشد. ثابت کنید $y = y_1(t) + y_2(t)$ هم جواب معادلهٔ (ii) است.

۲۶. الف) ثابت کنید جواب (۷) معادلهٔ خطی عمومی (۱) را می‌توان به‌صورت

$$y = cy_1(t) + y_2(t) \qquad \text{(i)}$$

نوشت که در آن c ثابتی دلخواه است. تابعهای y_1 و y_2 را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید y_1 جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + p(t)y = 0 \qquad \text{(ii)}$$

متناظر $g(t) = 0$ است.

ج) ثابت کنید y_2 جواب معادلهٔ خطی کلی (۱) است. بعداً خواهیم دید (مثلاً در بخش ۵.۳) که جوابهای معادلات خطی مرتبهٔ بالاتر هم الگویی مشابه معادلهٔ (i) دارند.

معادلات برنولی. گاهی می‌توان معادله‌ای غیرخطی را با تغییر متغیر وابسته به معادله‌ای خطی تبدیل کرد و آن را حل کرد. مهم‌ترین معادله از این نوع به‌صورت

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

است و به افتخار ژاکوب برنولی به آن معادلهٔ برنولی می‌گویند. در مسئله‌های ۲۷ تا ۳۱ به معادله‌هایی از این نوع می‌پردازیم.

۲۷. الف) معادلهٔ برنولی را به‌ازای $n = 0$ و $n = 1$ حل کنید.

ب) ثابت کنید که اگر $n \neq 0, 1$، تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ معادلهٔ برنولی را به معادله‌ای خطی تبدیل می‌کند. این روش حل را لایب‌نیتز در ۱۶۹۶ میلادی پیدا کرد.

در هر یک از مسئله‌های ۲۸ تا ۳۱، معادلهٔ داده‌شده معادلهٔ برنولی است. در هر مورد، معادله را با تغییر متغیر مسئلهٔ ۲۷ (ب) حل کنید.

۲۸. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0$، $t > 0$.

۲۹. $y' = ry - ky^2$، $r > 0$، $k > 0$. این معادله در دینامیک جمعیتها مهم است و در بخش ۵.۲ به تفصیل بررسی می‌شود.

۳۰. $y' = \epsilon y - \sigma y^3$، $\epsilon > 0$، $\sigma > 0$. این معادله در مطالعهٔ پایداری جریان سیال ظاهر می‌شود.

۳۱. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$ که در آن Γ و T ثابت هستند. این معادله نیز در مطالعهٔ پایداری جریان سیال ظاهر می‌شود.

ضرایب ناپیوسته. گاهی در معادلات دیفرانسیل یک و یا هر دو تابع p و g ناپیوستگی پرشی دارند. اگر t_0 چنین نقطهٔ ناپیوستگی باشد، باید معادله را جداگانه به‌ازای $t < t_0$ و $t > t_0$ حل کنیم و سپس دو جواب را طوری با یکدیگر جفت کنیم که y در t_0 پیوسته شود. این کار با انتخاب مناسب ثابتهای دلخواه انجام می‌شود. این وضع را در دو مسئلهٔ زیر نشان داده‌ایم. توجه کنید که در هیچ حالتی ممکن نیست که y' را هم بتوان در t_0 پیوسته کرد.

۳۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' + 2y = g(t), \qquad y(0) = 0$$

را که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

حل کنید.

۳۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' + p(t)y = 0, \qquad y(0) = 1$$

را که در آن

$$p(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t \le 1 \\ 2, & t > 1 \end{cases}$$

حل کنید.

۵.۲ معادلات خودگردان و دینامیک جمعیت

خانواده‌ای مهم از معادلات مرتبهٔ اول، از معادله‌هایی تشکیل شده که در آنها متغیر مستقل به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود. به چنین معادلاتی، که به شکل

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \qquad (۱)$$

هستند، معادلاتی **خودگردان** می‌گوییم. این معادله‌ها را در چهارچوب رشد یا زوال جمعیت گونه‌ای مشخص بررسی می‌کنیم. این موضوع در گستره‌ای از رشته‌ها، از پزشکی گرفته تا محیط زیست تا اقتصاد جهانی، مسئلهٔ مهمی است. بعضی از کاربردهای دیگر را در مسئله‌ها طرح کرده‌ایم. یادآوری می‌کنیم که در بخشهای ۱.۱ و ۲.۱ حالت خاصی از معادلهٔ (۱) را بررسی کردیم که در آن $f(y) = ay + b$.

معادلهٔ (۱) جداشدنی است، بنابراین روش بخش ۲.۲ را می‌توان در مورد آن به‌کار گرفت، اما هدف اصلی ما در این بخش نشان دادن این موضوع است که چگونه اطلاعات کیفی مهم را با استفاده از روشهای هندسی و بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل به‌طور مستقیم از معادله به‌دست بیاوریم. در این کوشش مفاهیم پایداری و ناپایداری جوابهای معادلات دیفرانسیل از اهمیت بنیادی برخوردارند. این ایده‌ها را در فصل ۱ بدون به‌کار بردن این واژه‌ها و به‌طور غیررسمی معرفی کردیم. در اینجا دربارهٔ آنها بیشتر بحث می‌کنیم و در فصل ۹ آنها را در چهارچوبی کلی‌تر و با عمق بیشتر بررسی خواهیم کرد.

رشد نمایی. فرض کنید $y = \phi(t)$ جمعیت گونه‌ای مشخص در زمان t باشد. ساده‌ترین فرض دربارهٔ تغییرات جمعیت این است که نرخ تغییرات y متناسب با مقدار کنونی y باشد[1]، یعنی

$$\frac{dy}{dt} = ry \qquad (۲)$$

که در آن به ثابت نسبت r بسته به مثبت و یا منفی بودن آن به‌ترتیب نرخ رشد یا نرخ زوال می‌گوییم. در اینجا فرض می‌کنیم که $r > 0$ و بنابراین جمعیت در حال رشد است.

با حل معادلهٔ (۲) با شرط اولیهٔ

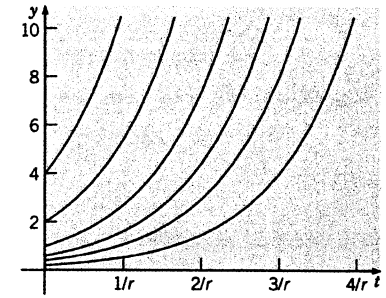
$$y(0) = y_0 \qquad (۳)$$

نتیجه می‌شود

$$y = y_0 e^{rt}. \qquad (۴)$$

پس مدل ریاضی تشکیل‌شده از مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) و (۳) با $r > 0$، چنان‌که از شکل ۱.۵.۲ برمی‌آید، پیش‌بینی می‌کند که جمعیت در همهٔ زمانها رشد می‌کند. تحت شرایط ایده‌آل، دیده شده که معادلهٔ (۴) در مورد بسیاری از جمعیتها حداقل برای زمانی محدود نسبتاً صحیح است. اگرچه واضح است که چنین شرایط ایده‌آلی تا ابد نمی‌تواند ادامه پیدا کند؛ بالاخره محدودیت فضا، غذا و منابع دیگر، نرخ رشد را کاهش می‌دهند و به رشد نمایی جمعیت خاتمه می‌دهند.

۱. ظاهراً اقتصاددان انگلیسی توماس مالتوس (۱۷۶۶-۱۸۳۴م) اولین کسی بود که تشخیص داد بسیاری از جمعیتهای بیولوژیکی در نرخی متناسب با خود جمعیت افزایش می‌یابند. اولین مقالهٔ وی در مورد جمعیت در ۱۷۹۸ میلادی منتشر شد.



شکل ۱.۵.۲ رشد نمایی: y برحسب t برای $dy/dt = ry$.

رشد لجستیک. برای به‌حساب آوردن این واقعیت که نرخ رشد واقعاً به جمعیت بستگی دارد، ثابت r معادلهٔ (۲) را با تابع $h(y)$ جایگزین می‌کنیم و به معادلهٔ اصلاح‌شدهٔ

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y \qquad (۵)$$

می‌رسیم. اکنون می‌خواهیم $h(y)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که وقتی y کوچک است $h(y) \cong r > 0$، $h(y)$ با افزایش y کاهش پیدا کند و به‌ازای yهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $h(y) < 0$. ساده‌ترین تابع با این مشخصات $h(y) = r - ay$ است که در آن a ثابتی مثبت است. با قرار دادن این تابع در معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y. \qquad (۶)$$

معادلهٔ (۶) به معادلهٔ ورهالست[1] و یا **معادلهٔ لجستیک** مشهور است. اغلب راحت‌تر است که معادلهٔ لجستیک را به‌صورت معادل

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \qquad (۷)$$

بنویسیم که در آن $K = r/a$. به ثابت r **نرخ ذاتی رشد** می‌گوییم، یعنی نرخ رشد در عدم حضور عوامل محدودکننده. معنای K به‌زودی روشن می‌شود.

جوابهای معادلهٔ (۷) را با کمی تفصیل در این بخش بررسی می‌کنیم. پیش از این کار، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان طرحی ساده از جوابها رسم کرد که به‌طور کیفی صحیح باشد. روش مشابهی برای معادلهٔ کلی‌تر (۱) هم به‌کار می‌آید.

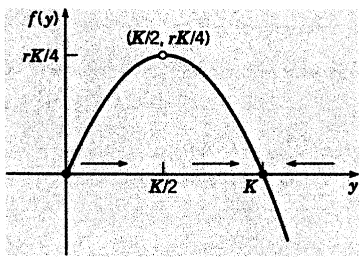
۱. پی. اف. ورهالست (۱۸۰۴-۱۸۴۹م) ریاضیدان بلژیکی بود که معادلهٔ (۶) را به‌عنوان مدلی برای رشد جمعیت انسان در ۱۸۳۸ میلادی ارائه کرد. او این معادله را لجستیک خواند، لذا معمولاً به معادلهٔ (۶) معادلهٔ لجستیک می‌گویند. او به‌علت نداشتن اطلاعات آماری کافی، نتوانست درستی مدلش را بررسی کند و تا سالیان طولانی پس از او به آن توجهی نشد. تطابق معقول این مدل با داده‌های تجربی را آر. پرل (۱۹۳۰ میلادی) برای جمعیت مگس سرکه و جی. اف. گاوس (۱۹۳۵ میلادی) برای جمعیت پارامسی‌های سوسک آرد تحقیق کردند.

ابتدا ساده‌ترین جواب معادلهٔ (۷)، یعنی تابعهای ثابت را می‌یابیم. برای چنین جوابهایی به‌ازای همهٔ tها $dy/dt = 0$، بنابراین هر جواب ثابت معادلهٔ (۷) باید در معادلهٔ جبری

$$r\left(\frac{1 - y}{K}\right)y = 0$$

صدق کند. پس جوابهای ثابت $y = \phi_1(t) = 0$ و $y = \phi_2(t) = K$ هستند. به این جوابها **جوابهای تعادلی** معادلهٔ (۷) می‌گوییم، زیرا در این جوابها، با افزایش t تغییری در مقدار y حاصل نمی‌شود. به‌طور مشابه جوابهای تعادلی معادلهٔ عمومی‌تر (۱) را نیز می‌توان با تعیین ریشه‌های معادلهٔ $f(y) = 0$ یافت. به ریشه‌های $f(y)$، **نقاط بحرانی** هم می‌گوییم.

برای نمایش جوابهای دیگر معادلهٔ (۷) و رسم سریع نمودار آنها، با رسم نمودار $f(y)$ برحسب y شروع می‌کنیم. نمودار معادلهٔ (۷)، $f(y) = r(1 - y/K)y$، سهمی‌ای است که آن را در شکل ۲.۵.۲ نشان داده‌ایم. نقاط برخورد با محورها نقاط $(0,0)$ و $(K,0)$ هستند که متناظر نقاط بحرانی معادلهٔ (۷) هستند و رأس سهمی نقطهٔ $(K/2, rK/4)$ است. توجه کنید که اگر $0 < y < K$، $dy/dt > 0$. بنابراین در این بازه y تابعی صعودی از t است؛ این را در شکل ۲.۵.۲ با پیکانهایی به سمت راست در نزدیکی محور yها نشان داده‌ایم. به‌طور مشابه اگر $y > K$، $dy/dt < 0$ و بنابراین y نزولی است. این را در شکل ۲.۵.۲ با پیکانهایی به طرف چپ نشان داده‌ایم.

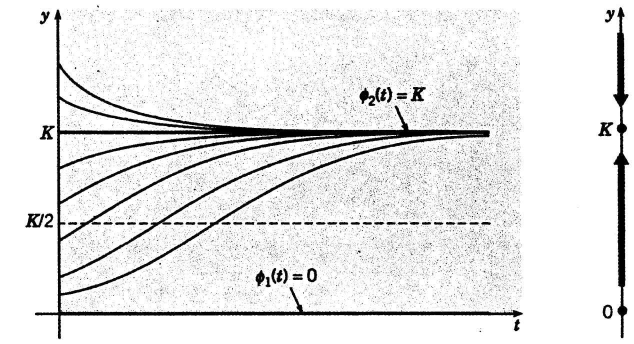


شکل ۲.۵.۲ نمودار $f(y)$ برحسب y برای $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

در این چهارچوب، معمولاً به محور yها **خط فاز** می‌گوییم و چنان‌که بیشتر معمول است در جهت قائم در شکل ۳.۵.۲ (الف) نشان داده شده است. نقطه‌های روی $y = 0$ و $y = K$ نقاط بحرانی یا جوابهای تعادلی هستند. مجدداً، پیکانها نشان می‌دهند که وقتی $0 < y < K$، y صعودی است و وقتی $y > K$، y نزولی است.

علاوه بر این، با استفاده از شکل ۲.۵.۲ توجه کنید که اگر y نزدیک صفر یا K باشد، $f(y)$ نزدیک صفر است و بنابراین منحنی جوابها تخت‌تر هستند. وقتی مقدار y همسایگی صفر یا K را ترک کند، شیب منحنی جوابها تیزتر و تندتر می‌شود.

برای رسم نمودارهای جواب معادلهٔ (۷) در صفحهٔ ty، با جوابهای تعادلی $y = 0$ و $y = K$ شروع می‌کنیم و سپس نمودارهای دیگر را رسم می‌کنیم که وقتی $0 < y < K$، صعودی و وقتی $y > K$ نزولی هستند و با نزدیک شدن y به یکی از مقادیر ۰ یا K، نمودارها تخت‌تر می‌شوند. پس نمودارهای جواب معادلهٔ (۷)، فارغ از مقادیر r و K، باید شکل کلی‌ای مانند آنچه در شکل ۳.۵.۲ (ب) نشان داده‌ایم داشته باشد.



(ب) (الف)

شکل ۳.۵.۲ رشد لجستیک $dy/dt = r(1 - y/K)y$. (الف) خط فاز. (ب) نمودارهای y برحسب t.

ممکن است این‌طور به‌نظر بیاید که شکل ۳.۵.۲(ب) نشان می‌دهد که جوابها، جواب تعادلی $y = K$ را قطع می‌کنند. اما آیا این واقعاً ممکن است؟ خیر، قسمت یکتایی قضیهٔ ۲.۴.۲، یعنی قضیهٔ اساسی وجود و یکتایی، بیان می‌کند که از هر نقطهٔ داده‌شده در صفحهٔ ty تنها یک جواب می‌گذرد. پس با اینکه وقتی $t \to \infty$ جوابها ممکن است به جواب تعادلی مجانب شوند، نمی‌توانند در زمانی متناهی آن را قطع کنند.

برای اینکه بررسی‌مان را یک گام به پیش ببریم، می‌توانیم تقعر منحنی‌های جواب و موقعیت نقاط عطف آن را با یافتن d^2y/dt^2 مشخص کنیم. از معادلهٔ دیفرانسیل (۱) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \qquad (۸)$$

وقتی $y'' > 0$، یعنی وقتی f و f' هم‌علامت باشند، تقعر نمودار y برحسب t رو به بالا است. به‌طور مشابه، وقتی $y'' < 0$ تقعر این نمودار رو به پایین است و این زمانی اتفاق می‌افتد که f و f' علامت متفاوتی داشته باشند. علامت f و f' را به‌سادگی می‌توان از نمودار $f(y)$ برحسب y تعیین کرد. وقتی $f'(y) = 0$، ممکن است نقاط عطف موجود باشند.

در مورد معادلهٔ (۷)، وقتی $0 < y < K/2$، f مثبت و صعودی است (شکل ۲.۵.۲ را مشاهده کنید) و در نتیجه f و f' هر دو مثبت هستند، تقعر جوابها رو به بالا است. به‌ازای $y > K$، f منفی و نزولی است (f و f' هر دو منفی هستند) و تقعر جوابها رو به بالا است. وقتی $K/2 < y < K$، تقعر جوابها رو به پایین است چون در اینجا f مثبت و نزولی است و بنابراین f مثبت است اما f' منفی است. هر جا نمودار y برحسب t خط $y = K/2$ را قطع کند یک نقطهٔ عطف موجود است. در نمودارهای شکل ۳.۵.۲(ب) این خواص را نشان داده‌ایم.

بالاخره، توجه کنید که K کران بالایی است که جمعیتهای رشدکننده‌ای که با مقدار کمتر از K شروع می‌شوند به آن نزدیک می‌شوند اما از آن بیشتر نمی‌شوند. بنابراین طبیعی است که به K **سطح اشباع** و یا **ظرفیت نهایی محیط** برای گونهٔ موردنظر بگوییم.

با مقایسهٔ شکلهای ۱.۵.۲ و ۳.۵.۲(ب) معلوم می‌شود که جوابهای معادلهٔ غیرخطی (۷)، حداقل به‌ازای مقدارهای بزرگ t، به‌طور چشمگیری با جوابهای معادلهٔ خطی (۱) تفاوت دارند. صرف‌نظر از مقدار K، یعنی صرف‌نظر از درجهٔ کوچک بودن جمله‌های غیرخطی در معادلهٔ (۷)، وقتی $t \to \infty$ جوابهای معادله به مقداری متناهی نزدیک می‌شوند؛ در حالی که جوابهای معادلهٔ (۱) وقتی $t \to \infty$ بدون کران (و به‌طور نمایی) رشد می‌کنند. پس به‌ازای مقدارهای بزرگ t، حتی یک جملهٔ غیرخطی هر چقدر کوچک در این معادلهٔ دیفرانسیل تأثیر تعیین‌کننده‌ای روی جوابها دارد.

در بسیاری از موقعیتها اطلاعات کیفی‌ای که در شکل ۳.۵.۲(ب) در مورد جواب $y = \phi(t)$ معادلهٔ (۷) نشان داده‌شده کافی است. این اطلاعات تماماً از نمودار $f(y)$ برحسب y و بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل (۷) به‌دست آمده‌اند. اما اگر بخواهیم جزئیات بیشتری از رشد لجستیک بدانیم و مثلاً بخواهیم میزان جمعیت را در زمانی خاص بدانیم، باید معادلهٔ (۷) را تحت شرایط اولیهٔ (۳) حل کنیم. اگر $y \neq 0$ و $y \neq K$، می‌توانیم معادلهٔ (۷) را به‌صورت

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = r\,dt$$

بنویسیم. با تجزیهٔ طرف چپ به کسرهای جزئی نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right) dy = r\,dt;$$

پس با انتگرال گرفتن از دو طرف نتیجه می‌شود

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c \qquad (۹)$$

که در آن c ثابت دلخواه انتگرال‌گیری است که مقدار آن از شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ تعیین می‌شود. قبلاً دیدیم که اگر $0 < y_0 < K$، y در همهٔ زمانها در این بازه باقی خواهد ماند. پس در این حالت می‌توانیم علامت قدرمطلق را از معادلهٔ (۹) برداریم و با به نما رساندن دو طرف نتیجه می‌شود

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = Ce^{rt} \qquad (۱۰)$$

که در آن $C = e^c$. برای اینکه جواب در شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ صدق کند، باید C را برابر $y_0/[1 - (y_0/K)]$ انتخاب کنیم. با استفاده از این مقدار برای C در معادلهٔ (۱۰) و حل معادله نسبت به y نتیجه می‌شود

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \qquad (۱۱)$$

جواب (۱۱) را با فرض $0 < y_0 < K$ به‌دست آوردیم. اگر $y_0 > K$، جزئیات بررسی معادلهٔ (۹) کمی متفاوت است، و اثبات درستی جواب (۱۱) در این حالت را به شما واگذار می‌کنیم. در پایان توجه کنید که معادلهٔ (۱۱) جوابهای تعادلی $y = \phi_1(t) = 0$ و $y = \phi_2(t) = K$ را به‌ترتیب متناظر با شرط اولیهٔ $y_0 = 0$ و $y_0 = K$ در بر دارد.

همهٔ نتایج کیفی‌ای را که قبلاً به‌طور هندسی به آنها رسیدیم می‌توان با بررسی معادلهٔ (۱۱) تأیید کرد. به‌ویژه اگر $y_0 = ۰$، از معادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر t، $y(t) = ۰$ اگر $y_0 = ۰$. اگر $y_0 > ۰$ و اگر در معادلهٔ (۱۱)، $t \to \infty$ آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{y_0 K}{y_0} = K$$

پس به‌ازای هر $y_0 > ۰$، وقتی $t \to \infty$ جوابها به‌طور مجانبی به جواب تعادلی $y = \phi_2(t) = K$ نزدیک می‌شوند؛ پس می‌گوییم جواب ثابت $\phi_2(t) = k$ **جواب مجانبی‌پایدار** معادلهٔ (۷) است و یا نقطهٔ $y = K$ جواب تعادلی و یا نقطهٔ بحرانی مجانبی‌پایدار است. این یعنی پس از زمانی طولانی، صرف‌نظر از میزان اولیهٔ جمعیت، جمعیت تا زمانی که مثبت است به سطح اشباع K نزدیک می‌شود. جوابهای دیگر با افزایش r سریع‌تر به جواب تعادلی میل می‌کنند.

از طرف دیگر، وضع برای جواب تعادلی $y = \phi_1(t) = ۰$ کاملاً متفاوت است. حتی جوابهایی که خیلی نزدیک به صفر شروع می‌شوند با افزایش t رشد می‌کنند و همان‌طور که دیدیم، وقتی $t \to \infty$ به K نزدیک می‌شوند. می‌گوییم $\phi_1(t) = ۰$ **جواب تعادلی ناپایدار** است و یا $y = ۰$ جواب تعادلی ناپایدار و یا نقطهٔ بحرانی ناپایدار است. این یعنی تنها راه نزدیک صفر نگه داشتن جواب این است که مقدار اولیه دقیقاً برابر صفر باشد.

مثال ۱

مدل لجستیک در بررسی رشد طبیعی جمعیت ماهی هالیبات، در منطقه‌ای خاص از اقیانوس آرام به‌کار گرفته شده است.[1] فرض کنید y، مجموع جرم یا جرم زیستی ماهی هالیبات در زمان t باشد که برحسب کیلوگرم محاسبه شده است. مقدار پارامترهای معادلهٔ لجستیک $r = ۰٫۷۱$ در سال و $K = ۸۰٫۵ \times ۱۰^۶ \text{ kg}$ هستند. اگر جرم زیستی اولیه $y_0 = ۰٫۲۵K$ باشد، مقدار جرم زیستی را دو سال بعد بیابید. همچنین زمان τ را تعیین کنید که در آن $y(\tau) = ۰٫۷۵K$.

راحت‌تر است که جواب (۱۱) را به ظرفیت نهایی K تقسیم کنیم؛ پس معادلهٔ (۱۱) را به‌صورت

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{(y_0/K) + [۱-(y_0/K)]e^{-rt}} \qquad (۱۲)$$

می‌نویسیم. با استفاده از داده‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{y(۲)}{K} = \frac{۰٫۲۵}{۰٫۲۵ + ۰٫۷۵e^{-۱٫۴۲}} \cong ۰٫۵۷۹۷;$$

در نتیجه، $y(۲) \cong ۴۶٫۷ \times ۱۰^۶ \text{ kg}$.

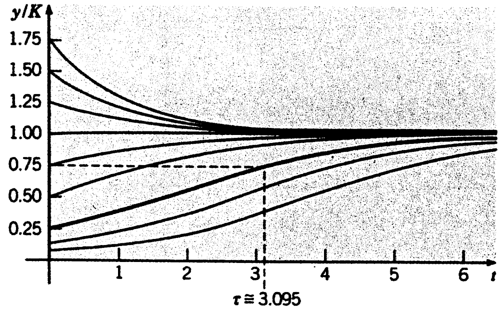
برای به‌دست آوردن τ ابتدا معادلهٔ (۱۲) را نسبت به t حل می‌کنیم. در نتیجه

$$e^{-rt} = \frac{(y_0/K)[۱-(y/K)]}{(y/K)[۱-(y_0/K)]};$$

بنابراین

$$t = -\frac{۱}{r}\ln\frac{(y_0/K)[۱-(y/K)]}{(y/K)[۱-(y_0/K)]}. \qquad (۱۳)$$

۱. یک منبع اطلاعاتی خوب دربارهٔ دینامیک و اقتصاد جمعیت برای استفادهٔ بهینه از منابع تجدیدشدنی، با تأکید خاص روی ماهیگیری، کتاب کلارک است که در انتهای این فصل فهرست شده است. مقدار پارامترهای استفاده شده در اینجا در صفحهٔ ۵۳ این کتاب آمده است و از نتیجهٔ بررسی اچ. اِس. مورینگ به‌دست آمده است.



شکل ۴.۵.۲ نمودار y/K برحسب t برای مدل جمعیتی ماهی هالیبات در اقیانوس آرام.

با استفاده از مقادیر r و y_0/K و قرار دادن $y/K = ۰٫۷۵$ نتیجه می‌شود

$$\tau = \frac{۱}{۰٫۷۱}\ln\frac{(۰٫۲۵)(۰٫۲۵)}{(۰٫۷۵)(۰٫۷۵)} = \frac{۱}{۰٫۷۱}\ln ۹ \cong ۳٫۰۹۵ \text{ سال}$$

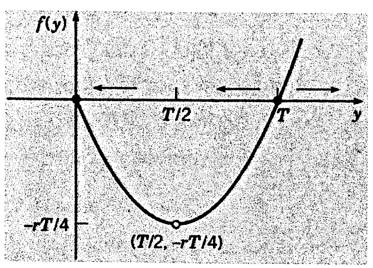
نمودار y/K برحسب t را به‌ازای پارامترهای داده‌شده و چند شرط اولیه در شکل ۴.۵.۲ نشان داده‌ایم.

آستانهٔ بحرانی. اکنون به بررسی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(۱-\frac{y}{T}\right)y \qquad (۱۴)$$

می‌پردازیم که در آن r و T ثابتهای مثبت مفروضی هستند. توجه کنید که (جز در جایگزینی پارامتر K با T) این معادله تنها در یک علامت منفی در طرف راست با معادلهٔ لجستیک تفاوت دارد. اما، همان‌گونه که خواهیم دید، جوابهای (۱۴) و جوابهای (۷) رفتار بسیار متفاوتی دارند.

در معادلهٔ (۱۴)، نمودار $f(y)$ برحسب y سهمی‌ای است که در شکل ۵.۵.۲ نشان داده شده است. نقاط تقاطع منحنی با محور yها، نقاط بحرانی $y = ۰$ و $y = T$ هستند که متناظر جوابهای تعادلی $\phi_1(t) = ۰$ و $\phi_2(t) = T$ هستند. اگر $۰ < y < T$ آنگاه $dy/dt < ۰$ و y با افزایش زمان کاهش می‌یابد. از طرف دیگر اگر $y > T$ آنگاه $dy/dt > ۰$ و y با افزایش t رشد می‌کند. پس $\phi_1(t) = ۰$ جواب تعادلی مجانبی‌پایدار است و

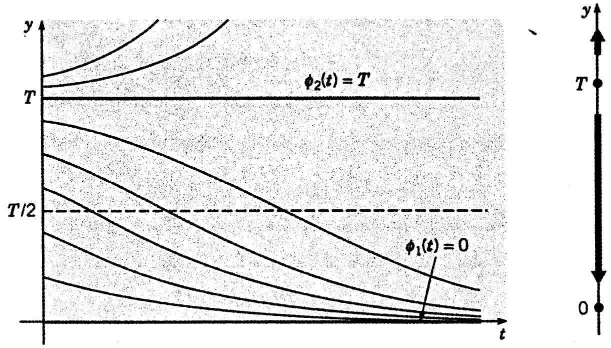


شکل ۵.۵.۲ $f(y)$ برحسب y برای $dy/dt = -r(۱ - y/T)y$.

$\phi_2(t) = T$ ناپایدار است. علاوه بر این، به‌ازای $0 < y < T/2$، $f'(y)$ منفی است و به‌ازای $T/2 < y < T$ مثبت است. همچنین به‌ازای $y > T$، $f'(y)$ مثبت است، بنابراین تقعر نمودار y برحسب t رو به بالا است.

شکل ۶.۵.۲ (الف)، خط فاز (محور yها) را برای معادلهٔ (۱۴) نشان می‌دهد. نقاط $y = 0$ و $y = T$، نقاط بحرانی یا جوابهای تعادلی هستند و پیکانها نشانگر صعودی و یا نزولی بودن جوابها هستند.

اکنون می‌توانیم منحنی‌های جواب معادلهٔ (۱۴) را به‌سرعت بکشیم: ابتدا جوابهای تعادلی $y = 0$ و $y = T$ را رسم می‌کنیم، سپس منحنی‌های در نوار $0 < y < T$ را که با افزایش t نزول می‌کنند و تقعر آنها در طول خط $y = T/2$ تغییر می‌کند رسم می‌کنیم. سپس بالای $y = T$ چند منحنی رسم می‌کنیم که شیب آنها با افزایش t و y افزایش می‌یابد. مطمئن شوید که همهٔ منحنی‌ها با نزدیک شدن y به صفر و یا T تخت‌تر می‌شوند. نتیجه شکل ۶.۵.۲ (ب) است که به‌طور کیفی طرحی صحیح از جوابهای معادلهٔ (۱۴) به‌ازای هر r و T به‌دست می‌دهد. از این شکل به نظر می‌آید که با افزایش زمان، بسته به اینکه مقدار اولیهٔ y_0 کمتر و یا بزرگ‌تر از T باشد، جوابها به صفر نزدیک می‌شوند و یا بدون هیچ کرانی افزایش می‌یابند. پس T یک **سطح آستانه** است که زیر آن هیچ رشدی اتفاق نمی‌افتد.



شکل ۶.۵.۲ رشد با آستانه: $dy/dt = -r(1 - y/T)y$. (الف) خط فاز. (ب) نمودارهای y برحسب t.

می‌توانیم نتایج به‌دست آمده از استدلال هندسی را با حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱۴) تأیید کنیم. این کار را می‌توان با جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری مانند معادلهٔ (۷) انجام داد. با این حال، اگر توجه کنیم که معادلهٔ (۱۴) را می‌توان با قرار دادن T به‌جای K در معادلهٔ (۷) و تبدیل r به $-r$ به‌دست آورد، می‌توانیم با همان جایگزینی‌ها در جواب (۱۱) به

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}} \qquad (۱۵)$$

برسیم که جواب معادلهٔ (۱۴) تحت شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ است.

اگر $0 < y_0 < T$، از معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که وقتی $t \to \infty$، $y \to 0$. این موافق تحلیل هندسی

ما است. اگر $y_0 > T$، مخرج طرف راست (۱۵) به‌ازای مقدار مشخص و متناهی‌ای از t برابر صفر است. این مقدار را با t^* نشان می‌دهیم و آن را از معادلهٔ

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0$$

محاسبه می‌کنیم، که نتیجه می‌شود

$$t^* = \frac{1}{r}\ln\frac{y_0}{y_0 - T}. \qquad (۱۶)$$

پس اگر جمعیت y_0 بالای آستانهٔ T باشد، مدل آستانه پیش‌بینی می‌کند که نمودار y برحسب t در $t = t^*$ مجانب قائم دارد؛ به‌عبارت دیگر جمعیت در زمانی متناهی بی‌کران می‌شود که مقدار آن به y_0، T و r بستگی دارد. وجود و موقعیت این مجانب از تحلیل هندسی هویدا نبود، بنابراین در این حالت جواب صریح منجر به اطلاعات کیفی و همچنین اطلاعات کمّی بیشتر می‌شود.

جمعیت بعضی از گونه‌ها پدیدهٔ آستانه را نشان می‌دهد. اگر تعداد بسیار کمی از آنها موجود باشند، نمی‌توانند با موفقیت تکثیر شوند و از بین می‌روند. اما اگر میزان جمعیت از سطح آستانه بزرگ‌تر باشد، رشد بیشتر جمعیت رخ می‌دهد. البته جمعیت نمی‌تواند نامتناهی شود و بنابراین باید معادلهٔ (۱۴) را با در نظرگرفتن این مطلب اصلاح کرد.

سطح آستانهٔ بحرانی در شرایط دیگر هم رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال در مکانیک سیالات معمولاً معادلاتی به شکل (۷) و (۱۴) بر تحول اختلال کوچک y در جریان آرام (هموار) سیال حاکم‌اند. به‌عنوان مثال، اگر معادلهٔ (۱۴) برقرار باشد و $y < T$، آنگاه اختلال میرا است و جریان آرام حفظ می‌شود. اما اگر $y > T$، اختلال رشد می‌کند و جریان آرام به یک جریان متلاطم تغییر می‌یابد. در این حالت به T، دامنهٔ بحرانی گفته می‌شود. در آزمایش‌ها با به‌اندازهٔ کافی پایین نگه‌داشتن سطح اختلال در تونل باد، به مطالعهٔ جریان آرام در چاه‌های هوایی می‌پردازند.

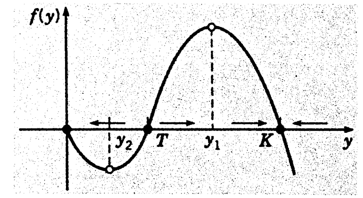
رشد لجستیک با آستانه. همان‌طورکه در زیربخش قبل ذکر کردیم، ممکن است اصلاح مدل (۱۴) برای اینکه هنگامی که y در بالای آستانهٔ T قرار می‌گیرد رشد نامتناهی رخ ندهد ضروری باشد. ساده‌ترین راه برای انجام این کار معرفی عامل دیگری است که منجر به منفی شدن dy/dt به‌ازای yهای بزرگ می‌شود. بنابراین

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \qquad (۱۷)$$

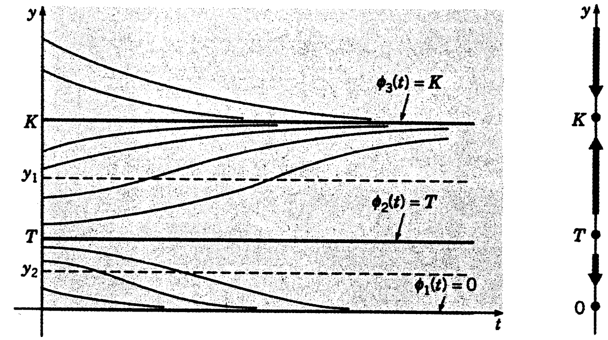
را در نظر می‌گیریم که در آن $r > 0$ و $0 < T < K$.

نمودار $f(y)$ برحسب y را در شکل ۷.۵.۲ نشان داده‌ایم. در این مسئله سه نقطهٔ بحرانی $y = 0$، $y = T$ و $y = K$، به‌ترتیب متناظر جوابهای تعادلی $\phi_1(t) = 0$، $\phi_2(t) = T$ و $\phi_3(t) = K$ موجودند. از شکل ۷.۵.۲ می‌توانیم ببینیم که به‌ازای $T < y < K$، $dy/dt > 0$ و بنابراین y در این بازه صعودی است. علاوه بر این، اگر $y < T$ <K یا $y > K$ آنگاه $dy/dt < 0$ و بنابراین در این بازه‌ها y نزولی است. در نتیجه جوابهای تعادلی $\phi_1(t)$ و $\phi_3(t)$ مجانبی‌پایدارند و $\phi_2(t)$ ناپایدار است.

خط فاز معادلهٔ (۱۷) را در شکل ۸.۵.۲ (الف) نشان داده‌ایم و بعضی از جوابها را در شکل ۸.۵.۲ (ب) رسم کرده‌ایم. باید مطمئن شوید که رابطهٔ بین این دو شکل و همچنین رابطهٔ بین شکلهای ۷.۵.۲ و ۸.۵.۲ (الف) را



شکل ۷.۵.۲ $f(y)$ برحسب y برای $dy/dt = -r(1-y/T)(1-y/K)y$.



(ب) (الف)

شکل ۸.۵.۲ رشد لجستیک با آستانه: $dy/dt = -r(1-y/T)(1-y/K)y$. (الف) خط فاز. (ب) نمودارهای y برحسب t.

درک می‌کنید. از شکل ۸.۵.۲ (ب) می‌توانیم ببینیم که اگر y از پایین آستانهٔ T شروع کند، به سمت نابودی نهایی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر اگر y در بالای T شروع شود، y درنهایت به ظرفیت نهایی K نزدیک می‌شود. نقاط عطف نمودارهای y برحسب t به‌ترتیب متناظر نقاط ماکزیمم y_1 و مینیمم y_2 روی نمودار $f(y)$ برحسب y در شکل ۷.۵.۲ هستند. این مقادیر را می‌توان با مشتق‌گیری از طرف راست معادلهٔ (۱۷) نسبت به y و صفر قرار دادن نتیجه و حل آن نسبت به y به‌دست آورد. در واقع

$$y_{1,2} = (K+T\pm\sqrt{K^2-KT+T^2})/3 \qquad (18)$$

که در آن علامت مثبت برای y_1 و علامت منفی برای y_2 است.

مدلی با این کلیت، ظاهراً جمعیت کبوتران نامه‌بر را که سالیان دراز تا اواخر قرن نوزدهم در ایالات متحده به تعداد زیاد وجود داشتند توصیف می‌کند.[1] این کبوتران را برای تفریح و خوراک به‌طور گسترده‌ای شکار کردند و

۱. به‌عنوان مثال
Oliver L. Austin, Jr., *Birds of the World* (New York: Golden Press, 1983), pp. 143-145
را ببینید.

در نتیجه تعداد آنها در دههٔ ۱۸۸۰ میلادی به‌طور چشمگیری کاهش یافت. متأسفانه این کبوتران ظاهراً فقط در گروههای بزرگ متناظر به آستانهٔ نسبتاً بزرگ T می‌توانند موفق به زادوولد شوند. با اینکه تعداد قابل توجهی از این کبوتران تا اواخر دههٔ ۱۸۸۰ میلادی زنده باقی ماندند، تعدادشان در یک محل برای زادوولد موفق کافی نبود و جمعیت آنها به‌سرعت رو به نابودی رفت. آخرین بازماندهٔ آنها در ۱۹۱۴ میلادی مرد. این کاهش پرشتاب در جمعیت کبوتران نامه‌بر از تعداد انبوه به سمت نابودی که تنها در چند دهه رخ داد، یکی از عوامل اصلی توجه به محافظت از محیط زیست در این کشور است.

مسئله‌ها

مسئله‌های ۱ تا ۶ مربوط به معادله‌هایی به شکل $dy/dt = f(y)$ هستند. در هر مسئله طرحی از نمودار $f(y)$ برحسب y را رسم کنید، نقاط بحرانی (تعادل) را تعیین کنید و هر یک را برحسب مجانبی‌پایدار و یا ناپایدار بودن دسته‌بندی کنید. خط فاز را رسم کنید و طرحی از نمودار چند جواب در صفحهٔ ty رسم کنید.

۱. $dy/dt = ay + by^2$، $a > 0$، $b > 0$، $y_0 \geq 0$

۲. $dy/dt = ay + by^2$، $a > 0$، $b > 0$، $-\infty < y_0 < \infty$

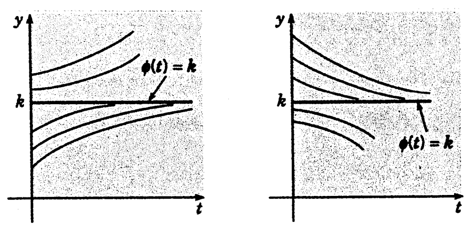
۳. $dy/dt = y(y-1)(y-2)$، $y_0 \geq 0$

۴. $dy/dt = e^y - 1$، $-\infty < y_0 < \infty$

۵. $dy/dt = e^{-y} - 1$، $-\infty < y_0 < \infty$

۶. $dy/dt = -2(\arctan y)/(1+y^2)$، $-\infty < y_0 < \infty$

۷. **جوابهای تعادلی نیمه‌پایدار.** گاهی یک جواب تعادلی ثابت این خاصیت را دارد که جوابهایی که در یک طرف آن قرار دارند به آن میل می‌کنند، در حالی‌که جوابهایی که در طرف دیگر قرار دارند از آن دور می‌شوند (شکل ۹.۵.۲ را ببینید). در این حالت به جواب تعادلی **نیمه‌پایدار** می‌گوییم.



(ب) (الف)

شکل ۹.۵.۲ در هر دو حالت جواب تعادلی $\phi(t) = k$ نیمه‌پایدار است. (الف) $dy/dt \leq 0$؛ (ب) $dy/dt \geq 0$.

الف) معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = k(1-y)^2 \qquad (i)$$

را در نظر بگیرید که در آن k ثابتی مثبت است. ثابت کنید $y = 1$ تنها نقطهٔ بحرانی است و جواب تعادلی متناظر $\phi(t) = 1$ است.

ب) نمودار $f(y)$ را برحسب y رسم کنید. ثابت کنید وقتی $y < 1$ یا $y > 1$، y تابعی صعودی از t است. خط فاز در بالا و پایین $y = 1$ پیکانهایی دارد که به طرف بالا هستند؛ پس جوابهای زیر جواب تعادلی به آن میل می‌کنند و آنهایی که در بالای آن قرار دارند بیشتر رشد می‌کنند. بنابراین $\phi(t) = 1$ نیمه‌پایدار است.

ج) معادلهٔ (i) را با شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ حل کنید و نتایج به‌دست آمده در قسمت (ب) را تأیید کنید.

در مسئله‌های ۸ تا ۱۳ با معادله‌هایی به شکل $dy/dt = f(y)$ سروکار داریم. در هر مسئله طرحی از نمودار $f(y)$ برحسب t را رسم کنید، نقاط بحرانی (تعادل) را تعیین کنید و هر یک از آنها را برحسب مجانبی‌پایدار، ناپایدار یا نیمه‌پایدار بودن (مسئلهٔ ۷ را ببینید) دسته‌بندی کنید. خط فاز را رسم کنید و طرحی از چند نمودار جواب را در صفحهٔ ty رسم کنید.

۸. $dy/dt = -k(y-2)^2$، $k > 0$، $-\infty < y_0 < \infty$

۹. $dy/dt = y^2(y^2-1)$، $-\infty < y_0 < \infty$

۱۰. $dy/dt = y(4-y^2)$، $-\infty < y_0 < \infty$

۱۱. $dy/dt = ay - b\sqrt{y}$، $a > 0$، $b > 0$، $y_0 \ge 0$

۱۲. $dy/dt = y^2(1-y)^2$، $-\infty < y_0 < \infty$

۱۳. $dy/dt = y^2(4-y^2)$، $-\infty < y_0 < \infty$

۱۴. معادلهٔ $dy/dt = f(y)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید y_1 نقطهٔ بحرانی است؛ یعنی $f(y_1) = 0$. ثابت کنید جواب تعادلی ثابت $\phi(t) = y_1$ مجانبی‌پایدار است اگر $f'(y_1) < 0$ و ناپایدار است اگر $f'(y_1) > 0$.

۱۵. فرض کنید جمعیت گونهٔ خاصی از معادلهٔ لجستیک $dy/dt = ry[1-(y/K)]$ پیروی می‌کند.

الف) اگر $y_0 = K/4$، زمان τ را بیابید که در آن جمعیت اولیه دوبرابر می‌شود. مقدار τ متناظر را برای $r = 0.025$ در سال بیابید.

ب) اگر $y_0/K = \alpha$، زمان T را بیابید که در آن $y(T)/K = \beta$، که در آن $0 < \alpha, \beta < 1$. توجه کنید که وقتی $\alpha \to 0$ و یا $\beta \to 1$، $T \to \infty$. مقدار T را برای $r = 0.025$ در سال، $\alpha = 0.1$ و $\beta = 0.9$ بیابید.

۱۶. معادلهٔ دیگری که برای مدل کردن رشد جمعیت به‌کار رفته است، معادلهٔ گومپرتز[1] است؛ یعنی

$$\frac{dy}{dt} = ry\ln\left(\frac{K}{y}\right)$$

که در آن r و K ثابتهای مثبت هستند.

الف) طرحی از نمودار $f(y)$ برحسب y رسم کنید، نقاط بحرانی آن را تعیین کنید و معلوم کنید که هرکدام مجانبی‌پایدار و یا ناپایدارند.

ب) به‌ازای $0 \le y \le K$، تعیین کنید که تقعر نمودار y برحسب t کجا رو به بالا و کجا رو به پایین است.

ج) به‌ازای هر y در $0 < y \le K$، ثابت کنید dy/dt داده شده با معادلهٔ گومپرتز هرگز از dy/dt داده‌شده با معادلهٔ لجستیک کمتر نیست.

۱. بنجامین گومپرتز (۱۷۷۹-۱۸۶۵م) آمارگر انگلیسی بود. او این مدل رشد جمعیت را در حین تدوین جدول فوت برای یک شرکت بیمه ابداع کرد و در سال ۱۸۲۵ آن را منتشر کرد.

۱۷. (الف) معادلهٔ گومپرتز

$$\frac{dy}{dt} = ry\ln\left(\frac{K}{y}\right)$$

را با شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ حل کنید.

راهنمایی: می‌توانید قرار دهید $u = \ln(y/K)$.

ب) برای داده‌های داده‌شده در مثال ۱ متن ($r = 0.71$ در سال، $K = 80.5 \times 10^6$ kg، $y_0/K = 0.25$) با استفاده از مدل گومپرتز، مقدار پیش‌بینی $y(2)$ را به‌دست بیاورید.

ج) برای همان دادهٔ قسمت (ب)، با استفاده از مدل گومپرتز، زمان τ را بیابید که در آن $y(\tau) = 0.75K$.

۱۸. یک دریاچهٔ آب در فرورفتگی‌ای مخروطی به شعاع a و عمق h قرار دارد. فرض کنید آب با نرخ ثابت k به داخل جریان می‌یابد و در نرخی متناسب با مساحت سطح تبخیر می‌شود.

الف) ثابت کنید حجم آب $V(t)$ دریاچه در زمان t در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dV}{dt} = k - \alpha\pi\left(\frac{3a}{\pi h}\right)^{2/3} V^{2/3}$$

صدق می‌کند که در آن α ضریب تبخیر است.

ب) عمق تعادلی آب در دریاچه را بیابید. آیا نقطهٔ تعادل مجانبی‌پایدار است؟

۱۹. یک مخزن آب استوانه‌ای را با سطح مقطع A در نظر بگیرید. آب با نرخ ثابت k به داخل مخزن تلمبه می‌شود و از سوراخ کوچکی با مساحت a در ته مخزن خارج می‌شود. از اصل توریچلی در هیدرودینامیک (مسئلهٔ ۶ بخش ۳.۲) نتیجه می‌شود که نرخ خروج آب از سوراخ $\alpha a\sqrt{2gh}$ است که در آن h عمق فعلی آب در مخزن، g شتاب گرانش و α ضریب انقباضی است که در $0.5 \le \alpha \le 1.0$ صدق می‌کند.

الف) ثابت کنید عمق آب در مخزن در هر زمان در معادلهٔ

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(k - \alpha a\sqrt{2gh})}{A}$$

صدق می‌کند.

ب) عمق تعادلی h_e آب را بیابید و ثابت کنید که مجانبی‌پایدار است. توجه کنید که h_e به A بستگی ندارد.

برداشت از منابع قابل تجدید. فرض کنید y جمعیت گونهٔ معینی از یک ماهی (به‌عنوان مثال، ماهی تُن و یا هالیبات) در ناحیهٔ مشخصی از اقیانوس باشد که با معادلهٔ لجستیک

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y$$

توصیف می‌شود. هر چند استفاده از این منبع غذایی مورد علاقهٔ ماست، به‌طور شهودی واضح است که در صورت صید بی‌رویه، ممکن است جمعیت ماهی از حد مفید کمتر شود و حتی ممکن است منجر به نابودی آن شود. در مسئله‌های ۲۰ و ۲۱ به بعضی از سؤالهای مطرح در اتخاذ راهبرد منطقی در مدیریت ماهیگیری می‌پردازیم.[1]

۱. یک بررسی جالب از این مسئله را می‌توان در کتاب کلارک و به‌ویژه دو فصل آخر آن یافت. در این کتاب که قبلاً معرفی شد، مطالب در حد بسیار فراتر از آنچه که در اینجا مطرح می‌شود بررسی شده و مراجع متعدد دیگر هم ذکر شده‌اند.

۲۰. در سطح معینی از کوشش، فرض اینکه نرخ صید ماهی متناسب با جمعیت y آن است منطقی است. هرچه بیشتر ماهی موجود باشد، ساده‌تر می‌توان آنها را صید کرد. پس فرض می‌کنیم نرخ صید ماهی با Ey داده شود که در آن E ثابتی مثبت با واحد $\frac{1}{\text{زمان}}$ است و تلاش کل صورت گرفته برای صید گونه‌ای معین از ماهی را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن این کوشش، معادلهٔ لجستیک تبدیل می‌شود به

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y - Ey. \qquad \text{(i)}$$

این معادله که به آن **مدل شیفر** می‌گوییم، منتسب به ام. بی. شیفر زیست‌شناس است که از آن برای مطالعهٔ جمعیتهای ماهی استفاده کرد.

الف) ثابت کنید اگر $E < r$، دو نقطهٔ تعادل $y_1 = 0$ و $y_2 = K(1 - E/r) > 0$ موجودند.

ب) ثابت کنید $y = y_1$ ناپایدار و $y = y_2$ مجانبی‌پایدار است.

ج) نرخ قابل حصول در ماهیگیری، نرخی است که می‌توان در آن به‌طور بی‌پایان صید کرد و آن حاصلضرب تلاش کل E و جمعیت مجانبی‌پایدار y_2 است. Y را به‌عنوان تابعی از تلاش E بیابید؛ نمودار این تابع به منحنی تلاش-باروری مشهور است.

د) مقدار E را طوری تعیین کنید که در آن Y ماکزیمم شود و بنابراین **حداکثر مقدار قابل حصول**، Y_m، را بیابید.

۲۱. در این مسئله فرض می‌کنیم که ماهی با نرخ ثابت h مستقل از اندازهٔ جمعیت ماهی صید شود. در آن صورت y در معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y - h \qquad \text{(i)}$$

صدق می‌کند. فرض صید با نرخ ثابت h در زمانی که y بزرگ است ممکن است منطقی باشد اما اگر y کوچک باشد کمتر معقول به نظر می‌رسد.

الف) اگر $h < rK/4$، ثابت کنید که معادلهٔ (i) دو نقطهٔ تعادل y_1 و y_2 دارد که $y_1 < y_2$. این نقاط را تعیین کنید.

ب) ثابت کنید y_1 ناپایدار و y_2 مجانبی‌پایدار است.

ج) با استفاده از نمودار $f(y)$ برحسب y ثابت کنید اگر جمعیت اولیهٔ y_0 بزرگ‌تر از y_1 باشد، وقتی $t \to \infty$، $y \to y_2$، اما اگر $y_0 < y_1$، y با افزایش t کاهش می‌یابد. توجه کنید که $y = 0$ نقطهٔ تعادل نیست، بنابراین اگر $y_0 < y_1$، در زمان متناهی نابودی رخ می‌دهد.

د) اگر $h > rK/4$، ثابت کنید صرف‌نظر از مقدار y_0، با افزایش t، y به صفر کاهش می‌یابد.

هـ) اگر $h = rK/4$، ثابت کنید تنها یک نقطهٔ تعادل $y = K/2$ موجود است و این نقطه نیمه‌پایدار است (مسئلهٔ ۷ را ببینید). بنابراین حداکثر مقدار قابل حصول $h_m = rK/4$، متناظر مقدار تعادلی $y = K/2$ است. مشاهده کنید که h_m همان مقدار Y_m در مسئلهٔ ۲۰ (د) است. اگر سطح y به کمتر از $K/2$ برسد، میزان صید بیش از حد در نظر گرفته می‌شود.

بیماریهای واگیردار. استفاده از روشهای ریاضی برای مطالعهٔ شیوع بیماریهای واگیردار حداقل به کارهای دانیل برنولی در ۱۷۶۰ میلادی دربارهٔ آبله برمی‌گردد. در سالهای اخیر مدلهای ریاضی زیادی برای مطالعهٔ بیماریهای مختلف پیشنهاد و مطالعه شده است.[1]

۱. یک منبع استاندارد، کتاب بیلی (Bailey) است که در مراجع فهرست شده است. مسئله‌های ۲۲ تا ۲۴ به‌ترتیب در فصلهای ۵ و ۱۰ و ۲۰ کتاب بیلی بررسی شده‌اند.

۲۲. فرض کنید یک جمعیت خاص را بتوان به دو قسمت تقسیم کرد؛ کسانی که بیمار هستند و می‌توانند دیگران را آلوده کنند، و آنهایی که بیمار نیستند اما در معرض بیماری قرار دارند. فرض کنید x نسبت افراد در معرض بیماری به کل جمعیت و y نسبت افراد بیمار به کل جمعیت باشد؛ در این‌صورت $x + y = 1$. فرض کنید بیماری با تماس بین بیماران و افراد سالم جمعیت با نرخ شیوع dy/dt متناسب با تعداد تماسها گسترش یابد. علاوه بر این فرض کنید که اعضای هر دو گروه می‌توانند آزادانه در گروه دیگر رفت‌وآمد کنند، بنابراین تعداد تماسها متناسب با حاصلضرب x و y است. چون $x = 1 - y$، به مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y), \quad y(0) = y_0 \qquad \text{(i)}$$

می‌رسیم که در آن α ضریب مثبت نسبت است و y_0 نسبت جمعیت اولیهٔ بیمار به کل جمعیت است.

الف) نقاط تعادل معادلهٔ دیفرانسیل (i) را به‌دست بیاورید و معین کنید که کدامها مجانبی‌پایدار، نیمه‌پایدار و یا ناپایدار هستند.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (i) را حل کنید و ثابت کنید نتایج به‌دست آمده در قسمت (الف) صحیح هستند. ثابت کنید وقتی $t \to \infty$ باید $y(t) \to 1$، که یعنی بیماری درنهایت در همهٔ جمعیت گسترش می‌یابد.

۲۳. بعضی از بیماریها (مانند تب تیفوئید) عمدتاً به‌وسیلهٔ ناقلان گسترش می‌یابند؛ یعنی به‌وسیلهٔ توسط اشخاصی که می‌توانند بیماری را منتقل کنند اما علائم آن را بروز نمی‌دهند. فرض کنید x و y به‌ترتیب نسبت جمعیتهای در معرض بیماری و ناقلان به کل جمعیت باشند. فرض کنید ناقلان با نرخ β شناسایی می‌شوند و در قرنطینه قرار می‌گیرند؛ بنابراین

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y. \qquad \text{(i)}$$

همچنین فرض کنید که بیماری در نرخی متناسب با حاصلضرب x و y گسترش می‌یابد؛ پس

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy. \qquad \text{(ii)}$$

الف) با حل معادلهٔ (i) با شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$، y را در هر زمان t تعیین کنید.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، با حل معادلهٔ (ii) با شرط اولیهٔ $x(0) = x_0$، مقدار x در هر زمان t را بیابید.

ج) با یافتن مقدار حدی x وقتی $t \to \infty$، میزان نسبتی از جمعیت را بیابید که از بیماری فرار می‌کنند.

۲۴. هدف کار دانیل برنولی در ۱۷۶۰ میلادی، ارزیابی میزان تأثیر برنامهٔ مورد مناقشهٔ مایه‌کوبی علیه بیماری آبله بود که در آن زمان تهدید اصلی سلامت جامعه محسوب می‌شد. مدل او را می‌توان در مورد سایر بیماریهایی که در آنها بیمار با یک‌بار ابتلا و به‌دست آوردن سلامتی برای همیشه از آن بیماری مصون می‌شود هم به‌کار برد. جمعیت گروهی را در نظر بگیرید که در یک سال ($t = 0$) متولد شده‌اند و فرض کنید $n(t)$ تعداد افرادی باشد که t سال بعد زنده مانده‌اند. فرض کنید $x(t)$ تعداد اعضایی از این گروه باشد که تا سال t به آبله مبتلا نشده‌اند و بنابراین هنوز مستعد بیماری هستند. فرض کنید β نرخ ابتلای افراد مستعد به بیماری آبله و v نرخ مرگ افرادی است که از بیماری آبله درگذشته‌اند. بالاخره، فرض کنید $\mu(t)$ نرخ مرگ به دلیلی جز آبله باشد. در این‌صورت dx/dt، نرخ کاهش افراد مبتلا به بیماری، با

$$\frac{dx}{dt} = -[\beta + \mu(t)]x \qquad \text{(i)}$$

داده می‌شود. جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ (i) نرخ ابتلای افراد مستعد به آبله و جملهٔ دوم نرخ مرگ به دلیل دیگر است. همچنین

$$\frac{dn}{dt} = -v\beta x - \mu(t)n \qquad \text{(ii)}$$

که در آن dn/dt نرخ مرگ در گروه است و دو جملهٔ طرف راست به‌ترتیب نرخهای مرگ به‌علت آبله و دلیل دیگر هستند.

الف) فرض کنید $z = x/n$ و ثابت کنید z در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - vz), \qquad z(0) = 1 \qquad \text{(iii)}$$

صدق می‌کند. توجه کنید که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (iii) به $\mu(t)$ بستگی ندارد.

ب) $z(t)$ را با حل معادلهٔ (iii) بیابید.

ج) برنولی تقریب زد که $v = \beta = 1/8$. با استفاده از این مقادیر نسبت جمعیت افراد ۲۰ ساله‌ای را که آبله نگرفته‌اند به کل جمعیت تعیین کنید.

تذکر: براساس مدلی که هم‌اکنون تشریح شد و همچنین بهترین داده‌های مرگ در دسترس در آن زمان، برنولی محاسبه کرد که اگر مرگ به‌واسطهٔ آبله را بتوان از بین برد ($v = 0$)، تقریباً سه سال به عمر متوسط بیست و شش سال و هفت ماه (در سال ۱۷۶۰ میلادی) افزوده می‌شود و بنابراین از برنامهٔ مایه‌کوبی حمایت کرد.

نقاط انشعاب. برای معادله‌ای به‌صورت

$$\frac{dy}{dt} = f(a,y) \qquad \text{(i)}$$

که در آن a پارامتری حقیقی است، نقاط بحرانی (جوابهای تعادلی) معمولاً به مقدار a بستگی دارند. با افزایش یا کاهش پیوستهٔ a، اغلب در یک مقدار معین از a که به آن **نقطهٔ انشعاب** می‌گوییم نقاط بحرانی در یکدیگر ادغام و یا از یکدیگر جدا می‌شوند و ممکن است جوابهای تعادلی ایجاد شوند و یا از بین بروند. نقاط انشعاب در بسیاری کاربردها اهمیت دارند، چرا که در نزدیکی آنها ماهیت جواب معادلهٔ دیفرانسیل تحت بررسی دچار تغییری ناگهانی می‌شود. به‌عنوان مثال، در مکانیک سیالات ممکن است جریان آرام شکسته شود و متلاطم شود یا یک ستون حامل ممکن است به‌طور ناگهانی خم شود و منجر به جابه‌جایی افقی شدید شود، یا با افزایش مقدار مواد شیمیایی در یک مخلوط خاص امواجی مارپیچ با رنگهای متغیر در سیال ساکن اولیه ظاهر شوند. در مسئله‌های ۲۵ تا ۲۷، سه نوع از انشعاب را که ممکن است در مسئله‌های ساده به شکل (i) اتفاق بیفتد توصیف می‌کنیم.

۲۵. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = a - y^2 \qquad \text{(ii)}$$

را در نظر بگیرید.

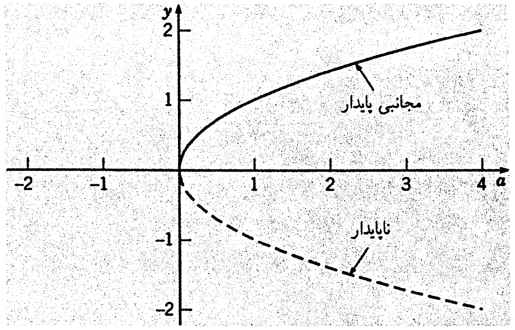
الف) همهٔ نقاط بحرانی معادلهٔ (ii) را بیابید. توجه کنید که اگر $a < 0$، هیچ نقطهٔ بحرانی‌ای موجود نیست، اگر $a = 0$ یک نقطهٔ بحرانی موجود است و اگر $a > 0$ دو نقطهٔ بحرانی موجود است.

ب) در هر حالت خط فاز را رسم کنید و در هر حالت تعیین کنید که نقطهٔ بحرانی مجانبی‌پایدار، نیمه‌پایدار و یا ناپایدار است.

ج) در هر حالت طرحی از چند جواب معادلهٔ (ii) را در صفحهٔ ty رسم کنید.

د) اگر موقعیت نقاط بحرانی را به‌صورت تابعی از a در صفحهٔ ay رسم کنیم، شکل ۱۰.۵.۲ را به‌دست می‌آوریم. به این نمودار **دیاگرام انشعاب** معادلهٔ (ii) می‌گوییم. به انشعاب در $a = 0$، انشعاب **گره زینی** می‌گوییم. این نام در چهارچوب دستگاههای مرتبهٔ دوم توجیه می‌شود که در فصل ۹ به آنها می‌پردازیم.

توجیه



شکل ۱۰.۵.۲ دیاگرام انشعاب برای $y' = a - y^2$.

۲۶. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ay - y^3 = y(a - y^2) \qquad \text{(iii)}$$

را در نظر بگیرید.

الف) مجدداً حالتهای $a < 0$، $a = 0$ و $a > 0$ را در نظر بگیرید. در هر حالت نقاط بحرانی را بیابید، خط فاز را رسم کنید و تعیین کنید که هر نقطهٔ بحرانی مجانبی‌پایدار، نیمه‌پایدار و یا ناپایدار است.

ب) در هر حالت طرحی از چند جواب معادلهٔ (iii) را در صفحهٔ ty رسم کنید.

ج) دیاگرام انشعاب، یعنی نمودار موقعیت نقاط بحرانی برحسب a را برای معادلهٔ (iii) رسم کنید. برای معادلهٔ (iii) به نقطهٔ انشعاب $a = 0$، **انشعاب چنگال** می‌گوییم؛ نمودار شما تناسب این نام را معلوم می‌کند.

۲۷. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ay - y^2 = y(a - y) \qquad \text{(iv)}$$

را در نظر بگیرید.

الف) مجدداً حالتهای $a < 0$، $a = 0$ و $a > 0$ را در نظر بگیرید. در هر حالت نقاط بحرانی را بیابید، خط فاز را رسم کنید و تعیین کنید که هر نقطهٔ بحرانی مجانبی‌پایدار، نیمه‌پایدار و یا ناپایدار است.

ب) در هر حالت طرحی از چند جواب معادلهٔ (iv) را در صفحهٔ ty رسم کنید.

ج) دیاگرام انشعاب معادلهٔ (iv) را رسم کنید، تعداد نقاط بحرانی به‌ازای $a < 0$ و $a > 0$ یکسان است اما پایداری آنها تغییر یافته است. به‌ازای $a < 0$، جواب تعادلی $y = 0$ مجانبی‌پایدار و $y = a$ ناپایدار است، در حالی که به‌ازای $a > 0$ موقعیت برعکس می‌شود. پس با گذر a از نقطهٔ انشعاب $a = 0$، **تبادل پایداری** رخ می‌دهد. به این نوع انشعاب، **انشعاب تبادل پایداری** می‌گوییم.

۲۸. واکنش‌های شیمیایی. واکنش شیمیایی مرتبهٔ دوم شامل واکنش (برخورد) یک مولکول از جسم P با یک مولکول از جسم Q برای ایجاد یک مولکول از جسم جدید X است؛ این را با $P + Q \to X$ نمایش می‌دهند. فرض کنید که p و q که $p \neq q$، به‌ترتیب غلظتهای اولیهٔ P و Q هستند و فرض کنید $x(t)$ غلظت X در زمان t است. در

این‌صورت $p-x(t)$ و $q-x(t)$ غلظتهای P و Q در زمان t هستند و نرخ انجام واکنش با معادلهٔ

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(p-x)(q-x) \qquad \text{(i)}$$

داده می‌شود که در آن α ثابتی مثبت است.

الف) اگر $x(0)=0$، وقتی $t\to\infty$ مقدار حدی $x(t)$ را بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل بیابید. سپس مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و $x(t)$ را به‌ازای هر t بیابید.

ب) اگر P و Q یکسان باشند آنگاه $p=q$ و معادلهٔ (i) تبدیل می‌شود به

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(p-x)^2. \qquad \text{(ii)}$$

اگر $x(0)=0$، وقتی $t\to\infty$ مقدار حدی $x(t)$ را بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل بیابید. سپس مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و $x(t)$ را به‌ازای هر t بیابید.

۶.۲ معادلات کامل و عاملهای انتگرال‌ساز

برای معادلات غیرخطی مرتبهٔ اول چند روش انتگرال‌گیری برای حل خانواده‌های مختلف مسئله‌ها وجود دارد. مهم‌ترین خانواده‌ها، معادلات خطی و معادلات جداشدنی هستند که قبلاً دربارهٔ آنها بحث کردیم. در این بخش به خانواده‌ای مهم از معادله‌ها می‌پردازیم که به معادلات کامل معروف‌اند و روش مشخصی برای حل آنها موجود است. با این حال، باید به‌خاطر داشته باشید که معادلات مرتبهٔ اولی که می‌توان آنها را با روشهای مقدماتی انتگرال‌گیری حل کرد، نسبتاً خاص هستند و بیشتر معادلات مرتبهٔ اول را نمی‌توان به این طریق حل کرد.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل

$$2x+y^2+2xyy'=0 \qquad (۱)$$

را حل کنید.

این معادله نه خطی است و نه جداشدنی، بنابراین روشهای مناسب حل آن دسته از معادله‌ها در اینجا قابل استفاده نیست. اما توجه کنید که تابع $\psi(x,y)=x^2+xy^2$ این خاصیت را دارد که

$$2x+y^2=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad 2xy=\frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad (۲)$$

بنابراین این معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به‌صورت

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (۳)$$

نوشت. با فرض اینکه y تابعی از x است و با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت معادل

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+xy^2)=0 \qquad (۴)$$

نوشت؛ بنابراین

$$\psi(x,y)=x^2+xy^2=c \qquad (۵)$$

که در آن c ثابتی دلخواه است، معادله‌ای است که جواب معادلهٔ (۱) را به‌طور ضمنی تعریف می‌کند.

نکتهٔ کلیدی حل معادلهٔ (۱)، تشخیص این موضوع بود که تابع ψ در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند. به‌طور کلی‌تر، فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \qquad (۶)$$

داده شده باشد. فرض کنید که بتوانیم تابع ψ را طوری مشخص کنیم که

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)=M(x,y),\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)=N(x,y) \qquad (۷)$$

و $\psi(x,y)=c$ به‌طور ضمنی $y=\phi(x)$ را به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف کند. در این‌صورت

$$M(x,y)+N(x,y)y'=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\psi(x,\phi(x))$$

و معادلهٔ دیفرانسیل (۶) به

$$\frac{d}{dx}\psi(x,\phi(x))=0 \qquad (۸)$$

تبدیل می‌شود. در این حالت به معادلهٔ (۶) معادلهٔ دیفرانسیل **کامل** می‌گوییم. جواب معادلهٔ (۶) یا صورت معادل (۸)، به‌طور ضمنی با

$$\psi(x,y)=c \qquad (۹)$$

داده می‌شود که در آن c ثابتی دلخواه است.

در مثال ۱، مشاهدهٔ کامل بودن معادلهٔ دیفرانسیل نسبتاً ساده بود: در واقع، با تشخیص تابع ψ، یافتن جواب آسان بود. در مورد معادله‌های پیچیده‌تر ممکن است انجام این کار به این سادگی نباشد. روشی نظام‌مند را برای تعیین اینکه معادلهٔ داده‌شده کامل است یا نه، در قضیهٔ بعدی آورده‌ایم.

قضیهٔ ۱.۶.۲ فرض کنید M، N، M_y و N_x، که در آن اندیس‌ها مشتقات جزئی را نشان می‌دهند، تابعهایی پیوسته بر ناحیهٔ مستطیلی[1] $R:\alpha<x<\beta,\ \gamma<y<\delta$ باشند. در این‌صورت معادلهٔ (۶)، یعنی

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0$$

۱. مستطیلی بودن ناحیه چندان مهم نیست و ناحیه تنها باید همبند ساده باشد. در بعد ۲، این یعنی داخل ناحیه سوراخی نباشد. پس به‌عنوان مثال، ناحیه‌های مستطیلی و یا گرد همبند ساده هستند، اما ناحیه‌های حلقه‌ای شکل همبند ساده نیستند. جزئیات بیشتر را می‌توان در کتابهای پیشرفتهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال یافت.

در ناحیهٔ R کامل است اگر و فقط اگر در هر نقطهٔ R،

$$M_y(x,y) = N_x(x,y). \tag{10}$$

یعنی تابعی مانند ψ وجود دارد که در معادلهٔ (۷)، یعنی

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر M و N در معادلهٔ (۱۰) صدق کنند.

اثبات این قضیه دو قسمت دارد. ابتدا نشان می‌دهیم اگر تابع ψ موجود باشد که معادلهٔ (۷) برقرار باشد آنگاه معادلهٔ (۱۰) برقرار خواهد بود. با محاسبهٔ M_y و N_x از معادلهٔ (۷) نتیجه می‌شود

$$M_y(x,y) = \psi_{xy}(x,y), \qquad N_x(x,y) = \psi_{yx}(x,y). \tag{11}$$

چون M_y و N_x پیوسته هستند، ψ_{xy} و ψ_{yx} هم پیوسته‌اند. این پیوستگی تساوی آنها را تضمین می‌کند و بنابراین معادلهٔ (۱۰) برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر M و N در معادلهٔ (۱۰) صدق کنند، معادلهٔ (۶) کامل است. اثبات با ساختن تابع ψ انجام می‌شود که در معادلهٔ (۷)، یعنی

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y)$$

صدق می‌کند. با انتگرال‌گیری از جملهٔ اول معادلهٔ (۷) نسبت به x و ثابت نگه‌داشتن y نتیجه می‌شود

$$\psi(x,y) = Q(x,y) + h(y) \tag{12}$$

که در آن $Q(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر است که $\partial Q(x,y)/\partial x = M(x,y)$. به‌عنوان مثال می‌توانیم فرض کنیم

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds \tag{13}$$

که در آن x_0 ثابتی مشخص در بازهٔ $\alpha < x_0 < \beta$ است. تابع h در معادلهٔ (۱۲) تابع دلخواه مشتق‌پذیری است که نقش ثابتی دلخواه را بازی می‌کند. اکنون باید نشان بدهیم که همواره می‌توان $h(y)$ را طوری انتخاب کرد که $\psi_y = N$. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۱۲) نسبت به y و برابر قرار دادن نتیجه با $N(x,y)$، نتیجه می‌شود

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + h'(y) = N(x,y).$$

سپس با حل معادله نسبت به $h'(y)$ نتیجه می‌شود

$$h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y). \tag{14}$$

برای تعیین $h(y)$ از معادلهٔ (۱۴)، طرف راست معادلهٔ (۱۴) برخلاف ظاهرش باید تنها تابع y باشد. برای اینکه ببینیم چنین است، می‌توانیم از کمیت مورد سؤال نسبت به x مشتق بگیریم و به

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \tag{15}$$

برسیم. با تعویض ترتیب مشتق‌گیری در جملهٔ دوم معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

یا، چون $\partial Q/\partial x = M$،

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)$$

که طبق معادلهٔ (۱۰) برابر صفر است. بنابراین طرف راست معادلهٔ (۱۴) به‌رغم ظاهرش به x بستگی ندارد. بنابراین با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۴) و سپس قرار دادن این تابع در معادلهٔ (۱۲)، تابع $\psi(x,y)$ موردنظر را به‌دست می‌آوریم. این اثبات قضیه ۱.۶.۲ را کامل می‌کند.

می‌توان برای $\psi(x,y)$ عبارت صریحی برحسب انتگرال‌ها به‌دست آورد (مسئلهٔ ۱۷ را ببینید)؛ اما معمولاً تکرار روند اثبات بالا برای حل معادله‌های کامل مشخص ساده‌تر است: از $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم که به‌جای ثابت دلخواه، شامل تابع دلخواه $h(y)$ است، سپس از نتیجه نسبت به y مشتق می‌گیریم و آن را مساوی N قرار می‌دهیم. درنهایت با استفاده از این معادلهٔ آخری $h(y)$ را به‌دست می‌آوریم. در مثال بعد این فرایند را نشان داده‌ایم.

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0 \tag{16}$$

را حل کنید.

با محاسبهٔ M_y و N_x نتیجه می‌شود

$$M_y(x,y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x,y);$$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده کامل است. پس تابعی مانند $\psi(x,y)$ وجود دارد که

$$\psi_x(x,y) = y\cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

با انتگرال گرفتن از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2e^y + h(y). \tag{17}$$

با قرار دادن $\psi_y = N$ نتیجه می‌شود

$$\psi_y(x,y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y - 1;$$

پس $h'(y) = -1$ و $h(y) = -y$. ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان حذف کرد، زیرا هر جواب این معادلهٔ دیفرانسیل قابل قبول

است و نیازی به یافتن کلی‌ترین جواب نداریم. با قرار دادن $h(y)$ در معادلهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y - y;$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۱۶) به‌طور ضمنی با

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c \tag{18}$$

داده می‌شود.

مثال ۳

معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{19}$$

را حل کنید.

می‌توانیم بنویسیم

$$M_y(x,y) = 3x + 2y, \qquad N_x(x,y) = 2x + y;$$

چون $M_y \neq N_x$، این معادلهٔ دیفرانسیل کامل نیست. برای دیدن اینکه این مسئله را نمی‌توان با روش قبلی حل کرد، فرض کنید بخواهیم تابعی مانند ψ پیدا کنیم که

$$\psi_x(x,y) = 3xy + y^2, \qquad \psi_y(x,y) = x^2 + xy. \tag{20}$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود

$$\psi(x,y) = \frac{3}{2}x^2 y + xy^2 + h(y) \tag{21}$$

که در آن h تابعی دلخواه، تنها از متغیر y است. برای اینکه این تابع در عبارت دوم معادلهٔ (۲۰) صدق کند، ψ_y را از معادلهٔ (۲۱) محاسبه می‌کنیم و آن را برابر با N قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + xy$$

یا

$$h'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy. \tag{22}$$

چون طرف راست معادلهٔ (۲۲) به هر دوی x و y بستگی دارد، غیرممکن است که بتوان معادلهٔ (۲۲) را برای $h(y)$ حل کرد. پس تابع $\psi(x,y)$ که در هر دو عبارت معادلهٔ (۲۰) صدق کند وجود ندارد.

عاملهای انتگرال‌ساز. گاهی ممکن است بتوانیم معادلهٔ دیفرانسیلی را که کامل نیست با ضرب در عامل انتگرال‌ساز مناسبی کامل کنیم. یادآوری می‌کنیم که این روند را در بخش ۱.۲ در حل معادلات خطی به‌کارگرفتیم. برای بررسی امکان استفادهٔ کلی‌تر این ایده، معادلهٔ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{23}$$

را در تابع μ ضرب می‌کنیم و سپس سعی می‌کنیم μ را طوری انتخاب کنیم که معادلهٔ حاصل، یعنی

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{24}$$

کامل باشد. طبق قضیهٔ ۱.۶.۲، معادلهٔ (۲۴) کامل است اگر و فقط اگر

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \tag{25}$$

چون M و N داده شده‌اند، معادلهٔ (۲۵) بیان می‌کند که μ باید در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \tag{26}$$

صدق کند. اگر بتوان تابع μ را طوری یافت که در معادلهٔ (۲۶) صدق کند، معادلهٔ (۲۴) کامل خواهد بود. در این‌صورت جواب معادلهٔ (۲۴) را می‌توان با روش قسمت اول این بخش به‌دست آورد. جوابی که به این‌صورت پیدا می‌شود در معادلهٔ (۲۳) هم صدق می‌کند، چون عامل انتگرال‌ساز μ از معادلهٔ (۲۴) حذف می‌شود.

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی‌ای از نوع (۲۶) ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد؛ در این‌صورت هر چنین جوابی را می‌توان به‌عنوان عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ (۲۳) به‌کار گرفت. این چندگانگی احتمالی عامل انتگرال‌ساز را در مثال ۴ نمایش داده‌ایم.

متأسفانه، حل معادلهٔ (۲۶) ــ که عامل انتگرال‌ساز μ را معین می‌کند ــ معمولاً به همان سختی حل معادلهٔ اولیهٔ (۲۳) است. بنابراین هرچند اصولاً عاملهای انتگرال‌ساز ابزارهایی قوی در حل معادله‌های دیفرانسیل هستند، در عمل معمولاً تنها در حالتهای خاص می‌توان آنها را یافت. مهم‌ترین حالتی که در آن می‌توان عاملهای انتگرال‌ساز ساده یافت هنگامی است که μ تنها تابع یکی از دو متغیر x و y ــ و نه هر دو متغیر ــ باشد. در این حالت، شرایط لازم روی M و N را طوری تعیین می‌کنیم که معادلهٔ (۲۳) عامل انتگرال‌سازی مانند μ داشته باشد که تنها به x بستگی دارد.

فرض کنید μ تنها تابع x باشد، در این‌صورت

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

پس اگر $(\mu M)_y$ مساوی $(\mu N)_x$ باشد، لزوماً باید

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{27}$$

اگر $(M_y - N_x)/N$ تنها تابع x باشد، عامل انتگرال‌ساز μ نیز تنها به x بستگی دارد؛ علاوه بر این μ را می‌توان با حل معادلهٔ (۲۷) به‌دست آورد که هم خطی است و هم جداشدنی. برای تعیین شرطی که معادلهٔ (۲۳) عامل انتگرال‌سازی داشته باشد که تنها به y بستگی دارد، می‌توان روند مشابهی به‌کار برد.

مثال ۴

عامل انتگرال‌سازی برای معادلهٔ

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{19}$$

بیابید و سپس معادله را حل کنید.

در مثال ۳ دیدیم که این معادله کامل نیست. اکنون بررسی می‌کنیم که این معادله عامل انتگرال‌سازی که تنها به x بستگی

داشته باشد دارد یا نه. با محاسبهٔ کمیت $(M_y - N_x)/N$ نتیجه می‌شود

$$\frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)} = \frac{۳x+۲y-(۲x+y)}{x^۲+xy} = \frac{۱}{x}; \qquad (۲۸)$$

پس عامل انتگرال‌ساز μ وجود دارد که تنها تابع x است و در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x} \qquad (۲۹)$$

صدق می‌کند. بنابراین

$$\mu(x) = x. \qquad (۳۰)$$

با ضرب معادلهٔ (۱۹) در این عامل انتگرال‌ساز، نتیجه می‌شود

$$(۳x^۲y + xy^۲) + (x^۳ + x^۲y)y' = ۰. \qquad (۳۱)$$

این معادله کامل است و جواب آن به‌سادگی به‌طور ضمنی پیدا می‌شود:

$$x^۳y + \frac{۱}{۲}x^۲y^۲ = c. \qquad (۳۲)$$

این جواب را می‌توان به‌طور صریح هم پیدا کرد، چون معادلهٔ (۳۲) نسبت به y از مرتبهٔ دوم است. می‌توانید ثابت کنید که عامل انتگرال‌ساز دیگری به‌صورت

$$\mu(x,y) = \frac{۱}{xy(۲x+y)}$$

برای معادلهٔ (۱۹) وجود دارد و با استفاده از این عامل انتگرال‌ساز، اگرچه با مشکلات بیشتر، همان جواب قبلی به‌دست می‌آید (مسئلهٔ ۳۲ را ببینید).

مسئله‌ها

معین کنید که از معادله‌های مسئله‌های ۱ تا ۱۲ کدامها کامل هستند. در صورت کامل بودن جواب را بیابید.

۱. $(۲x+۴y)+(۲x-۲y)y' = ۰$

۲. $(۲x+۳)+(۲y-۲)y' = ۰$

۳. $(۳x^۲-۲xy+۲)dx+(۶y^۲-x^۲+۳)dy = ۰$

۴. $(۲xy^۲+۲y)+(۲x^۲y+۲x)y' = ۰$

۵. $dy/dx = -(ax+by)/(bx+cy)$

۶. $dy/dx = -(ax-by)/(bx-cy)$

۷. $(e^x\sin y - ۲y\sin x)dx + (e^x\cos y + ۲\cos x)dy = ۰$

۸. $(e^x\sin y + ۲y)dx - (۳x - e^x\sin y)dy = ۰$

۹. $(ye^{xy}\cos ۲x - ۲e^{xy}\sin ۲x + ۲x)dx + (xe^{xy}\cos ۲x - ۳)dy = ۰$

۱۰. $(x\ln y + xy)dx + (y\ln x + xy)dy = ۰$؛ $x > ۰$، $y > ۰$

۱۱. $(y/x + ۶x)dx + (\ln x - ۲)dy = ۰$، $x > ۰$

۱۲. $x\,dx/(x^۲+y^۲)^{۳/۲} + y\,dy/(x^۲+y^۲)^{۳/۲} = ۰$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ و ۱۴، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید و حداقل به‌طور تقریبی ناحیهٔ اعتبار جواب را معین کنید.

۱۳. $(۲x-y)dx + (۲y-x)dy = ۰$، $y(۱) = ۳$

۱۴. $(۹x^۲+y-۱)dx - (۴y-x)dy = ۰$، $y(۱) = ۰$

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ و ۱۶، مقدار b را طوری تعیین کنید که معادلهٔ داده‌شده کامل باشد و سپس، با استفاده از آن مقدار b، معادله را حل کنید.

۱۵. $(xy^۲ + bx^۲y)dx + (x+y)x^۲dy = ۰$

۱۶. $(ye^{۲xy} + ۴x^۳)dx + bxe^{۲xy}dy = ۰$

۱۷. فرض کنید معادلهٔ (۶) در مستطیل R در شرایط قضیهٔ ۱.۶.۲ صدق می‌کند و بنابراین کامل است. ثابت کنید یک صورت ممکن تابع $\psi(x,y)$ عبارت است از

$$\psi(x,y) = \int_{x_۰}^{x} M(s,y_۰)ds + \int_{y_۰}^{y} N(x,t)dt$$

که در آن $(x_۰, y_۰)$ نقطه‌ای در R است.

۱۸. ثابت کنید که هر معادلهٔ جداشدنی به‌صورت

$$M(x) + N(y)y' = ۰$$

کامل هم هست.

ثابت کنید معادله‌های مسئله‌های ۱۹ تا ۲۲ کامل نیستند، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز داده‌شده کامل می‌شوند. سپس معادله‌ها را حل کنید.

۱۹. $x^۲y^۳ + x(۱+y^۲)y' = ۰$، $\mu(x,y) = ۱/xy^۳$

۲۰. $y\,dx + (۲x - ye^y)dy = ۰$، $\mu(x,y) = y$

۲۱. $(\sin y/y - ۲e^{-x}\sin x)dx + ((\cos y + ۲e^{-x}\cos x)/y)dy = ۰$، $\mu(x,y) = ye^x$

۲۲. $(x+۲)\sin y\,dx + x\cos y\,dy = ۰$، $\mu(x,y) = xe^x$

۲۳. ثابت کنید اگر $(N_x - M_y)/M = Q$، که در آن Q تنها تابع y است، معادلهٔ دیفرانسیل

$$M + Ny' = ۰$$

عامل انتگرال‌سازی به‌صورت

$$\mu(y) = \exp\int Q(y)dy$$

دارد.

۲۴. ثابت کنید اگر $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$، که در آن R تنها به xy بستگی دارد، معادلهٔ دیفرانسیل

$$M + Ny' = ۰$$

عامل انتگرال‌سازی به‌صورت $\mu(xy)$ دارد. فرمولی کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

در هر یک از مسئله‌های ۲۵ تا ۳۱، یک عامل انتگرال‌ساز بیابید و معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۲۵. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

۲۶. $y' = e^{2x} + y - 1$

۲۷. $dx + (x/y - \sin y)dy = 0$

۲۸. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

۲۹. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$

۳۰. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]dx + [3(x/y^2) + 4y]dy = 0$

۳۱. $(3x + 6/y) + (x^2/y + 3y/x)dy/dx = 0$

راهنمایی: مسئلهٔ ۲۴ را ببینید.

۳۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

را با استفاده از عامل انتگرال‌ساز $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$ حل کنید. ثابت کنید این جواب همان جوابی است که در مثال ۴ با عامل انتگرال‌ساز دیگری به‌دست آمد.

۷.۲ تقریبهای عددی: روش اویلر

دو واقعیت مهم دربارهٔ مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مرتبهٔ اول، یعنی

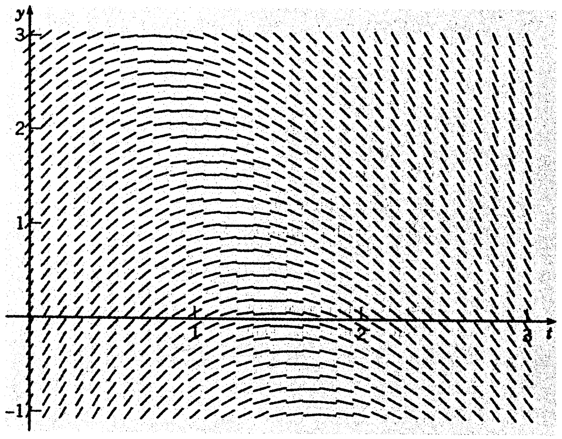
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

را یادآوری می‌کنیم. ابتدا اینکه، اگر f و $\partial f/\partial y$ پیوسته باشند، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) در بازه‌ای شامل نقطهٔ $t = t_0$، جواب یکتای $y = \phi(t)$ دارد. دوم اینکه معمولاً یافتن جواب ϕ با عملیات جبری در معادلات دیفرانسیل ممکن نیست. تا به حال مهم‌ترین استثناهای گزارهٔ اخیر را در نظر گرفته‌ایم: معادلات دیفرانسیل خطی، جداشدنی یا کامل یا معادله‌هایی که به یکی از این انواع تبدیل می‌شوند. اما این حقیقت باقی است که جواب اکثر مسئله‌های مقدار اولیه را نمی‌توان با روشهای تحلیلی‌ای مانند آنهایی که در بخش اول این فصل دیدیم به‌دست آورد.

بنابراین مهم است که بتوانیم به روش دیگری به مسئله نزدیک شویم. همان‌گونه که قبلاً دیدیم، یکی از این راهها رسم یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل (که مستلزم حل معادله نیست) و سپس تصور رفتار جوابها با استفاده از میدان جهت است. برتری این روش این است که این فرایند، حتی برای معادلات دیفرانسیل پیچیده، نسبتاً ساده است. با این حال، این روش برای محاسبات کمّی و یا مقایسه‌ها مناسب نیست و این کمبود معمولاً جدی است.

به‌عنوان مثال، در شکل ۱.۷.۲ یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \frac{1}{2}y \tag{2}$$



شکل ۱.۷.۲ یک میدان جهت برای معادلهٔ (۲).

نشان داده‌ایم. با استفاده از میدان جهت، می‌توانید رفتار جوابها را روی مستطیل نشان داده‌شده در شکل تصور کنید. جوابی که در نقطه‌ای روی محور yها شروع شده، در ابتدا با t افزایش می‌یابد. اما زود مقدار ماکزیمم خود را اختیار می‌کند و سپس با افزایش بیشتر t، کاهش می‌یابد.

همچنین می‌توانید در شکل ۱.۷.۲ ببینید که بسیاری از پاره‌خطهای مماس در مقادیر متوالی t، تقریباً یکدیگر را لمس می‌کنند. با کمی تخیل و در نظر گرفتن نقطه‌ای روی محور yها و متصل کردن پاره‌خطها برای مقدارهای مختلف t در داخل شبکه، نموداری قطعه‌به‌قطعه خطی به‌دست می‌آورید. چنین نموداری ظاهراً تقریبی از یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل است. برای تبدیل این ایده به روشی مفید برای تولید جوابهای تقریبی، باید به چند سؤال و از جمله سؤالات زیر پاسخ داد:

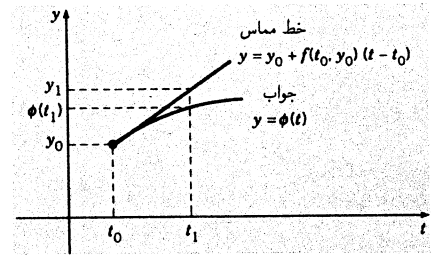
۱. آیا می‌توان پاره‌خطها را به‌طور منظم و سرراست به یکدیگر متصل کرد؟

۲. در این‌صورت آیا تابع قطعه‌به‌قطعه خطی نتیجه‌ای تقریبی از جواب معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌دهد؟

۳. در این صورت، آیا می‌توان دقت این تقریب را ارزیابی کرد؟ یعنی تا چه حد می‌توانیم میزان تفاوت تقریب از خود جواب را تخمین بزنیم؟

خواهیم دید که پاسخ همهٔ این سؤالها مثبت است. روش حاصله را اویلر در حوالی سال ۱۷۶۸ میلادی ابداع کرد و به **روش خط مماس** یا **روش اویلر** معروف است. در این بخش به دو سؤال اول می‌پردازیم، اما بحث نظام‌مند دربارهٔ سؤال سوم را تا فصل ۸ به تعویق می‌اندازیم.

برای دیدن اینکه روش اویلر چگونه کار می‌کند، چگونگی استفاده از خطوط مماس را برای تقریب جواب $y = \phi(t)$ برای معادلهٔ (۱) در نزدیکی $t = t_0$ بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که جواب از نقطهٔ اولیهٔ (t_0, y_0) می‌گذرد و با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل می‌دانیم که شیب آن در این نقطه $f(t_0, y_0)$ است. پس می‌توانیم



شکل ۲.۷.۲ یک تقریب خط مماس.

معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی جواب در $(t_۰, y_۰)$ بنویسیم، یعنی

$$y = y_۰ + f(t_۰, y_۰)(t - t_۰). \tag{۳}$$

خط مماس در بازه‌ای به اندازهٔ کافی کوچک که مقدار شیب جواب به‌طور قابل توجهی از مقدار آن در نقطهٔ اولیه تغییر نکند تقریب خوبی از منحنی واقعی جواب است؛ شکل ۲.۷.۲ را ببینید. پس اگر $t_۱$ به اندازهٔ کافی نزدیک به $t_۰$ باشد، می‌توانیم $\phi(t_۱)$ را با مقدار $y_۱$ به‌دست آمده از قرار دادن $t = t_۱$ در تقریب خط مماس در $t = t_۰$ تقریب بزنیم؛ پس

$$y_۱ = y_۰ + f(t_۰, y_۰)(t_۱ - t_۰). \tag{۴}$$

برای ادامهٔ کار، می‌توانیم این فرایند را تکرار کنیم. متأسفانه مقدار جواب $\phi(t_۱)$ در $t_۱$ را نمی‌دانیم. به‌جای آن، بهترین کاری که می‌توانیم انجام بدهیم، تقریب مقدار $y_۱$ است. پس خطی گذرا از $(t_۱, y_۱)$ با شیب $f(t_۱, y_۱)$ می‌سازیم:

$$y = y_۱ + f(t_۱, y_۱)(t - t_۱). \tag{۵}$$

برای تقریب مقدار $\phi(t)$ در نزدیکی نقطهٔ $t_۲$، از معادلهٔ (۵) استفاده می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$y_۲ = y_۱ + f(t_۱, y_۱)(t_۲ - t_۱). \tag{۶}$$

با ادامهٔ این روش، با استفاده از مقدار y محاسبه شده در هرگام، شیب تقریب درگام بعدی را تعیین می‌کنیم. عبارت کلی برای معادلهٔ خط شروع شده در (t_n, y_n) عبارت است از

$$y = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n); \tag{۷}$$

بنابراین مقدار تقریبی $y_{n+۱}$ در $t_{n+۱}$ برحسب t_n و $t_{n+۱}$ و y_n عبارت است از

$$y_{n+۱} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+۱} - t_n), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۸}$$

با معرفی نماد $f_n = f(t_n, y_n)$، می‌توانیم معادلهٔ (۸) را به‌صورت

$$y_{n+۱} = y_n + f_n \cdot (t_{n+۱} - t_n), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۹}$$

بازنویسی کنیم. درنهایت اگر فرض کنیم که فاصلهٔ یکنواخت h بین نقاط $t_۰$، $t_۱$، $t_۲$، ... وجود دارد آنگاه به‌ازای هر n، $t_{n+۱} = t_n + h$ و فرمول اویلر را به‌صورت

$$y_{n+۱} = y_n + f_n h, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۱۰}$$

به‌دست می‌آوریم.

برای استفاده از روش اویلر، بسته به ثابت‌بودن یا نبودن اندازهٔ گام، باید به‌طور متوالی مقدارها را از معادلهٔ (۹) یا معادلهٔ (۱۰) محاسبه کنیم و از نتیجهٔ هرگام برای اجرای گام بعدی استفاده کنیم. به این طریق می‌توانیم دنباله‌ای از مقادیر $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، ... تولید کنیم که مقادیر جواب $\phi(t)$ را در نقاط $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$، ... تقریب می‌زند. اگر به‌جای دنباله‌ای از نقاط، نیاز به تابعی برای تقریب $\phi(t)$ دارید، می‌توانید از تابع قطعه‌به‌قطعه خطی ساخته‌شده از مجموعهٔ قطعه‌خطهای مماس استفاده کنید؛ یعنی فرض کنید y در بازهٔ $[t_۰, t_۱]$ با معادلهٔ (۷) به‌ازای $n = ۰$ و در $[t_۱, t_۲]$ با معادلهٔ (۷) به‌ازای $n = ۱$ داده می‌شود و به همین ترتیب.

مثال ۱

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ۳ - ۲t - \frac{۱}{۲}y, \qquad y(۰) = ۱ \tag{۱۱}$$

را در نظر بگیرید. با استفاده روش اویلر با اندازهٔ گام $h = ۰٫۲$، مقادیر تقریبی جواب معادلهٔ (۱۱) را در t برابر ۰٫۲، ۰٫۴، ۰٫۶، ۰٫۸ و ۱ به‌دست بیاورید. آنها را با مقادیر واقعی جواب مسئلهٔ مقدار اولیه مقایسه کنید.

توجه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل با مقدار اولیهٔ مفروض همان معادله در معادلهٔ (۲) است. این معادله خطی است و بنابراین می‌توان مانند بخش ۱.۲ آن را با استفاده از عامل انتگرال‌ساز $e^{t/۲}$ حل کرد. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) عبارت است از

$$y = \phi(t) = ۱۴ - ۴t - ۱۳e^{-t/۲}. \tag{۱۲}$$

برای تقریب این جواب با استفاده از روش اویلر، در این حالت توجه کنید که $f(t, y) = ۳ - ۲t - y/۲$. با استفاده از مقادیر اولیهٔ $t_۰ = ۰$ و $y_۰ = ۱$، نتیجه می‌شود

$$f_۰ = f(t_۰, y_۰) = f(۰, ۱) = ۳ - ۰ - ۰٫۵ = ۲٫۵$$

و سپس با استفاده از معادلهٔ (۳)، تقریب خط مماس در نزدیکی $t = ۰$ عبارت است از

$$y = ۱ + ۲٫۵(t - ۰) = ۱ + ۲٫۵t. \tag{۱۳}$$

با قرار دادن $t = ۰٫۲$ در معادلهٔ (۱۳)، مقدار تقریبی $y_۱$ برای جواب در $t = ۰٫۲$ را می‌یابیم، یعنی

$$y_۱ = ۱ + (۲٫۵)(۰٫۲) = ۱٫۵.$$

درگام بعدی،

$$f_۱ = f(۰٫۲, ۱٫۵) = ۳ - ۲(۰٫۲) - (۰٫۵)(۱٫۵) = ۳ - ۰٫۴ - ۰٫۷۵ = ۱٫۸۵$$

و تقریب خط مماس در نزدیکی $t = ۰٫۲$ عبارت است از

$$y = ۱٫۵ + ۱٫۸۵(t - ۰٫۲) = ۱٫۱۳ + ۱٫۸۵t. \tag{۱۴}$$

با محاسبهٔ عبارت معادلهٔ (۱۴) به‌ازای $t = ۰٫۴$، به‌دست می‌آوریم

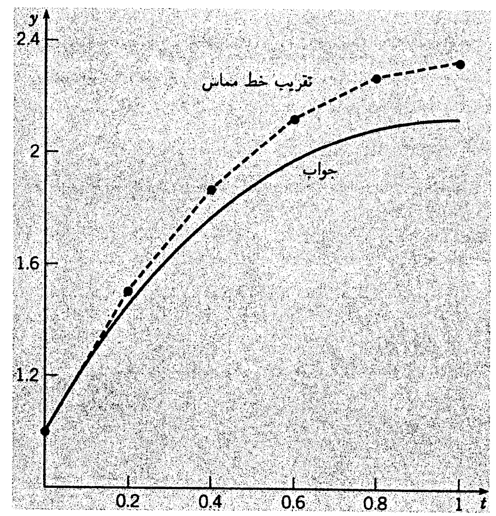
$$y_۲ = ۱٫۱۳ + ۱٫۸۵(۰٫۴) = ۱٫۸۷.$$

با سه بار تکرار این روند محاسباتی، نتایج به‌دست آمده در جدول ۱.۷.۲ را به‌دست می‌آوریم. ستون اول شامل مقادیر t است که با اندازهٔ گام $h = ۰٫۲$ از هم جدا شده‌اند. ستون سوم مقادیر y محاسبه‌شده از فرمول اویلر (۱۰) را نشان می‌دهد. در ستون چهارم تقریبهای خط مماس پیدا شده از معادلهٔ (۷) را قرار داده‌ایم. ستون دوم شامل مقادیری از جواب (۱۲) برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) است که تا ۵ رقم اعشار صحیح‌اند. جواب (۱۲) و تقریب خط مماس را در شکل ۳.۷.۲ رسم کرده‌ایم.

از جدول ۱.۷.۲ و شکل ۳.۷.۲ می‌بینیم که تقریبهای به‌دست آمده با استفاده از روش اویلر برای این مسئله بزرگ‌تر از مقادیر جواب واقعی هستند. این به این دلیل است که تقعر منحنی جواب رو به پایین است و بنابراین تقریبهای خط مماس در بالای نمودار قرار دارند.

جدول ۱.۷.۲ نتایج روش اویلر با $h = ۰٫۲$ برای $y(۰) = ۱$، $y' = ۳ - ۲t - (۱/۲)y$

t	دقیق	اویلر با $h = ۰٫۲$	خط مماس
۰٫۰	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰	$y = ۱ + ۲٫۵t$
۰٫۲	۱٫۴۳۷۱۱	۱٫۵۰۰۰۰	$y = ۱٫۱۳ + ۱٫۸۵t$
۰٫۴	۱٫۷۵۶۵۰	۱٫۸۷۰۰۰	$y = ۱٫۳۶۴ + ۱٫۲۶۵t$
۰٫۶	۱٫۹۶۹۳۶	۲٫۱۲۳۰۰	$y = ۱٫۶۷۹۹ + ۰٫۷۳۸۵t$
۰٫۸	۲٫۰۸۵۸۴	۲٫۲۷۰۷۰	$y = ۲٫۰۵۸۹۸ + ۰٫۲۶۴۶۵t$
۱٫۰	۲٫۱۱۵۱۰	۲٫۳۲۳۶۳	



شکل ۳.۷.۲ نمودار جواب و تقریب خط مماس برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱).

دقت تقریبها در این مثال در کاربرد نوعی علمی و یا مهندسی به اندازهٔ کافی رضایت‌بخش نیست. به‌عنوان مثال، در $t = ۱$ خطای تقریب برابر با $۲٫۳۲۳۶۳ - ۲٫۱۱۵۱۰ = ۰٫۲۰۸۵۳$ است، که خطایی تقریباً برابر با ۹٫۸۶٪ نسبت به جواب دقیق است. راهی برای کسب نتایج دقیق‌تر استفاده از اندازهٔ گام کوچک‌تر با افزایش تعداد گامهای محاسباتی است. این موضوع را در مثال بعد بررسی می‌کنیم.

محاسباتی مانند محاسبات مثال ۱ و مثالهای دیگر این بخش معمولاً روی کامپیوتر انجام می‌شوند. بعضی از بسته‌های نرم‌افزاری شامل دستوراتی برای روش اویلر هستند و بعضی نیستند. در هر حالت، نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که محاسبات لازم برای تولید نتایجی مشابه نتایج در جدول ۱.۷.۲ را انجام می‌دهد بسیار سرراست است. اساساً آنچه که لازم است دستورهای مناسب ورودی و خروجی و یک حلقه است که معادلهٔ (۱۰) را به‌طور مکرر محاسبه می‌کند. خروجی ممکن است فهرستی از اعداد مانند جدول ۱.۷.۲ یا نموداری مانند شکل ۳.۷.۲ باشد. این دستورها را می‌توانید با هر زبان برنامه‌نویسی سطح بالایی که با آن آشنا هستید بنویسید.

مثال ۲

مجدداً مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) را در نظر بگیرید؛ یعنی

$$\frac{dy}{dt} = ۳ - ۲t - \frac{۱}{۲}y, \quad y(۰) = ۱.$$

با استفاده از روش اویلر با اندازهٔ گامهای مختلف، مقدارهای تقریبی جواب را به‌ازای $۰ \le t \le ۵$ محاسبه کنید. نتایج محاسبه شده را با مقدارهای دقیق به‌دست آمده از جواب (۱۲)، یعنی

$$y = \phi(t) = ۱۴ - ۴t - ۱۳e^{-t/۲}$$

مقایسه کنید.

از اندازهٔ گامهای h برابر ۰٫۱، ۰٫۰۵، ۰٫۰۲۵، ۰٫۰۱ متناظر ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ گام برای محاسبهٔ از $t = ۰$ تا $t = ۵$ استفاده کردیم. نتایج این محاسبات را به همراه مقدارهای جواب دقیق در جدول ۲.۷.۲ نشان داده‌ایم. تمام مقدارهای محاسبه شده تا چهار رقم اعشار صحیح هستند، هر چند برای محاسبات میانی رقمهای بیشتری حفظ شده‌اند.

جدول ۲.۷.۲ مقایسهٔ جواب دقیق با روش اویلر به‌ازای چند مقدار h برای $y(۰) = ۱$، $y' = ۳ - ۲t - (۱/۲)y$

t	دقیق	$h = ۰٫۱$	$h = ۰٫۰۵$	$h = ۰٫۰۲۵$	$h = ۰٫۰۱$
۰٫۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۱٫۰	۲٫۱۱۵۱	۲٫۲۱۶۴	۲٫۱۶۵۱	۲٫۱۳۹۹	۲٫۱۲۵۰
۲٫۰	۱٫۲۱۷۶	۱٫۳۳۹۷	۱٫۲۷۸۰	۱٫۲۴۷۶	۱٫۲۲۹۵
۳٫۰	−۰٫۹۰۰۷	−۰٫۷۹۰۳	−۰٫۸۴۵۹	−۰٫۸۷۳۴	−۰٫۸۸۹۸
۴٫۰	−۳٫۷۵۹۴	−۳٫۶۷۰۷	−۳٫۷۱۵۲	−۳٫۷۳۷۳	−۳٫۷۵۰۶
۵٫۰	−۷٫۰۶۷۱	−۷٫۰۰۰۳	−۷٫۰۳۳۷	−۷٫۰۵۰۴	−۷٫۰۶۰۴

از داده‌های جدول ۲.۷.۲ چه نتایجی می‌توان گرفت؟ مهم‌ترین نتیجه این است که به‌ازای هر مقدار مشخص، مقدارهای محاسبه‌شدهٔ تقریبی با کاهش اندازهٔ گام h دقیق‌تر می‌شوند. می‌توانید این موضوع را با در نظرگرفتن یک ردیف خاص از جدول از چپ به راست ببینید. به‌عنوان مثال، به‌ازای $t = ۲$، مقدار تقریبی با $h = ۰٫۱$ به اندازهٔ ۰٫۱۲۲۱ (حدود ۱۰٪) بزرگ‌تر است، در حالی که مقدار تقریبی برای $h = ۰٫۰۱$ تنها به اندازهٔ ۰٫۰۱۱۹ (حدود ۱٪) بزرگ‌تر است. در این حالت کاهش اندازهٔ گام با ضریب ۱۰ (و انجام ۱۰ برابر محاسبات بیشتر) خطا را با ضریب ۱۰ کاهش می‌دهد. با مقایسهٔ خطاها

برای جفتهای دیگر از مقادیر جدول، می‌توانید تحقیق کنید که همین رابطه بین اندازهٔ گام و خطا برای آنها نیز برقرار است. آیا این یعنی اینکه برای روش اویلر، خطا تقریباً متناسب با اندازهٔ گام است؟ البته یک مثال چنین نتیجهٔ کلی‌ای را ثابت نمی‌کند، اما این حدس دست‌کم حدس جالبی است.[۱]

دومین نتیجهٔ جدول ۲.۷.۲ این است که به‌ازای یک اندازهٔ گام مشخص، تقریبها حداقل به‌ازای $t > ۲$ با افزایش t دقیق‌تر می‌شوند. به‌عنوان مثال، به‌ازای $h = ۰/۱$ خطا به‌ازای $t = ۵$ تنها ۰/۰۶۶۸ است که کمی بیش از نصف خطا در $t = ۲$ است. در این بخش باز هم به این موضوع برمی‌گردیم.

روی هم رفته به نظر می‌رسد که روش اویلر برای این مسئله نسبتاً خوب کار می‌کند. حتی برای اندازهٔ گامهای نسبتاً بزرگ نتایج نسبتاً خوب به‌دست می‌آیند و تقریبها با کاهش h بهبود می‌یابند.

اکنون مثال دیگری را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ۴ - t + ۲y, \qquad y(۰) = ۱ \tag{۱۵}$$

را در نظر بگیرید. جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل در مثال ۲ از بخش ۱.۲ به‌دست آمد. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵) عبارت است از

$$y = -\frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۲}t + \frac{۱۱}{۴}e^{۲t}. \tag{۱۶}$$

با روش اویلر با چند اندازهٔ گام، مقدارهای تقریبی جواب را در بازهٔ $۰ \le t \le ۵$ محاسبه کنید. این نتایج را با مقدارهای به‌دست آمده از جواب (۱۶) مقایسه کنید.

با استفاده از اندازهٔ گامهای به‌کار رفته در مثال ۲، نتایج ارائه شده در جدول ۳.۷.۲ را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۳.۷.۲ مقایسهٔ جواب دقیق و روش اویلر به‌ازای چند اندازهٔ گام h برای $y(۰) = ۱$ ،$y' = ۴ - t + ۲y$

t	دقیق	$h = ۰/۱$	$h = ۰/۰۵$	$h = ۰/۰۲۵$	$h = ۰/۰۱$
۰/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰
۱/۰	۱۹/۰۶۹۹۰	۱۵/۷۷۷۲۸	۱۷/۲۵۰۶۲	۱۸/۱۰۹۹۷	۱۸/۶۷۲۷۸
۲/۰	۱۴۹/۳۹۴۹	۱۰۴/۶۷۸۴	۱۲۳/۷۱۳۰	۱۳۵/۵۴۴۰	۱۴۳/۵۸۳۵
۳/۰	۱۱۰۹/۱۷۹	۶۵۲/۵۳۴۹	۸۳۷/۰۷۴۵	۹۵۹/۲۵۸۰	۱۰۴۵/۳۹۵
۴/۰	۸۱۹۷/۸۸۴	۴۰۴۲/۱۲۲	۵۶۳۳/۳۵۱	۶۷۵۵/۱۷۵	۷۵۷۵/۵۷۷
۵/۰	۶۰۵۷۳/۵۳	۲۵۰۲۶/۹۵	۳۷۸۹۷/۴۳	۴۷۵۵۵/۳۵	۵۴۸۸۱/۳۲

داده‌های جدول ۳.۷.۲ مجدداً انتظاراتمان را تأیید می‌کنند. به‌ازای مقدار t داده‌شده، با کاهش اندازهٔ گام h دقت بهبود می‌یابد. به‌عنوان مثال به‌ازای $t = ۱$، درصد خطا از مقدار ۱۷/۳٪ به‌ازای $h = ۰/۱$ به ۲/۱٪ به‌ازای $h = ۰/۰۱$ کاهش می‌یابد. اما میزان خطا با افزایش t به‌ازای h ثابت، نسبتاً سریع افزایش می‌یابد. حتی به‌ازای $h = ۰/۰۱$، خطا در $t = ۵$ برابر با ۹/۴٪ و به‌ازای اندازهٔ گامهای بزرگ‌تر، بسیار بیشتر است. البته، دقت مورد نیاز به هدفی که نتایج برای آن استفاده می‌شوند بستگی دارد، اما خطاهای جدول ۳.۷.۲ برای کاربردهای علمی و مهندسی بسیار بزرگ هستند. برای بهبود وضع می‌توان از اندازهٔ گامهای کوچک‌تر استفاده کرد و حتی محاسبات را به فاصلهٔ نسبتاً کوچک از مقدار اولیه محدود کرد. به هر حال، واضح است که روش اویلر در این مثال در مقایسه با مثال ۲ کمتر مؤثر است.

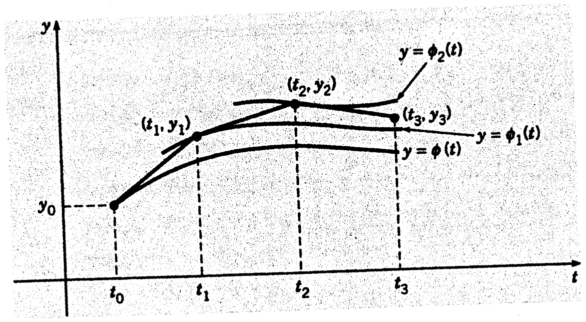
۱. بحث مفصل‌تری دربارهٔ خطاهای استفاده از روش اویلر در فصل ۸ انجام می‌شود.

برای درک بهتر آنچه که در این مثالها اتفاق می‌افتد، مجدداً به روش اویلر برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ کلی (۱)، یعنی

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_۰) = y_۰$$

نگاهی می‌کنیم که جواب آن را با $\phi(t)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول نامتناهی جواب شامل ثابت c دارند و شرط اولیه یک عضو از این خانوادهٔ نامتناهی را با تعیین مقدار c معین می‌کند. پس در خانوادهٔ نامتناهی جوابها، $\phi(t)$ جوابی است که در شرط اولیهٔ $\phi(t_۰) = y_۰$ صدق می‌کند.

در گام اول، روش اویلر از تقریب خط مماس به نمودار $y = \phi(t)$ گذرا از نقطهٔ اولیهٔ $(t_۰, y_۰)$ استفاده می‌کند، و این مقدار تقریبی $y_۱$ در $t_۱$ را مشخص می‌کند. معمولاً $y_۱ \neq \phi(t_۱)$، بنابراین در گام دوم روش اویلر تقریب خطی به $y = \phi(t)$ را محاسبه نمی‌کند، بلکه تقریبی از جواب نزدیک $y = \phi_۱(t)$ گذرا از نقطهٔ $(t_۱, y_۱)$ را محاسبه می‌کند. گامهای بعد هم به همین منوال هستند. روش اویلر از تکرار تقریبهای خط مماس به جوابهای متفاوت $\phi(t)$، $\phi_۱(t)$، $\phi_۲(t)$، ... برای معادلهٔ دیفرانسیل استفاده می‌کند. در هر گام، همان‌طور که در شکل ۴.۷.۲ نشان داده شده، خط مماس به جواب گذرا از نقطهٔ تعیین‌شده در گام قبل ساخته می‌شود. کیفیت تقریب پس از چند گام قویاً به رفتار جوابهای گذرا از نقاط (t_n, y_n) به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ بستگی دارد.



شکل ۴.۷.۲ روش اویلر.

در مثال ۲ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = ۱۴ - ۴t + ce^{-t/۲} \tag{۱۷}$$

و جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) متناظر $c = -۱۳$ است. خانوادهٔ جوابهای (۱۷) خانواده‌ای همگراست، چون جملهٔ شامل ثابت دلخواه c وقتی $t \to \infty$ به صفر نزدیک می‌شود. در اینجا اینکه کدام‌یک از جوابها را هنگام اعمال روش اویلر با خط مماس تقریب می‌زنیم اهمیت زیادی ندارد، چون همهٔ جوابها با افزایش t به یکدیگر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

از طرف دیگر، در مثال ۳ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = -\frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۲}t + ce^{۲t} \tag{۱۸}$$

و این خانواده واگراست. توجه کنید که جوابهای نظیر به دو مقدار نزدیک c با افزایش t به‌طور دلخواه از هم فاصله می‌گیرند. در مثال ۳ از جواب به‌ازای $c = \frac{۱۱}{۴}$ استفاده کردیم، اما هنگام استفاده از روش اویلر، در هرگام از جواب دیگری استفاده می‌کنیم که از جواب موردنظر با افزایش t سریع و سریع‌تر فاصله می‌گیرند. این دلیل بزرگ‌تربودن خطای به‌دست آمده در مثال ۳ نسبت به مثال ۲ را توضیح می‌دهد.

هنگام استفاده از روشهای عددی مانند روش اویلر، به‌خاطر داشتن همیشگی این سؤال که نتایج به‌دست آمده به اندازهٔ کافی دقیق هستند یا نه مفید است. در مثالهای قبل، دقت نتایج عددی را می‌توان به‌طور مستقیم با مقایسه با جواب تحلیلی به‌دست آمده تعیین کرد. البته معمولاً وقتی قرار است که روش عددی به‌کار گرفته شود، جواب تحلیلی موجود نیست، بنابراین معمولاً آنچه موردنیاز است کران و یا حداقل تخمینی از خطاست که نیاز به اطلاع از جواب دقیق نداشته باشد. باید به‌خاطر داشته باشید که بهترین چیزی که از تقریبهای عددی می‌توان انتظار داشت و یا به آن امید بست این است که این تقریب رفتار واقعی جواب را منعکس کند. پس تقریب خانواده‌ای واگرا از جوابها همواره مشکل‌تر است.

اگر علاقه‌مندید که دربارهٔ روشهای عددی مسئله‌های مقدار اولیه بیشتر مطالعه کنید، می‌توانید از اینجا مستقیماً به فصل ۸ بروید. در آنجا اطلاعاتی دربارهٔ تحلیل خطاها می‌آوریم و همچنین چند الگوریتم را که از نظر محاسباتی نسبت به روش اویلر بسیار کاراتر هستند بررسی می‌کنیم.

مسئله‌ها

در بسیاری از مسئله‌های این بخش به محاسبات عددی نسبتاً مفصل نیاز داریم. حجم محاسباتی که برای شما معقول است قویاً به نوع ابزار محاسباتی مورد استفادهٔ شما بستگی دارد. چند گام از محاسبات خواسته شده را می‌توان تقریباً روی هر ماشین‌حساب قابل برنامه‌ریزی و یا حتی با دست انجام داد؛ اما برای بعضی از مسئله‌ها ممکن است کامپیوتر موردنیاز باشد.

همچنین به‌خاطر داشته باشید که نتایج عددی ممکن است بسته به نحوهٔ ساختن برنامهٔ شما و چگونگی اجرای گامهای عددی، گرد کردنها و امثالهم کمی تغییر کنند. تغییرات جزیی در آخرین رقم اعشار ممکن است به این دلایل باشد و لزوماً خطایی را نشان نمی‌دهد. پاسخهای انتهای کتاب در اکثر حالتها تا شش رقم ثبت شده است، هرچند برای محاسبات میانی رقمهای بیشتری حفظ شده‌اند.

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴:

(الف) مقدار تقریبی جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را با استفاده از روش اویلر با $h = ۰/۱$ در t برابر ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ محاسبه کنید.

(ب) قسمت (الف) را با $h = ۰/۰۵$ تکرار کنید. نتایج را با نتایج به‌دست آمده در (الف) مقایسه کنید.

(ج) قسمت (الف) را با $h = ۰/۰۲۵$ تکرار کنید. نتایج را با نتایج به‌دست آمده در (الف) و (ب) مقایسه کنید.

(د) جواب $y = \phi(t)$ مسئلهٔ داده‌شده را به‌دست بیاورید، مقدار آن را در t برابر ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ محاسبه کنید. این مقادیر را با نتایج (الف)، (ب) و (ج) مقایسه کنید.

۱. $y' = ۳ + t - y$، $y(۰) = ۱$

۲. $y' = ۲y - ۱$، $y(۰) = ۱$

۳. $y' = ۰/۵ - t + ۲y$، $y(۰) = ۱$

۴. $y' = ۳\cos t - ۲y$، $y(۰) = ۰$

در هر یک از مسئله‌های ۵ تا ۱۰، یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده رسم کنید و بیان کنید که جوابها همگرا هستند و یا واگرا.

۵. $y' = (۴ - ty)/(۱ + y^۲)$

۶. $y' = y(۳ - ty)$

۷. $y' = ۵ - ۳\sqrt{y}$

۸. $y' = -ty + ۰/۲y^۳$

۹. $y' = t^۲ + y^۲$

۱۰. $y' = (y^۲ + ۲ty)/(۳ + t^۲)$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۱۴، با استفاده از روش اویلر، مقادیر تقریبی جواب را برای هر یک از مسئله‌های مقدار اولیه در t برابر ۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲، ۲/۵ و ۳ به‌دست بیاورید.

(الف) با $h = ۰/۱$ (ب) با $h = ۰/۰۵$

(ج) با $h = ۰/۰۲۵$ (د) با $h = ۰/۰۱$

۱۱. $y' = y(۳ - ty)$، $y(۰) = ۰/۵$

۱۲. $y' = ۵ - ۳\sqrt{y}$، $y(۰) = ۲$

۱۳. $y' = (۴ - ty)/(۱ + y^۲)$، $y(۰) = -۲$

۱۴. $y' = -ty + ۰/۱y^۳$، $y(۰) = ۱$

۱۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = ۳t^۲/(۳y^۲ - ۴), \quad y(۱) = ۰$$

را در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از روش اویلر با $h = ۰/۱$، مقادیر تقریبی جواب در t برابر ۱/۲، ۱/۴، ۱/۶ و ۱/۸ را به‌دست بیاورید.

(ب) قسمت (الف) را با $h = ۰/۰۵$ تکرار کنید.

(ج) نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) را مقایسه کنید. توجه کنید که آنها به‌ازای t برابر ۱/۲، ۱/۴ و ۱/۶ نسبتاً به هم نزدیک هستند اما به‌ازای $t = ۱/۸$ کاملاً متفاوت هستند. همچنین (با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل) توجه کنید که خط مماس به جواب به‌ازای $y = \pm ۲/\sqrt{۳} \cong \pm ۱/۱۵۵$ تقریباً موازی محور yها است. توضیح بدهید که این مطلب چگونه می‌تواند منجر به تفاوت در مقادیر محاسبه‌شده شود.

۱۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = t^۲ + y^۲, \quad y(۰) = ۱$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از روش اویلر با h برابر ۰/۱، ۰/۰۵، ۰/۰۲۵ و ۰/۰۱ جواب این مسئله را به‌ازای $۰ \le t \le ۱$ بررسی کنید. بهترین تخمین شما از مقدار جواب در $t = ۰/۸$ چیست؟ در $t = ۱$ چطور؟ آیا نتایج شما با میدان جهت در مسئلهٔ ۹ سازگار است؟

۱۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{(y^۲ + ۲ty)}{(۳ + t^۲)}, \quad y(۱) = ۲$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از روش اویلر با h برابر ۰٫۱، ۰٫۰۵، ۰٫۰۲۵ و ۰٫۰۱ جواب این مسئله را به‌ازای $1 \le t \le 3$ بررسی کنید. بهترین تخمین شما از مقدار جواب در $t = 2.5$ چیست؟ در $t = 3$ چطور؟ آیا نتایج شما با میدان جهت مسئلهٔ ۱۰ سازگار است؟

۱۸. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = -ty + 0.1y^3, \qquad y(0) = \alpha$$

را در نظر بگیرید که در آن α عددی مفروض است.

الف) یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل رسم کنید (یا میدان جهت مسئلهٔ ۸ را مجدداً بررسی کنید). توجه کنید که یک مقدار بحرانی α در بازهٔ $2 \le \alpha \le 3$ قرار دارد که جوابهای همگرا را از جوابهای واگرا جدا می‌کند. این مقدار بحرانی را α_0 بنامید.

ب) با استفاده از روش اویلر با $h = 0.01$، α_0 را تخمین بزنید. این کار را با تحدید α_0 به بازه‌ای مانند $[a, b]$ انجام بدهید که در آن $b - a = 0.01$.

۱۹. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = y^2 - t^2, \qquad y(0) = \alpha$$

را در نظر بگیرید که در آن α عددی مفروض است.

الف) یک میدان جهت برای معادلهٔ دیفرانسیل رسم کنید. توجه کنید که یک مقدار بحرانی α در بازهٔ $0 \le \alpha \le 1$ قرار دارد که جوابهای همگرا را از جوابهای واگرا جدا می‌کند. این مقدار بحرانی را α_0 بنامید.

ب) با استفاده از روش اویلر با $h = 0.01$، α_0 را تخمین بزنید. این کار را با تحدید α_0 به بازه‌ای مانند $[a, b]$ انجام بدهید که در آن $b - a = 0.01$.

۲۰. **همگرایی روش اویلر.** می‌توان ثابت کرد که تحت شرایط مناسب روی f، تقریب عددی تولیدشده با روش اویلر برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y' = f(t, y)$، $y(t_0) = y_0$ با کاهش اندازهٔ گام h به جواب دقیق همگرا می‌شود. این را در مثال زیر نشان می‌دهیم. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = 1 - t + y, \qquad y(t_0) = y_0$$

را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید جواب دقیق $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{t - t_0} + t$ است.

ب) با استفاده از فرمول اویلر ثابت کنید

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ج) توجه کنید که $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$. با استقرا ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت مانند n،

$$y_n = (1 + h)^n (y_0 - t_0) + t_n \qquad \text{(i)}$$

د) به‌ازای نقطهٔ ثابت t که $t > t_0$ و به‌ازای n مفروض، فرض کنید $h = (t - t_0)/n$؛ در این‌صورت به‌ازای هر n، $t_n = t$. همچنین توجه کنید که وقتی $n \to \infty$، $h \to 0$. با جایگزین کردن h در معادلهٔ (i) و فرض $n \to \infty$، ثابت کنید وقتی $n \to \infty$، $y_n \to \phi(t)$.

راهنمایی: $\lim_{n \to \infty} (1 + a/n)^n = e^a$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۳، با استفاده از روش مسئلهٔ ۲۰، ثابت کنید تقریب به‌دست آمده با روش اویلر در هر نقطهٔ ثابت با فرض $h \to 0$ به جواب دقیق همگرا می‌شود.

۲۱. $y' = 2y$، $y(0) = 1$

۲۲. $y' = 2y - 1$، $y(0) = 1$ راهنمایی: $y_1 = (1 + 2h)/2 + 1/2$

۲۳. $y' = 1/2 - t + 2y$، $y(0) = 1$ راهنمایی: $y_1 = (1 + 2h) + t_1/2$

۸.۲ قضیهٔ وجود و یکتایی

در این بخش به اثبات قضیهٔ ۲.۴.۲، یعنی قضیهٔ اساسی وجود و یکتایی جواب مسئله‌های مقدار اولیهٔ مرتبهٔ اول می‌پردازیم. طبق این قضیه، تحت شرایط مشخصی روی $f(t, y)$، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

جواب یکتایی در بازه‌ای شامل t_0 دارد.

در بعضی از حالتها (به‌عنوان مثال، اگر معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد) وجود جوابی برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) را می‌توان عملاً با حل مسئله و یافتن فرمولی برای جواب ثابت کرد. اما در حالت کلی این روش عملی نیست، زیرا روشی وجود ندارد که برای حل همهٔ معادله‌های دیفرانسیل بکار بیاید. بنابراین در حالت کلی لازم است که روشی غیرمستقیم برای اثبات وجود جواب معادلهٔ (۱) بکار ببریم. اما معمولاً این کار روش عملی‌ای برای یافتن جواب ارائه نمی‌دهد. قلب این روش، ساختن دنباله‌ای از تابعها است که در حد به تابعی همگرا شود که در مسئلهٔ مقدار اولیه صدق کند؛ هر چند تک‌تک اعضای این دنباله در آن صدق نمی‌کنند. در حالت کلی، محاسبهٔ صریح بیش از چند عضو از دنباله میسر نیست، بنابراین محاسبهٔ صریح تابع حدی در حالتهای نادری امکان‌پذیر است. در هر حال، تحت آن محدودیتهای روی $f(t, y)$ که در قضیهٔ ۲.۴.۲ بیان شده است، می‌توان نشان داد که دنبالهٔ موردبحث همگرا می‌شود و تابع حدی خواص موردنظر را دارد. بحث نسبتاً پیچیده است و بعضاً به نتایج و تکنیکهایی بستگی دارد که در درسهای پیشرفتهٔ حسابان مطرح می‌شود. در نتیجه در اینجا وارد تمامی جزئیات اثبات نمی‌شویم؛ اما ویژگیهای اساسی و بعضی از مشکلات کار را مطرح می‌کنیم.

پیش از هر چیز، توجه کنید که کافی است که مسئله‌ای را در نظر بگیریم که در آن نقطهٔ شروع (t_0, y_0) همان مبدأ است؛ یعنی مسئلهٔ

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = 0 \qquad (2)$$

را در نظر بگیریم. اگر نقطهٔ اولیهٔ دیگری داده شود، همواره می‌توانیم با یک تغییر متغیر ابتدایی، که انتقال محورهای مختصات است، نقطهٔ داده‌شدهٔ (t_0, y_0) را به مبدأ انتقال بدهیم. اکنون می‌توانیم قضیهٔ وجود و یکتایی را به‌صورت زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۱.۸.۲ اگر f و $\partial f/\partial y$ در مستطیل $R: |t| \le a, |y| \le b$ پیوسته باشند، بازه‌ای مانند $|t| \le h \le a$ موجود است که در آن جواب یکتای $y = \phi(t)$ برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) وجود دارد.

برای اثباتی که در اینجا بررسی می‌کنیم، لازم است که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) را به شکل مناسب‌تری تبدیل کنیم. اگر موقتاً فرض کنیم که تابعی مانند $y = \phi(t)$ موجود است که در مسئلهٔ مقدار اولیه صدق می‌کند، $f(t,\phi(t))$ تابعی پیوسته از متغیر t است؛ لذا می‌توانیم از $y' = f(t,y)$ از نقطهٔ شروع $t = 0$ تا مقدار دلخواه t انتگرال بگیریم تا به

$$\phi(t) = \int_0^t f(s,\phi(s))ds \qquad (۳)$$

برسیم که در آن از شرط اولیهٔ $\phi(0) = 0$ استفاده کرده‌ایم. متغیر ظاهری انتگرال‌گیری را هم با s نشان داده‌ایم.

چون معادلهٔ (۳) شامل انتگرالی از تابع معلوم ϕ است، به آن **معادلهٔ انتگرالی** می‌گوییم. این معادلهٔ انتگرالی فرمولی برای جواب مسئلهٔ مقدار اولیه نیست، بلکه رابطهٔ دیگری است که هر جواب معادلهٔ (۲) در آن صدق می‌کند. برعکس، فرض کنید تابع پیوستهٔ $y = \phi(t)$ موجود باشد که در معادلهٔ انتگرالی (۳) صدق می‌کند؛ در این‌صورت این تابع در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) هم صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب، ابتدا در معادلهٔ (۳)، t را برابر صفر اختیار می‌کنیم که نشان می‌دهد شرط اولیه برقرار است. علاوه بر این، چون انتگرال در معادلهٔ (۳) پیوسته است، از قضیهٔ اساسی حسابان نتیجه می‌شود که $\phi'(t) = f(t,\phi(t))$. بنابراین مسئلهٔ مقدار اولیه و معادلهٔ انتگرالی از این نظر معادل‌اند که جواب هریک جواب دیگری هم هست. معمولاً اثبات یکتایی جواب معادلهٔ انتگرالی در بازهٔ مشخص $|t| \leq h$ راحت‌تر است و سپس همان نتیجه برای مسئلهٔ مقدار اولیه هم برقرار خواهد بود.

یک روش برای اثبات وجود جواب یکتای معادلهٔ انتگرالی (۳)، **روش تقریبهای متوالی**، یا **روش تکرار پیکارد**[۱] است. برای استفاده از این روش با تابع اولیهٔ ϕ_0 که به‌طور دلخواه انتخاب شده و یا تقریبی از جواب مسئلهٔ مقدار اولیه است شروع می‌کنیم. ساده‌ترین انتخاب

$$\phi_0(t) = 0 \qquad (۴)$$

است. در این‌صورت ϕ_0 حداقل در شرط اولیهٔ معادلهٔ (۲) صدق می‌کند، هرچند لزوماً در معادلهٔ دیفرانسیل صدق نمی‌کند. تقریب بعدی ϕ_1 با قرار دادن $\phi_0(s)$ به‌جای $\phi(s)$ در طرف راست معادلهٔ (۳) و $\phi_1(t)$ نامیدن نتیجهٔ این عمل به‌دست می‌آید؛ پس

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s,\phi_0(s))ds. \qquad (۵)$$

به‌طور مشابه، ϕ_2 از ϕ_1 به‌دست می‌آید

$$\phi_2(t) = \int_0^t f(s,\phi_1(s))ds \qquad (۶)$$

و در حالت کلی،

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s,\phi_n(s))ds. \qquad (۷)$$

---

۱. شارل‌ـامیل پیکارد (۱۸۵۶-۱۹۱۴م)، صرف‌نظر از هانری پوانکاره سرشناس‌ترین ریاضیدان فرانسوی دوران خود بود، که در ۳۰ سالگی استاد دانشگاه سوربن شد. او به غیر از معادلات دیفرانسیل، به‌خاطر قضایای مهمش در آنالیز مختلط و هندسه جبری مشهور است. یک حالت خاص از روش تقریبهای متوالی را لیوویل در ۱۸۳۸ میلادی منتشرکرد، اما معمولاً این روش به پیکارد منسوب است که آن را در صورت کلی‌ای که کارایی وسیع‌تری داشت در یک سری مقاله که انتشارشان از دههٔ ۱۸۹۰ میلادی شروع شد ثابت کرد.

به این‌صورت، دنباله‌ای از تابعهای $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ ایجاد کرده‌ایم، که هر عضو این دنباله در شرط اولیه صدق می‌کنند، اما به‌طور کلی هیچ‌کدام در معادلهٔ دیفرانسیل صدق نمی‌کنند. اما اگر در یک مرحله، مثلاً به‌ازای $n = k$، دیدیم که $\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t)$، در این‌صورت نتیجه می‌شود که ϕ_k جواب معادلهٔ انتگرالی (۳) است. بنابراین ϕ_k هم جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) است و دنباله در این نقطه خاتمه می‌یابد. در حالت کلی چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد و لازم است همهٔ دنبالهٔ نامتناهی را در نظر بگیریم.

برای اثبات قضیهٔ ۱.۸.۲ باید به چهار سؤال اصلی پاسخ بدهیم:

۱. آیا همهٔ اعضای دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ موجودند و یا اینکه در مرحله‌ای این روند به بن‌بست می‌رسد؟

۲. آیا دنباله همگراست؟

۳. خواص تابع حد چیست؟ به‌خصوص آیا در مسئلهٔ انتگرالی (۳) و بنابراین در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) صدق می‌کند؟

۴. آیا این تنها جواب است، یا ممکن است جوابهای دیگری نیز موجود باشند؟

ابتدا در مثالی نسبتاً ساده و مشخص نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به این سؤالها جواب داد و سپس به بعضی از مشکلاتی که ممکن است در حالت کلی با آنها روبه‌رو شویم اشاره می‌کنیم.

مثال ۱

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = 2t(1+y), \qquad y(0) = 0 \qquad (۸)$$

را با روش تقریبهای متوالی حل کنید.

ابتدا توجه کنید که اگر $y = \phi(t)$، معادلهٔ انتگرالی متناظر عبارت است از

$$\phi(t) = \int_0^t 2s[1+\phi(s)]ds. \qquad (۹)$$

اگر تقریب اولیه $\phi_0(t) = 0$ باشد، باید

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s[1+\phi_0(s)]ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2 \qquad (۱۰)$$

و به‌طور مشابه

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s[1+\phi_1(s)]ds = \int_0^t 2s[1+s^2]ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \qquad (۱۱)$$

و

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s[1+\phi_2(s)]ds = \int_0^t 2s\left[1+s^2+\frac{s^4}{2}\right]ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2\cdot 3} \qquad (۱۲)$$

از معادله‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) به‌نظر می‌رسد که به‌ازای هر $n \geq 1$،

$$\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!}; \qquad (۱۳)$$

این نتیجه را می‌توان با استقرای ریاضی ثابت کرد. واضح است که معادلهٔ (۱۳) به‌ازای $n = 1$ صحیح است. باید نشان

بدهیم که اگر این رابطه به‌ازای $n = k$ درست باشد، به‌ازای $n = k + ۱$ هم برقرار است. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\phi_{k+۱}(t) &= \int_۰^t ۲s[۱ + \phi_k(s)]ds \\ &= \int_۰^t ۲s\left(۱ + s^۲ + \frac{s^۴}{۲!} + \cdots + \frac{s^{۲k}}{k!}\right)ds \\ &= t^۲ + \frac{t^۴}{۲!} + \frac{t^۶}{۳!} + \cdots + \frac{t^{۲k+۲}}{(k+۱)!} \qquad (۱۴)\end{aligned}$$

و اثبات استقرایی کامل است.

نموداری از ۴ تکرار اول، $\phi_۱(t)$، ...، $\phi_۴(t)$، در شکل ۱.۸.۲ نشان داده شده است. با افزایش k به‌نظر می‌آید که تکرارها روی بازه‌های بزرگ‌تری به یکدیگر نزدیک باقی می‌مانند، و در نتیجه به‌نظر می‌رسد که دنباله به تابعی حدی همگراست.

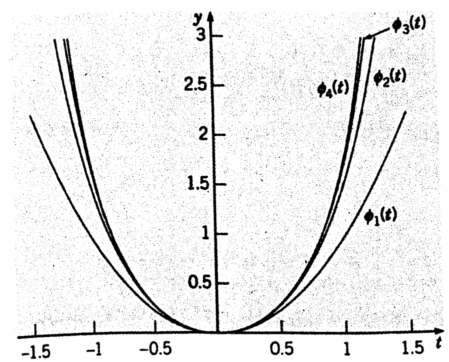
از معادلهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که $\phi_n(t)$ مجموع جزئی مرتبهٔ nام سری نامتناهی

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{t^{۲k}}{k!} \qquad (۱۵)$$

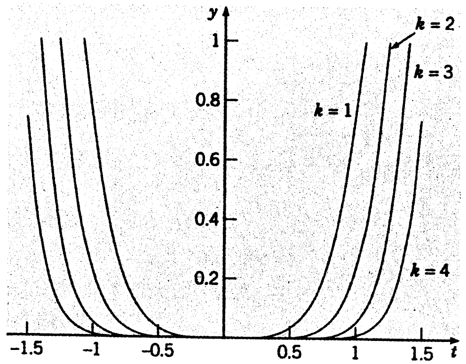
است، بنابراین $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ موجود است اگر و فقط اگر سری (۱۵) همگرا باشد. با استفاده از آزمون نسبت، می‌بینیم که به‌ازای هر t، وقتی $k \to \infty$،

$$\left|\frac{t^{۲k+۲}}{(k+۱)!}\frac{k!}{t^{۲k}}\right| = \frac{t^۲}{k+۱} \to ۰ \qquad (۱۶)$$

پس سری (۱۵) به‌ازای هر t همگراست و جمع آن $\phi(t)$، حد دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ است. علاوه بر این، چون سری (۱۵) سری تیلور است، تا زمانی که t در بازهٔ همگرایی است، که در این مورد همهٔ محور tهاست، می‌توان از آن جمله به جمله مشتق و یا انتگرال گرفت. بنابراین با محاسبهٔ مستقیم می‌توانیم نشان بدهیم که $\phi(t) = \sum_{k=۱}^{\infty} t^{۲k}/k!$ جواب معادلهٔ انتگرالی (۹) است. به‌طور معادل، می‌توانیم با قرار دادن $\phi(t)$ به‌جای y در معادلهٔ (۸) نشان بدهیم که این تابع در مسئلهٔ مقدار اولیه هم صدق می‌کند. در این مثال می‌توانیم ϕ را به‌صورت تابعی مقدماتی، یعنی $\phi(t) = e^{t^۲} - ۱$ بیان کنیم، اما این در بحث وجود و یکتایی لازم نیست.



شکل ۱.۸.۲ نمودار $\phi_۱(t)$، ...، $\phi_۴(t)$ در مثال ۱.



شکل ۲.۸.۲ نمودارهای $\phi(t) - \phi_k(t)$ در مثال ۱ به‌ازای $k = ۱, \dots, ۴$.

اطلاع صریح از $\phi(t)$ تصوری از نحوهٔ همگرایی دنبالهٔ تکرارها را با ترسیم نمودارهای $\phi(t) - \phi_k(t)$ به‌ازای kهای مختلف ممکن می‌کند. در شکل ۲.۸.۲ این تفاوت را به‌ازای $k = ۱, \dots, ۴$ نشان داده‌ایم. این شکل به وضوح افزایش تدریجی طول بازه‌هایی را که روی آنها تکرارهای متوالی، تقریب خوبی برای جواب مسئلهٔ مقدار اولیه هستند نشان می‌دهد.

درنهایت، برای بررسی یکتایی این جواب، فرض کنید مسئلهٔ مقدار اولیه دو جواب ϕ و ψ داشته باشد. چون ϕ و ψ در معادلهٔ انتگرالی (۹) صدق می‌کنند، با تفریق نتیجه می‌شود

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_۰^t ۲s[\phi(s) - \psi(s)]ds.$$

اگر $t > ۰$، با گرفتن قدرمطلق از طرفین نتیجه می‌شود

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left|\int_۰^t ۲s[\phi(s) - \psi(s)]ds\right| \le \int_۰^t ۲s|\phi(s) - \psi(s)|ds.$$

اگر t را به بازهٔ $۰ \le t \le A/۲$ که در آن A دلخواه است محدود کنیم، $۲t \le A$ و

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le A\int_۰^t |\phi(s) - \psi(s)|ds. \qquad (۱۷)$$

اکنون ساده‌تر است که تابع U را با

$$U(t) = \int_۰^t |\phi(s) - \psi(s)|ds \qquad (۱۸)$$

تعریف کنیم. در این‌صورت بلافاصله نتیجه می‌شود

$$U(۰) = ۰ \qquad (۱۹)$$

$$U(t) \ge ۰, \quad t \ge ۰ \qquad (۲۰)$$

علاوه بر این U مشتق‌پذیر است و $U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$. بنابراین، طبق معادلهٔ (۱۷)،

$$U'(t) - AU(t) \le ۰. \qquad (۲۱)$$

با ضرب طرفین معادلهٔ (۲۱) در کمیت مثبت e^{-At} نتیجه می‌شود

$$[e^{-At}U(t)]' \le 0; \qquad (۲۲)$$

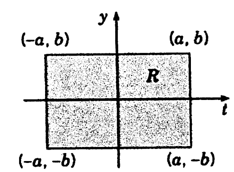
در نتیجه با انتگرال‌گیری از ۰ تا t از معادلهٔ (۲۲) و استفاده از معادلهٔ (۱۹) نتیجه می‌شود

$$e^{-At}U(t) \le 0, \qquad t \ge 0.$$

پس به‌ازای $t \ge 0$، $U(t) \le 0$، و از ترکیب این نتیجه با معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $t \ge 0$، $U(t) = 0$. پس $U'(t) \equiv 0$ و در نتیجه $\psi(t) \equiv \phi(t)$ که با فرض اولیه متناقض است. در نتیجه به‌ازای $t \ge 0$، ممکن نیست که دو جواب متفاوت برای مسئلهٔ مقدار اولیه موجود باشند. با تغییر جزئی در این استدلال، می‌توان نتیجهٔ مشابهی را برای $t \le 0$ به‌دست آورد.

اکنون به مسئلهٔ کلی حل معادلهٔ انتگرالی (۳) برمی‌گردیم و سؤالهایی را که قبلاً مطرح شد، به‌طور مختصر بررسی می‌کنیم.

۱. آیا همهٔ اعضای دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ وجود دارند؟ در مثال، f و $\partial f/\partial y$ در همهٔ صفحهٔ ty پیوسته بودند و می‌توانستیم هر عضو دنباله را به‌طور صریح محاسبه کنیم؛ اما در حالت کلی f و $\partial f/\partial y$ طبق فرض تنها در داخل مستطیل $R: |t| \le a, |y| \le b$ پیوسته هستند (شکل ۳.۸.۲ را ببینید). علاوه بر این، علی‌القاعده نمی‌توان اعضای دنباله را به‌طور صریح تعیین کرد. خطر این است که در مرحله‌ای، مثل $n = k$، نمودار $y = \phi_k(t)$ ممکن است نقاطی خارج از مستطیل R را شامل شود. بنابراین در مرحلهٔ بعد، یعنی هنگام محاسبهٔ $\phi_{k+1}(t)$، لازم می‌شود که $f(t,y)$ را در نقاطی که نمی‌دانیم پیوسته و یا حتی تعریف شده است، محاسبه کنیم. پس ممکن است محاسبهٔ $\phi_{k+1}(t)$ غیرممکن شود.



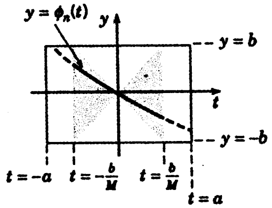
شکل ۳.۸.۲ ناحیهٔ تعریف‌شده در قضیهٔ ۱.۸.۲.

برای پرهیز از این خطر ممکن است لازم باشد که t را در بازه‌ای کوچک‌تر از $|t| \le a$ محدود کنیم. برای یافتن چنین بازه‌ای، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر تابع پیوسته روی ناحیه‌ای بسته و کراندار، کراندار است. بنابراین f روی R کراندار است، پس عدد مثبت M موجود است که

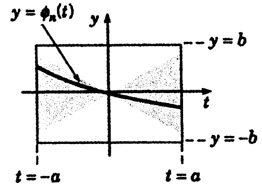
$|f(t,y)| \le M$ به‌ازای هر (t,y) در R، (۲۳)

قبلاً گفتیم که به‌ازای هر n،

$$\phi_n(0) = 0.$$



(الف)



(ب)

شکل ۴.۸.۲ نواحی‌ای که تکرارهای متوالی در آن واقع هستند. (الف) $b/M < a$. (ب) $b/M > a$.

چون $\phi'_{k+1}(t)$ برابر $f(t, \phi_k(t))$ است، حداکثر قدرمطلق شیب نمودار $y = \phi_{k+1}(t)$ برابر M است. چون این منحنی شامل نقطهٔ $(0,0)$ است، باید در ناحیهٔ سایه‌خوردهٔ گوشه‌ای شکل ۴.۸.۲ واقع باشد. بنابراین نقطهٔ $(t, \phi_{k+1}(t))$ تا زمانی که R شامل این ناحیهٔ گوشه‌ای ــ یعنی $|t| \le b/M$ ــ است، در ناحیهٔ R باقی می‌ماند. از این به بعد فقط مستطیل $D: |t| \le h, |y| \le b$ را در نظر می‌گیریم که در آن h برابر حداقل a و b/M است. با این محدودیت، همهٔ اعضای دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ موجود هستند. توجه کنید که اگر $b/M < a$، در صورت امکان می‌توان با یافتن کران بهتر (یعنی کوچک‌تر) از M برای $|f(t,y)|$ مقدار بزرگ‌تری برای h به‌دست آورد.

۲. آیا دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ همگرا می‌شود؟ مانند مثال، می‌توانیم

$$\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \cdots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$$

را به‌صورت مجموع جزئی مرتبهٔ nام سری نامتناهی

$$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)] \qquad (۲۴)$$

در نظر بگیریم. همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ با اثبات همگرایی سری (۲۴) نشان داده می‌شود. برای انجام این کار لازم است که اندازهٔ جملهٔ عمومی $|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|$ را تخمین بزنیم. بحث شیوهٔ انجام این کار را در مسئله‌های ۱۵ تا ۱۸ آورده‌ایم و جزئیات آن را در اینجا حذف می‌کنیم. با فرض همگرایی سری، تابع حدی را با ϕ نشان می‌دهیم، پس

$$\phi(t) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(t). \qquad (۲۵)$$

۳. خواص تابع حدی ϕ چیست؟ در اولین مرحله می‌خواهیم بدانیم که ϕ پیوسته است. این موضوع لزوماً از همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$، حتی اگر تمامی اعضای دنباله پیوسته باشند، نتیجه نمی‌شود. گاهی دنباله‌ای از توابع پیوسته به تابعی حدی همگرا می‌شود که پیوسته نیست. مثال ساده‌ای برای این پدیده را در مسئلهٔ ۱۳ آورده‌ایم. یک راه برای نشان دادن پیوستگی ϕ این است که نشان بدهیم نه‌تنها $\{\phi_n\}$ همگرا می‌شود، بلکه این همگرایی به نحو خاصی رخ می‌دهد که به همگرایی یکنواخت مشهور است. در اینجا به این موضوع

نمی‌پردازیم و فقط به ذکر این نکته کفایت می‌کنیم که بحثی که در بند ۲ به آن استناد کردیم، برای اثبات همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ و بنابراین پیوستگی تابع حدی ϕ در بازهٔ $|t| \le h$ کفایت می‌کند.

اکنون به معادلهٔ (۷)، یعنی

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s))ds$$

برمی‌گردیم. با میل دادن n به ∞ در هر دو طرف، نتیجه می‌شود

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s, \phi_n(s))ds. \qquad (26)$$

می‌خواهیم حد و انتگرال طرف راست معادلهٔ (۲۶) را طوری جابه‌جا کنیم که نتیجه شود

$$\phi(t) = \int_0^t \lim_{n\to\infty} f(s, \phi_n(s))ds. \qquad (27)$$

در حالت کلی چنین جابه‌جایی‌ای مجاز نیست (به‌عنوان مثال، مسئلهٔ ۱۴ را ببینید)، اما مجدداً همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ برای جابه‌جایی کفایت می‌کند. اکنون می‌خواهیم حد را به داخل تابع f ببریم که نتیجه می‌شود

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s))ds \qquad (28)$$

و لذا

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s))ds. \qquad (29)$$

عبارت

$$\lim_{n\to\infty} f(s, \phi_n(s)) = f(s, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s))$$

معادل پیوستگی f نسبت به متغیر دومش است که طبق فرض برقرار است. بنابراین معادلهٔ (۲۹) معتبر است و تابع ϕ در معادلهٔ انتگرال (۳) صدق می‌کند. بنابراین ϕ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) هم هست.

۴. آیا جوابی جز $y = \phi(t)$ برای معادلهٔ (۳) موجود است؟ برای نشان دادن یکتایی جواب $y = \phi(t)$، مانند مثال عمل می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم جوابی دیگر مانند $y = \psi(t)$ موجود است. در این‌صورت می‌توان نشان داد (مسئلهٔ ۱۹ را ببینید) که به‌ازای $0 \le t \le h$ و به‌ازای عدد مثبت مناسب A، تفاضل $\phi(t) - \psi(t)$ در نامساوی

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|ds \qquad (30)$$

صدق می‌کند. از این نقطه، استدلال دقیقاً همان است که در مثال آوردیم و نتیجه می‌گیریم که هیچ جوابی، جز همان که با روش تقریبهای متوالی به‌دست آمد، برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) وجود ندارد.

مسئله‌ها

در هرکدام از مسئله‌های ۱ و ۲، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را به مسئلهٔ مقدار اولیهٔ معادل در مبدأ تبدیل کنید.

۱. $dy/dt = t^2 + y^2$، $y(1) = 2$

۲. $dy/dt = 1 - y^3$، $y(-2) = 3$

در هر یک از مسئله‌های ۳ تا ۶، فرض کنید $\phi_0(t) = 0$ و با استفاده از روش تقریبهای متوالی، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید.

الف) $\phi_n(t)$ را به‌ازای هر n دلخواه معین کنید.

ب) نمودار $\phi_n(t)$ را به‌ازای $n = 1, \dots, 4$ رسم کنید. بررسی کنید که به‌نظر می‌رسد که تکرارها همگرا می‌شوند یا نه.

ج) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ را برحسب تابعهای مقدماتی بیان کنید، یعنی مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید.

د) نمودار $|\phi(t) - \phi_n(t)|$ را به‌ازای $n = 1, \dots, 4$ رسم کنید. برای هر یک از $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$ بازه‌ای را تخمین بزنید که در آن آنها تقریب نسبتاً خوبی از جواب واقعی هستند.

۳. $y' = 2(y + 1)$، $y(0) = 0$

۴. $y' = -y - 1$، $y(0) = 0$

۵. $y' = y + 1 - t$، $y(0) = 0$

۶. $y' = -y/2 + t$، $y(0) = 0$

در هر یک از مسئله‌های ۷ و ۸، فرض کنید $\phi_0(t) = 0$ و با استفاده از روش تقریبهای متوالی مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید.

الف) $\phi_n(t)$ را به‌ازای یک n دلخواه تعیین کنید.

ب) نمودار $\phi_n(t)$ را به‌ازای $n = 1, \dots, 4$ رسم کنید. بررسی کنید که به‌نظر می‌رسد که تکرارها همگرا می‌شوند یا نه.

۷. $y' = ty + 1$، $y(0) = 0$

۸. $y' = t^2 y - t$، $y(0) = 0$

در هر یک از مسئله‌های ۹ و ۱۰، فرض کنید $\phi_0(t) = 0$ و با استفاده از روش تقریبهای متوالی، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را تقریب بزنید.

الف) $\phi_1(t)$، $\phi_2(t)$، $\phi_3(t)$ را محاسبه کنید.

ب) نمودار $\phi_1(t)$، $\phi_2(t)$، $\phi_3(t)$ را رسم کنید و بررسی کنید که به‌نظر می‌رسد که تکرارها همگرا می‌شوند یا نه.

۹. $y' = t^2 + y^2$، $y(0) = 0$

۱۰. $y' = 1 - y^3$، $y(0) = 0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ و ۱۲، فرض کنید $\phi_0(t) = 0$ و با استفاده از روش تقریبهای متوالی، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را تقریب بزنید.

الف) $\phi_1(t)$، ...، $\phi_4(t)$ و یا (در صورت لزوم) تقریب تیلور این تکرارها را بیابید. جمله‌های تا مرتبهٔ شش را نگه دارید.

ب) نمودار تابعهای به‌دست آمده در قسمت (الف) را رسم کنید و بررسی کنید که به‌نظر می‌رسد که تکرارها همگرا می‌شوند یا نه.

۱۱. $y' = -\sin y + 1$، $y(0) = 0$

۱۲. $y' = (3t^2 + 4t + 2)/2(y - 1)$، $y(0) = 0$

۱۳. فرض کنید به‌ازای $0 \le x \le 1$، $\phi_n(x) = x^n$ و ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

این مثال نشان می‌دهد که ممکن است حد دنباله‌ای از تابعهای پیوسته، پیوسته نباشد.

۱۴. دنبالهٔ $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}, 0\le x\le 1$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید به‌ازای $0 \le x \le 1$، $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)=0$ و بنابراین

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx = 0.$$

(ب) ثابت کنید $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}dx = 1 - e^{-n}$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx = 1;$$

پس در این مثال

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(x)dx \ne \int_a^b \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)dx$$

با اینکه $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ موجود و پیوسته است.

در مسئله‌های ۱۵ تا ۱۸، نحوهٔ اثبات همگرایی دنباله‌های $\{\phi_n(t)\}$ را که با معادله‌های (۴) و (۷) تعریف شدند بررسی می‌کنیم.

۱۵. اگر $\partial f/\partial y$ در مستطیل D پیوسته باشد، عدد ثابت و مثبت K موجود است که

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le K|y_1-y_2| \qquad \text{(i)}$$

که در آن (t,y_1) و (t,y_2) دو نقطهٔ دلخواه در ناحیهٔ D با مختصات t یکسان هستند. این نامساوی به شرط لیپشیتز[1] مشهور است.

راهنمایی: t را ثابت نگه دارید و از قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع f به‌عنوان تابع y استفاده کنید. K را ماکزیمم $|\partial f/\partial y|$ در D در نظر بگیرید.

۱۶. اگر $\phi_{n-1}(t)$ و $\phi_n(t)$ اعضای دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ باشند، با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۵ ثابت کنید

$$|f[t,\phi_n(t)] - f[t,\phi_{n-1}(t)]| \le K|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|.$$

۱۷. (الف) ثابت کنید اگر $|t|\le h$ آنگاه

$$|\phi_1(t)|\le M(t)$$

که در آن M طوری انتخاب شده است که به‌ازای (t,y) در D، $|f(t,y)|\le M$.

۱. رودلف لیپشیتز (۱۸۳۲-۱۹۰۳م) سالها استاد دانشگاه بن بود و در چندین زمینهٔ ریاضی فعالیت می‌کرد. نامساوی (i) را می‌توان جایگزین پیوستگی $\partial f/\partial y$ در قضیهٔ ۱.۸.۲ کرد؛ این کار منجر به قضیه‌ای کمی قوی‌تر می‌شود.

ب) با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۶ و قسمت (الف) مسئلهٔ ۱۷ ثابت کنید

$$|\phi_2(t)-\phi_1(t)|\le \frac{MK|t|^2}{2}.$$

ج) با استفاده از استقرای ریاضی، ثابت کنید

$$|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|\le\frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!}\le\frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

۱۸. توجه کنید که

$$\phi_n(t)=\phi_1(t)+[\phi_2(t)-\phi_1(t)]+\cdots+[\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)].$$

الف) ثابت کنید

$$|\phi_n(t)|\le|\phi_1(t)|+|\phi_2(t)-\phi_1(t)|+\cdots+|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|.$$

ب) با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۷ ثابت کنید

$$|\phi_n(t)|\le\frac{M}{K}\left[Kh+\frac{(Kh)^2}{2!}+\cdots+\frac{(Kh)^n}{n!}\right].$$

ج) ثابت کنید که وقتی $n\to\infty$، مجموع قسمت (ب) همگرا می‌شود و بنابراین ثابت کنید که وقتی $n\to\infty$، مجموع قسمت (الف) هم همگرا می‌شود. نتیجه بگیرید که دنبالهٔ $\{\phi_n(t)\}$ هم همگراست چون دنبالهٔ مجموعهای جزئی یک سری نامتناهی همگراست.

۱۹. در این مسئله به بررسی سؤال یکتایی جواب در معادلهٔ انتگرالی (۳)، یعنی

$$\phi(t)=\int_0^t f[s,\phi(s)]ds$$

می‌پردازیم.

الف) فرض کنید ϕ و ψ دو جواب معادلهٔ انتگرالی (۳) باشند. ثابت کنید

$$\phi(t)-\psi(t)=\int_0^t (f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s)))ds.$$

ب) ثابت کنید

$$|\phi(t)-\psi(t)|\le\int_0^t |f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s))|ds.$$

ج) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۵ ثابت کنید

$$|\phi(t)-\psi(t)|\le K\int_0^t |\phi(s)-\psi(s)|ds$$

که در آن K کران بالای $|\partial f/\partial y|$ در D است. این همان معادلهٔ (۳۰) است و مابقی اثبات را می‌توان همان‌گونه که در متن آمده است ساخت.

۹.۲ معادلات تفاضلی مرتبهٔ اول

هرچند برای بسیاری از مسئله‌ها مدل پیوسته‌ای که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل می‌شود معقول و جذاب است، گاهی ممکن است مدل گسسته طبیعی‌تر باشد. به‌عنوان مثال، مدل پیوستهٔ بهرهٔ مرکب که در بخش ۳.۲ از آن استفاده کردیم تنها تقریبی از فرایندی گسسته است. به‌طور مشابه، گاهی رشد جمعیت با مدل گسسته دقیق‌تر توصیف می‌شود تا با مدل پیوسته. به‌عنوان مثال، جمعیت موجوداتی که نسلهایشان هم‌پوشانی ندارند و در فواصل زمانی مشخص، مثلاً زمانهای مشخصی در تقویم سالانه تکثیر می‌شوند چنین است. در این‌صورت جمعیت $y_{n+۱}$ موجودات در سال $n+۱$ تابعی از n و جمعیت y_n در سال nام است، یعنی

$$y_{n+۱} = f(n, y_n), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots \tag{۱}$$

به معادلهٔ (۱) **معادلهٔ تفاضلی مرتبهٔ اول** می‌گوییم. این معادله مرتبهٔ اول است چون مقدار $y_{n+۱}$ فقط به مقدار y_n بستگی دارد و نه به مقادیر قبلی $y_{n-۱}$، $y_{n-۲}$ و غیره. مشابه معادلات دیفرانسیل، معادلهٔ تفاضلی (۱) **خطی** است اگر f تابعی خطی از y_n باشد؛ در غیر این‌صورت **غیرخطی** است. جواب معادلهٔ تفاضلی (۱) دنباله‌ای از اعداد $y_۰$، $y_۱$، $y_۲$، ... است که به‌ازای هر n در معادله صدق می‌کنند. علاوه بر این، ممکن است معادلهٔ تفاضلی **شرط اولیه‌ای** مانند

$$y_۰ = \alpha \tag{۲}$$

داشته باشد که مقدار اولین جملهٔ دنبالهٔ جواب را مشخص می‌کند.

اکنون به‌طور موقت فرض می‌کنیم که تابع f معادلهٔ (۱) تنها به y_n بستگی دارد و نه به n. در این حالت

$$y_{n+۱} = f(y_n), \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots \tag{۳}$$

اگر $y_۰$ مفروض باشد، جمله‌های متوالی جواب را می‌توان از معادلهٔ (۳) یافت؛ پس

$$y_۱ = f(y_۰)$$

و

$$y_۲ = f(y_۱) = f(f(y_۰)).$$

به مقدار $f[f(y_۰)]$ تکرار دوم معادلهٔ تفاضلی می‌گوییم و گاهی آن را با $f^۲(y_۰)$ نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه تکرار سوم معادله عبارت است از

$$y_۳ = f(y_۲) = f\left(f\left(f(y_۰)\right)\right) = f^۳(y_۰)$$

و الی آخر. در حالت کلی، تکرار nام معادله عبارت است از

$$y_n = f(y_{n-۱}) = f^n(y_۰).$$

به این فرایند، تکرار معادلهٔ تفاضلی می‌گویند. اغلب، مهم‌ترین هدف تعیین رفتار y_n است وقتی $n \to \infty$؛ به‌ویژه اینکه بدانیم y_n به حدی همگرا می‌شود یا نه و اگر چنین بود حد را بیابیم.

به جوابهایی که در آنها y_n به‌ازای همهٔ مقدارهای n مقدار ثابتی دارد، **جوابهای تعادلی** می‌گوییم. این جوابها، مانند آنچه در معادلات دیفرانسیل دیدیم، اهمیت خاصی دارند. اگر جواب تعادلی موجود باشد، می‌توان آن را از مساوی قرار دادن $y_{n+۱}$ و y_n در معادلهٔ (۳) و حل معادلهٔ

$$y_n = f(y_n) \tag{۴}$$

نسبت به y_n به‌دست آورد.

معادلات خطی. فرض کنید جمعیت گونهٔ معینی در ناحیه‌ای مفروض در سال $n+۱$، که با $y_{n+۱}$ نشان داده می‌شود، مضربی مانند ρ_n از جمعیت y_n در سال n باشد، یعنی

$$y_{n+۱} = \rho_n y_n, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots \tag{۵}$$

توجه کنید که نرخ زادوولد ρ_n ممکن است در سالهای مختلف متفاوت باشد. معادلهٔ تفاضلی (۵) خطی است و به‌سادگی با تکرار حل می‌شود. می‌توانیم بنویسیم

$$y_۱ = \rho_۰ y_۰$$

$$y_۲ = \rho_۱ y_۱ = \rho_۱ \rho_۰ y_۰$$

و در حالت کلی

$$y_n = \rho_{n-۱} \dots \rho_۰ y_۰, \qquad n = ۱, ۲, \dots \tag{۶}$$

پس اگر جمعیت اولیهٔ $y_۰$ مفروض باشد، جمعیت هر یک از نسلهای آینده با معادلهٔ (۶) تعیین می‌شود. هرچند برای مسئلهٔ جمعیت ρ_n به‌طور طبیعی مثبت است، جواب (۶) وقتی ρ_n به‌ازای بعضی از و یا همهٔ مقدارهای n منفی باشد هم برقرار است. اما اگر به‌ازای nای ρ_n صفر باشد، $y_{n+۱}$ و همهٔ مقادیر بعدی y صفر خواهند بود؛ به‌عبارت دیگر گونه نابود شده است.

اگر به‌ازای هر n نرخ زادوولد ρ_n مقدار ثابت ρ را داشته باشد، معادلهٔ تفاضلی (۵) به

$$y_{n+۱} = \rho y_n \tag{۷}$$

تبدیل می‌شود و جواب آن عبارت است از

$$y_n = \rho^n y_۰. \tag{۸}$$

معادلهٔ (۷) یک جواب تعادلی دارد که عبارت است از $y_n = ۰$ به‌ازای همهٔ nها و متناظر مقدار اولیهٔ $y_۰ = ۰$ است. رفتار حدی y_n را به‌سادگی می‌توان از معادلهٔ (۸) تعیین کرد. در واقع

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \begin{cases} ۰ & |\rho| < ۱ \\ y_۰ & \rho = ۱ \\ \text{وجود ندارد} & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \tag{۹}$$

به‌عبارت دیگر، جواب تعادلی $y_n = ۰$ مجانبی‌پایدار است اگر $|\rho| < ۱$ و ناپایدار است اگر $|\rho| > ۱$.

اکنون مدل جمعیت را در معادلهٔ (۵) طوری اصلاح می‌کنیم که اثرات مهاجرت را هم در بر بگیرد. اگر b_n کل افزایش جمعیت به‌دلیل مهاجرت در سال nام باشد، جمعیت در سال $n+1$ مجموع جمعیتی است که به‌طور طبیعی به‌علت زادوولد اضافه شده‌اند و آنهایی که به‌علت مهاجرت به جمعیت افزوده شده‌اند، پس

$$y_{n+1} = \rho y_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

که در آن فرض کرده‌ایم ضریب زادوولد ρ ثابت است. جواب معادلهٔ (۱۰) را می‌توان مجدداً با تکرار به‌دست آورد. می‌توانیم بنویسیم

$$y_1 = \rho y_0 + b_0$$
$$y_2 = \rho(\rho y_0 + b_0) + b_1 = \rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1$$
$$y_3 = \rho(\rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1) + b_2 = \rho^3 y_0 + \rho^2 b_0 + \rho b_1 + b_2$$

و الی آخر. در حالت کلی

$$y_n = \rho^n y_0 + \rho^{n-1} b_0 + \cdots + \rho b_{n-2} + b_{n-1} = \rho^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} b_j. \tag{11}$$

توجه کنید که اولین جملهٔ طرف راست معادلهٔ (۱۱) اعقاب جمعیت اولیه را نشان می‌دهد، در حالی که جمله‌های دیگر جمعیتی را در سال n نشان می‌دهند که به‌دلیل مهاجرت در همهٔ سالهای گذشته اضافه شده‌اند.

در حالت خاصی که به‌ازای هر n، $b_n = b \neq 0$، معادلهٔ تفاضلی عبارت است از

$$y_{n+1} = \rho y_n + b \tag{12}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۱۱) جواب آن عبارت است از

$$y_n = \rho^n y_0 + (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1}) b. \tag{13}$$

اگر $\rho \neq 1$، می‌توانیم این جواب را به‌صورت فشرده‌تر

$$y_n = \rho^n y_0 + \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} b \tag{14}$$

بنویسیم که مجدداً دو جملهٔ طرف راست اثرات جمعیت اولیه و مهاجرت هستند. با بازنویسی معادلهٔ (۱۴) به‌صورت

$$y_n = \rho^n \left(y_0 - \frac{b}{1-\rho} \right) + \frac{b}{1-\rho} \tag{15}$$

رفتار درازمدت y_n واضح‌تر خواهد بود. از معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که اگر $|\rho| < 1$ آنگاه $y_n \to b/(1-\rho)$ و اگر $|\rho| > 1$ یا اگر $\rho = -1$، y_n حد ندارد مگر اینکه $y_0 = b/(1-\rho)$. کمیت $b/(1-\rho)$ به‌ازای $\rho \neq 1$ جواب تعادلی معادلهٔ (۱۲) است و به‌راحتی و مستقیم از معادله به‌دست می‌آید. البته معادلهٔ (۱۴) وقتی که $\rho = 1$ معتبر نیست. برای بررسی این حالت باید به معادلهٔ (۱۳) برگردیم و در آنجا قرار بدهیم $\rho = 1$؛ در نتیجه

$$y_n = y_0 + nb. \tag{16}$$

پس در این حالت، وقتی $n \to \infty$، y_n بی‌کران می‌شود.

همین مدل چهارچوبی برای حل بسیاری از مسئله‌های با ماهیت مالی را فراهم می‌کند. برای چنین مسئله‌هایی، y_n تراز حساب در دورهٔ زمانی nام است و $\rho_n = 1 + r_n$ که در آن r_n نرخ بهره در آن دورهٔ زمانی، و b_n مقدار واریزشده یا برداشت‌شده از حساب است. یک مثال نوعی را در زیر آورده‌ایم.

مثال ۱

یک دانش‌آموختهٔ دانشگاه، ۱۰,۰۰۰ دلار برای خرید ماشین وام گرفته است. اگر نرخ بهره ۱۲٪ باشد، میزان پرداخت لازم ماهانه چقدر است که همهٔ وام در چهار سال بازپرداخت شود؟

معادلهٔ تفاضلی مربوطه، معادلهٔ (۱۲) است که در آن y_n میزان تراز وام در ماه nام، ρ نرخ بهرهٔ ماهانه و b پرداخت ماهانه است. توجه کنید که b باید منفی باشد و $\rho = 1.01$ متناظر نرخ بهرهٔ ۱٪ در ماه است.

جواب معادلهٔ تفاضلی (۱۲) با این مقدار ρ و شرط اولیهٔ $y_0 = 10{,}000$ با معادلهٔ (۱۵) داده می‌شود، یعنی

$$y_n = (1.01)^n (10{,}000 + 100b) - 100b. \tag{17}$$

میزان پرداخت ماهانهٔ b، برای اینکه وام در ۴ سال بازپرداخت شود، با قرار دادن $y_{48} = 0$ و حل نسبت به b به‌دست می‌آید. از این کار نتیجه می‌شود

$$b = -100 \frac{(1.01)^{48}}{(1.01)^{48} - 1} = -263.34 \tag{18}$$

مجموع کل با پرداخت این وام در ۴۸ ماه برابر با $48|b|$ و یا ۱۲,۶۴۰٫۳۲ دلار است. از این مقدار، ۱۰,۰۰۰ دلار میزان بازپرداخت اصل وام است و ۲۶۴۰٫۳۲ دلار بقیه بهره است.

معادلات غیرخطی. معادله‌های تفاضلی غیرخطی بسیار پیچیده‌تر هستند و جوابهایشان نسبت به معادلات خطی تغییرات زیادی دارند. در اینجا فقط یک معادله را، یعنی معادلهٔ لجستیک

$$y_{n+1} = \rho y_n \left(1 - \frac{y_n}{k} \right) \tag{19}$$

را بررسی می‌کنیم که متناظر معادلهٔ دیفرانسیل لجستیک

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) \tag{20}$$

است که در بخش ۵.۲ دیدیم. توجه کنید اگر در معادلهٔ (۲۰) به‌جای مشتق dy/dt تفاضل $(y_{n+1} - y_n)/h$ را قرار بدهیم، معادلهٔ (۲۰) به معادلهٔ (۱۹) با

$$\rho = 1 + hr$$

و

$$k = (1 + hr)K/hr$$

تبدیل می‌شود. برای ساده‌تر کردن معادلهٔ (۱۹)، می‌توانیم با متغیر جدید $u_n = y_n/k$، y_n را جمع و جورتر کنیم. در این‌صورت معادلهٔ (۱۹) به

$$u_{n+1} = \rho u_n (1 - u_n) \tag{21}$$

تبدیل می‌شود که در آن ρ پارامتری مثبت است.

بررسی معادلهٔ (۲۱) را با جستجوی جواب تعادلی یا ثابت شروع می‌کنیم. این جواب را می‌توان با مساوی قرار دادن $u_{n+۱}$ با u_n در معادلهٔ (۲۱) به‌دست آورد، که متناظر با صفر قرار دادن dy/dt در معادلهٔ (۲۰) است. معادلهٔ حاصل عبارت است از

$$u_n = \rho u_n - \rho u_n^۲; \qquad (۲۲)$$

در نتیجه جوابهای تعادلی معادلهٔ (۲۱) عبارت‌اند از

$$u_n = ۰, \quad u_n = \frac{\rho - ۱}{\rho}. \qquad (۲۳)$$

سؤال بعدی این است که جوابهای تعادلی مجانبی‌پایدارند یا ناپایدارند؛ یعنی برای شرط اولیه‌ای نزدیک به یکی از جوابهای تعادلی، دنبالهٔ جوابهای حاصل به جواب تعادلی همگرا می‌شود و یا از آن دور می‌شود. یک راه این کار تقریب معادلهٔ (۲۱) با معادله‌ای خطی در همسایگی جوابهای تعادلی است. به‌عنوان مثال، نزدیک جواب تعادلی $u_n = ۰$، مقدار $u_n^۲$ در مقایسه با u_n کوچک است؛ بنابراین فرض می‌کنیم که می‌توانیم در معادلهٔ (۲۱) از جملات مرتبهٔ دوم نسبت به جملات خطی چشم‌پوشی کنیم. در این‌صورت به معادلهٔ تفاضلی خطی

$$u_{n+۱} = \rho u_n \qquad (۲۴)$$

می‌رسیم، که به‌ازای u_n به اندازهٔ کافی نزدیک به صفر تقریب خوبی از معادلهٔ (۲۱) است. اما معادلهٔ (۲۴) همان معادلهٔ (۷) است و قبلاً نشان دادیم که وقتی $n \to \infty$، $u_n \to ۰$ اگر و فقط اگر $|\rho| < ۱$، که چون ρ باید مثبت باشد تبدیل می‌شود به $۰ < \rho < ۱$. پس جواب تعادلی $u_n = ۰$ برای این مجموعه از مقدارهای ρ برای معادلهٔ تقریب (۲۴) مجانبی‌پایدار است، و بنابراین نتیجه می‌گیریم که این جواب برای معادلهٔ غیرخطی کامل هم مجانبی‌پایدار است. این نتیجه صحیح است، هرچند بحث ما کامل نیست. کاستی استدلال، وجود قضیه‌ای است که بیان کند در همسایگی جواب تعادلی $u_n = ۰$، جوابهای معادلهٔ غیرخطی (۲۱) رفتاری مشابه جوابهای معادلهٔ خطی (۲۴) دارند. در اینجا دربارهٔ این نکته بحث نمی‌کنیم؛ اما همین سؤال را در بخش ۳.۹ برای معادلات دیفرانسیل بررسی خواهیم کرد.

اکنون جواب تعادلی دیگر، یعنی

$$u_n = (\rho - ۱)/\rho$$

را در نظر می‌گیریم. برای مطالعهٔ جوابها در همسایگی این نقطه می‌نویسیم

$$u_n = \frac{\rho - ۱}{\rho} + v_n \qquad (۲۵)$$

که در آن فرض می‌کنیم v_n کوچک است. با قرار دادن (۲۵) در معادلهٔ (۲۱) و ساده کردن معادلهٔ حاصل نتیجه می‌شود

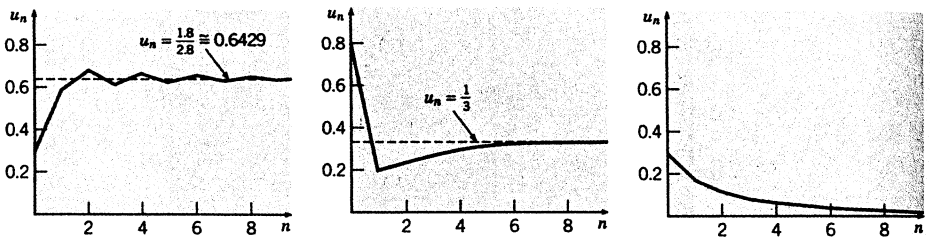
$$v_{n+۱} = (۲ - \rho)v_n - \rho v_n^۲. \qquad (۲۶)$$

چون v_n کوچک است، مجدداً از جمله‌های مرتبهٔ دوم در مقابل جمله‌های مرتبهٔ اول صرف‌نظر می‌کنیم و در نتیجه معادلهٔ خطی

$$v_{n+۱} = (۲ - \rho)v_n \qquad (۲۷)$$

را به‌دست می‌آوریم. با رجوع به معادلهٔ (۹)، به این نتیجه می‌رسیم که به‌ازای $|\rho - ۲| < ۱$، وقتی $n \to \infty$، $v_n \to ۰$، یعنی به‌ازای $۱ < \rho < ۳$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌ازای این مجموعه از مقدارهای ρ، جواب تعادلی $u_n = (\rho - ۱)/\rho$ مجانبی‌پایدار است.

شکل ۱.۹.۲ شامل نمودار جوابهای معادلهٔ (۲۱) به‌ترتیب به‌ازای $\rho = ۰٫۸$، $\rho = ۱٫۵$ و $\rho = ۲٫۸$ است. توجه کنید که به‌ازای $\rho = ۰٫۸$ جواب به صفر و به‌ازای $\rho = ۱٫۵$ و $\rho = ۲٫۸$ به جواب تعادلی ناصفر همگرا می‌شود. همگرایی به‌ازای $\rho = ۰٫۸$ و $\rho = ۱٫۵$ یکنواخت و به‌ازای $\rho = ۲٫۸$ نوسانی است. با اینکه نمودارها برای شرایط اولیهٔ خاصی ترسیم شده‌اند، برای شرایط اولیهٔ دیگر هم نمودارها مشابه هستند.

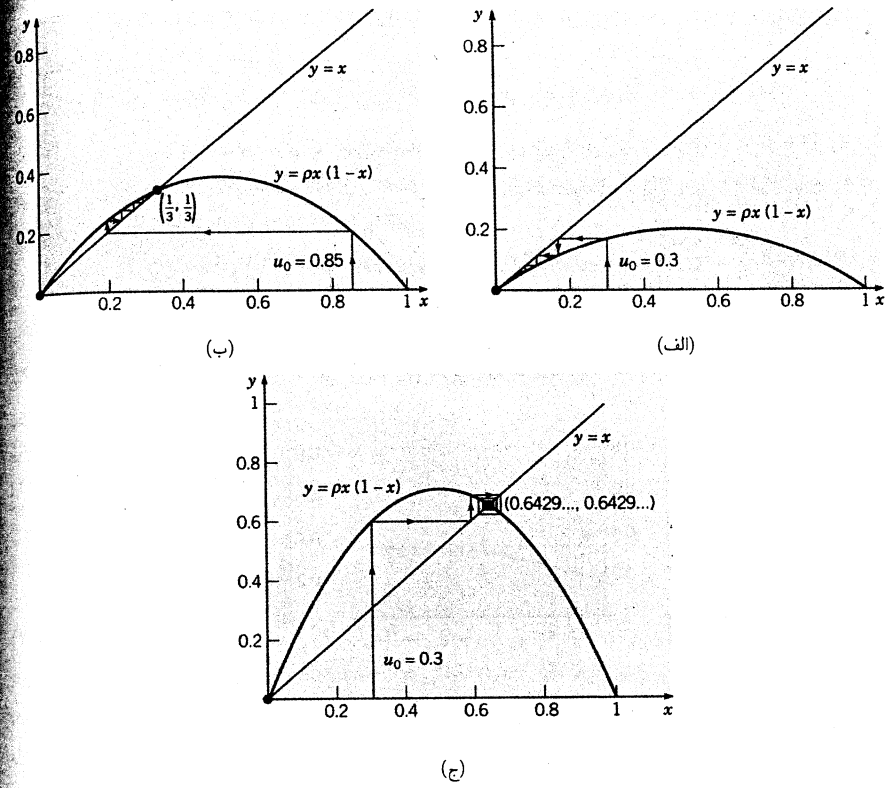


(الف) (ب) (ج)

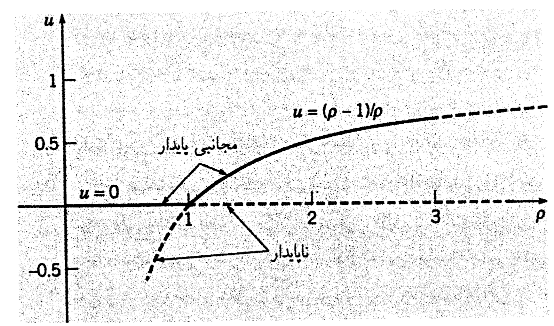
شکل ۱.۹.۲ جوابهای $u_{n+۱} = \rho u_n(۱ - u_n)$: (الف) $\rho = ۰٫۸$؛ (ب) $\rho = ۱٫۵$؛ (ج) $\rho = ۲٫۸$.

نحوهٔ دیگر نمایش جواب معادلهٔ تفاضلی را در شکل ۲.۹.۲ نشان داده‌ایم. در هر کدام از قسمت‌های این شکل، نمودارهای سهمی $y = \rho x(۱ - x)$ و خط $y = x$ نشان داده شده است. جوابهای تعادلی متناظر نقاط تقاطع این دو منحنی هستند. نمودارهای قطعه‌به‌قطعه خطی شامل پاره‌خطهای متوالی افقی و عمودی، که گاهی به آن نمایش پلکانی می‌گویند، دنبالهٔ جواب را نشان می‌دهند. این دنباله از نقطهٔ $u_۰$ در محور xها شروع می‌شود. پاره‌خط عمودی رسم‌شده از $u_۰$ به سمت سهمی، متناظر محاسبهٔ $u_۱ = \rho u_۰(۱ - u_۰)$ است. سپس این مقدار از محور yها به محور xها منتقل می‌شود، این گام با پاره‌خط افقی از سهمی به طرف خط $y = x$ نمایش داده شده است. سپس این فرایند به‌طور متوالی تکرار می‌شود. به‌وضوح در شکل ۲.۹.۲ (الف) دنباله به مبدأ و در دو حالت دیگر به جواب تعادلی ناصفر همگرا می‌شود.

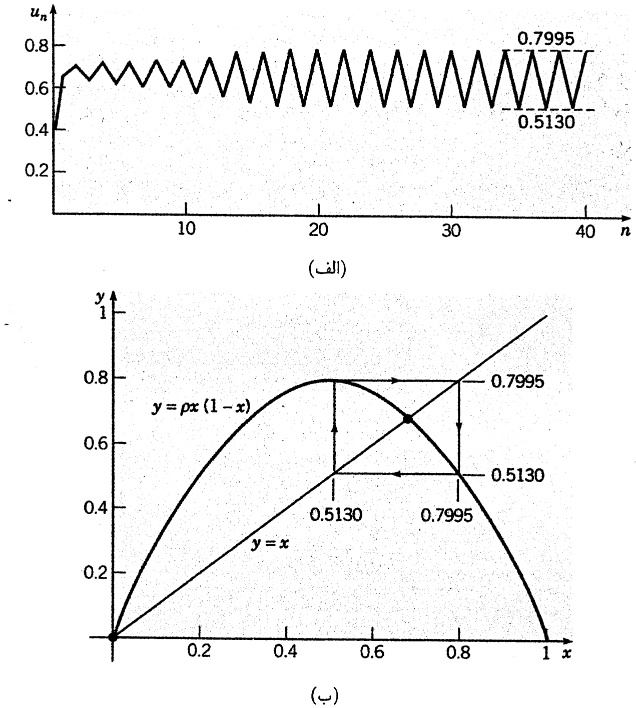
خلاصهٔ نتایج تا این لحظه به قرار زیر است: معادلهٔ تفاضلی (۲۱) دو جواب تعادلی $u_n = ۰$ و $u_n = (\rho - ۱)/\rho$ دارد؛ اولی به‌ازای $۰ \le \rho < ۱$ و دومی به‌ازای $۱ < \rho < ۳$ پایدار است. اگر $\rho = ۱$، دو جواب تعادلی در $u = ۰$ ادغام می‌شوند. می‌توان نشان داد که این جواب مجانبی‌پایدار است. در شکل ۳.۹.۲ پارامتر ρ روی محور افقی و u روی محور عمودی رسم شده است و جوابهای تعادلی $u = ۰$ و $u = (\rho - ۱)/\rho$ نشان داده شده‌اند. بازه‌هایی را که هر کدام از جوابها در آنها پایدار هستند با منحنی‌های پررنگ نشان داده‌ایم. در $\rho = ۱$ یک **تبادل پایداری** از یک جواب تعادلی به دیگری وجود دارد.



شکل ۲.۹.۲ تکرارهای $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$. (الف) $\rho = ۰٫۸$؛ (ب) $\rho = ۱٫۵$؛ (ج) $\rho = ۲٫۸$.



شکل ۳.۹.۲ تبادل پایداری در $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

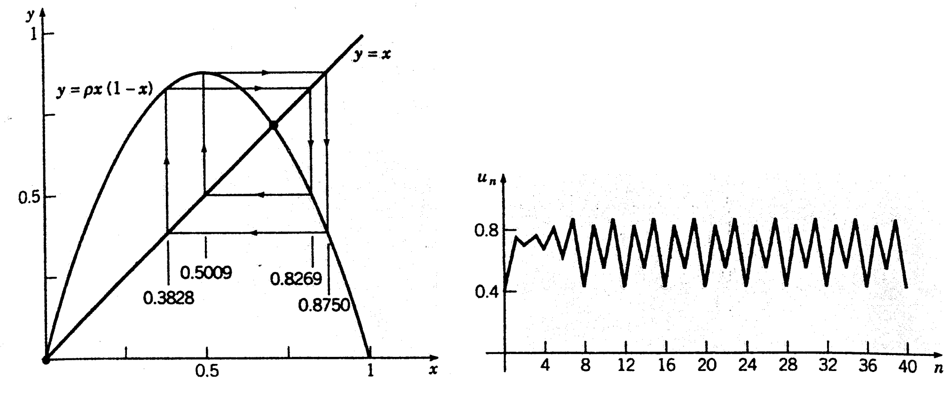


شکل ۴.۹.۲ یک جواب معادلهٔ $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ بهازای $\rho = ۳٫۲$؛ دورهٔ تناوب ۲. (الف) نمودار u_n برحسب n؛ (ب) یک جواب متناوب با دورهٔ تناوب ۲.

بهازای $\rho > ۳$ هیچ‌کدام از جوابها پایدار نیستند و جوابهای معادلهٔ (۲۱) با افزایش ρ رفتار پیچیده‌تری را نمایش می‌دهند. بهازای ρ کمی بیشتر از ۳، دنبالهٔ u_n به سرعت به نوسانی مانا با دورهٔ تناوب ۲ میل می‌کند؛ یعنی u_n بین دو مقدار متمایز نوسان می‌کند. یک جواب را بهازای $\rho = ۳٫۲$ در شکل ۴.۹.۲ نشان داده‌ایم. بهازای مقادیر n بیشتر از ۲۰، جواب بین دو مقدار ۰٫۵۱۳۰ و ۰٫۷۹۹۵ نوسان می‌کند. نمودار برای شرط اولیهٔ $u_0 = ۰٫۳$ رسم شده است، اما این نمودار بهازای مقادیر اولیهٔ بین ۰ و ۱ هم به همین شکل است. شکل ۴.۹.۲(ب) همان نوسان مانا را با مسیری مستطیلی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت طی می‌کند.

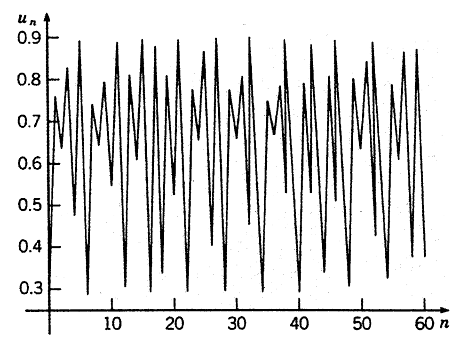
تقریباً در $\rho = ۳٫۴۴۹$، هر حالت نوسانی با دورهٔ تناوب ۲ به دو حالت متمایز منشعب می‌شود، و جوابها متناوب با دورهٔ تناوب چهار می‌شوند؛ شکل ۵.۹.۲ را ببینید که بهازای $\rho = ۳٫۵$ یک جواب متناوب با دورهٔ تناوب ۴ را نشان می‌دهد. با افزایش ρ، جوابهای متناوب با دورهٔ تناوب ۸ و ۱۶ و ... ظاهر می‌شوند. به ظهور جواب جدید بهازای مقدار مشخص پارامتر **انشعاب** می‌گویند.

مقادیری از ρ که در آنها دوره‌های تناوب دوبرابر می‌شوند به مقدار حدی تقریباً ۳٫۵۷ نزدیک می‌شوند. بهازای $\rho > ۳٫۵۷$ جوابها از نظمی برخوردارند؛ اما بهازای بیشتر مقدارهای ρ جواب الگویی با جزئیات قابل تشخیص

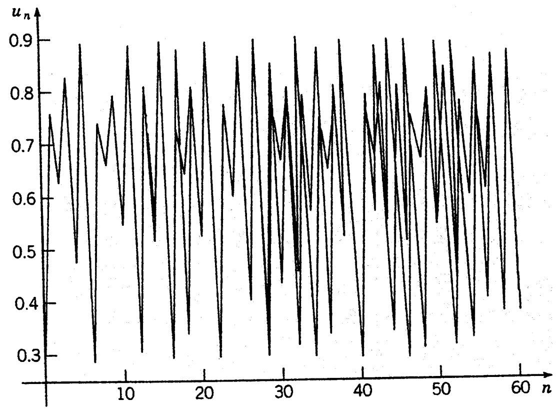


شکل ۵.۹.۲ جوابی برای $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$ به‌ازای $\rho = 3.5$ دورهٔ تناوب ۴. (الف) u_n برحسب n؛ (ب) یک چهار حلقه.

ندارد. مقدار آن بین ۰٫۳ و ۰٫۹ نوسان می‌کند، اما ساختار دقیق آن قابل پیش‌بینی نیست. برای تشریح چنین موقعیتی از واژهٔ **آشوبناک** استفاده می‌شود. یکی از ویژگیهای جوابهای آشوبناک، حساسیت بسیار زیاد آنها به شرط اولیه است. این موضوع را در شکل ۷.۹.۲ نشان داده‌ایم که در آن دو جواب معادلهٔ (۲۱) را به‌ازای $\rho = 3.65$ رسم کرده‌ایم. یک جواب مانند شکل ۶.۹.۲ است که مقدار اولیه‌اش $u_0 = 0.3$ است، در حالی که مقدار اولیهٔ جواب دیگر $u_0 = 0.305$ است. تقریباً در ۱۵ تکرار جوابها نزدیک به هم می‌مانند و تشخیص آنها از روی شکل مشکل است. پس از آن هر دو جواب در مجموعه‌ای ثابت از مقادیر سرگردان می‌شوند؛ اما نمودارشان کاملاً متفاوت است. به‌ازای nهای بزرگ‌تر از ۱۵ مسلماً نمی‌توان از یکی از جوابها برای تقریب دیگری استفاده کرد.



شکل ۶.۹.۲ جوابی برای $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$ به‌ازای $\rho = 3.65$؛ یک جواب آشوبناک.



شکل ۷.۹.۲ دو جواب $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$؛ $\rho = 3.65$ و $u_0 = 0.3$، $u_0 = 0.305$.

تنها در سالهای اخیر جوابهای آشوبناک معادلات دیفرانسیل و تفاضلی به‌طور گسترده‌ای شناخته شده‌اند. معادلهٔ (۲۰) از اولین مثالهای آشوب ریاضی بود که رابرت می[1] آن را کشف و با جزئیات فراوان در ۱۹۷۴ میلادی مطالعه کرد. او براساس تحلیل این معادله به‌عنوان مدل جمعیتی حشراتی معین این نظر را ابراز کرد که اگر نرخ رشد ρ بسیار بزرگ باشد، پیش‌بینی مؤثر درازمدت جمعیت این حشرات غیرممکن است. وجود جوابهای آشوبناک در مسئله‌های ساده، انگیزهٔ تحقیقات وسیعی در سالهای اخیر بوده است، اما هنوز سؤالات بسیاری پاسخ داده نشده است. اما جوابهای آشوبناک از آنچه که در ابتدا گمان می‌رفت مشترکات بیشتری دارند و ممکن است این بخشی از تحقیق دربارهٔ دامنهٔ وسیعی از پدیده‌ها باشد.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، معادلهٔ تفاضلی داده‌شده را برحسب مقدار اولیهٔ y_0 حل کنید. رفتار جواب را وقتی $n \to \infty$ توصیف کنید.

۱. $y_{n+1} = -0.8 y_n$

۲. $y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} y_n$

۳. $y_{n+1} = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}\, y_n$

۴. $y_{n+1} = (-1)^{n+1} y_n$

۵. $y_{n+1} = 0.5 y_n + 6$

۶. $y_{n+1} = -0.5 y_n + 6$

۷. مقدار سود مؤثر یک حساب بانکی را که به آن سودی با نرخ ۷٪ به‌طور روزانه اضافه می‌شود بیابید؛ یعنی نسبت تفاضل میزان موجودی نهایی و اولیه به موجودی اولیه را بیابید.

۸. یک سرمایه‌گذار ۱۰۰۰ دلار به حسابی واریز می‌کند که سود ماهانه‌ای با نرخ ۷٪ به آن اضافه می‌شود و ماهانه ۲۵ دلار اضافی هم به حساب واریز می‌کند. میزان موجودی حساب را پس از چهار سال بیابید.

۹. یک دانش‌آموختهٔ دانشگاه برای خرید ماشین ۸۰۰۰ دلار وام می‌گیرد. وام‌دهنده بهره‌ای با نرخ سالانهٔ ۱۲٪ طلب می‌کند. برای بازپرداخت وام در سه سال، میزان پرداخت ماهانه چقدر باید باشد؟ نتیجه را با مسئلهٔ ۹ بخش ۳.۲ مقایسه کنید.

1. Robert May

۱۰. یک خریدار خانه می‌خواهد ۱۰۰,۰۰۰ دلار وام ۳۰ ساله بگیرد. میزان پرداخت ماهانه باید چقدر باشد اگر نرخ بهره (الف) ۹٪، (ب) ۱۰٪، (ج) ۱۲٪ باشد؟

۱۱. یک خریدار خانه ۱۰۰,۰۰۰ دلار وام ۳۰ ساله با نرخ بهرهٔ ۹٪ دریافت کرده است. برای اینکه بتواند وام را در ۳۰ سال پس بدهد پرداخت ماهانه‌اش چقدر است؟ در ۱۵ سال چطور؟ میزان کلی پرداختی در کل مدت بازپرداخت در هر یک از این حالتها چقدر است؟

۱۲. اگر نرخ بهرهٔ یک وام ۳۰ سالهٔ منزل، ۱۰٪ باشد و اگر ۱۰۰۰ دلار حداکثر میزان توانایی بازپرداخت ماهانهٔ خریدار باشد، حداکثر میزان وام مسکن تحت این شرایط را تعیین کنید.

۱۳. یک خریدار خانه می‌خواهد دریافت ۹۵۰۰۰ دلار وام ۲۰ سالهٔ مسکن بگیرد. اگر ۹۰۰ دلار حداکثر میزان توانایی بازپرداخت ماهانهٔ او باشد، حداکثر میزان بهره‌ای که وام‌گیرنده توانایی پرداخت آن را دارد چقدر است؟

معادلات تفاضلی لجستیک. در مسئله‌های ۱۴ تا ۱۹ به معادلهٔ تفاضلی (۲۱)، یعنی $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$ پرداخته‌ایم.

۱۴. جزئیات تحلیل پایداری خطی جواب تعادلی $u_n = (\rho-1)/\rho$ را انجام بدهید؛ یعنی معادلهٔ تفاضلی (۲۶) متن را برای اختلال v_n به‌دست بیاورید.

۱۵. (الف) به‌ازای $\rho = 3.2$، جوابهای معادلهٔ لجستیک (۲۱) را به‌ازای چند شرط اولیه، مثلاً u_0 برابر ۰٫۲، ۰٫۴، ۰٫۶ و ۰٫۸ محاسبه یا رسم کنید. در هر یک از حالات توجه کنید که جوابها به نوسانی یکنواخت بین دو مقدار معین میل می‌کنند. این نشان می‌دهد که رفتار درازمدت جوابها مستقل از شرایط اولیه است.

(ب) محاسبات مشابهی برای مقدارهای دیگر ρ مانند ۲٫۶، ۲٫۸ و ۳٫۴ انجام بدهید و ثابت کنید ماهیت جوابها به‌ازای nهای بزرگ مستقل از شرایط اولیه است.

۱۶. در معادلهٔ (۲۱) فرض کنید $\rho > 1$.

(الف) یک نمودار پلکانی رسم کنید که به‌طور کیفی درست باشد و ثابت کنید که اگر $u_0 < 0$ آنگاه وقتی $n \to \infty$، $u_n \to -\infty$.

(ب) به همین ترتیب، مشخص کنید که اگر $u_0 > 1$، وقتی $n \to \infty$ چه اتفاقی می‌افتد.

۱۷. جوابهای معادلهٔ (۲۱) با افزایش مقدار ρ از ۳، از دنباله‌های همگرا به نوسانات تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ تغییر می‌کنند. برای مشاهدهٔ واضح‌تر این اتفاق، عملیات زیر را انجام بدهید.

(الف) جوابها را به‌ازای ρ برابر ۲٫۹، ۲٫۹۵ و ۲٫۹۹ به‌ترتیب با استفاده از شرایط اولیهٔ u_0 انتخابی خودتان در بازهٔ $(0, 1)$ محاسبه یا رسم کنید. در هر حالت تعداد تکرارهای مورد نیاز برای رسیدن «بسیار نزدیک» به جواب حدی را تخمین بزنید. از تعبیری مناسب برای معنی «بسیار نزدیک» در جملهٔ قبل استفاده کنید.

(ب) با شرط اولیه‌ای مانند حالت (الف)، به‌ترتیب به‌ازای ρ برابر ۳٫۰۱، ۳٫۰۵ و ۳٫۱ جوابها را محاسبه یا رسم کنید. در هر حالت تعداد تکرارهای مورد نیاز برای رسیدن به نوسان مانا را تخمین بزنید. همچنین دو مقدار نوسان مانا را تخمین بزنید.

۱۸. با محاسبه یا ترسیم جوابهای معادلهٔ (۲۱) به‌ازای مقادیر مختلف ρ، مقداری از ρ را که در آن جوابها از نوسان با دورهٔ تناوب ۲ به نوسانی با دورهٔ تناوب ۴ تغییر می‌یابند تخمین بزنید. به همان طریق، مقداری از ρ را که در آن جوابهای با دورهٔ تناوب ۴ به جوابهایی با دورهٔ تناوب ۸ تغییر می‌کنند تخمین بزنید.

۱۹. فرض کنید ρ_k مقداری از ρ باشد که جوابهای با دورهٔ تناوب 2^{k-1} معادلهٔ (۲۱) به جوابهایی با دورهٔ تناوب 2^k تغییر می‌کنند. پس همان‌گونه که در متن گفتیم، $\rho_1 = 3$، $\rho_2 \cong 3.449$ و $\rho_3 \cong 3.544$.

(الف) با استفاده از این مقدارهای ρ_1، ρ_2 و ρ_3 و یا آنهایی که در مسئلهٔ ۱۸ یافتید، $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_2)$ را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید $\delta_n = (\rho_n - \rho_{n-1})/(\rho_{n+1} - \rho_n)$. نشان داده شده است که وقتی $n \to \infty$، δ_n به حد δ میل می‌کند که در آن $\delta \cong 4.6692$ به عدد فیگن‌باوم[1] مشهور است. درصد تفاوت δ و δ_2ی محاسبه شده در قسمت (الف) را تعیین کنید.

(ج) فرض کنید $\delta_3 = \delta$. با استفاده از این رابطه ρ_4، مقداری از ρ را که در آن جواب با دورهٔ تناوب ۱۶ ظاهر می‌شود تخمین بزنید.

(د) با محاسبه و یا رسم جوابها نزدیک ρ_4 محاسبه شده در قسمت (ج)، سعی کنید ظهور جواب با دورهٔ تناوب ۱۶ را ردیابی کنید.

(ه) توجه کنید که

$$\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \cdots + (\rho_2 - \rho_{n-1}).$$

فرض کنید که $(\rho_3 - \rho_2) = (\rho_2 - \rho_1)\delta^{-1}$، $(\rho_4 - \rho_3) = (\rho_2 - \rho_1)\delta^{-2}$ و الی آخر. ρ_n را به‌صورت جمع هندسی بیان کنید و سپس حد ρ_n را وقتی $n \to \infty$ به‌دست بیاورید. این تخمینی از آن مقدار ρ است که به‌ازای آن آشوب در جوابهای معادلهٔ لجستیک (۲۱) اتفاق می‌افتد.

مسئله‌ها

مسئله‌های متفرقه. یکی از مشکلات حل معادلات مرتبهٔ اول وجود چند روش حل است، که هر کدام را می‌توان برای حل یک نوع معادلهٔ مشخص به‌کار برد. ممکن است زمان زیادی برای تسلط بر روشهای حل و جفت کردن آنها با معادله‌ها لازم باشد. ۳۲ مسئلهٔ اول از مسئله‌های زیر برای کسب تجربه در شناسایی روش و یا روشهای مناسب برای معادله داده شده‌اند. در بقیهٔ مسئله‌ها به انواع مشخصی از معادلات پرداخته‌ایم که با روشهای خاص حل می‌شوند.

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۳۲، معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید. اگر شرط اولیه‌ای داده شده است، جوابی را بیابید که در آن صدق می‌کند.

۱. $dy/dx = (x^3 - 2y)/x$

۲. $dy/dx = (1 + \cos x)/(2 - \sin y)$

۳. $dy/dx = (2x + y)/(3 + 3y^2 - x)$، $y(0) = 0$

۴. $dy/dx = 3 - 6x + y - 2xy$

۵. $dy/dx = -(2xy + y^2 + 1)/(x^2 + 2xy)$

۶. $x\, dy/dx + xy = 1 - y$، $y(1) = 0$

---

۱. این نتیجه برای معادلهٔ تفاضلی لجستیک را میچل فیگن باوم (۱۹۴۴م.) در اوت ۱۹۷۵ میلادی در حالی که در آزمایشگاه ملی لوس آلاموس مشغول کار بود کشف شد. او در چند هفته ثابت کرد که این مقدار حدی در خانوادهٔ بزرگی از معادلات تفاضلی که دورهٔ تناوب آنها مضاعف می‌شود ثابت است. فیگن باوم که دکترای فیزیک از M.I.T دارد در حال حاضر در دانشگاه راکفلر کار می‌کند.

۷. $dy/dx = (۵x^۴ + ۱)/y(۲ + ۳y)$

۸. $x\,dy/dx + ۲y = \sin x/x$، $y(۲) = ۱$

۹. $dy/dx = -(۲xy + ۲x)/(x^۲ + ۲y)$

۱۰. $(x^۲y + xy - y)dx + (x^۲y - ۲x^۲)dy = ۰$

۱۱. $(x^۳ + y)dx + (x + e^y)dy = ۰$

۱۲. $dy/dx + y = ۱/(۱ + e^x)$

۱۳. $dy/dx = ۱ + ۲x + y^۲ + ۲xy^۲$

۱۴. $(x + y)dx + (x + ۲y)dy = ۰$، $y(۲) = ۳$

۱۵. $(e^x + ۱)dy/dx = y - ye^x$

۱۶. $dy/dx = (e^{-x}\cos y - e^{۲y}\cos x)/(-e^{-x}\sin y + ۲e^{۲y}\sin x)$

۱۷. $dy/dx + ۲y = e^{-x^۲-۲x}$، $y(۰) = ۳$

۱۸. $dy/dx = e^{۲x} + ۳y$

۱۹. $dy/dx = (۳x^۲ - ۲y - y^۳)/(۲x + ۳xy^۲)$

۲۰. $y' = e^{x+y}$

۲۱. $dy/dx + (۲y^۲ + ۶xy - ۲x)/(۳x^۲ + ۴xy + ۳y^۲) = ۰$

۲۲. $dy/dx = (x^۲ - ۱)/(y^۲ + ۱)$، $y(-۱) = ۱$

۲۳. $t\,dy/dt + (t + ۱)y = e^{۲t}$

۲۴. $۲\sin y \sin x \cos x\,dx + \cos y \sin^۲ x\,dy = ۰$

۲۵. $(۲x/y - y/(x^۲ + y^۲))dx + (x/(x^۲ + y^۲) - x^۲/y^۲)dy = ۰$

۲۶. $xy' = y + xe^{y/x}$

۲۷. $dy/dx = x/(x^۲y + y^۳)$ راهنمایی: قرار دهید $u = x^۲$.

۲۸. $(۲y + ۳x)dx = -x\,dy$

۲۹. $dy/dx = (x + y)/(x - y)$

۳۰. $(۳y^۲ + ۲xy)dx - (۲xy + x^۲)dy = ۰$

۳۱. $dy/dx = -(۳x^۲y + y^۲)/(۲x^۳ + ۳xy), \quad y(۱) = -۲$

۳۲. $xy' + y - y^۲e^{۲x} = ۰, \quad y(۱) = ۲$

۳۳. **معادلات ریکاتی.** معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = q_۱(t) + q_۲(t)y + q_۳(t)y^۲$$

به معادلهٔ ریکاتی[۱] مشهور است. فرض کنید یک جواب خاص این معادله معلوم باشد. جوابی عمومی‌تر شامل یک ثابت دلخواه را می‌توان با جایگزینی

$$y = y_۱(t) + \frac{۱}{v(t)}$$

۱. معادلات ریکاتی منتسب به ژاکوپو فرانچسکو ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴م) است. او نجیب‌زاده‌ای ونیزی بود که منصب دانشگاهی در ایتالیا، اطریش و روسیه را قبول نکرد تا مطالعات ریاضی را به‌طور خصوصی در منزلش دنبال کند. او این معادله‌ها را به‌طور وسیعی مطالعه کرد؛ اما اویلر در ۱۷۶۰ میلادی نتیجهٔ بیان‌شده در این مسئله را کشف کرد.

به‌دست آورد. ثابت کنید $v(t)$ در معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$\frac{dv}{dt} = -(q_۲ + ۲q_۳y_۱)v - q_۳$$

صدق می‌کند. توجه کنید که $v(t)$ شامل یک ثابت دلخواه است.

۳۴. با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۳ و جواب خاص داده‌شده، هر یک از معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

الف) $y' = ۱ + t^۲ - ۲ty + y^۲$، $y_۱(t) = t$

ب) $y' = -۱/t^۲ - y/t + y^۲$، $y_۱(t) = ۱/t$

ج) $dy/dt = (۲\cos^۲ t - \sin^۲ t + y^۲)/۲\cos t$، $y_۱(t) = \sin t$

۳۵. انتشار یک عمل در جمعیتی بزرگ (به‌عنوان مثال، روشن کردن چراغ جلو در غروب آفتاب به‌وسیلهٔ رانندها) بعضاً به شرایط خارجی (تاریک شدن هوا) و با تمایل به تقلید از دیگرانی که این عمل را انجام داده‌اند بستگی دارد. در این حالت نسبت $y(t)$ را از مردمی که این عمل را انجام داده‌اند می‌توان با معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = (۱ - y)[x(t) + by] \qquad \text{(i)}$$

مدل کرد[۱] که در آن $x(t)$ میزان تأثیر خارجی را اندازه‌گیری می‌کند و b ضریب تقلید است.

الف) توجه کنید که معادلهٔ (i) معادلهٔ ریکاتی است و $y_۱(t) = ۱$ جواب آن است. با استفاده از تبدیل مسئلهٔ ۳۳، معادلهٔ خطی‌ای را که $v(t)$ در آن صدق می‌کند بیابید.

ب) اگر $x(t) = at$، $v(t)$ را بیابید که در آن a ثابت است. جواب را به‌صورت انتگرالی باقی بگذارید.

برخی معادلات خاص مرتبهٔ دوم. معادلات مرتبهٔ دوم شامل مشتق مرتبهٔ دوم یک تابع مجهول به‌فرم کلی $y'' = f(t, y, y')$ هستند. معمولاً چنین معادله‌هایی را نمی‌توان با روشهای ارائه‌شده برای معادلات مرتبهٔ اول حل کرد. اما دو نوع از معادله‌های مرتبهٔ دوم را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله‌های مرتبهٔ اول تبدیل کرد. معادلهٔ حاصله را گاهی می‌توان با روشهای ارائه شده در این فصل حل کرد. در مسئله‌های ۳۶ تا ۵۱ به این نوع معادله‌ها می‌پردازیم.

معادلات در غیبت متغیر وابسته. برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی به‌صورت $y'' = f(t, y')$، جایگزینی $v = y'$ و $v' = y''$ منجر به معادلهٔ مرتبهٔ اولی به‌صورت $v' = f(t, v)$ می‌شود. اگر این معادله را بتوان نسبت به v حل کرد، y را می‌توان با انتگرال‌گیری $dy/dt = v$ به‌دست آورد. توجه کنید که یک ثابت دلخواه هنگام حل نسبت به v و ثابت دوم هنگام انتگرال‌گیری نسبت به y به‌دست می‌آید. در هر یک از مسئله‌های ۳۶ تا ۴۱، از این تغییر متغیر برای حل معادلهٔ داده‌شده استفاده کنید.

۳۶. $t^۲y'' + ۲ty' - ۱ = ۰$، $t > ۰$

۳۷. $ty'' + y' = ۱$، $t > ۰$

۳۸. $y'' + t(y')^۲ = ۰$

۳۹. $۲t^۲y'' + (y')^۳ = ۲ty'$، $t > ۰$

۴۰. $y'' + y' = e^{-t}$

۴۱. $t^۲y'' = (y')^۲$، $t > ۰$

۱. نگاه کنید به

Anatol Rapoport, "Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts," *Bulletin of Mathematical Biophysics 14* (1952), pp. 159-169, and John Z. Hearon, "Note on the Theory of Mass Behavior," *Bulletin of Mathematical Biophysics 17* (1955), pp. 7-13.

معادلات در غیبت متغیر مستقل. معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به‌صورت $y'' = f(y, y')$ را در نظر بگیرید که در آنها متغیر مستقل t به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود. اگر قرار بدهیم $v = y'$، نتیجه می‌شود $dv/dt = f(y, v)$. چون طرف راست این معادله تنها به y و v (به‌جای t و v) بستگی دارد، این معادله شامل متغیرهای زیادی است. اما اگر به y به‌عنوان متغیر مستقل نگاه کنیم، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، $dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v(dv/dy)$. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل اولیه را می‌توان به‌صورت $v(dv/dy) = f(y, v)$ نوشت. به‌شرط اینکه بتوان این معادله را حل کرد، v را به‌عنوان تابعی از y به‌دست می‌آوریم. یک رابطه بین y و t از حل $dy/dt = v(y)$ که معادله‌ای جداشدنی است به‌دست می‌آید. مجدداً در نتیجهٔ نهایی دو ثابت دلخواه موجود است. در هر یک از مسئله‌های ۴۲ تا ۴۷، با استفاده از این روش معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۴۲. $yy'' + (y')^2 = 0$

۴۳. $y'' + y = 0$

۴۴. $y'' + y(y')^3 = 0$

۴۵. $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

۴۶. $yy'' - (y')^3 = 0$

۴۷. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

راهنمایی: در مسئلهٔ ۴۷ معادله تبدیل‌یافتهٔ معادلهٔ برنولی است. مسئلهٔ ۲۷ در بخش ۴.۲ را ببینید.

در هر یک از مسئله‌های ۴۸ تا ۵۱، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را با روشهای مسئله‌های ۳۶ تا ۴۷ حل کنید.

۴۸. $yy'' = 2$، $y(0) = 1$، $y'(0) = 2$

۴۹. $y'' - 3y^2 = 0$، $y(0) = 2$، $y'(0) = 4$

۵۰. $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0$، $y(1) = 2$، $y'(1) = -1$

۵۱. $y'y'' - t = 0$، $y(1) = 2$، $y'(1) = 1$

مراجع

دو کتاب ذکرشده در بخش ۵.۲ عبارت‌اند از

Bailey, N. T. J., *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications* (2nd ed.) (New York: Hafner Press, 1975).

Clark, Colin W., *Mathematical Bioeconomics* (2nd ed.) (New York: Wiley-Interscience, 1990).

یک مقدمهٔ خوب برای دینامیک جمعیت در حالت کلی عبارت است از

Frauenthal, J. C., *Introduction to Population Modeling* (Boston: Birkhauser, 1980).

یک بحث کامل‌تر دربارهٔ اثبات قضیهٔ وجود و یکتایی را می‌توان در بسیاری از کتابهای پیشرفتهٔ معادلات دیفرانسیل یافت. دو تا از این کتابها که به‌طور معقولی در دسترس خوانندگان مقدماتی‌تر است عبارت‌اند از

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Brauer, F., and Nohel, J., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

یک پیوست باارزش از روشهای حل معادلات دیفرانسیل عبارت است از

Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations* (3rd ed.) (San Diego: Academic Press, 1998).

برای بحث و مثالهای بیشتر دربارهٔ پدیده‌های غیرخطی شامل انشعابات و آشوب،

Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994)

را ببینید. یک مرجع کلی دربارهٔ معادلات تفاضلی عبارت است از

Mickens, R. E., *Difference Equations, Theory and Applications* (2nd ed.) (New York: Van Nostrand Reinhold, 1990).

یک بررسی مقدماتی از جوابهای آشوبناک معادلات تفاضلی در

Devaney, R. L., *Chaos, Fractals, and Dynamics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990)

یافت می‌شود.